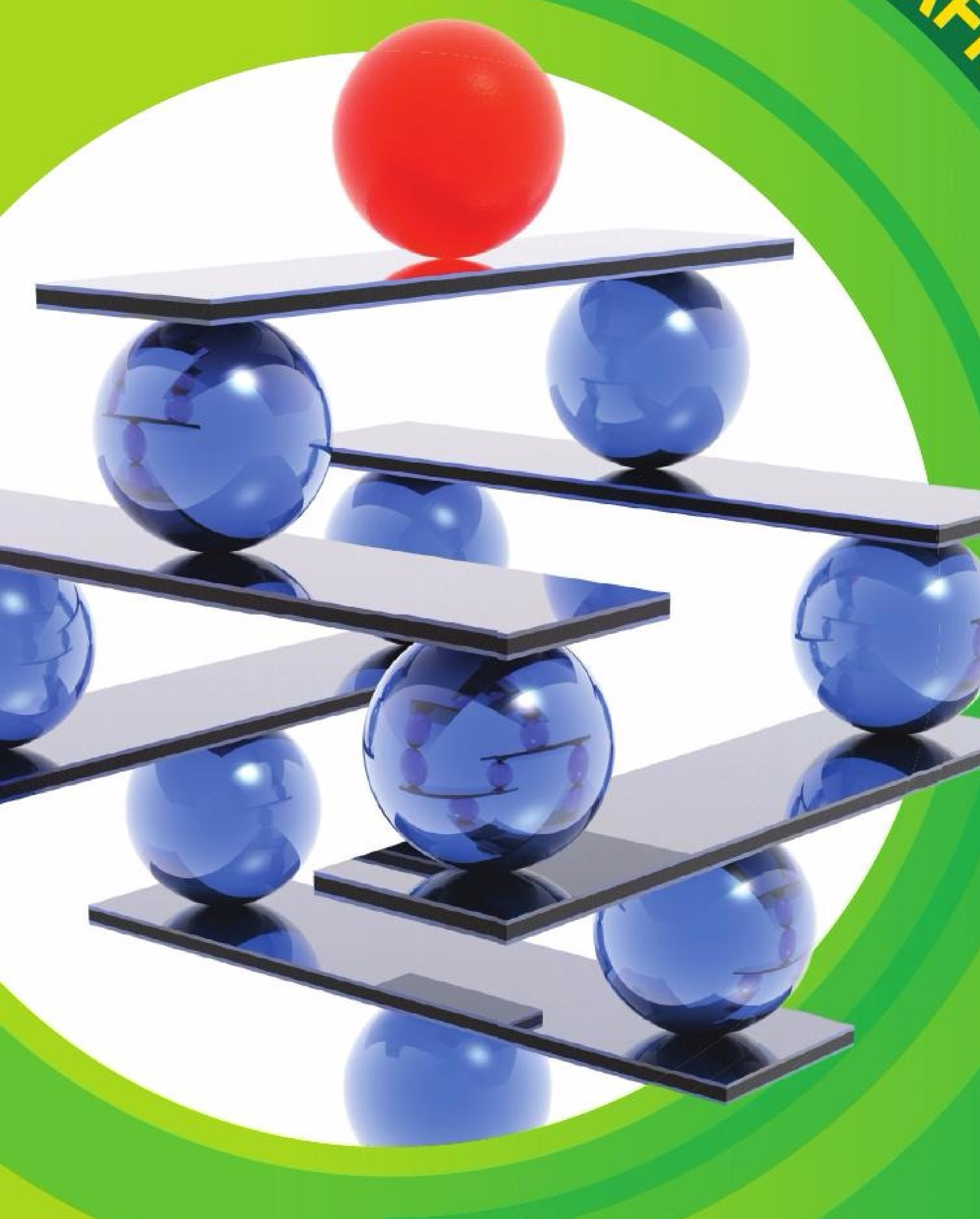
IRACEMA e DULCE

MATEMÁTICA
IDEIAS E DESAFIOS



COMPONENTE CURRICULAR
MATEMÁTICA
7º ANO

MANUAL DO PROFESSOR

7

Editora Saraiva

ISBN 978-85-02-62818-2

9 788502 628182

COMPONENTE CURRICULAR
MATEMÁTICA
7º ANO

MATEMÁTICA
IDEIAS E DESAFIOS

Iracema Mori
Bacharel e licenciada em Matemática pela USP.
Professora e assessora de Matemática.

Dulce Satiko Onaga
Licenciada em Matemática pela USP.
Professora e assessora de Matemática.
Membro do Centro de Educação Matemática.

Manual do Professor

7

18ª edição – 2015
São Paulo

Editora Saraiva

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Mori, Iracema
Matemática : ideias e desafios, 7º ano /
Iracema Mori, Dulce Satiko Onaga. -- 18. ed. --
São Paulo : Saraiva, 2015.

Suplementado pelo manual do professor.
Bibliografia
ISBN 978-85-02-62817-5 (aluno)
ISBN 978-85-02-62818-2 (professor)

1. Matemática (Ensino fundamental) I. Onaga,
Dulce Satiko. II. Título.

15-03937 CDD-372.7

ISBN 978-85-02-63380-3
(PDF Professor)

ISBN 978-85-02-63379-7
(PDF Aluno)

Índice para catálogo sistemático:
1. Matemática : Ensino fundamental 372.7

Gerente editorial	M. Esther Nejm
Editor responsável	Viviane de L. Carpegiani Tarraf
Editores	Julio Cesar Augustus de Paula Santos, Marcela Maris, Maria Ângela de Camargo
Assistentes editoriais	Eduardo Oliveira Guaitoli, Rani Oliveira e Silva
Coordenador de revisão	Camila Christi Gazzani
Revisores	Ana Marson, Kátia Lopes Godoi, Maíra Cammarano, Maura Loria, Raquel Alves Taveira
Coordenador de iconografia	Cristina Akisino
Pesquisa iconográfica	Cristiano Rogério Vieira
Licenciamento de textos	Érica Brambila, Carolina Carmini
Gerente de artes	Ricardo Borges
Coordenador de artes	Aderson Assis Oliveira
Design	Josiane Batista de Oliveira
Capa	Sergio Cândido com foto de Thinkstock/Getty Images
Diagramação	Lisandro Paim Cardoso, Tarumã Editoração Gráfica
Ilustrações	BIS, Célia Kofuji, Francisco Vilachã, Hagaquezart Estúdio, Hélio Senatore, Lettera Studio, Nik Neves, Vagner de Faria, Zapt Editorial
Cartografia	DaCosta Mapas, Mario Yoshida, Sonia Vaz
Assistentes de produção de arte	Jacqueline Ortolan
Tratamento de imagens	Emerson de Lima
Produtor gráfico	Robson Cacau Alves
Impressão e acabamento	

077.229.018.001

Editora Saraiva

SAC 0800-0117875
De 2ª a 6ª, das 8h30 às 19h30
www.editorasaraiva.com.br/contato

Rua Henrique Schaumann, 270 – Cerqueira César – São Paulo/SP – 05413-909

Caro estudante,

"Como aprender Matemática?"

Essa é uma pergunta que você já deve ter feito a muitas pessoas e também a si mesmo.

Sabemos que não existe um caminho único ou melhor para o aprendizado. Para quase tudo que se aprende ao longo da vida é preciso dedicação e persistência. E isso vale também para a Matemática.

Aprender é vivenciar e adquirir experiências, é enfrentar desafios, descobrir coisas novas, buscar conhecimento, querer. Esta coleção se propõe a auxiliá-lo para que seja bem-sucedido nesse aprendizado.

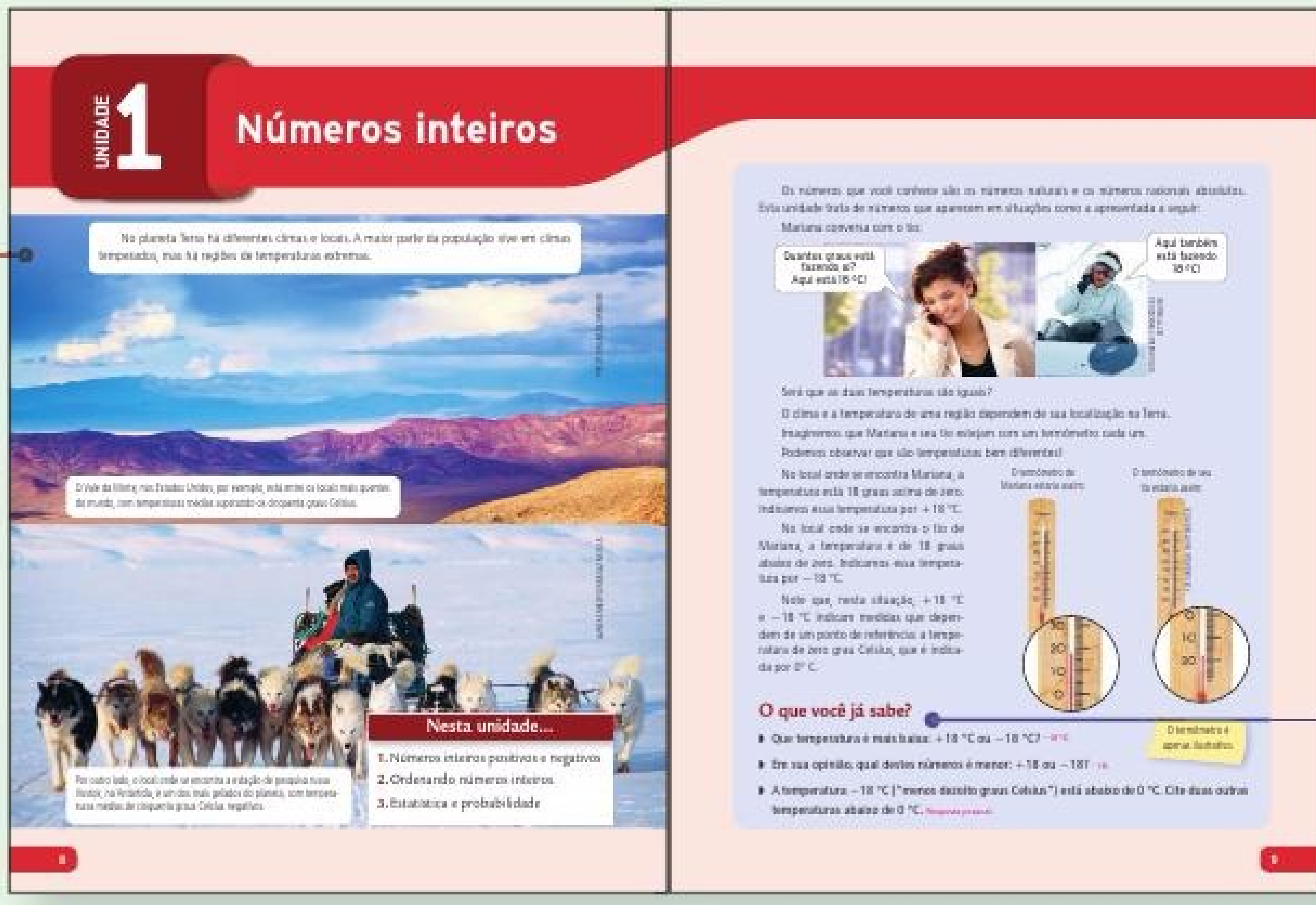
Você é nosso convidado especial nessa tarefa, que esperamos que seja prazerosa. Nesta coleção, algumas abordagens foram feitas por meio da História da Matemática e outras, a partir de situações-problema do cotidiano ou da observação de fenômenos que ocorrem na natureza. Você notará também que a Matemática é uma ciência dinâmica e em constante evolução.

Diante dos desafios que esta coleção lhe propõe, você será instigado a resolvê-los e a desenvolver ideias e conceitos, ampliando seus conhecimentos de maneira estimulante e participativa. Além disso, terá a oportunidade de explorar as conexões da Matemática com a realidade e analisar aplicações em outras áreas do conhecimento.

Nosso esforço conjunto envolvendo autores, professores e alunos terá valido a pena se você desempenhar com perseverança o papel que lhe cabe na construção de seu próprio conhecimento. É isso que lhe proporcionará segurança no aprendizado da Matemática.

As autoras

Conheça seu livro



O que você já sabe?

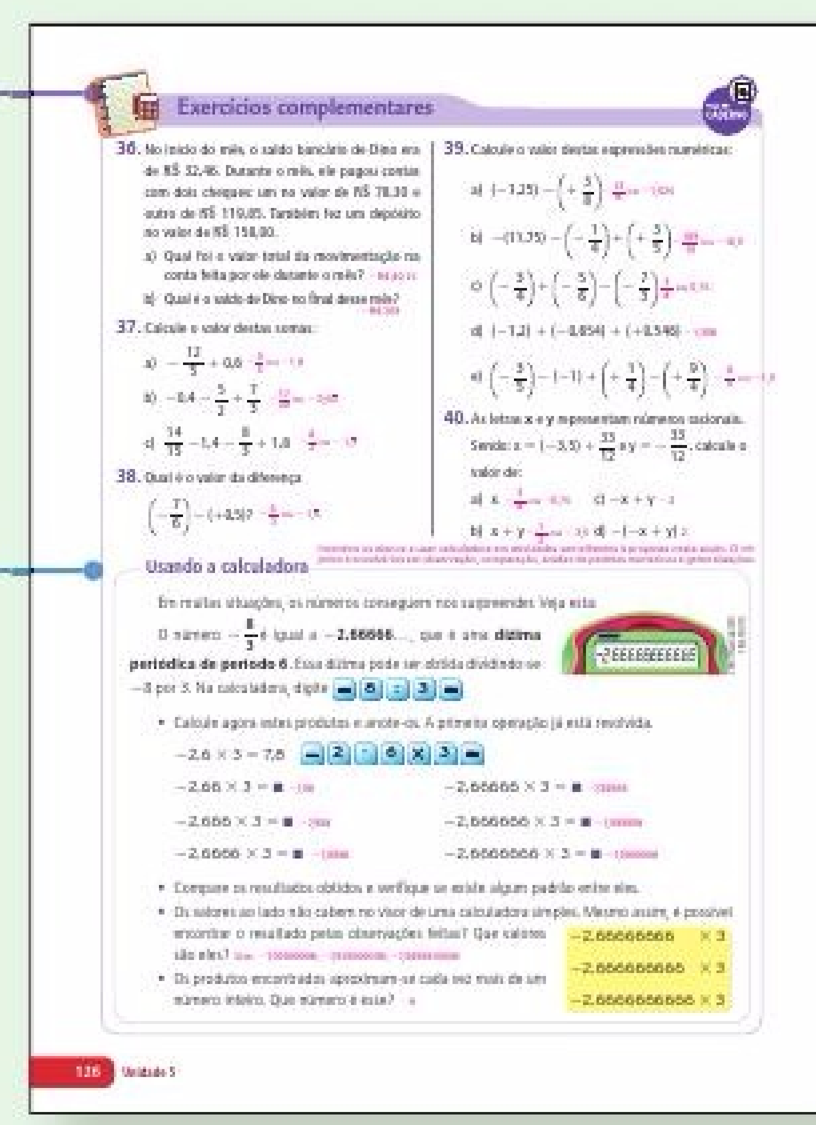
Apresenta questões que propiciam o resgate de conhecimentos prévios a respeito dos conteúdos que serão tratados na unidade.

Abertura da unidade

Imagens e textos introduzem os assuntos da unidade.

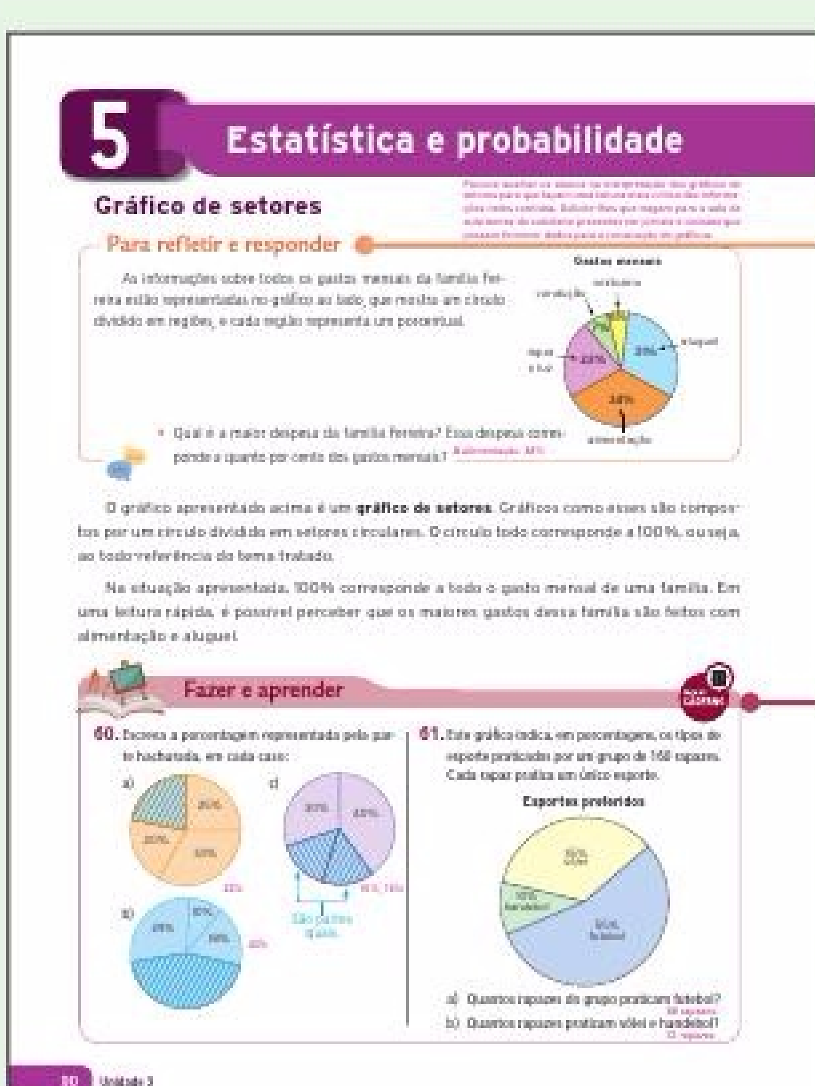
Exercícios complementares

Essa seção contém atividades e problemas que ampliam o estudo dos temas explorados. Poderá ser feita em sala de aula ou em casa, individualmente ou em grupo.



Usando a calculadora

A calculadora é utilizada como ferramenta de apoio para a resolução de atividades que envolvem problemas significativos.



Para refletir e responder

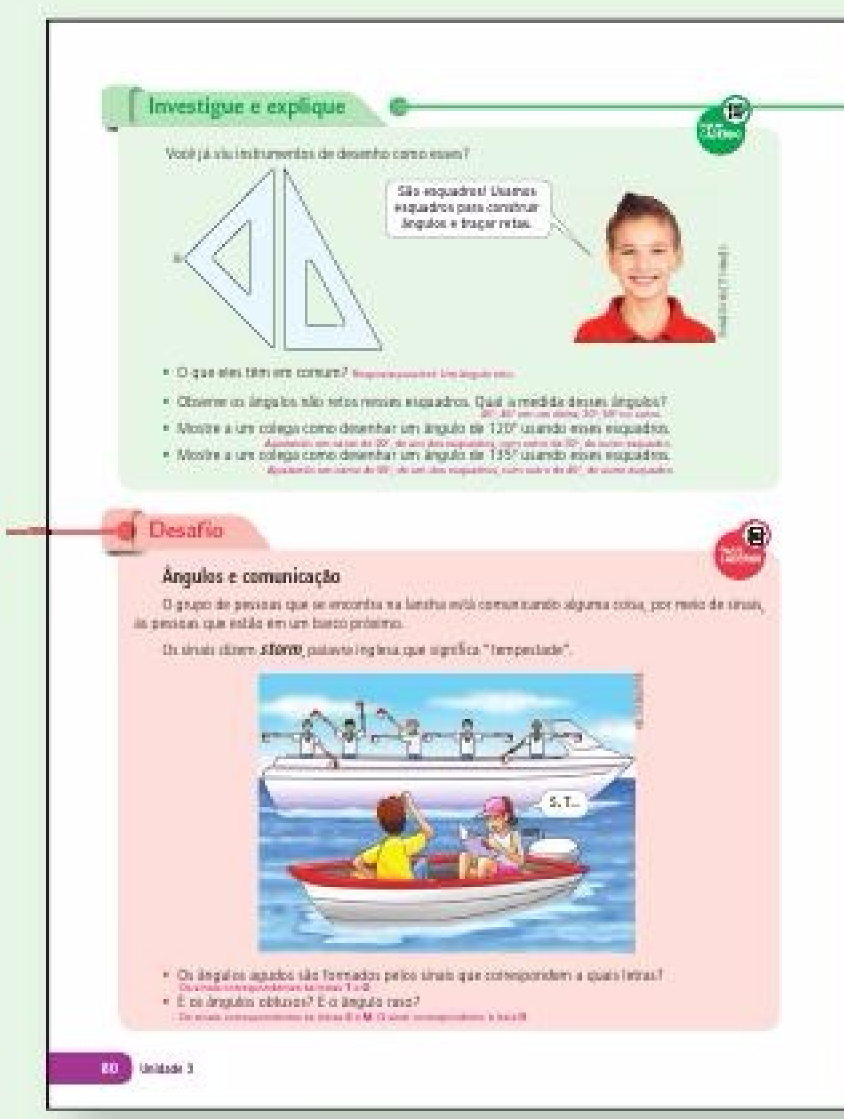
Os conceitos matemáticos são abordados em situações-problema com temas do dia a dia e que servem de partida para o desenvolvimento dos conteúdos.

Fazer e aprender

Nessa seção, são propostos exercícios de fixação e de aplicação da teoria estudada, apresentados em ordem crescente de dificuldade.

Troquem ideias e resolvam

Essa seção aparece intercalada ao desenvolvimento dos conteúdos. Nela são propostas atividades de caráter dinâmico e de socialização, pois possibilitam uma discussão em grupo e a troca de conhecimentos e descobertas entre os alunos.



Investigue e explique

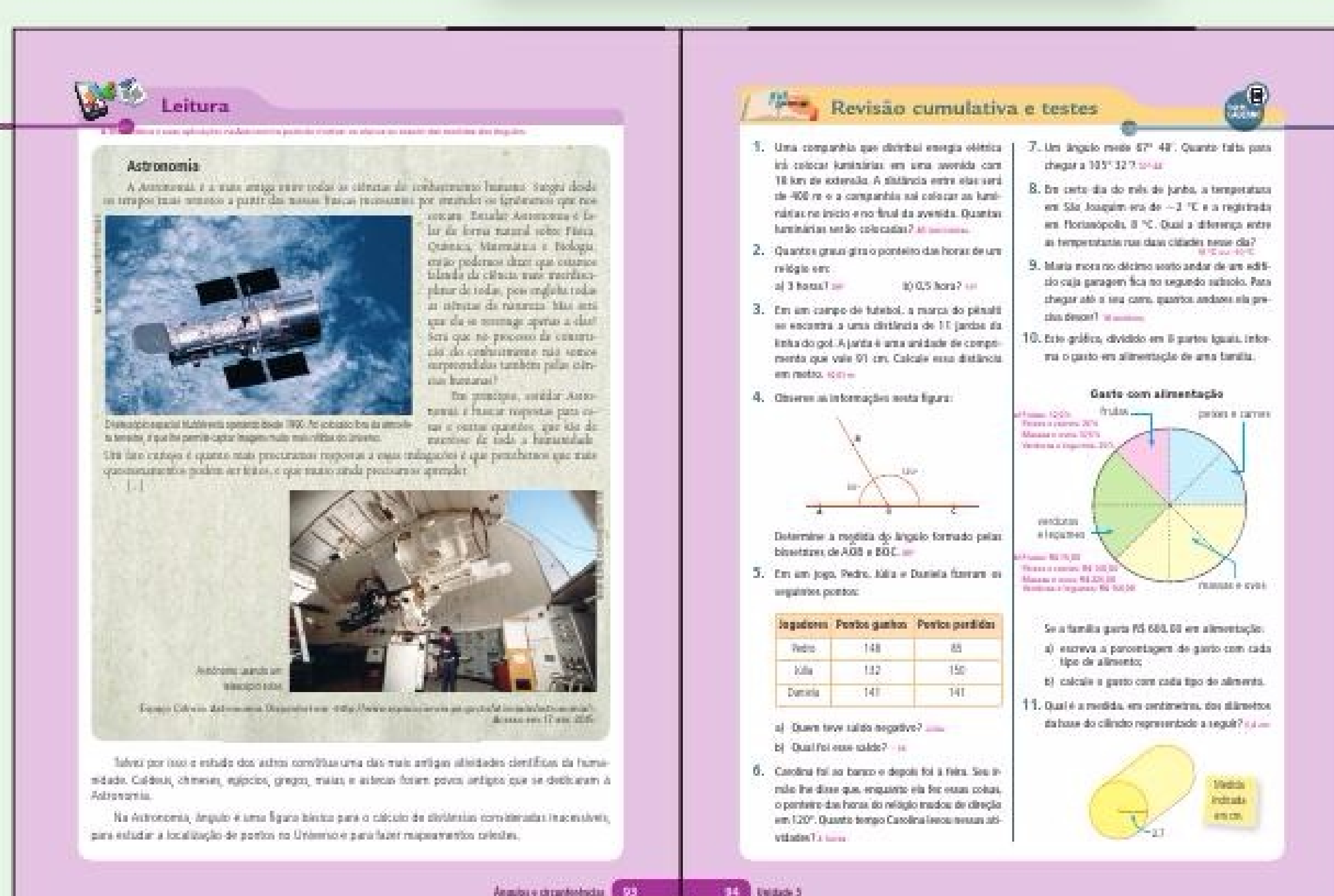
O principal objetivo dessa seção é explorar situações de natureza investigativa e abrir espaço para a formulação de conjecturas a respeito do tema que se está investigando.

Desafio

Nessa seção você encontra atividades de cálculo mental e estimativas, problemas não convencionais desafiadores, brincadeiras e jogos.

Leitura

Assuntos de diferentes áreas do conhecimento, temas importantes para a formação cidadã e informações históricas da Matemática são tratados nas leituras disponíveis ao final das unidades.



Revisão cumulativa e testes

Ao final de todas as unidades, atividades são propostas como uma oportunidade de autoavaliação da aprendizagem desenvolvida até o momento.

Sumário

UNIDADE 6 Equações

UNIDADE 7 Aprendendo mais sobre ângulos

UNIDADE 8 Sistema de equações

UNIDADE 9 Razões e proporções

UNIDADE 10 Grandezas proporcionais

UNIDADE 11 Matemática do comércio e das finanças

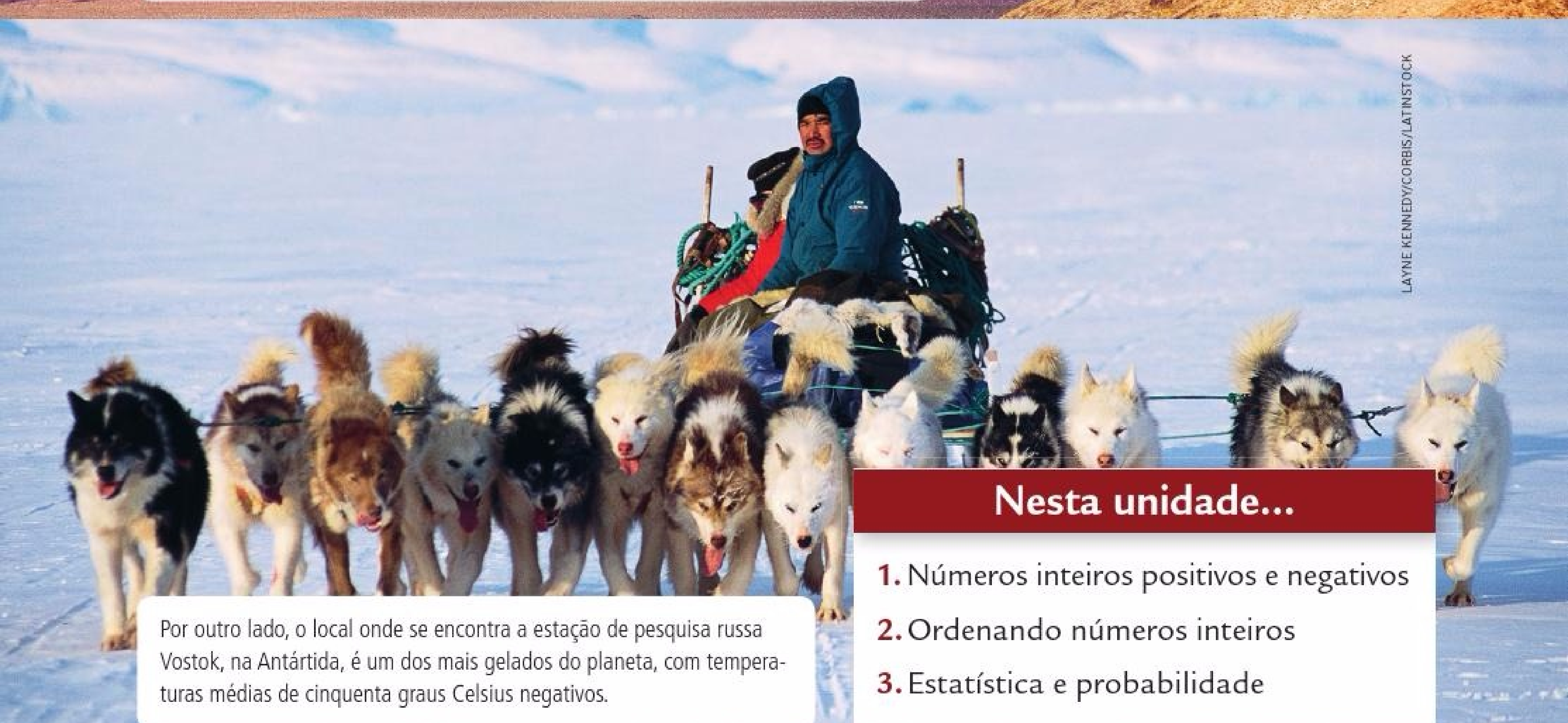
UNIDADE 1

Números inteiros

No planeta Terra há diferentes climas e locais. A maior parte da população vive em climas temperados, mas há regiões de temperaturas extremas.

PRITZ/F1 ONLINE/GLOW IMAGES

O Vale da Morte, nos Estados Unidos, por exemplo, está entre os locais mais quentes do mundo, com temperaturas médias superando os cinquenta graus Celsius.



LAYNE KENNEDY/CORBIS/LATINSTOCK

Por outro lado, o local onde se encontra a estação de pesquisa russa Vostok, na Antártida, é um dos mais gelados do planeta, com temperaturas médias de cinquenta graus Celsius negativos.

Nesta unidade...

1. Números inteiros positivos e negativos
2. Ordenando números inteiros
3. Estatística e probabilidade

Os números que você conhece são os números naturais e os números racionais absolutos. Esta unidade trata de números que aparecem em situações como a apresentada a seguir:

Mariana conversa com o tio:

FOTOGRAFIAS: THINKSTOCK/ GETTY IMAGES

Será que as duas temperaturas são iguais?

O clima e a temperatura de uma região dependem de sua localização na Terra.

Imaginemos que Mariana e seu tio estejam com um termômetro cada um.

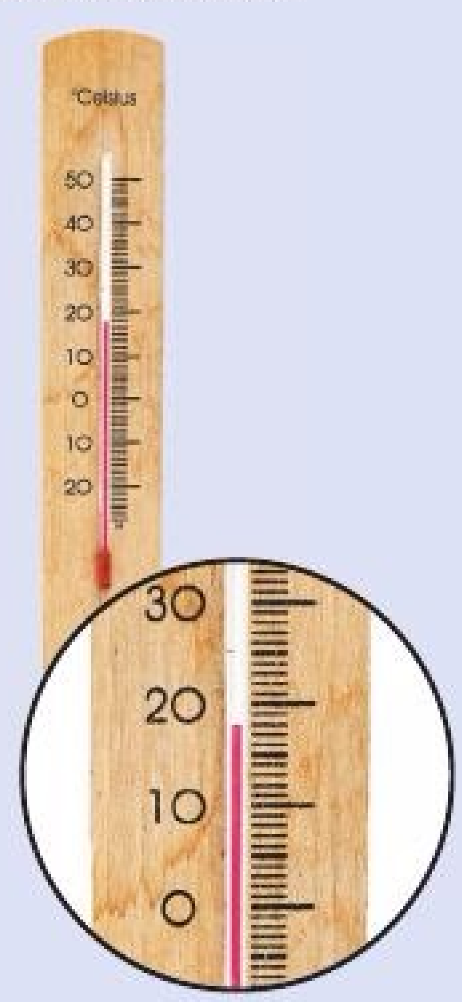
Podemos observar que são temperaturas bem diferentes!

No local onde se encontra Mariana, a temperatura está 18 graus acima de zero. Indicamos essa temperatura por +18 °C.

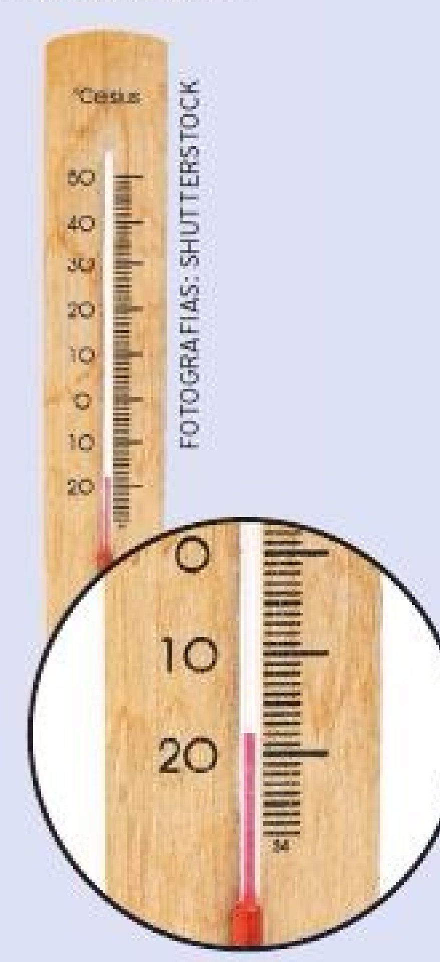
No local onde se encontra o tio de Mariana, a temperatura é de 18 graus abaixo de zero. Indicamos essa temperatura por −18 °C.

Note que, nesta situação, +18 °C e −18 °C indicam medidas que dependem de um ponto de referência: a temperatura de zero grau Celsius, que é indicada por 0° C.

O termômetro de Mariana estaria assim:



O termômetro de seu tio estaria assim:



FOTOGRAFIAS: SHUTTERSTOCK

O termômetro é apenas ilustrativo.

O que você já sabe?

- Que temperatura é mais baixa: +18 °C ou −18 °C? −18 °C.
- Em sua opinião, qual destes números é menor: +18 ou −18? −18.
- A temperatura −18 °C ("menos dezoito graus Celsius") está abaixo de 0 °C. Cite duas outras temperaturas abaixo de 0 °C. Resposta pessoal.

1 Números inteiros positivos e negativos

A ideia de números menores que o zero

Para refletir e responder

Quem guarda as economias de João é o seu avô.

Dois dias depois...

HÉLIO SENATORE

- O que significa a anotação —R$ 12,00?
João ficou devendo R$ 12,00.

O avô de João usou a linguagem bancária para indicar que ele tem um saldo negativo de R$ 12,00.

Saldo negativo de R$ 12,00 ——— —R$ 12,00

O número —12 não é um número natural. É um **número negativo**.

Nesta situação, —R$ 12,00 indica uma quantia que depende de um ponto de referência: o saldo de zero real.

Outro exemplo:

O monte Everest fica no Nepal (Ásia) e o seu pico mais alto está 8 850 metros acima do nível do mar. É o ponto mais alto da Terra.

A fossa marítima de Atacama, localizada no oceano Pacífico, na costa chilena, fica a —8 100 metros de altitude.

As altitudes terrestres são expressas tendo como referência o nível do mar, ou seja, o nível do mar corresponde à **altitude zero metro**. Assim, —8 100 metros de altitude correspondem a 8 100 metros abaixo do nível do mar.

GLOW IMAGES

Monte Everest, no Himalaia.

8 850 metros acima do nível do mar ——— +8 850 m

8 100 metros abaixo do nível do mar ——— —8 100 m

O número **+ 8 850** é um número positivo e o número **— 8 100**, um número negativo.

Certifique-se de que os alunos sabem diferenciar altura de altitude. Procure explorar outras situações, como os pontos mais altos da América do Sul, da Terra e outros que sejam do interesse deles. Veja o texto e as atividades 4, 5, e 9.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

1. Um mergulhador disse: "Hoje de manhã atingi −12 metros". Qual é o ponto de referência usado por ele? O nível do mar.

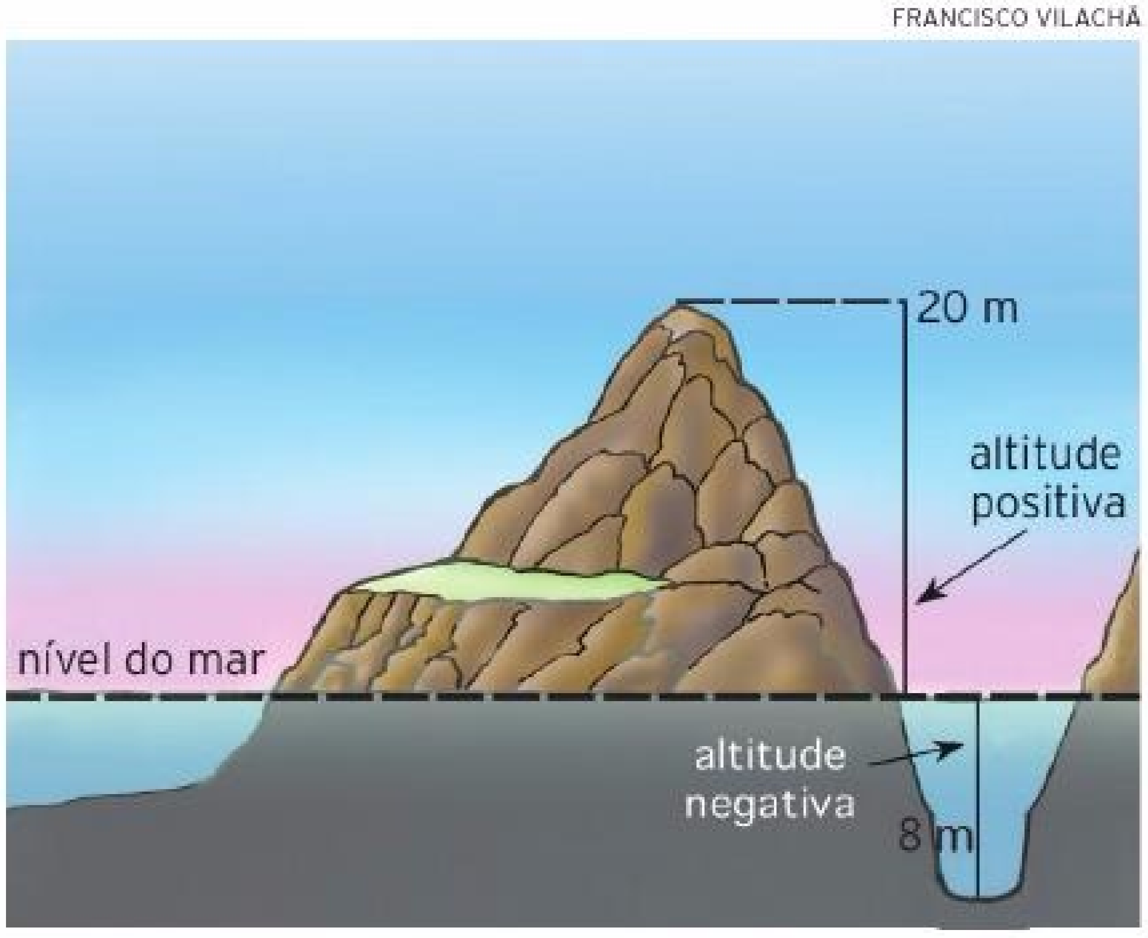
2. A cidade de Santos é uma cidade praiana, localizada no litoral paulista. Em que altitude ela está situada? Altitude zero metro.

3. No extrato bancário mensal de Antônio apareceu este saldo: −R$ 148,00. O que isso significa? Significa que Antônio deve R$ 148,00 ao banco.

4. O pico das Agulhas Negras, situado na serra do Itatiaia (MG/RJ), é um dos pontos mais altos do Brasil. Esse pico tem aproximadamente +2 792 m. O que significa a expressão **+2 792 m?** Significa que esse ponto está a aproximadamente 2 792 m acima do nível do mar.

5. Represente as altitudes a seguir usando números positivos ou negativos e considerando o nível do mar como altitude zero metro.

FRANCISCO VILACHÃ



a) 20 m abaixo do nível do mar. −20 m.

b) 50 m abaixo do nível do mar. −50 m.

c) 40 m acima do nível do mar. +40 m.

6. Represente os números envolvidos nestas situações, usando números positivos ou negativos.

a) Uma retirada de R$ 360,00 de uma conta bancária. −360,00

b) Um crédito de R$ 457,00. +457,00

c) Um depósito de R$ 2 385,00. +2 385,00

d) Um saldo devedor de R$ 658,00. −658,00

7. Bia estava no sexto andar e desceu 8 andares. Represente o número do andar em que ela parou, usando números inteiros positivos ou negativos. −2

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

8. Para cada situação descrita, escolha uma das temperaturas apresentadas nos quadros:

−15 °C −21 °C 0 °C +41 °C +100 °C

a) uma pessoa com febre; +41 °C.

b) uma referência para −20 °C; 0 °C.

c) um dia em que está nevando; −15 °C.

d) água em ebulição; +100 °C.

e) em um local, a temperatura que estava a −13 °C caiu 8 °C. −21 °C.

9. Descubra em que altitude se encontra a cidade onde você mora. Indique essa altitude usando um número positivo ou negativo. Resposta pessoal.

10. Uma das temperaturas mais baixas já registradas no polo Sul ocorreu em agosto de 1983: aproximadamente 89 °C abaixo de zero. Indique essa temperatura usando um número positivo ou negativo. −89 °C.

11. O ponto mais alto do Brasil é o pico da Neblina, com 2 994 m de altitude. Indique essa altitude usando um número positivo ou negativo. +2 994 m.

12. Um mergulhador saltou de um ponto situado a 6 m de altitude e desceu 20 m a partir do ponto inicial.

a) Use um número positivo ou negativo para indicar a posição onde ele está em relação ao nível do mar. −14 m.

b) Do ponto onde estava, no item a, ele desceu outros 5 m. A que posição chegou, em relação ao nível do mar? −19 m.

A subtração em ℕ e os números inteiros negativos

Para refletir e responder

Paulo e Flávia brincam com dois dados: um vermelho e outro amarelo.

Com o dado vermelho, eles ganham pontos e, com o amarelo, perdem pontos. Em cada rodada jogam os dois dados, juntam os pontos das faces de cima e obtêm o saldo de pontos da rodada. Observe os pontos de Paulo e Flávia nesta rodada.

Paulo

Flávia

- Quantos pontos Paulo marcou em cada dado? E Flávia? Qual é o saldo de pontos de cada um nessa rodada?

Paulo: 5 pontos no dado vermelho e 2 pontos no dado amarelo; 3 pontos positivos ou +3.
Flávia: 4 pontos no dado vermelho e 6 pontos no dado amarelo; 2 pontos negativos ou −2.

Com o dado vermelho, Paulo ganhou 5 pontos e, com o amarelo, perdeu 2 pontos.

Paulo obteve 5 − 2, ou seja, 3 pontos ganhos!

Veja o que aconteceu com Flávia.

Com o dado vermelho, Flávia ganhou 4 pontos e, com o amarelo, perdeu 6 pontos. O saldo de pontos de Flávia é calculado pela subtração **4 − 6**.

Como calcular essa diferença?

pontos ganhos —— **4**
pontos perdidos —— **6**
> **4 − 6 = ?**

Se procurarmos por um número natural que seja o resultado de **4 − 6**, verificaremos que ele **não existe**. Veja:

- Se Flávia tivesse perdido 4 pontos —— **4 − 4 = 0** —— Saldo: 0 (zero) ponto.
- Flávia perdeu 6 pontos, ou seja, perdeu 2 pontos a mais do que 4. Ela tem 2 pontos perdidos —— **−2**.
- Flávia está com **2 pontos perdidos** em relação a **0 (zero) ponto**.

Com a criação dos números negativos, podemos escrever:

$$4 - 6 = -2$$

Nesse momento, os alunos ainda não realizam operações com números inteiros. Certifique-se de que eles resolvem os problemas usando a contagem e sua vivência em jogos e brincadeiras.

FOTOGRAFIAS: THINKSTOCK/GETTY IMAGES

O conjunto dos números inteiros

Para que cálculos como **4 − 6** possam ser representados por números, foram criados os **números inteiros negativos** e os **números inteiros positivos**.

- números inteiros positivos: +1, +2, +3, +4, ..., +250, ...
- números inteiros negativos: −1, −2, −3, ..., −80, −81, ...

Reunindo os **números inteiros positivos**, os **números inteiros negativos** e o **zero**, formamos o **conjunto dos números inteiros**.

O zero não é positivo nem negativo.

Um símbolo usado para representar o conjunto dos números inteiros é a letra $\mathbb{Z}$.

$$\mathbb{Z} = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, ...\}$$

Podemos indicar os números inteiros positivos sem o sinal **+**.

Os números: +1, +2, +3, +4, +5, +6, ... são iguais aos números 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...

+4 é igual a 4.
+100 é igual a 100.

Então já sei muita coisa sobre os números inteiros!!!

FOTOGRAFIAS: THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Todos os números naturais são também números inteiros.

Os números naturais compõem parte do conjunto dos números inteiros.

$$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$$

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$$

"−100 é um elemento de $\mathbb{Z}$" —— Indicamos: $-100 \in \mathbb{Z}$.
Lemos: "−100 pertence a $\mathbb{Z}$".

"−100 não é um elemento de $\mathbb{N}$" —— Indicamos: $-100 \notin \mathbb{N}$.
Lemos: "−100 não pertence a $\mathbb{N}$".

Antecessor e sucessor de um número inteiro

Como no caso dos números naturais, um número inteiro tem **antecessor** e **sucessor**.

O antecessor de um número inteiro é aquele que vem imediatamente antes dele na sequência numérica dos números inteiros. O sucessor é o que vem imediatamente depois dele nessa sequência.

Observe esta sequência:

$$..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3$$

O antecessor de -2 é -3.
O sucessor de -5 é -4.

Existem também números inteiros consecutivos. Exemplos:

- $+4, +5$ e $+6$ são números inteiros consecutivos.
- $-3, -2$ e -1 são números inteiros consecutivos.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

13. Represente por um número inteiro positivo ou negativo:

a) o segundo subsolo de um edifício em relação ao andar térreo; -2

b) a posição de um submarino, que se encontra a 50 m de profundidade, em relação ao nível do mar; -50 m.

c) uma queda de temperatura de 6 °C. -6 °C.

14. Descreva uma situação do dia a dia que corresponda a: Respostas possíveis.

a) $-$R\$ 2 500,00. Dívida de R\$ 2500,00.

b) -40 pontos. Perda de 40 pontos.

c) $+11$ andares. 11 andares acima do andar térreo.

15. Um esportista que escalava um monte encontrava-se a 100 metros de altitude quando anotou: -5 °C. Quando chegou a 2000 m anotou: "A temperatura caiu 13 °C".

a) O que acontece com a temperatura à medida que a altitude aumenta? Ela diminui.

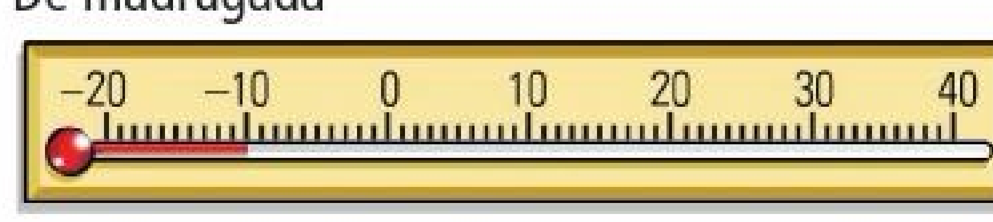
b) Indique a temperatura a 2000 m de altitude usando números positivos ou negativos. -18 °C.

16. Certa vez Pedro esteve em Ushuaia, na Argentina, a cidade mais austral do planeta. Nessa ocasião ele fez observações sobre a temperatura local. Veja como foi uma de suas observações.

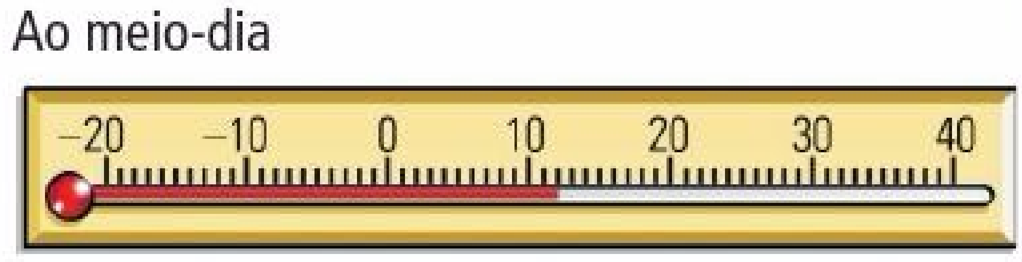
FOTOGRAFIAS: THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Ushuaia, Argentina.

De madrugada



Ao meio-dia



HÉLIO SENATORE

Responda:

a) Em qual desses momentos a temperatura era menor que a outra? De madrugada.

b) Quantos graus a temperatura subiu entre esses dois momentos? 22 °C.

c) Dê dois exemplos de temperaturas mais baixas do que as observadas por ele de madrugada.
Respostas possíveis: -11 °C; -38 °C.

17. Mariana tem R$ 650,00 em sua conta bancária. Ela pagou uma compra de supermercado com um cheque no valor de R$ 500,00. Em seguida, ela esteve em um caixa eletrônico e sacou R$ 200,00, em dinheiro. Depois, ela emitiu outro cheque de R$ 100,00.

Responda:

a) O saldo de Mariana está positivo ou negativo? Negativo.

b) A partir de que momento Mariana ficou devendo ao banco? Quando ela sacou R$ 200,00.

c) Qual é o saldo da conta de Mariana? −R$ 150,00.

18. Copie e complete a tabela seguinte com o antecessor e o sucessor de cada número:

Número	Antecessor	Sucessor
+200	+199	+201
−9	−10	−8
−28	−29	−27
−100	−101	−99

19. Qual é o número inteiro que tem como sucessor o zero? −1

20. Copie e complete, substituindo o ■ por $\in$ ou $\notin$ ou por número. (Para **c**, **d** e **f** há outras respostas possíveis.)

a) -20 ■ $\mathbb{N}$ $\notin$

b) 67 ■ $\mathbb{N}$ $\in$

c) ■ $\in \mathbb{Z}$ −9

d) ■ $\notin \mathbb{Z}$ 56,5

e) -378 ■ $\mathbb{Z}$ $\in$

f) ■ $\notin \mathbb{N}$ −40

Troquem ideias e resolvam

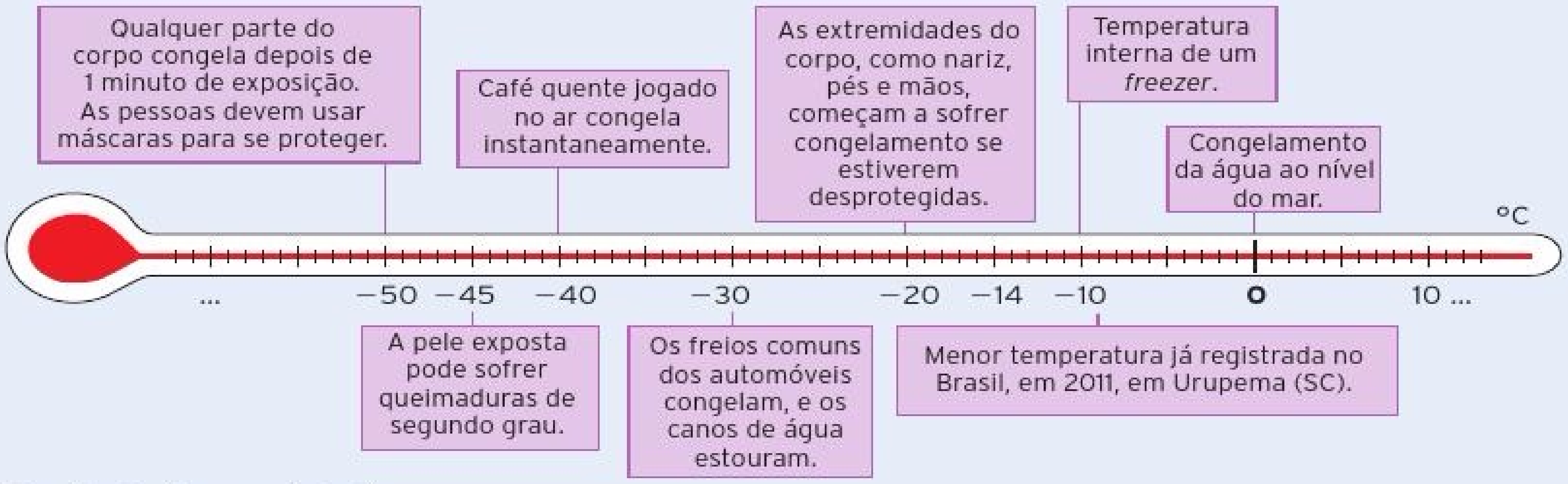
FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega, reflitam sobre as questões e respondam.

O que acontece abaixo de 0 °C?

Leiam as informações a seguir:

TON KOENE/VISUALS UNLIMITED/CORBIS/LATINSTOCK



O termômetro é apenas ilustrativo.

Agora, respondam:

- Sob qual temperatura qualquer parte do corpo congela depois de 1 minuto de exposição ao frio? Identifique uma temperatura mais alta que essa e outra mais baixa. −50 °C. Respostas possíveis: mais alta: −49 °C, mais baixa: −53 °C.
- Faça uma pesquisa em grupo: Resposta pessoal.
  a) Qual foi a temperatura mais baixa registrada nos útimos dez anos em sua cidade?
  b) Qual foi a menor temperatura já registrada no Brasil? Em que ano e em qual cidade ela ocorreu? Você saberia dizer em qual região brasileira fica essa cidade?

Aproximadamente −9 °C, em 2011, em Urupema, Santa Catarina, região Sul.

Exercícios complementares

FAÇA NO CADERNO

21. Rubens brinca com um termômetro, colocando-o ora em água morna, ora no congelador. Ele começa com o termômetro marcando sempre 15 °C. Qual será a temperatura desse termômetro ao final de cada uma das situações seguintes?

a) Subiu 4 °C; subiu 8 °C. +27 °C.

b) Subiu 2 °C; caiu 20 °C. −3 °C.

c) Caiu 15 °C. 0 °C.

d) Subiu 1 °C; caiu 8 °C; caiu 12 °C. −4 °C.

22. Uma pessoa está no mar, a −28 m de altitude. Para chegar ao nível do mar, ela deverá subir ou descer quantos metros? Subir 28 m.

23. Escreva uma sentença para cada situação, utilizando números inteiros. Determine e interprete os resultados:

a) Mário tinha R$ 45,00 de crédito no armazém do seu José. Ele esteve lá novamente e gastou R$ 60,00. +45 − 60 = −15; débito de R$ 15,00.

b) A temperatura era de 7 °C abaixo de zero ontem e caiu 6 °C durante a madrugada. −7 −6 = −13; −13 °C ou 13 °C abaixo de zero.

24. Dona Vera sempre faz suas compras no armazém "Bom e barato". Seu José, dono do armazém, marca tudo em um caderno. Ele marcou os créditos com o sinal + e as dívidas com o sinal −.

Observe o que aconteceu em um certo mês e registre o modo como seu José fez suas anotações.

a) Dona Vera fez uma compra de R$ 18,00 e não pagou. −18,00

b) Ela fez uma compra de R$ 10,00 e também não pagou. −18,00 − 10,00 = −28,00

c) Ela foi ao armazém e pagou R$ 20,00 ao seu José. −28,00 + 20,00 = −8,00

- Dona Vera tem crédito ou dívida com seu José? De que valor? Dívida; R$ 8,00.

25. Copie estas frases e complete-as de modo que sejam verdadeiras. Respostas possíveis.

a) O número −1008 é um número inteiro e não é ■. um número natural

b) O número 514 ■ um número ■. é; natural

26. O antecessor de um número inteiro é −13. Qual é o seu sucessor? O número é −12 e seu sucessor é −11.

Investigue e explique

FAÇA NO CADERNO

- Registre −10 em uma calculadora pressionando as teclas na sequência:

  [−] [1] [0] [=]

  Siga pressionando as teclas na sequência:

  [+] [1] [=]

  Que número apareceu no visor? −9

CRISTINA XAVIER/ FINEPHOTO

- Construa no caderno um esquema como o apresentado a seguir. Siga pressionando a tecla [=] até que o visor apresente o número zero e anote todos os resultados obtidos no esquema desenhado em seu caderno.

	+1		+1		+1		+1		+1		+1		+1		+1		+1		+1	
−10		−9		−8		−7		−6		−5		−4		−3		−2		−1		0
				ou 8−		7−		6−		5−		4−		3−		2−		1−		

- Observe a sequência numérica obtida no item anterior e construa outra que comece com −50 e que tenha onze números. Ela deve ter o mesmo padrão da sequência do item anterior. −50; −49; −48; −47; −46; −45; −44; −43; −42; −41; −40

- Explique como você construiu essa sequência.

Resposta possível: a partir de −50, adicionou-se 1 ao resultado anterior.

Desafio

Caminhos e os sinais + e −

Atividades lúdicas costumam motivar os alunos. Assim, incentive-os a criar e a explorar outras figuras e outras regras. Eles poderão explorar a área e o perímetro dessas figuras.

FAÇA NO CADERNO

Para esta brincadeira, vamos combinar algumas regras:

Regra 1: só vale deslocar-se sobre os lados dos quadrados da malha quadriculada.

Regra 2: direção do deslocamento.

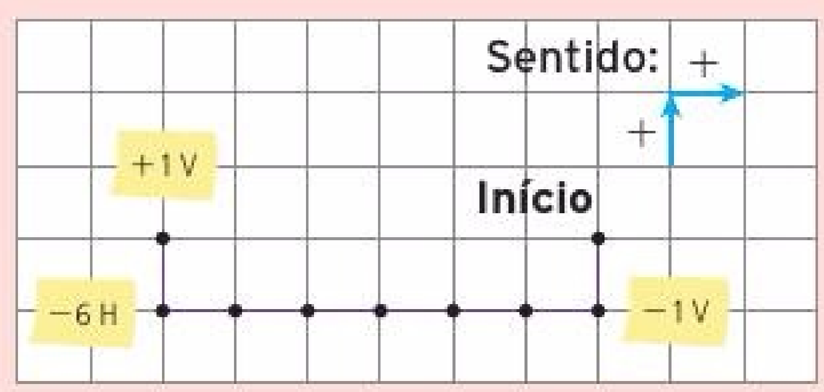
H —— horizontal **V** —— vertical

Regra 3: sentido do deslocamento.

+ —— para a direita ou para cima **−** —— para a esquerda ou para baixo

Atenção! Não vale cruzar um caminho já percorrido ou percorrê-lo mais de uma vez.

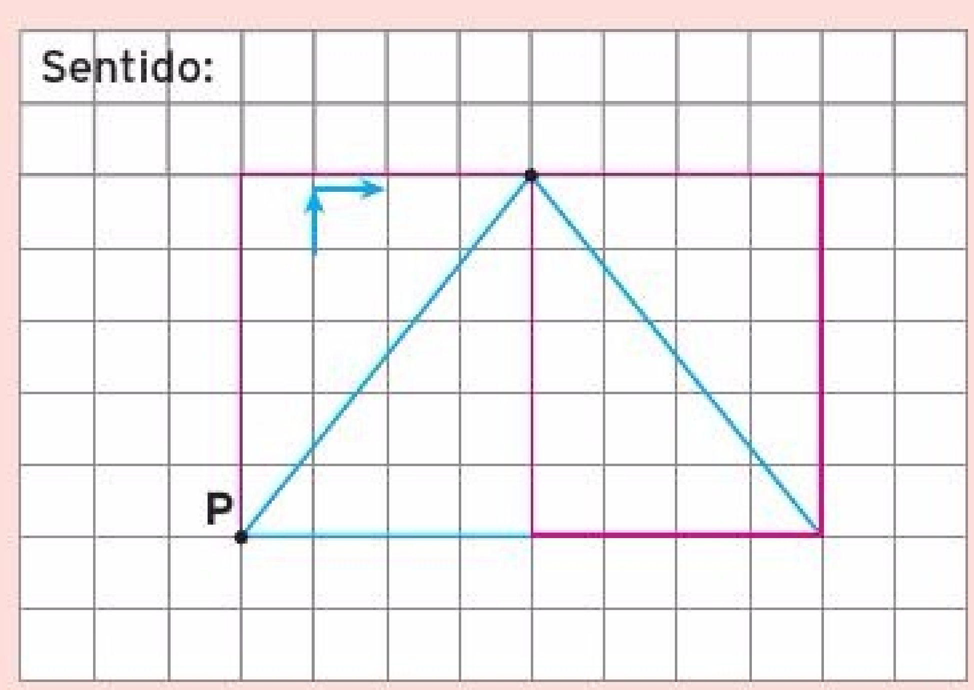
Exemplo:



Está animado? Então pegue papel quadriculado e vamos brincar!!!

- Copie o desenho abaixo em um papel quadriculado. Comece no ponto **P** e prossiga percorrendo os lados dos quadrados conforme a sequência:

+5V; +8H; −5V; −4H; +5V



Não risque este livro.

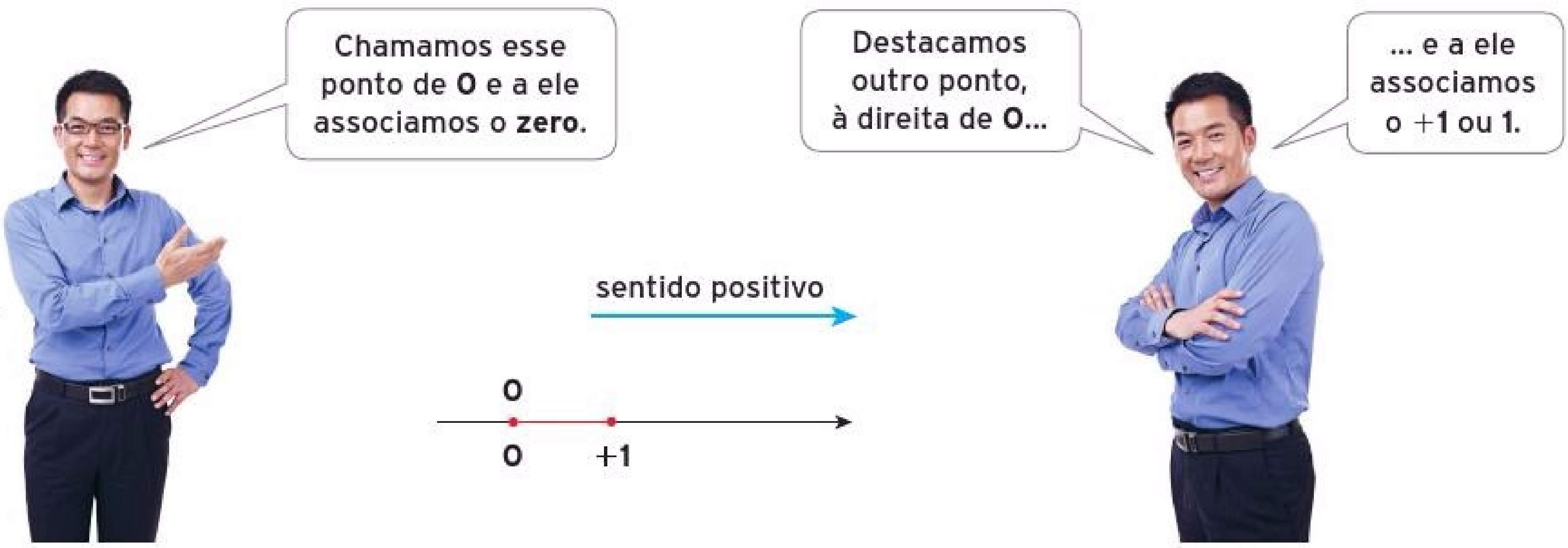
- Observe o resultado obtido e responda às questões:
  a) O contorno da figura é um retângulo. Existem nela outros retângulos? Se a resposta for afirmativa, quantos? Sim, dois iguais.
  b) Existem triângulos nessa figura? Quantos? De que tipo são eles? Sim, cinco; quatro triângulos retângulos e um triângulo isósceles.
  c) Se cada lado de um quadrado tem 1 cm de lado, qual é a área, em cm^2, do retângulo maior? E a dos outros retângulos? 40 cm^2; 20 cm^2.
  d) Qual é a área, em cm^2, de cada triângulo retângulo? E a do triângulo isósceles? 10 cm^2; 20 cm^2.
- Pense em um percurso que forme uma figura parecida com a que foi obtida, mas cujo contorno seja um quadrado. Respostas possíveis: +6V; +6H; −6V; −6H

2 Ordenando números inteiros

Representação geométrica

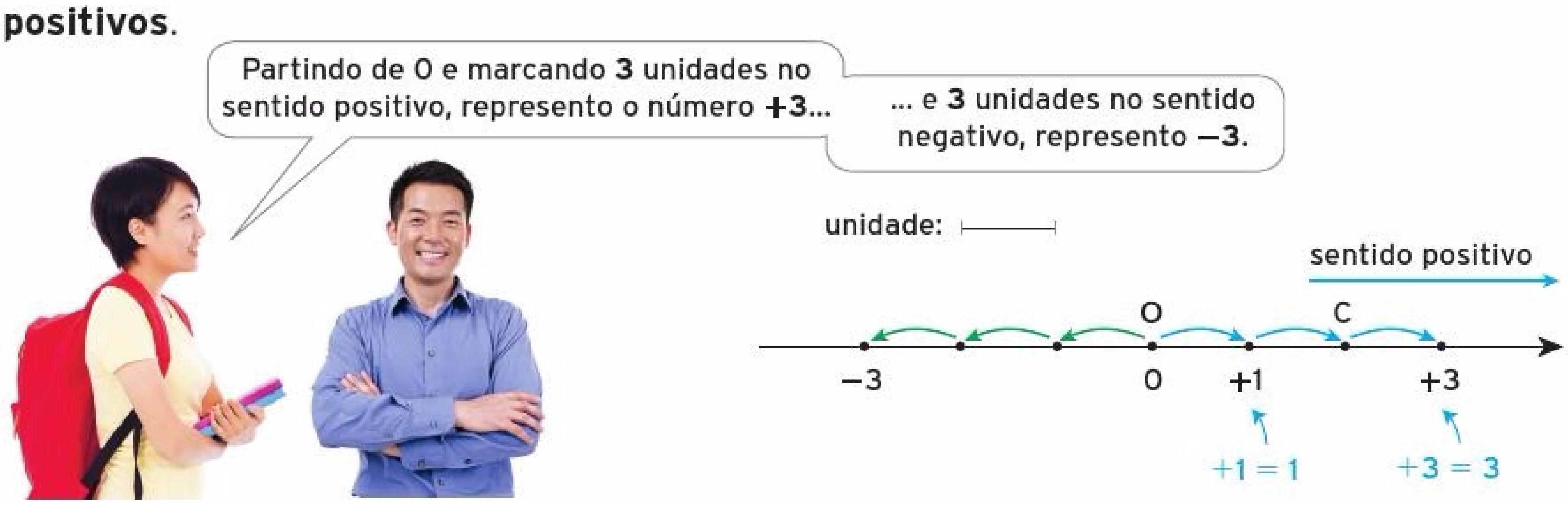
Podemos representar os números inteiros utilizando os pontos de uma reta.

Desenhamos uma reta e nela destacamos um ponto qualquer.

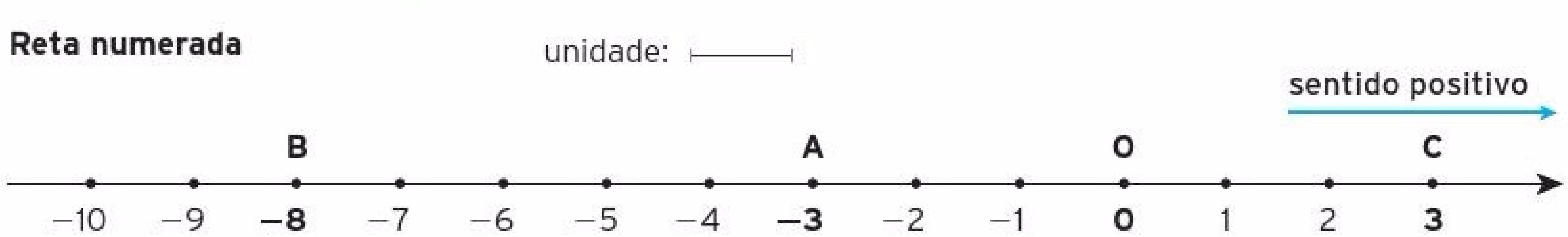


FOTOGRAFIAS: THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Assim, temos um segmento de reta que será a **unidade** de comprimento. Adotamos, também, uma orientação: os percursos realizados da esquerda para a direita serão considerados **positivos**.



Cada **número inteiro** é representado em uma **reta numerada** por **um único ponto**.



Em representações desse tipo, dizemos que:

- **−3** é a **abscissa** do ponto **A**.
- **−8** é a **abscissa** do ponto **B**.
- **+3** é a **abscissa** do ponto **C**.
- **0 (zero)** é a **abscissa** do ponto **O**.

Observe que os pontos **A** e **C** são simétricos em relação ao ponto **O**.

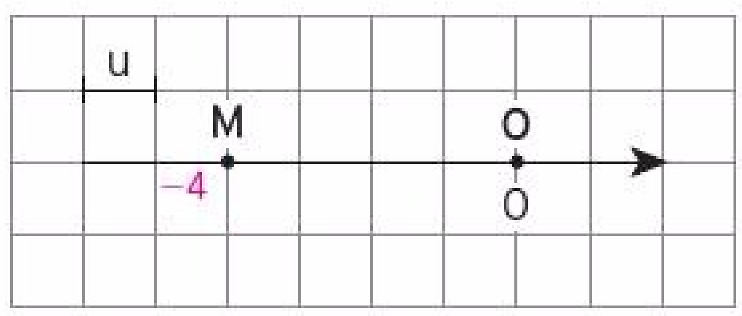
Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

Para resolver as atividades desta seção, recorte tiras de folha quadriculada e cole-as em seu caderno.

27. Copie estas retas e indique a abscissa do ponto **M** em cada situação:

a)



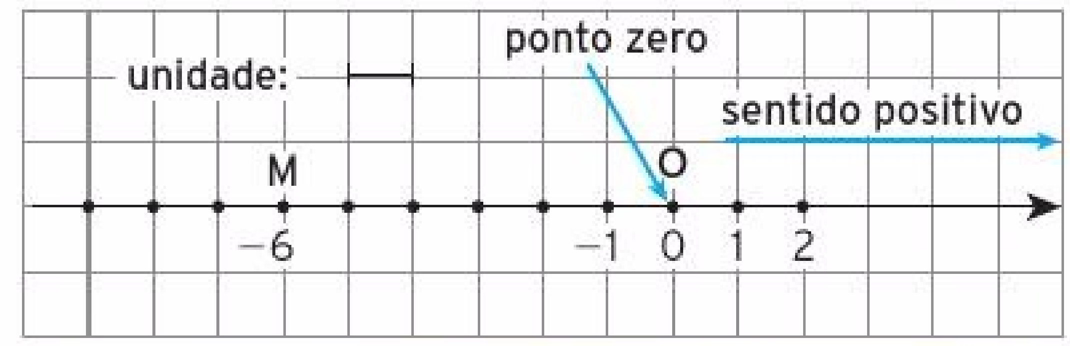
b)

28. Desenhe uma reta numerada, destaque e chame de:

R o ponto de abscissa −18;

A o ponto de abscissa −20;

X o ponto de abscissa 15.



A distância de **M** ao ponto zero é de **6** unidades.

Agora responda às questões:

a) Qual é a distância do ponto **R** ao ponto zero? 18 unidades.

b) Qual é a distância do ponto **A** ao ponto zero? 20 unidades.

c) Qual é a distância do ponto **X** ao ponto zero? 15 unidades.

29. O ponto médio de um segmento de reta divide esse segmento exatamente ao meio. Qual é a abscissa do ponto **M**? E a abscissa do ponto médio de $\overline{PM}$?
M: −92; Ponto médio de $\overline{PM}$: −97.

Exercícios complementares

FAÇA NO CADERNO

30. O prédio onde César trabalha tem vários andares, inclusive o subsolo. O térreo é considerado o andar zero. Responda às questões a seguir usando números inteiros: positivos para indicar andares acima do térreo e negativos para andares abaixo do térreo.

a) Um elevador que estava no quinto andar desceu sete andares. Em que andar ele se encontra? −2

b) Um elevador estava no terceiro andar, subiu dois andares e desceu cinco. Em que andar ele se encontra? Andar zero ou térreo.

c) Um elevador estava no térreo, desceu dois andares, parou e, em seguida, desceu outro andar. Em que andar ele se encontra? −3

31. Lúcia tem R$ 508,00 em sua conta-corrente. Indique seu novo saldo, com números positivos ou negativos, com as ações realizadas uma após a outra:

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

a) retirou R$ 86,00; +R$ 422,00.

b) retirou R$ 158,00; +R$ 264,00.

c) depositou R$ 55,00; +R$ 319,00.

d) retirou R$ 450,00. −R$ 131,00.

32. João escalava um morro quando observou que a temperatura era de -5 °C. Desceu um pouco e a temperatura subiu 7 °C.

Qual era a temperatura nesse momento? +2 °C.

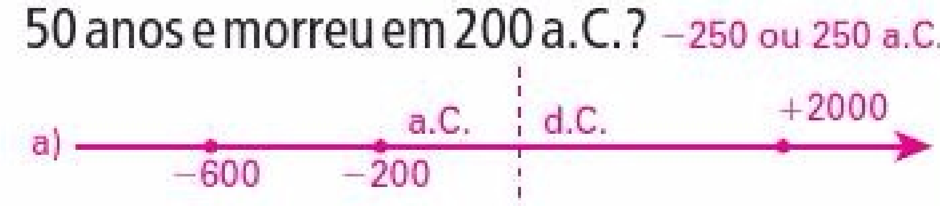
33. Na linha do tempo, o nascimento de Cristo é considerado uma linha divisória: os anos antes do seu nascimento (a.C.) costumam ser indicados por números inteiros negativos, e os anos a partir do seu nascimento (d.C.), por números inteiros positivos. É preciso observar que logo após o ano 1 a.C. vem o ano 1 d.C. Observe na figura a seguir como assinalamos algumas datas:

- 570 antes de Cristo (a.C.): por volta desse ano nasceu, na Grécia, Pitágoras, um dos grandes matemáticos da humanidade;
- em 1873 depois de Cristo (d.C.) nasceu, no Brasil, Santos Dumont, conhecido como o pai da aviação.

a) Desenhe uma reta como a que foi apresentada e represente os anos: 600 a.C.; 200 a.C.; 2000 d.C. e o ano de seu nascimento.

b) Uma pessoa que nasceu em 600 a.C. e viveu 45 anos morreu no ano -645 ou no ano -555? −555 ou 555 a.C.

c) Em que ano nasceu uma pessoa que viveu 50 anos e morreu em 200 a.C.? −250 ou 250 a.C.



Usando a calculadora

- Efetue os cálculos e registre os resultados, copiando o esquema em seu caderno:

$\boxed{3} \xrightarrow{-1} \square \xrightarrow{-1} \square \xrightarrow{-1} \square \xrightarrow{-1} \square$

2 1 0 −1 ou 1−

$\boxed{6}\,\boxed{1} \xrightarrow{-25} \square \xrightarrow{-25} \square \xrightarrow{-25} \square$

36 11 −14 ou 14−

- Digite o número 48 na calculadora.
  Calcule uma diferença e faça aparecer um número negativo no visor. Resposta pessoal.
  Qual é o menor número natural que se deve subtrair de 48 para que o visor apresente o sinal $-$? 49

Troquem ideias e resolvam

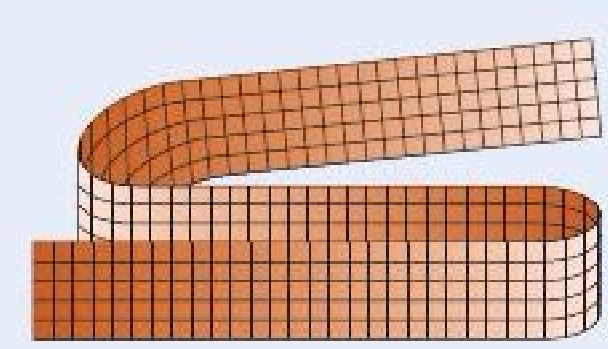
FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega e experimentem.

Vamos construir uma reta numerada! Para isso, providenciem uma tira bem comprida de papel quadriculado, com cerca de 5 cm de largura.

Escolham a medida do comprimento da tira: ela vai depender do uso que farão dela. Desenhem uma reta em uma das linhas dessa tira.

- Escolham um ponto para representar o zero. Esse ponto será a origem, ou seja, o ponto de referência para representar outros números inteiros.
- Escolham uma unidade de medida. Pode ser 0,5 cm, ou 1 cm, ou 2 cm.
- Marquem o sentido positivo.
- Representem na reta numerada os números: 15, 12, -20, -10 e -18.
- Localizem nessa reta todos os números inteiros entre -5 e -40, inclusive -5 e -40.



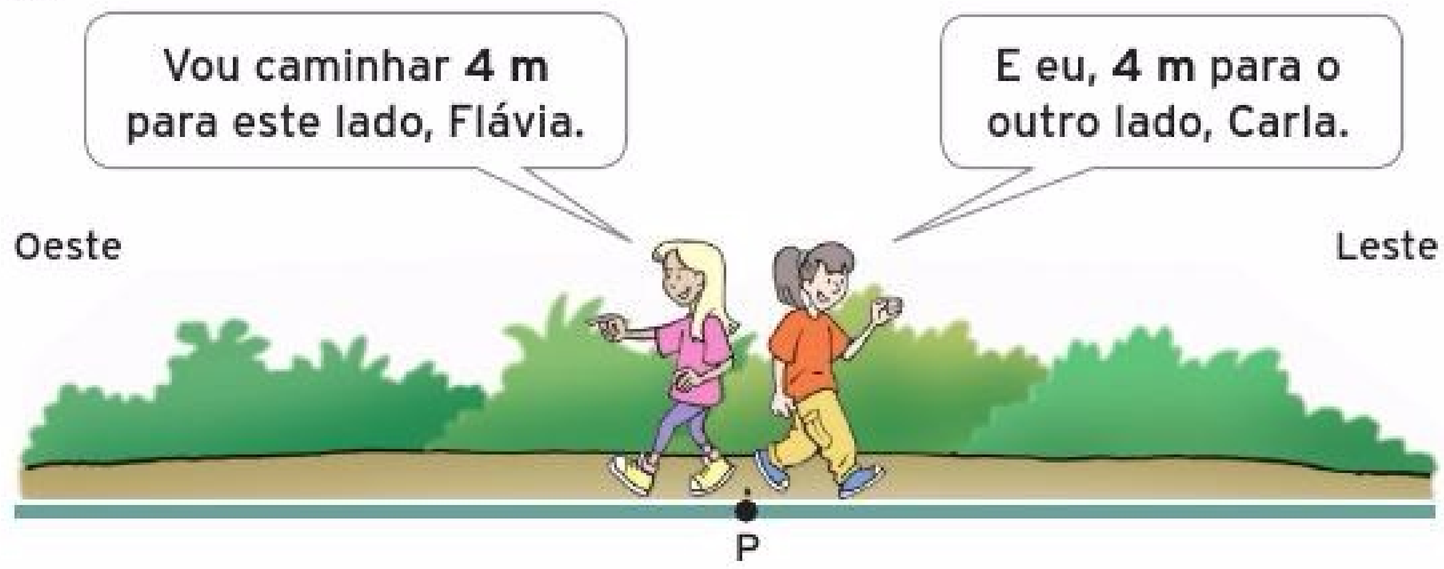
FRANCISCO VILACHÃ

Certifique-se de que os alunos compreenderam a proposta sobre a tira quadriculada. Explore a localização de outros números maiores e também menores que os listados. Peça a eles que guardem a tira, pois ela poderá ser aproveitada em outras situações. Para mais esclarecimentos, leia texto no **Manual do Professor – Orientações Didáticas**. Professor: daqui em diante, quando fizermos referência a essa parte do livro, usaremos apenas a expressão **Manual do Professor**.

Números simétricos ou opostos

Para refletir e responder

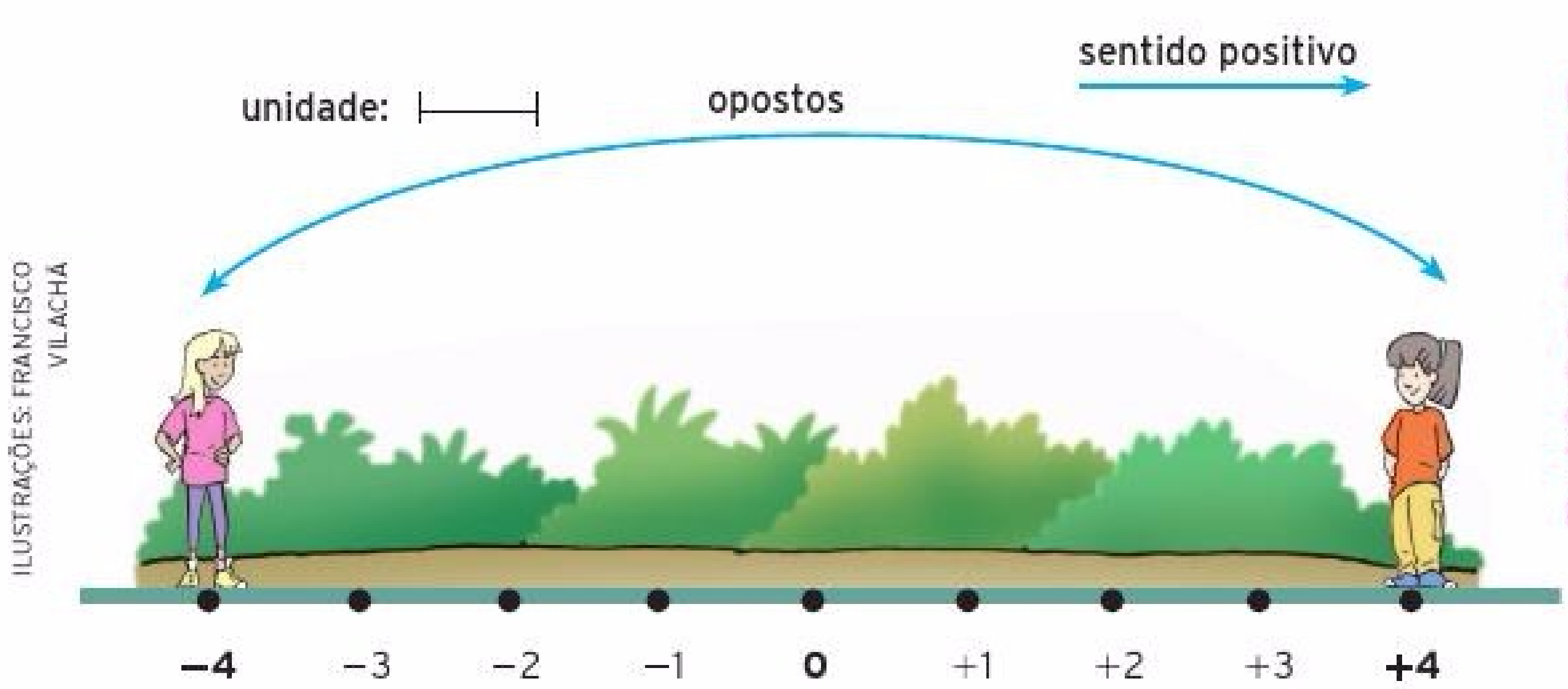
Observe a cena:



... e assim, elas partiram do ponto **P** e caminharam em sentidos opostos, mas em linha reta.

- Quando pararam, quem ficou mais distante do ponto **P**? Elas ficaram à mesma distância do ponto **P**.

Vamos representar geometricamente os percursos que elas fizeram usando os números inteiros. O **zero** corresponderá ao ponto **P**. O sentido oeste-leste será o sentido positivo, e 1 m, a unidade. No desenho, 1 m será representado por 1 cm.



Certifique-se de que os alunos percebem a simetria entre os pontos que representam números opostos na reta numerada. Aproveite para retomar a reta numerada construída na tira quadriculada do **Troquem ideias e resolvam**, página 20, e utilize dobras.

Flávia está no ponto de abscissa **4** e Carla, no ponto de abscissa **−4**.

4 e **−4** são **números inteiros opostos** ou **números inteiros simétricos**.

Zero é oposto ou simétrico a ele mesmo.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

34. Quando uma situação envolve temperaturas, quais são os sentidos opostos? Para cima e para baixo.

35. Quando uma situação envolve altitude, quais são os sentidos opostos? Para cima e para baixo.

36. Certa cidade amanheceu com 0 °C de temperatura. No decorrer do dia, a temperatura subiu, chegando a 9 °C. Na manhã seguinte, os termômetros registraram o oposto da temperatura máxima.

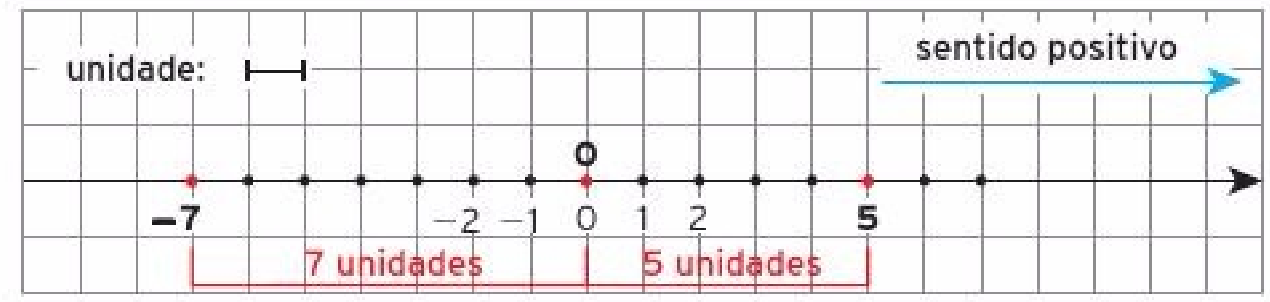
a) Qual foi a temperatura registrada nos termômetros na manhã do dia seguinte? −9 °C.

b) Quantos graus Celsius a temperatura caiu durante a noite? 18 °C.

Módulo ou valor absoluto de um número inteiro

Observe os pontos que representam **−7** e **+5** ou **−7** e **5**:

FOTOGRAFIAS: THINKSTOCK/GETTY IMAGES



−7 está a 7 unidades de distância do ponto de abscissa zero.

O **módulo** de −7 é 7.

Usando símbolos: $|-7| = 7$

+5 ou 5 está a 5 unidades de distância do ponto de abscissa zero.

O **módulo** de +5 é 5, ou o **módulo** de 5 é 5.

$|+5| = 5$ ou $|5| = 5$

> **Módulo** ou **valor absoluto** de um número inteiro é a distância do ponto que o representa à origem, na reta numerada.

Outros exemplos:

- o módulo de −1 é 1 — $|-1| = 1$
- o módulo de −15 é 15 — $|-15| = 15$
- o módulo de +10 é 10 — $|+10| = 10$
- o módulo de 0 é 0 — $|0| = 0$

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

37. Que tipo de número é o módulo de um número inteiro qualquer? É sempre um número inteiro não negativo.

38. O que ocorre com os módulos de dois números inteiros opostos ou simétricos? São iguais.

39. Cada uma destas crianças escreveu um número inteiro em uma cartela e forneceu uma pista sobre ele. Descubra que números foram esses.

Júlia

Célia

Edu

Júlia: 100 ou −100; Célia: −80 ou −79; Edu: −100 ou 100.

40. Quais das informações abaixo **não** são verdadeiras? a; c

a) +14 e +41 são números opostos.

b) −50 e 50 têm sinais contrários.

c) Zero não é um número inteiro.

d) −200 é um número inteiro não positivo.

41. Copie cada igualdade, substituindo o ■ por um número inteiro:

a) $|-6| =$ ■ 6

b) $|-102| =$ ■ 102

c) | ■ | = 200 −200 ou 200

d) $|1\,000| =$ ■ 1000

e) | ■ | = 450 450 ou −450

f) $|-2\,800| =$ ■ 2800

Troquem ideias e resolvam

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega, reflitam sobre o assunto e respondam às questões.

Já sabemos que o sinal $-$ colocado antes de um número indica o oposto desse número.

- O oposto do oposto de 16 é -16 ou 16? 16
- Escolham uma representação para indicar o oposto do oposto de 16:

-16 $\quad$ $-(+16)$ $\quad$ $+(-16)$ $\quad$ $-(-16)$ ×

- Copiem e completem:

a) $-(-100) = \blacksquare$ 100

b) $-(+148) = \blacksquare$ -148

c) $-(+100) = \blacksquare$ -100

d) $-(-250) = \blacksquare$ 250

Exercícios complementares

FAÇA NO CADERNO

42. Anote o número:

a) que é o antecessor de 100; 99

b) do qual -50 seja o sucessor. -51

43. Responda a estas questões:

a) Qual é o valor de $-(-235)$? 235

b) Qual é o oposto do oposto de -1000? -1000

44. Qual é o valor destas expressões? Já começamos a primeira para você:

a) $|+42| - |-18| = 42 - 18 = \blacksquare$ 24

b) $|+27| + |+36|$ 63

c) $|-81| - |-25|$ 56

d) $|-217| - |-58|$ 159

45. Identifique as sentenças verdadeiras e corrija as falsas.

a) O oposto de um número inteiro positivo é sempre inteiro negativo.

b) O simétrico de um número inteiro negativo é sempre inteiro negativo.

c) O módulo de um número inteiro negativo é um número inteiro positivo.

d) O módulo de um número inteiro positivo é um número inteiro positivo.

Verdadeiras: a, c, d

b) O simétrico de um número inteiro negativo é sempre um número inteiro positivo.

46. As letras **m** e **n** representam números inteiros.

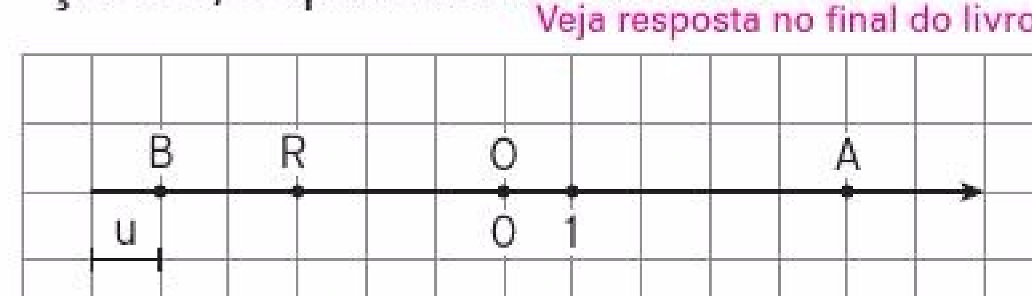
Se $m = |-49|$ e $n = |+66|$, então:

a) Qual é o valor de **m**? E o valor de **n**? 49; 66

b) Qual é o valor da expressão $m - n$? -17

47. No desenho abaixo, **B** é o ponto simétrico de **A** em relação ao ponto **O**. Represente em uma reta numerada o ponto simétrico de **R** em relação a **O**, e apresente sua abscissa.

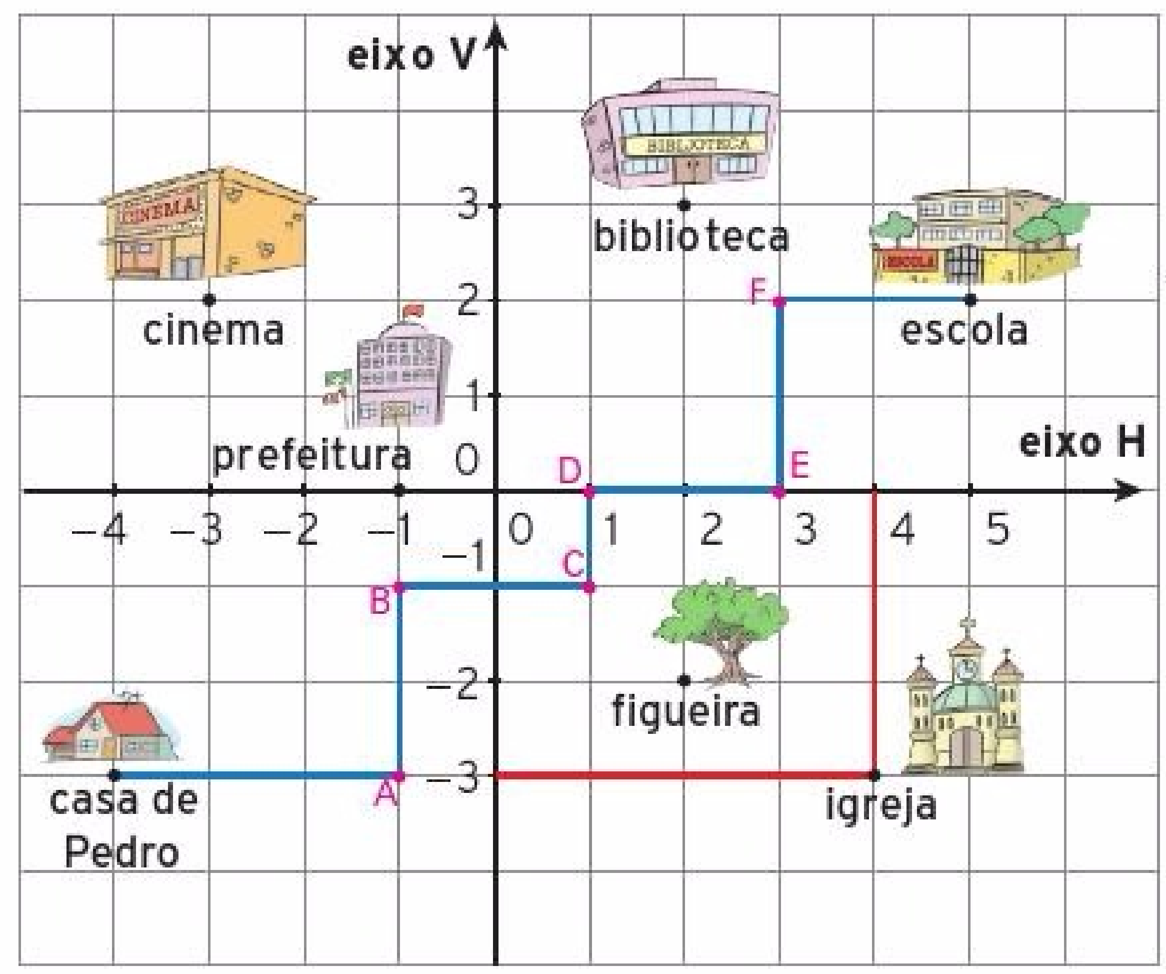
Veja resposta no final do livro.



Os números inteiros e a localização

Pedro fez um croqui do caminho que percorre de sua casa à escola (traçado em azul) e indicou também alguns lugares.

A localização desses lugares tem como referência duas retas numeradas perpendiculares, que são o eixo **H** e o eixo **V**. No ponto comum aos eixos foi marcado o número zero.



ILUSTRAÇÕES: VAGNER DE FARIA

A localização da igreja, por exemplo, é feita traçando retas que passam por ela e são paralelas aos eixos, observando os números nesses eixos.

(4, −3): o primeiro número, 4, está no eixo **H** e o segundo número, −3, no eixo **V**. (4, −3) é um **par ordenado**. Este par ordenado indica a localização da igreja.

A localização da escola onde Pedro estuda é indicada por (5, 2).

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

48. Copie o croqui feito por Pedro em uma folha quadriculada e cole-o em seu caderno. Em seguida, responda às questões:

a) Qual a posição destes locais?

b) O que se encontra em (−1, 0)? A prefeitura.

c) O que se encontra em (2, 3)? A biblioteca.

49. No croqui que você desenhou na atividade 48 está traçado em azul o caminho que Pedro percorre de casa à escola.

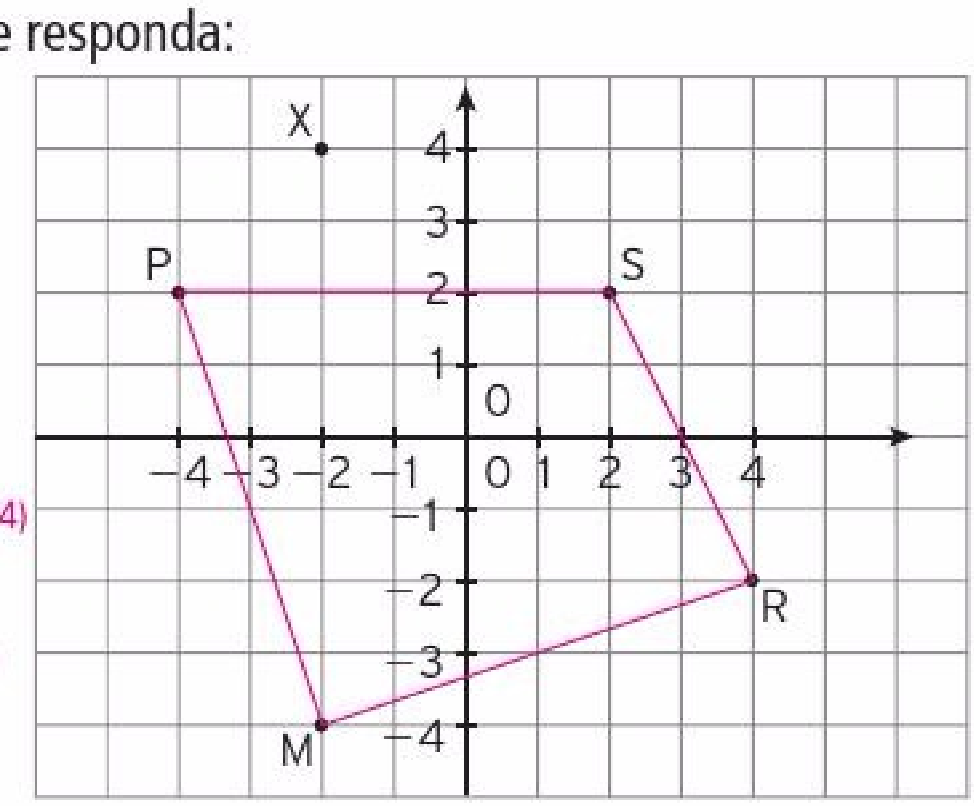
Destaque e nomeie os pontos nos quais ele muda de direção, identificando cada um por meio de pares ordenados.
A (−1, −3); B (−1, −1); C (1, −1); D (1, 0); E (3, 0); F (3, 2)

50. Desenhe em uma folha quadriculada um retângulo de modo que um dos vértices seja o ponto A (−2, 3) e anote as coordenadas dos demais vértices. Veja resposta possível no final do livro.

51. Considere o lado de um quadrado da malha como unidade de medida de comprimento. Qual o perímetro do retângulo que você desenhou no exercício anterior? Resposta possível: 16 unidades.

52. Copie este desenho em uma folha quadriculada e responda:

P (−4, 2)
M (−2, −4)
R (4, −2)
S (2, 2)
X (−2, 4)



a) Qual é a localização de cada ponto destacado?

b) No desenho da folha quadriculada, ligue os pontos **P**, **M**, **R**, **S** e **P** nessa ordem, traçando segmentos de reta. Que figura geométrica você obteve? Um quadrilátero.

Comparação de números inteiros

Quando uma situação envolve números naturais, já sabemos como compará-los. Isso significa que já sabemos comparar dois números inteiros positivos.

Exemplo: Zeca e seu amigo participam de um jogo de basquete.

ILUSTRAÇÕES: FRANCISCO VILACHA

Nessa situação, como 26 é maior que 14, Zeca fez mais pontos que o amigo.

26 é **maior** que 14 (**26 > 14**) é o mesmo que +26 **é maior que** +14 **(+26 > +14).**
ou
14 é **menor** que 26 (**14 < 26**) é o mesmo que +14 **é menor que** +26 (**+14 < +26).**

Como comparar dois números inteiros negativos?

Para refletir e responder

Observe as cenas a seguir e responda às questões.

- Na cena, qual temperatura é menor: **−10 °C** ou **−5 °C**?
  −10 °C.

−10 °C é uma temperatura menor que −5 °C. —— **−10 < −5**

Vamos comparar os valores absolutos de alguns números.

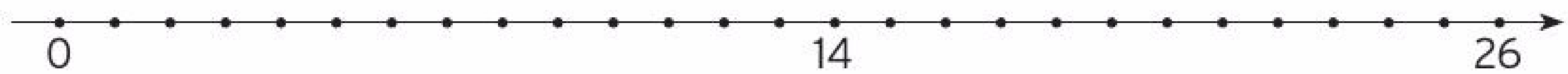
- Quando os números são **inteiros positivos**:

$|+14| = 14$

$|+26| = 26$

$14 < 26$ $\quad$ $+14 < +26$

Quanto mais distante de zero, maior é o número.



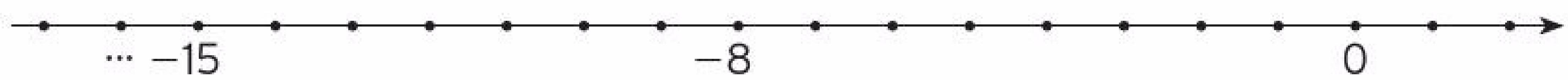
- Quando os números são **inteiros negativos**:

$|-8| = 8$

$|-15| = 15$

$8 < 15$ $\quad$ $-8 > -15$

Quanto mais distante de zero, menor é o número.



- Quando um número é **inteiro negativo** e o outro, inteiro **positivo**:

$-4 < 7$ $\quad$ $-10 < 10$ $\quad$ $-20 < 2$

Qualquer número inteiro negativo é menor que um inteiro positivo.

Qualquer **número inteiro positivo** é **maior** que zero.
Qualquer **número inteiro negativo** é **menor** que zero.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

53. Escreva dois números inteiros maiores que -20.
Resposta possível: -10; -1.

54. Como você compara -10 com -5?
Resposta possível: Comparando os módulos de -10 e de -5.

55. Copie as igualdades, substituindo o ■ pelo símbolo $<$, $>$ ou $=$, de modo que fiquem verdadeiras.

a) 0 ■ 1 $<$

b) 17 ■ -17 $>$

c) -20 ■ -1 $<$

d) -3 ■ 6 $<$

e) -8 ■ 0 $<$

f) $+30$ ■ 30 $=$

56. Escreva três números inteiros maiores que -10 e menores que -1. Resposta possível: -8; -7; -2.

57. Utilize os sinais $<$ e $>$ e escreva estes números inteiros em:

ordem crescente

a) $-8, 1, 3, -12, -6, -25, 7$
$-25 < -12 < -8 < -6 < 1 < 3 < 7$

b) $22, -30, -48, 12, 18, -100, 104$
$-100 < -48 < -30 < 12 < 18 < 22 < 104$

ordem decrescente

c) $56, -87, 16, -37, -41, 0, 13$
$56 > 16 > 13 > 0 > -37 > -41 > -87$

d) $-293, 34, 57, -72, -46, 93$
$93 > 57 > 34 > -46 > -72 > -293$

58. As afirmações a seguir valem para números inteiros. Para quais números se aplica cada uma delas?

a) Quanto mais distante do zero, menor é o número. Números inteiros negativos.

b) São maiores que zero. Números inteiros positivos.

c) São menores que zero. Números inteiros negativos.

d) Quanto mais distante do zero, maior é o número. Números inteiros positivos.

Exercícios complementares

FAÇA NO CADERNO

59. Lembra-se do jogo dos dados vermelho e amarelo da página 12? Com o dado vermelho, ganham-se pontos e, com o amarelo, perdem-se pontos.

a) Copie e complete o quadro com o total de pontos feitos por Júlia, Bianca, Alex e Luís:

		Total de pontos
Júlia	🔴🔴🔴🔴🔴🟡🟡🟡🟡	+1
Bianca	🔴🔴🔴🟡🟡🟡🟡	−1
Alex	🔴🔴🔴🔴🟡🟡🟡🟡🟡🟡	−2
Luís	🔴🔴🔴🔴🔴🟡🟡🟡🟡🟡	0

b) De acordo com o quadro, ordene o número total de pontos em ordem decrescente. +1, 0, −1, −2

60. Qual é o valor absoluto de −47? E de −57?

Qual desses números é o menor? 47; 57; −57

61. Qual é o módulo de −308? E o de −380?

Qual desses números é o maior? 308; 380; −308

62. Qual é o oposto de −486? E o oposto do oposto de 486? 486; 486

63. Qual é o menor: o oposto de −486 ou o oposto do oposto de −486? O oposto do oposto de −486.

64. Quais são os números inteiros maiores que −7 e menores que 2? −6 , −5, −4, −3, −2, −1, 0, 1

65. Carlos fez uma lista com números:

−19, 38, −145, 97, −65, −74, 14

Copie cada frase, substituindo o ■ por um número dessa lista, de modo a torná-la verdadeira:

a) O maior número que Carlos escreveu foi ■. 97

b) O menor número que Carlos escreveu foi ■. −145

c) Um número maior que −74 é ■. Respostas possíveis: −19, 38, 97, −65, 14

d) Um número maior que 38 é ■. 97

66. Responda:

a) Quando um número inteiro é positivo e outro é negativo, qual é o maior? O número positivo.

b) Quando um número inteiro é negativo e o outro é zero, qual é o maior? Zero.

c) Quando dois números inteiros são negativos, o maior é aquele que tem o maior valor absoluto? Não.

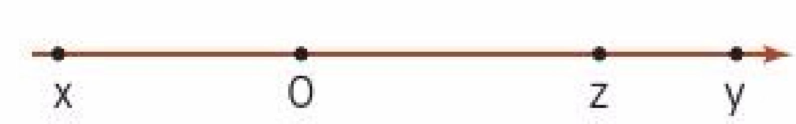
d) Quais números inteiros têm valor absoluto igual a 13? −13 e +13

67. Usando símbolos, escreva:

a) O módulo de menos cinquenta é igual a cinquenta. $|-50| = 50$

b) O módulo de mais dezoito é igual a dezoito. $|+18| = 18$

68. A figura seguinte nos mostra a posição dos números inteiros x, y e z numa reta numerada. Copie e complete as sentenças substituindo o ■ pelos sinais < ou >.



a) x ■ 0 <   b) z ■ 0 >   c) z ■ y <   d) z ■ x >

Investigue e explique

FAÇA NO CADERNO

- Quais números inteiros negativos de dois algarismos diferentes podemos formar com 1, 7 e 9?

O esquema abaixo pode ajudá-lo a resolver esse problema: −97, −91, −79, −71, −19, −17

Exemplo: Se você escolher o número 9 para a 1ª posição e 7 para a 2ª posição obterá o número −79.

- Qual é o maior número inteiro negativo de dois algarismos que podemos formar com 1, 7 e 9? E o menor? −17; −97
- Qual é o maior número inteiro negativo que podemos formar com 1, 7 e 9? −179

3 Estatística e probabilidade

Gráficos

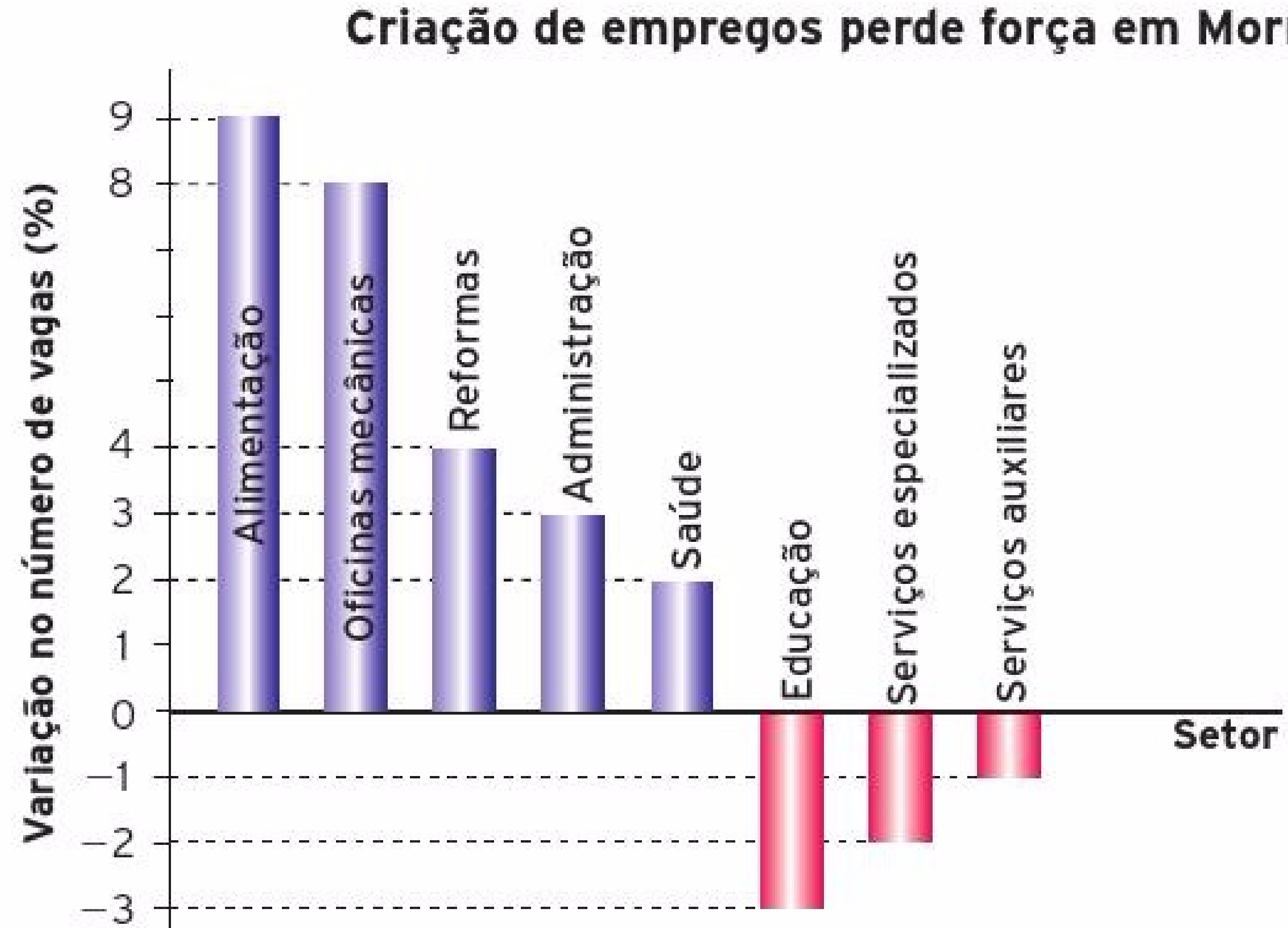
Já estudamos situações envolvendo pontos perdidos, dívidas, temperaturas, altitudes e que podem ser representadas por números inteiros negativos.

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Para refletir e responder

Leia um exemplo de notícia que costuma ser publicada em jornais:

Criação de empregos perde força em Morro Verde



Variação do número de vagas por setor em setembro de 2015, em %.

- Identifique um setor em que foram fechadas vagas existentes e dois setores nos quais houve crescimento de vagas. Respostas possíveis para setores que tiveram vagas fechadas: Serviços especializados, serviços auxiliares.

Respostas possíveis para setores com acréscimo de vagas: Alimentação, saúde.

Procure explorar outras situações nas quais os alunos se envolvam com números negativos e representações gráficas. São atividades direcionadas ao estudo da Estatística.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

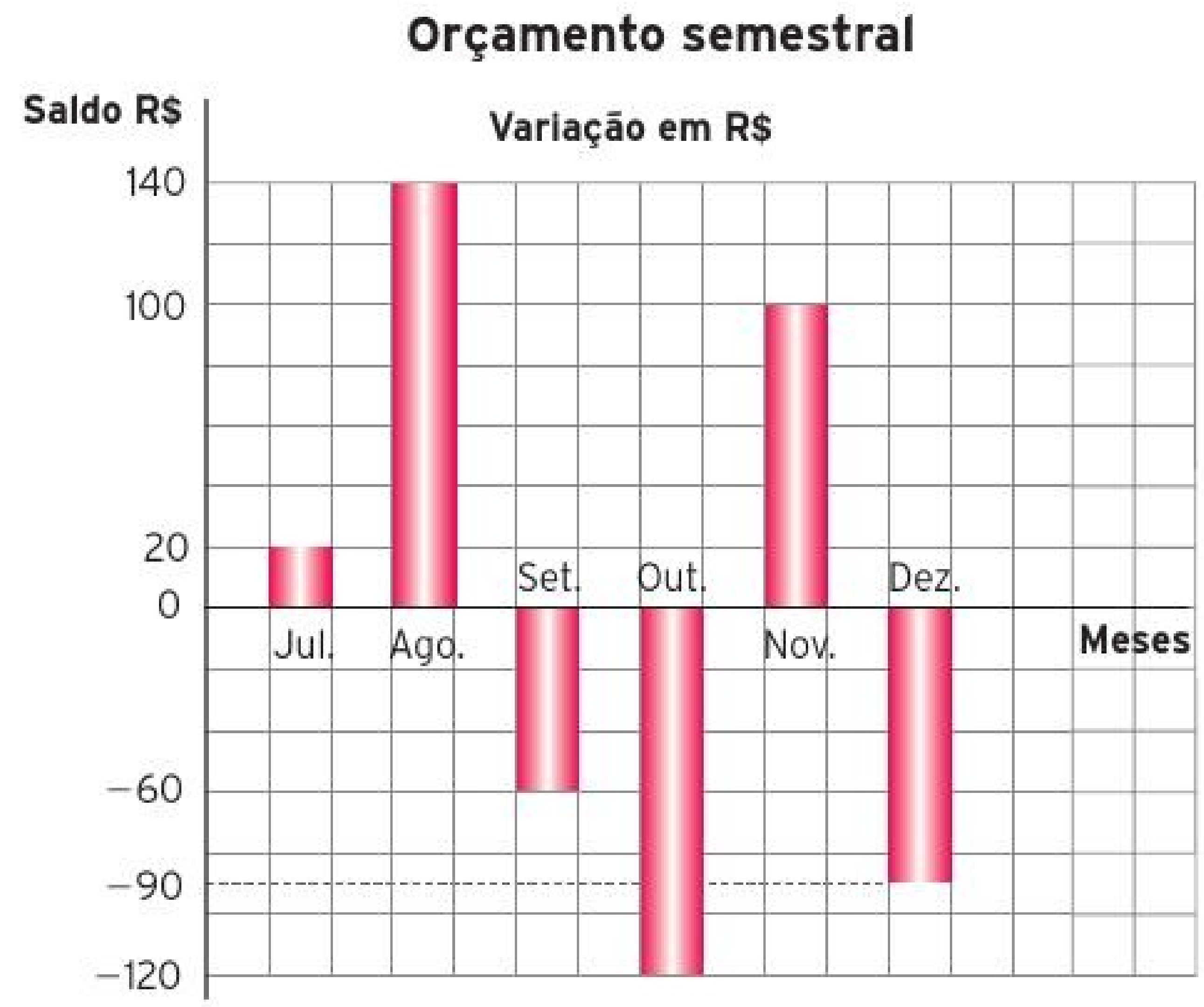
69. Responda a estas questões, observando os dados fornecidos no gráfico da página 28.

a) A oferta de vagas no setor de serviços especializados cresceu ou diminuiu? Indique o crescimento nesse setor usando números inteiros positivos ou negativos.
Diminuiu em 2%, ou seja, teve crescimento de −2%.

b) No início de setembro havia 3 200 vagas no setor de Educação em Morro Verde. Quantas vagas deixaram de existir durante esse mês? 96 vagas.

70. Helena é dona de casa e cuida do orçamento doméstico melhor que ninguém. Ela faz um gráfico no qual coloca mês a mês a diferença entre o dinheiro que entra e o que sai: é a variação em reais, ou seja, é o dinheiro economizado (saldo positivo) ou o gasto a mais (saldo negativo).

O gráfico abaixo refere-se ao segundo semestre do ano de 2015.



a) Qual foi a variação em julho? O saldo foi positivo ou negativo? Variação de R$ 20,00; positivo.

b) Qual foi o saldo em setembro? Foi positivo ou negativo? −R$ 60,00; negativo.

c) Qual foi o pior mês para a família de Helena? O que ocorreu nesse mês?
Outubro. Variação de −R$ 120,00; saldo negativo; a família gastou mais do que ganhou.

Troquem ideias e resolvam

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega, reflitam sobre as questões e respondam.

> De acordo com uma notícia publicada em 2011, no ano de 2005 a população da Europa (incluindo a Rússia) era de 731 milhões de habitantes e até a metade do século XXI teria uma queda de aproximadamente 9%.
>
> *Fonte de pesquisa: <http://internacional.estadao.com.br/noticias/geral,e-se-a-populacao-mundial-encolher-imp-,792718>. Acesso em: 7 abr. 2015.*

- Como você representaria a expressão "queda de 9%" usando apenas símbolos matemáticos? −9%
- De acordo com a notícia, até a metade do século XXI a população aproximada da Europa seria de quantos habitantes? 665 milhões de habitantes.

Leitura

Os fusos horários

Na seção **Leitura**, são tratados assuntos extracurriculares e interdisciplinares destacando aplicações da Matemática em outras áreas. Para mais esclarecimentos, veja comentários no **Manual do Professor**.

Se fossem 23 horas em Londres,que horas seriam em Brasília (DF)?

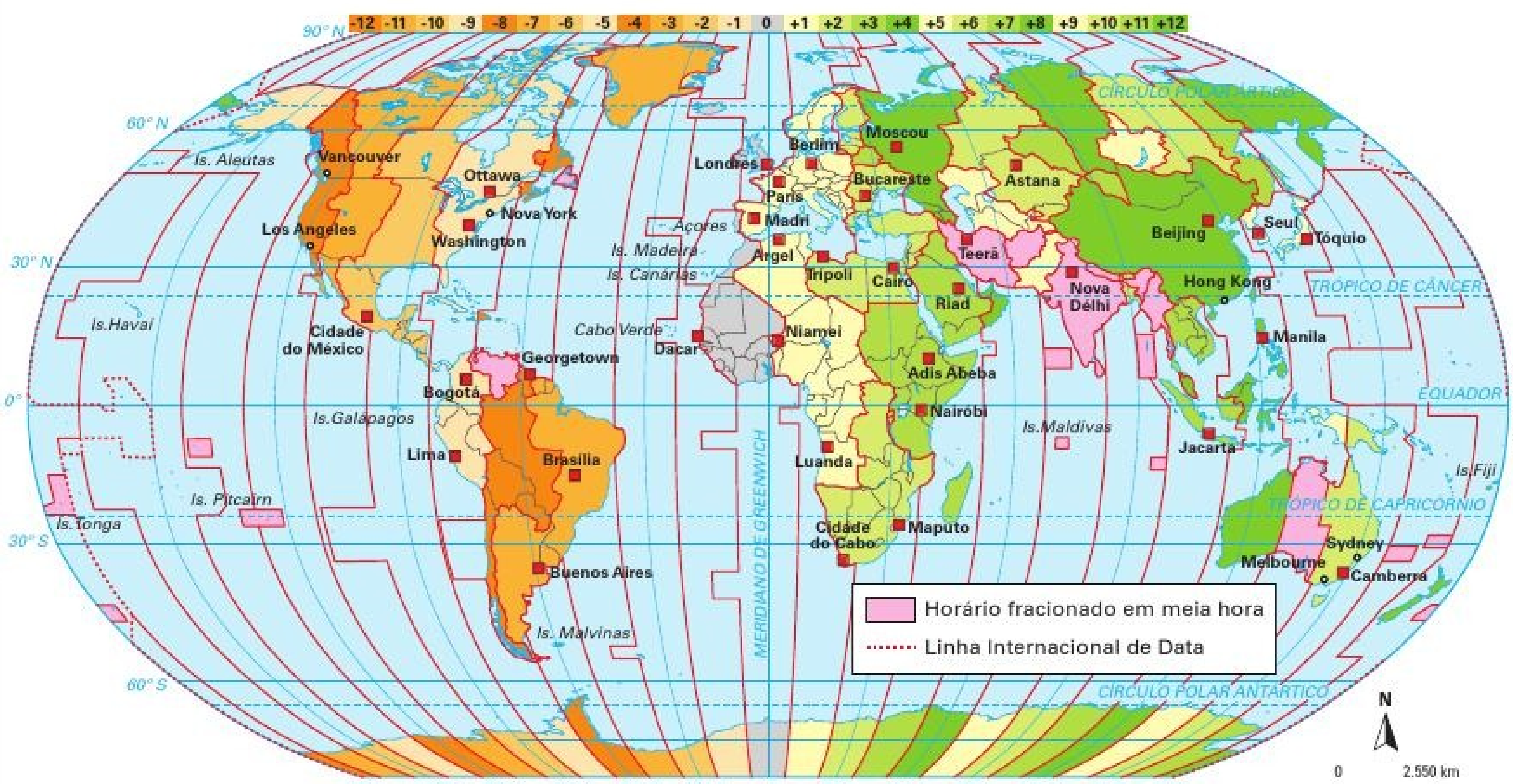
Em 1884, 25 países reunidos em Washington estabeleceram uma divisão do mundo em **24 fusos de uma hora**. Para tanto, basearam-se no fato de que a Terra dá uma volta completa em torno do seu próprio eixo em aproximadamente 24 horas. Dessa forma, dividindo os 360° da circunferência terrestre por 24, temos 15°, que é a medida de cada fuso horário.

Um **fuso horário** é uma faixa que vai do polo Norte ao polo Sul, limitada por dois meridianos.

O fuso horário onde está o **meridiano de Greenwich** é considerado o ponto de referência para a determinação das horas, ou seja, **o ponto zero**.

Os fusos horários situados a **leste** em relação ao ponto zero têm as horas adiantadas (**+**), e os fusos horários situados a **oeste** em relação ao ponto zero têm as horas atrasadas (**−**).

Londres, a capital da Inglaterra, está situada no meridiano de Greenwich. Assim, a hora em Londres é considerada **zero hora** com relação ao horário das demais localidades.



Fonte: Atlas geográfico escolar. Rio de Janeiro: IBGE, 2012. p. 35.

- A cidade de **Brasília** está situada **3 meridianos a oeste** do meridiano de Greenwich.

Se são **23 horas** em Londres...

23 − 3 = 20. São **20 horas** em Brasília.

Hora em Brasília: **3 horas menos** que em Londres ——— **−3 horas** que em Londres.

Procure explorar temas relacionados a outras disciplinas. É possível que os alunos se interessem em discutir questões sobre o horário de verão no Brasil, não considerado no texto. Para mais esclarecimentos, leia o texto no **Manual do Professor**.

Revisão cumulativa e testes

FAÇA NO CADERNO

1. Imagine os números inteiros em uma reta numerada e responda às questões:

a) Que número está mais distante da origem: -900 ou $-1\,000$? -1000

b) Que número é maior: um que tenha módulo 38 ou um de módulo 20? Depende do sinal desses números.

c) Que número está mais próximo da origem: -60 ou 200? Qual deles é o maior? -60; 200

2. Escreva as respostas destas questões usando números inteiros:

a) O saldo de uma conta estava em $-$R\$ 589,00 e dela foram sacados R\$ 476,00. Qual é o novo saldo? $-$R\$ 1065,00.

b) A temperatura de madrugada era de 5 °C abaixo de zero e caiu 9 graus até a manhã. Qual era a temperatura de manhã? -14 °C.

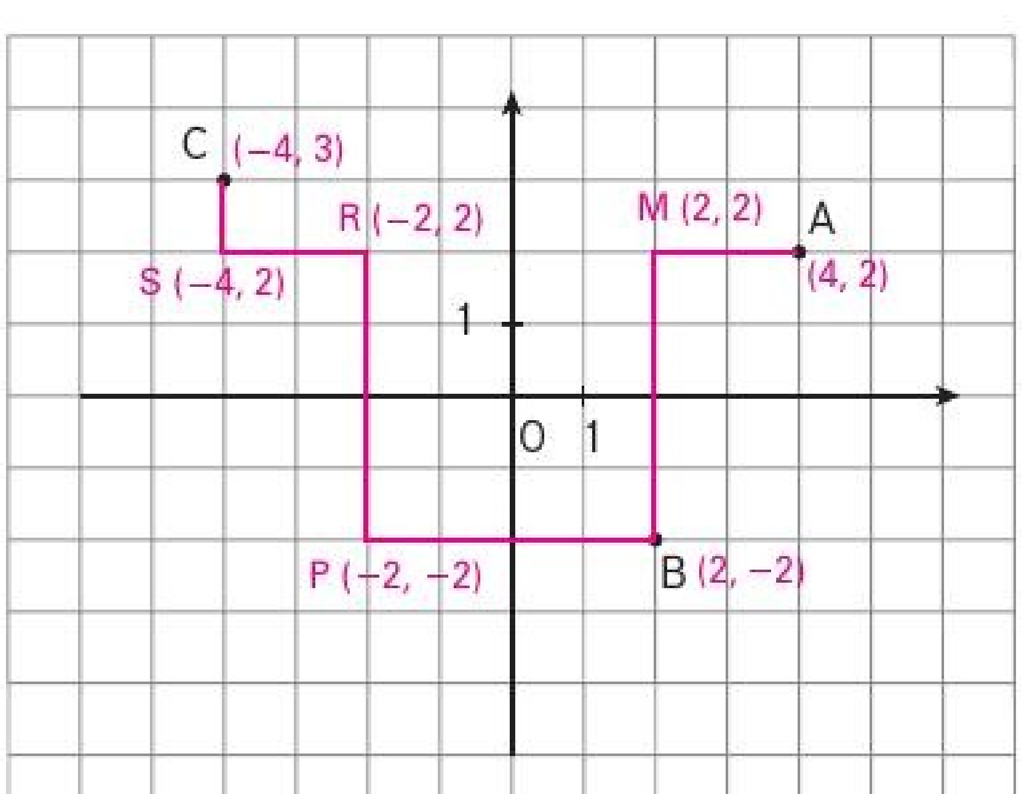
c) Em que ano morreu uma pessoa que nasceu no ano -1023 e viveu 37 anos? -986

3. Paulo pensou em um número inteiro com módulo menor que 9. Em que número Paulo pode ter pensado? $-8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$

4. Pedro pensou em um número inteiro. Multiplicou o valor absoluto por 10 e obteve 250. Em que número Pedro pensou? -25 ou 25

5. Copie este desenho em uma malha quadriculada e identifique a localização dos pontos **A**, **B** e **C**. Em seguida, trace um caminho de **A** até **C**, passando por **B** e sobre as linhas da malha. Localize os pontos em que houve mudança de direção.

BIS



Para o caminho e os pontos de mudança de direção existem outras respostas.

6. Um número menor que -200 é: b

a) -199

b) -205

c) -100

d) 0

7. O valor absoluto de um número é 50, então: d

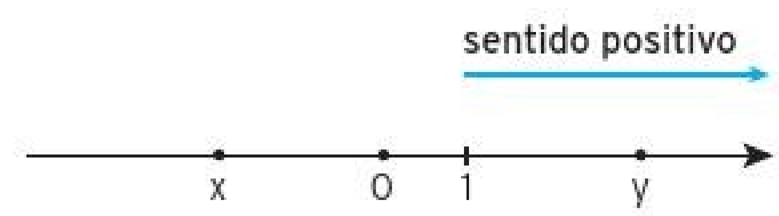
a) esse número está à direita de zero.

b) esse número está à esquerda de zero.

c) esse número está entre -48 e 0.

d) esse número pode ser maior que zero ou menor que zero.

8. Observe esta reta numerada e escolha a alternativa correta: c



a) **x** e **y** têm abscissas negativas.

b) **x** e **y** têm abscissas positivas.

c) **x** tem abscissa negativa e **y**, abscissa positiva.

d) **x** tem abscissa positiva e **y**, abscissa negativa.

9. A localização do ponto **M** é: a

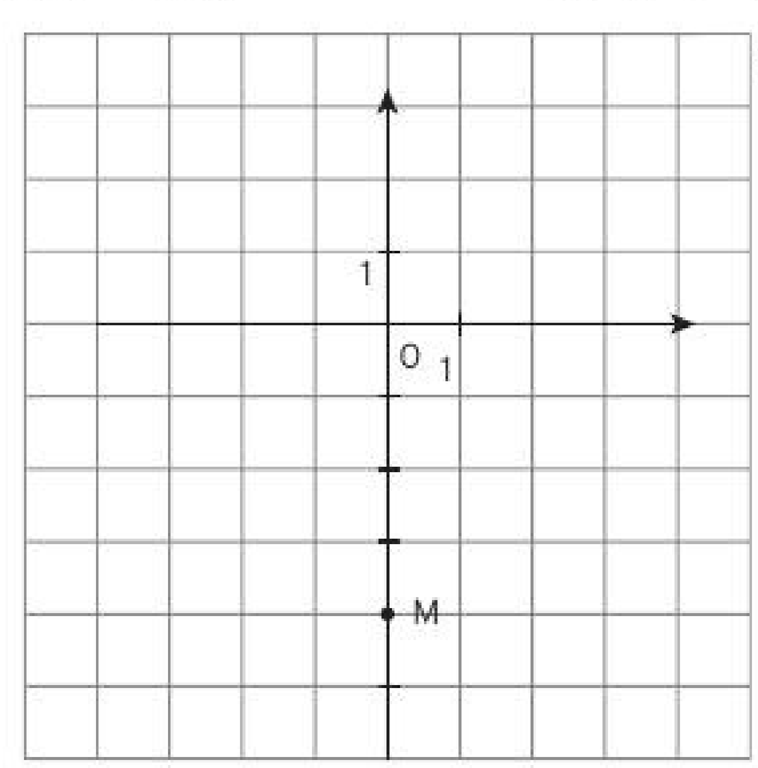
a) M $(0, -4)$

b) M $(-4, 0)$

c) M $(4, 4)$

d) M $(-4, -4)$

BIS



10. Dentre estas alternativas, escolha a que está correta: c

a) $|-74| < 0$

b) $|-74| = -74$

c) $|-74| > 0$

d) $|-74| < -100$

UNIDADE 2 Números inteiros: operações e problemas

Nesta unidade...

1. Adição e subtração
2. Multiplicação e divisão
3. Potência e raiz quadrada

Nas estações de pesquisas na **Antártida**, que fica na região do polo sul da Terra, as temperaturas costumam ser muito baixas: **—50 ºC**, em média; e **operações com números inteiros** estão presentes em vários experimentos realizados nessas estações.

É comum, em nosso dia a dia, encontrar situações que envolvem números com sinais negativos.

Exemplo:

João é o gerente de um supermercado, e precisa ficar atento aos lucros e prejuízos que costumam ocorrer nesse tipo de negócio.

FOTOGRAFIAS: THINKSTOCK/ GETTY IMAGES

Ele analisa o desempenho de cada departamento em uma planilha, onde os lucros estão indicados com números positivos e os prejuízos, com números negativos. Observe o desempenho de dois departamentos: verduras e frutas e materiais de limpeza, em dois bimestres seguidos:

Resultados (em milhares de reais)

Setor	1º bimestre	2º bimestre
Verduras e frutas	-48	$+80$
Materiais de limpeza	$+18$	-18

Para chegar a essa conclusão, João juntou os resultados do setor de verduras e frutas nesse período. Indicamos essa situação por meio da adição de números inteiros escrevendo **$(-48) + (+80)$**.

O uso de parênteses separa o sinal da operação do sinal do número.

$(-48) + (+80) = +32$, ou seja, o supermercado obteve **lucro de R$ 32 000,00** no setor de verduras e frutas.

O que você já sabe?

- Se João tivesse registrado na planilha -80 no lugar de $+80$, o supermercado teria tido lucro ou prejuízo no setor de verduras e frutas? Prejuízo.
- O supermercado teve lucro ou prejuízo no setor de materiais de limpeza? Explique por quê.
  Nem lucro nem prejuízo, porque um lucro de 18 mil reais adicionado a um prejuízo de 18 mil reais resulta em zero real.
- Represente a situação descrita no item anterior usando símbolos matemáticos. $(+18) + (-18) = 0$
- Escreva no caderno uma situação envolvendo lucro e prejuízo representada pela igualdade $(+20) + (-22) = -2$. Resposta possível: Um lucro de 20 mil reais adicionado a um prejuízo de 22 mil reais resulta em um prejuízo de 2 mil reais.

1 Adição e subtração

Adição de números inteiros

Explore as operações diversificando as situações, envolvendo os alunos em problemas lúdicos e de fácil compreensão e estabelecendo, sempre que possível, paralelos com as operações com números naturais. Utilizar a reta numerada pode auxiliar na construção desse conhecimento.

Para refletir e responder

Carlos trabalha em um centro de meteorologia observando variações de temperatura. Veja suas anotações durante um dia:

	Temperatura	Variação
1ª observação	Às 6 h, 4 °C	De +6 °C, até as 12 h
2ª observação	Às 14 h, 8 °C	De −3 °C, até as 24 h

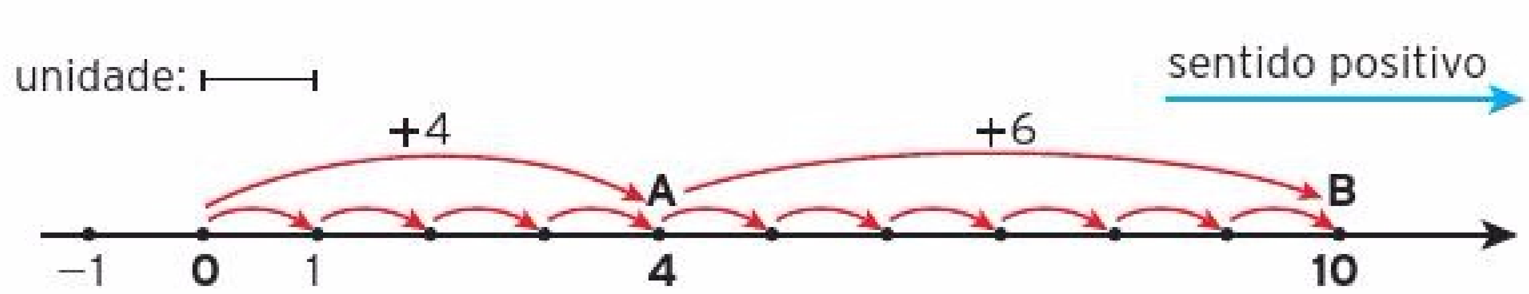
THINKSTOCK/GETTY IMAGES

- Qual era a temperatura ao meio-dia na primeira observação? 10 °C.
- Na segunda observação feita por Carlos, a soma (+8) + (−3) informa a temperatura às 24 h. Essa temperatura era acima ou abaixo de 0 °C?

Acima de 0 °C.

Na primeira anotação de Carlos, observando um termômetro com a marcação de 4 °C passar por uma variação de +6 °C, ou seja, subir 6 °C, teremos, ao final, 10 °C. Representamos esse fato por uma **adição de números inteiros positivos**: (+4) + (+6).

Podemos usar uma reta numerada para efetuar esse cálculo: partimos de zero, percorremos **4 unidades** no sentido positivo e, em seguida, percorremos **6 unidades** no sentido positivo.



Paramos no ponto **B**, de abscissa **+ 10**, que é a soma (+4) + (+6).

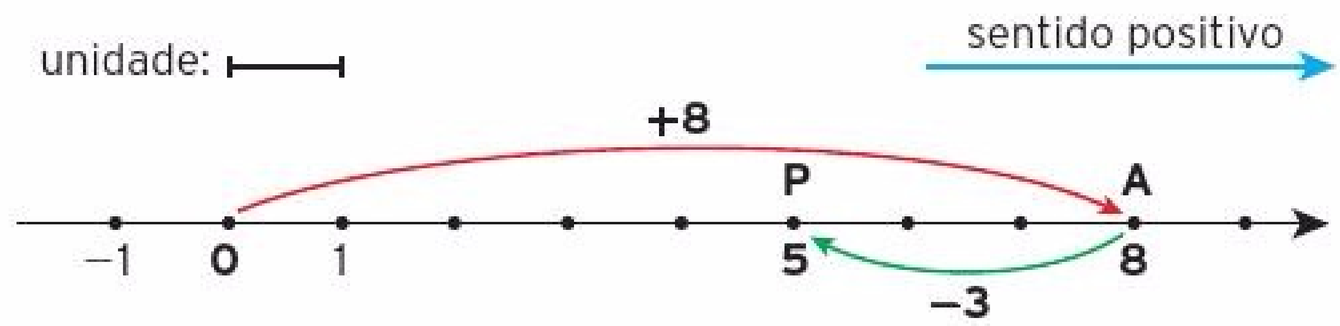
Nos cálculos, eliminamos os parênteses e escrevemos +6 no lugar de +(+6).

$$(+4) + (+6) = +10 \text{ ou } +4 + 6 = +10$$

Na segunda anotação de Carlos, variação de −3 °C significa uma queda na temperatura de 3 °C.

Nesse caso, a temperatura pode ser calculada pela **adição de um número inteiro positivo com um número inteiro negativo**: (+8) + (−3).

Na reta numerada, a partir de zero, percorremos **8 unidades** no sentido positivo e chegamos ao ponto **A**. Em seguida, percorremos **3 unidades** no sentido negativo.



Paramos no ponto **P**, de abscissa **+5**, que é a soma (+8) + (−3).

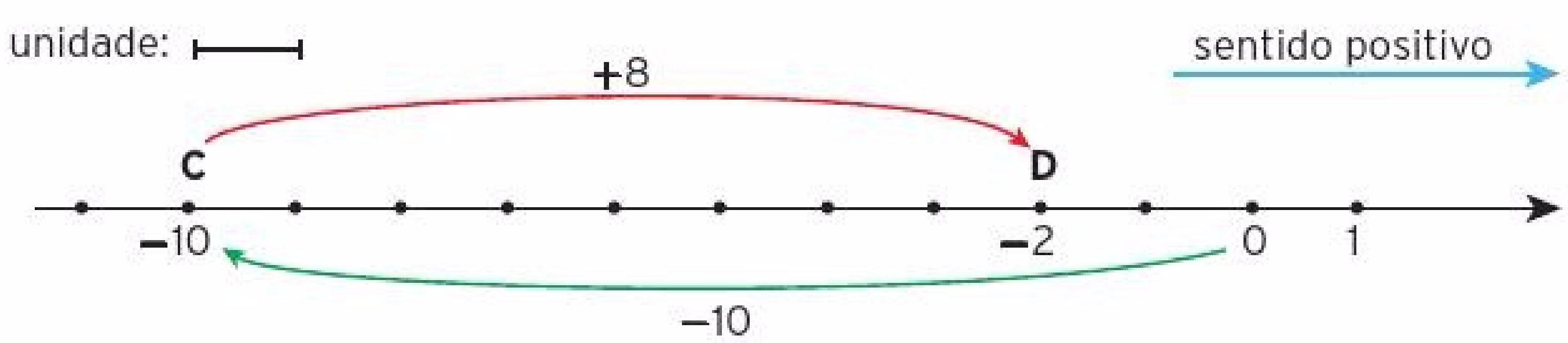
$(+8) + (-3) = +5$ ou $+8 - 3 = +5$

Eliminamos os parênteses e escrevemos −3 no lugar de +(−3).

Outros exemplos:

- Agora, imagine que os termômetros marcavam −10 °C à meia-noite e a temperatura subiu 8 °C até as 5 horas da manhã. A temperatura às 5 horas, nesse dia, é calculada pela **adição de um número inteiro negativo com um número inteiro positivo**: (−10) + (+8).

Na reta numerada: a partir de zero, percorremos 10 unidades no sentido negativo e chegamos ao ponto **C**, e a partir desse ponto, percorremos 8 unidades no sentido positivo:



Paramos no ponto **D**, de abscissa **−2**, que é a soma (−10) + (+8).

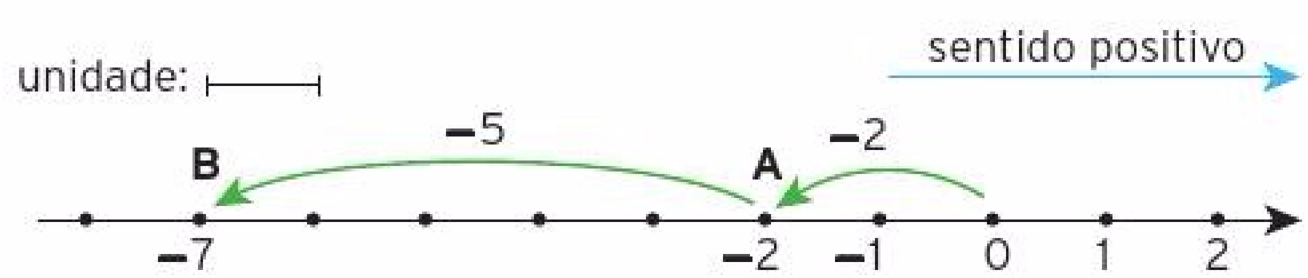
Eliminamos os parênteses e escrevemos +8 no lugar de +(+8).

$(-10) + (+8) = -2$ ou $-10 + 8 = -2$

- Com a temperatura a −2 °C, vamos supor que haja uma variação de −5 °C.

Nesse caso, a temperatura final será calculada pela **adição de um número inteiro negativo com um número inteiro negativo**: (−2) + (−5).

Na reta numerada, partimos de zero e percorremos **2 unidades** no sentido negativo e chegamos ao ponto **A**. Em seguida, percorremos **5 unidades** no sentido negativo.



Paramos no ponto **B**, de abscissa **−7**, que é a soma (−2) + (−5).

$(-2) + (-5) = -7$ ou $-2 - 5 = -7$

Eliminamos os parênteses e escrevemos −5 no lugar de +(−5).

Lembre-se:

Adição de dois números inteiros com sinais iguais:

- os dois são positivos:

  $(+4) + (+6) = +10$

  O sinal da soma é positivo e o módulo é a soma dos módulos das parcelas.

- os dois são negativos:

  $(-2) + (-5) = -7$

  O sinal da soma é negativo e o módulo é a soma dos módulos das parcelas.

Adição de dois números inteiros com sinais diferentes:

- $(+8) + (-3) = +5$

  O sinal da soma é o sinal do número de maior módulo (+) e o módulo é a diferença entre os módulos das parcelas.

- $(-10) + (+8) = -2$

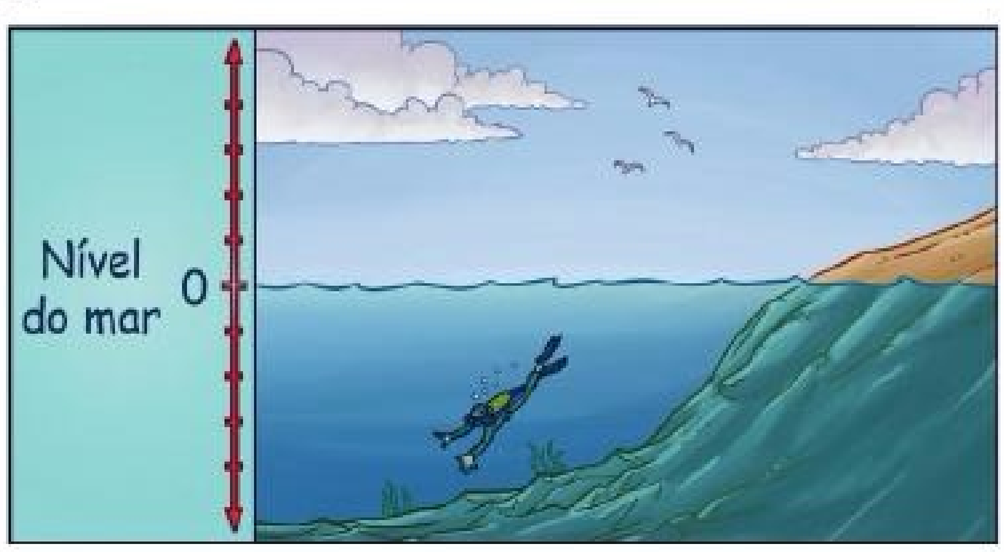
  O sinal da soma é o sinal do número de maior módulo (−) e o módulo é a diferença entre os módulos das parcelas.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

1. Um mergulhador encontra-se a −18 metros de altitude, em relação ao nível do mar. Represente as situações seguintes usando a adição de números inteiros:

QUANTA ESTÚDIO



a) Se ele subir 9 metros, a que altitude ele estará? -9 metros; $(-18) + (+9) = -9$

b) Se ele descer 9 metros, a que altitude ele estará? -27 metros; $(-18) + (-9) = -27$

2. Expresse, utilizando a adição de números inteiros, cada situação que segue e dê o resultado.

a) Em um jogo, Alice ganhou 12 pontos e perdeu 7. $(+12) + (-7) = 5$

b) Uma comida congelada estava sendo mantida a uma temperatura de −20 °C e sofreu uma variação de −5 °C. $(-20) + (-5) = -25$

3. Traduza cada situação seguinte por meio da adição e calcule a soma.

a) Em um torneio de futebol, um time tem 14 pontos ganhos e 20 pontos perdidos. $(+14) + (-20) = -6$

b) Seu João depositou R$ 239,00 em sua conta-corrente, que estava com saldo devedor de R$ 540,00. $(+239) + (-540) = -301$

4. Copie as tabelas dadas a seguir e complete as colunas correspondentes à Adição e ao Saldo, lembrando que créditos são indicados com números inteiros positivos e débitos, com números inteiros negativos:

a)

Crédito (R$)	Débito (R$)	Adição	Saldo (R$)
———	———	———	+230,00
———	630,00	(+230) + (−630) = −400;	−400;
85,00	———	(−400) + (+85) = −315;	−315;
———	100,00	(−315) + (−100) = −415;	−415

b)

Crédito (R$)	Débito (R$)	Adição	Saldo (R$)
———	———	———	1 400,00
600,00	———	(+1 400) + (+600) = +2 000;	+2 000;
———	950,00	(+2 000) + (−950) = +1 050;	+1 050;
———	2 000,00	(+1 050) + (−2 000) = −950;	−950

Investigue e explique

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega, reflitam sobre as questões e respondam.

- Qual é o resultado destas expressões? Anotem as respostas em seus cadernos.

$(+1) + (-1)$ 0 $(+38) + (-38)$ 0 $(-10) + (+10)$ 0 $(-346) + (+346)$ 0

- O que ocorre com a soma de dois números inteiros simétricos ou opostos? É sempre zero.

A adição e as propriedades

Propriedade comutativa

Na adição de números inteiros vale a propriedade comutativa.

Exemplo: $(+20) + (-18) = (-18) + (+20)$

$(+20) + (-18) =$ $(-18) + (+20) =$

$= 20 - 18 = \mathbf{2}$ $= -18 + 20 = \mathbf{2}$

Podemos mostrar que, de modo geral:

> Na adição de números inteiros, a ordem das parcelas não altera a soma.

Elemento neutro

Zero é o elemento neutro da adição de números inteiros. Exemplos:

$(+6) + 0 = 6$ $(-73) + 0 = -73$ $(-99) + 0 = -99$

$0 + (+6) = 6$ $0 + (-73) = -73$ $0 + (-99) = -99$

> A soma de um número inteiro qualquer com zero é igual a esse número.

Propriedade associativa

Observe duas maneiras de calcular $(+410) + (-230) + (-280)$.

- Calculamos $(+410) + (-230)$ e adicionamos o resultado a -280.

$$\underbrace{(+410) + (-230)}_{\downarrow} + (-280) =$$

$$= (+180) + (-280) = \mathbf{-100}$$

- Calculamos $(-230) + (-280)$ e adicionamos o resultado a $+410$.

$$(+410) + \underbrace{(-230) + (-280)}_{\downarrow} =$$

$$= (+410) + (-510) = \mathbf{-100}$$

Comparando os resultados, percebemos que eles são iguais.

Podemos usar colchetes para indicar em que ordem são feitos os cálculos:

$$[(+410) + (-230)] + (-280) = (+410) + [(-230) + (-280)]$$

Na adição de números inteiros, quando temos mais que duas parcelas, podemos agrupá-las de formas diferentes e o resultado será sempre o mesmo.

Observe, também, que, eliminando os parênteses da expressão $(+410) + (-230) + (-280)$, obtivemos a expressão $+410 - 230 - 280$, que é uma **soma algébrica**.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

5. Nestas igualdades, a letra **a** representa um número inteiro. Descubra o valor de **a** em cada uma delas:

a) $a + (+6) = (+6) + (-3)$ –3

b) $(-4) + (-5) = (-5) + a$ –4

c) $(-10) + a = -10$ 0

d) $a + (+100) = 100$ 0

6. Identifique as somas que são iguais. Prestando atenção, não será preciso efetuar os cálculos. A, C e D

A	C
$(-587) + (+125)$	$(+125) + (-587)$
B	**D**
$(+2\,384) + (-5\,019)$	$(-587) + 0 + (+125)$

7. No final de certo mês, Pedro tinha um saldo de R\$ 400,00 em sua conta-corrente. Pagou uma prestação com um cheque no valor de R\$ 400,00. O extrato mensal que o banco lhe enviou apresentava R\$ 0,00 de saldo. Em outro final de mês, Pedro tinha um saldo de −R\$ 400,00 e, antes que o mês terminasse, ele depositou R\$ 400,00 em sua conta. Ao receber o extrato mensal ele ficou surpreso: saldo −R\$ 40,00! Afinal, por que o saldo não foi de R\$ 0,00, como no outro mês?
Resposta possível: Porque o banco cobrou juros sobre o saldo devedor.

8. Identifique a propriedade da adição de números inteiros que permite escrever as igualdades:

a) $(+16) + 0 = 0 + (+16) = 16$ Elemento neutro.

b) $[(+5) + (-2)] + (-6) = (+5) + [(-2) + (-6)]$ Propriedade associativa.

c) $(-93) + (+11) = (+11) + (-93)$ Propriedade comutativa.

d) $(-19) + (-100) + (-39) = (-100) + (-19) + (-39)$ Propriedade comutativa.

Calculando diferenças

Para refletir e responder

Certo dia, em Canto Verde, a temperatura mínima foi de −2 °C e a máxima, de 5 °C.

- Qual foi a variação de temperatura em Canto Verde nesse dia? Se a temperatura mínima tivesse sido 5 °C e a máxima, 11 °C, qual teria sido a variação de temperatura em Canto Verde? 7 °C. 6 °C.

A variação de temperatura é calculada pela diferença entre temperatura máxima e temperatura mínima.

Para calcular diferenças entre números inteiros, vamos aplicar o que aprendemos sobre números inteiros opostos:

Na primeira situação, a variação de temperatura é calculada pela diferença **(+5) − (−2)**.

$$(+5) \underbrace{-(-2)}_{\text{oposto de } -2\text{, que é } +2} = +5 + 2 = +7 = 7$$

Na segunda situação, calculamos **(+11) − (+5)**, lembrando que $-(+5) = -5$.

$$(+11) \underbrace{-(+5)}_{\text{oposto de } +5\text{, que é } -5} = +11 - 5 = +6 = 6$$

Outro exemplo:

Vamos calcular **(−38) − (−16)**.

$$(-38) \underbrace{-(-16)}_{\text{oposto de } -16\text{, que é } +16} = -38 + 16 = -22$$

Observe que, nos cálculos efetuados, a escrita foi simplificada eliminando os parênteses.

Certifique-se de que os alunos percebem que a eliminação dos parênteses é efetuada utilizando o conceito de oposto de um número inteiro nas situações que envolvem a subtração.

Relação entre adição e subtração

A adição e a subtração são **operações inversas**, ou seja:

minuendo − subtraendo = diferença ⇔ diferença + subtraendo = minuendo

Exemplos:

- Se $(-20) + (-50) = -70$, então $(-70) - (-50) = -20$. $\quad -20 \xrightarrow{+(-50)} -70$; $\quad -70 \xrightarrow{-(-50)} -20$
- Se $(+10) - (-5) = +15$, então $(+15) + (-5) = +10$. $\quad +10 \xrightarrow{-(-5)} +15$; $\quad +15 \xrightarrow{+(-5)} +10$

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

9. Para responder a estas questões, observe a expressão.

$$(+13) - (-20)$$

a) Qual é o significado e o valor da expressão $-(-20)$? O oposto de −20; +20.

b) Qual é o valor da diferença $(+13) - (-20)$? 33

10. A diferença entre dois números inteiros é zero.

a) Que tipo de números são eles? Números inteiros iguais.

b) Dê três exemplos. Respostas possíveis: −5 e −5; +64 e +64; −1000 e −1000.

11. Calcule mentalmente e anote o resultado:

a) $(-8) - (+12)$ −20

b) $(+15) - (-15)$ 30

c) $(-50) - (+40)$ −90

d) $(+117) - (+17)$ 100

e) $(-86) - (-26)$ −60

f) $(+100) - (+100)$ 0

12. Copie e complete as frases de modo que elas sejam verdadeiras:

a) Subtrair (-10) de $(+20)$ é o mesmo que adicionar ■ a ■. 10; 20

b) Subtrair (-10) de (-20) é o mesmo que adicionar ■ a ■. 10; -20

c) Subtrair $(+10)$ de (-20) é o mesmo que adicionar ■ a ■. -10; -20

13. João tinha um saldo de −R$ 254,00 em sua conta bancária e emitiu um cheque de R$ 126,00. Que saldo apresentará a conta de João após o desconto desse cheque? −R$ 380,00.

14. Calcule as diferenças:

a) $(+12) - (+8)$ $+4$

b) $(-25) - (-12)$ -13

c) $(+212) - (-88)$ $+300$

d) $(-320) - (-320)$ 0

e) $(+15) - (-12)$ $+27$

f) $(-35) - (-18)$ -17

15. A diferença entre dois números inteiros é -180. Descreva três situações em que isso pode ter ocorrido. Respostas possíveis: O saldo de uma conta-corrente era de −R$ 100,00 e dela foram sacados R$ 80,00. Um submarino que estava a −200 metros subiu 20 metros. João estava com 100 pontos ganhos em um jogo quando perdeu 280 pontos.

16. Considere a igualdade $(-46) - (-102) =$ ■.

a) Copie-a e complete-a, substituindo o ■ por um número inteiro. $(-46) - (-102) = +56$

b) Escreva uma igualdade utilizando os mesmos números do item **a** e que envolva a adição. $(+56) + (-102) = -46$

17. Copie estas igualdades e complete-as substituindo o ■ por um número inteiro. Em seguida, para cada uma delas, escreva outra igualdade utilizando os mesmos números e considerando as operações inversas:

a) $(-37) + (-85) =$ ■ -122; Resposta possível: $(-122) - (-37) = -85$

b) $(-136) - (-49) =$ ■ -87; Resposta possível: $(-87) + (-49) = -136$

c) $(+64) - (-98) =$ ■ 162; Resposta possível: $(+162) + (-98) = 64$

18. Descubra o número que está escondido pelo ■:

a) $(-54) +$ ■ $= -200$ -146

b) ■ $- (-69) = -27$ -96

c) $(-420) -$ ■ $= +35$ -455

Procure explorar a pré-álgebra, fazendo com que os alunos resolvam problemas utilizando as operações e suas inversas. É possível que alguns deles utilizem outras estratégias de resolução. Verifique-as e peça-lhes que contem aos outros a estratégia utilizada. Veja as atividades 16 a 18.

Investigue e explique

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega, reflitam sobre as questões e respondam.

- A propriedade **comutativa** vale também para a subtração de números inteiros? Verifiquem calculando as diferenças indicadas nos quadros.

$(+100) - (-58)$ $(-58) - (+100)$

Não; $(+100) - (-58) = +158$ e $(-58) - (+100) = -158$

- O **zero** é o elemento neutro da subtração de números inteiros? Justifiquem sua resposta.
Não, porque a subtração de números inteiros não é comutativa.

Desafio

FAÇA NO CADERNO

Quadrado mágico

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

−1	0	−5
−6	−2	2
1	−4	−3

É um quadrado dividido em quadrados menores nos quais se escrevem números.

A soma dos números que estão nas linhas deve ser igual à soma dos números que estão nas colunas e também dos que estão nas diagonais.

Nesse quadrado mágico, a soma é **−6** e os números que estão nele são números inteiros. Copie-o e complete-o em seu caderno.

		−5
1		−3

Expressões numéricas

Muitas situações envolvem operações com mais de dois números.

Vamos aprender a calcular nesses casos.

$$(-17) - (-36) + (-20) - (-13)$$

SHUTTERSTOCK

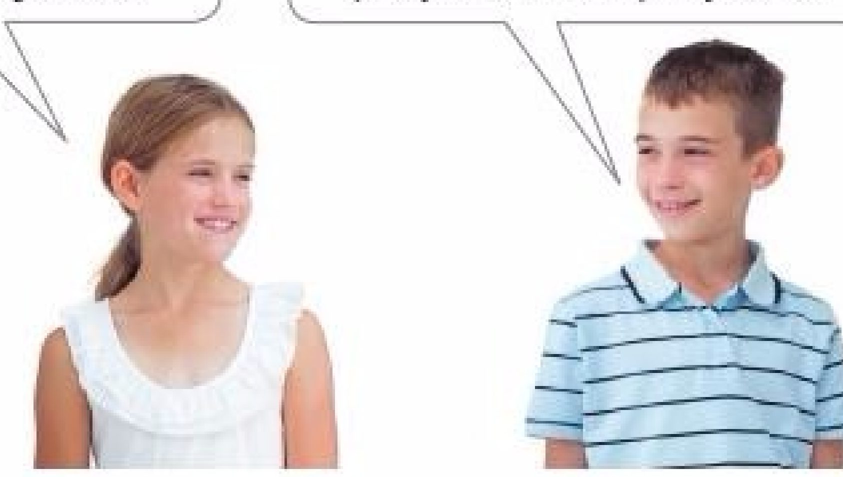
$$(-17) - (-36) + (-20) - (-13) =$$
$$= -17 + 36 - 20 + 13 =$$
$$= +19 - 20 + 13 =$$
$$= -1 + 13 = +12 = 12$$

$$(-17) - (-36) + (-20) - (-13) = 12$$

Em somas algébricas como a que acabamos de calcular, podemos também aplicar a propriedade associativa da adição e agrupar os números positivos em um grupo e os números negativos em outro. Veja:

$$(-17) - (-36) + (-20) - (-13) =$$
$$= -17 + 36 - 20 + 13 =$$
$$= +36 + 13 - 17 - 20 =$$
$$= +49 - 37 = +12 = 12$$

$$(-17) - (-36) + (-20) - (-13) = 12$$



FOTOGRAFIAS: THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Outro exemplo:

A soma algébrica apresentada a seguir tem termos que são simétricos e com soma zero.

$$-13 - 8 + 5 + 20 + 8 + 6 - 20$$

Na prática, esses números são **cancelados** entre si.

$$-13 - 8 + 5 + 20 + 8 + 6 - 20 =$$
$$= -13 - \cancel{8} + 5 + \cancel{20} + \cancel{8} + 6 - \cancel{20} =$$
$$= -13 + 5 + 6 = -13 + 11 = -2$$

Cancelamos
-8 e $+8$, e
$+20$ e -20.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

19. Calcule o valor destas expressões:

a) $-38 + (-40) - (-18)$ −60

b) $420 - (+130) + (+200)$ 490

c) $-150 - (-93) + (-100) - (+76)$ −233

d) $325 + (-168) - (-271) + (-48)$ 380

20. Paulo e Jair jogaram baralho. Nesta tabela foram registrados os pontos ganhos e perdidos por eles em quatro rodadas:

Rodada	Paulo	Jair
1ª	−80	+90
2ª	−200	+120
3ª	+150	−30
4ª	+80	−100

a) Qual é o saldo de pontos de cada um, após a quarta rodada? Paulo: −50; Jair: 80.

b) Quem fez mais pontos? Quantos pontos a mais? Jair; 130.

21. Estas expressões podem ser calculadas de diferentes maneiras:

cancelando termos simétricos
calculando na ordem em que aparecem
calculando separadamente: números positivos e números negativos.

Junte-se a dois colegas e cada um calcula de uma maneira. Ao final, confiram se os resultados são iguais.

a) $-32 - 28 + 50 + 32 + 28 - 12$ 38

b) $+125 - 47 - 18 + 47 - 125 + 18$ 0

22. Simplifique a escrita desta expressão e calcule seu valor. −97

$$(-98) + (+48) + (-7) + (-40)$$

23. As próximas expressões envolvem a adição e a subtração. Qual é o resultado de cada uma delas?

a) $(+98) + (-48) - (+60) - (-48) + (-98)$ −60

b) $(-400) + (+348) - (-400) - (+48)$ 300

c) $(+213) - (+26) + (-67) - (-26) + (-146)$ 0

d) $(-70) + (+52) - (-15) - (+320) - (+52)$ −375

24. O saldo bancário de Rui, no dia 01/09/2014, era de R$ 1 538,00. No período de 01/09/2014 a 18/09/2014, o seu extrato bancário apresentou o movimento abaixo.

Qual o saldo bancário de Rui no dia 18/09/2014? R$ 1035,00

BIS

Banco da Amizade S. A.
Extrato Conta-Corrente
Período: 01/09/2014 a 18/09/2014

Dia	Histórico	Débito R$	Crédito R$	Saldo R$
01	Saldo anterior	———	———	1538,00
09	Saque	323,00	———	
15	Depósito	———	100,00	
18	Saque	280,00	———	

Troquem ideias e resolvam

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a dois colegas, reflitam, experimentem e resolvam.

A expressão apresentada ao lado pode ter valores diferentes dependendo da maneira como os termos são associados.

$$(-27) - (-40) - (+36) - (-19)$$

Querem experimentar?

Então, copiem-na em seus cadernos, acrescentem colchetes e chaves. Depois, troquem com um de seus colegas. Cada um calcula o valor da expressão que recebeu.

Respostas possíveis: $(-27) - \{(-40) - [(+36) - (-19)]\} = 68$; $(-27) - \{[(-40) - (+36)] - (-19)\} = 30$

Exercícios complementares

FAÇA NO CADERNO

25. Copie cada sentença, substituindo o ■ pelos símbolos $<$, $>$ ou $=$, de modo que seja verdadeira:

a) $-100 + 56$ ■ -55 $>$

b) -39 ■ $-18 + 5 - 25$ $<$

c) -45 ■ $80 - 45 - 80$ $=$

26. Em um jogo de cartas, Celso ganhou 210 pontos na primeira partida e 320 pontos na segunda; perdeu 430 na terceira, ganhou 50 na quarta e juntou todos os pontos ao final do jogo.

a) Celso ficou com pontos ganhos ou pontos perdidos? Ganhos.

b) Quantos pontos? Dê a sua resposta usando números inteiros. $+150$

27. Nestes itens, as letras **x** e **y** representam números inteiros. Responda às questões:

a) Quando $x + y = 0$ e $x = -138$, qual é o valor de y? 138

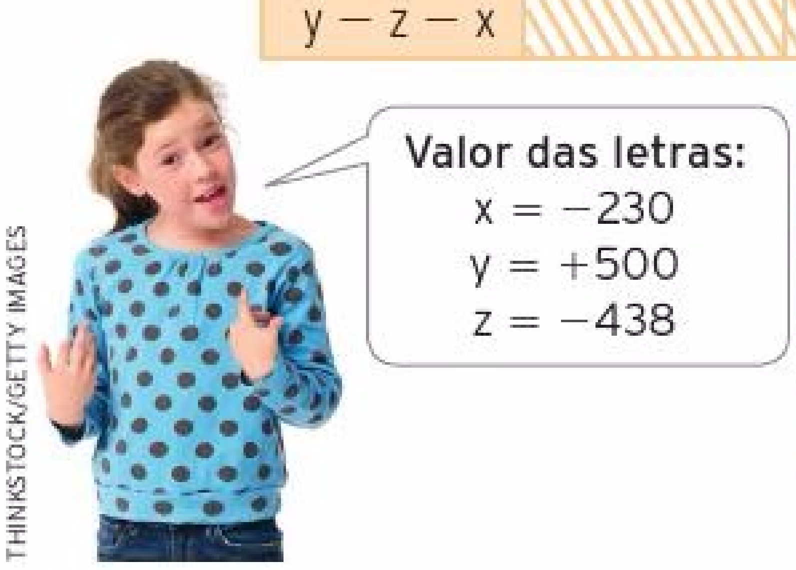
b) Quando $x + y = 0$ e $y = 2\,450$, qual é o valor de x? -2450

c) Quando $x = -y$ e $y = -60$, qual é o valor de x? 60

d) Quando escrevemos $x = -y$, que tipo de números representam as letras x e y?
x e **y** representam números opostos, ou seja, que obedecem à relação $x + y = 0$.

28. Construa uma tabela como a que vem a seguir e complete-a. Nela, cada letra representa um número inteiro.

	Cálculos	Resultado
$x - y$		
$y - x$		
$x + z - y$		
$y - z - x$		



THINKSTOCK/GETTY IMAGES

$(-230) - (+500) = -230 - 500$; -730
$(+500) - (-230) = 500 + 230$; $+730$
$(-230) + (-438) - (+500) = -230 - 438 - 500$; $-1\,168$
$(+500) - (-438) - (-230) = 500 + 730 + 438 + 230$; $1\,168$

29. Nestes itens, as letras **a**, **b** e **c** representam números inteiros.

a) Se $-150 - (b + c) = 0$, então qual será o valor de $(b + c)$? -150

b) Escolha valores para **b** e **c** de modo que $-150 - (b + c) = 0$. Resposta possível: $b = -50$, $c = -100$

c) Se $(a - b) - 100 = -1$, então qual será o valor de $(a - b)$? 99

d) Se $(a - b) - 100 = 0$ e **a** for igual a 102, então qual será o valor de **b**? 2

Ao explorar a pré-álgebra, certifique-se de que seus alunos percebem, ainda que intuitivamente, as letras como variáveis e a possibilidade de utilizá-las como generalização da aritmética. Veja as atividades de 27 a 29.

Troquem ideias e resolvam

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega, reflitam sobre a questão e respondam.

Esta sequência de números segue um padrão. Descubram-no e, em seguida, copiem e completem a sequência em seu caderno conforme o padrão descoberto. Cada número, a partir do -27, é o anterior mais 13.

-40	-27	-14	-1	12	25	38	51

2 Multiplicação e divisão

Multiplicação de números inteiros

A multiplicação de números inteiros também está presente em muitas situações do nosso dia a dia. Vamos aprender um pouco sobre ela. O conceito de multiplicação de números inteiros é diferente daquele que os alunos construíram com os números naturais: faz-se aqui uma ampliação dos conceitos de operação já conhecidos. Certifique-se de que eles acompanham este texto com compreensão e significado. Para mais esclarecimentos, leia texto no **Manual do Professor**.

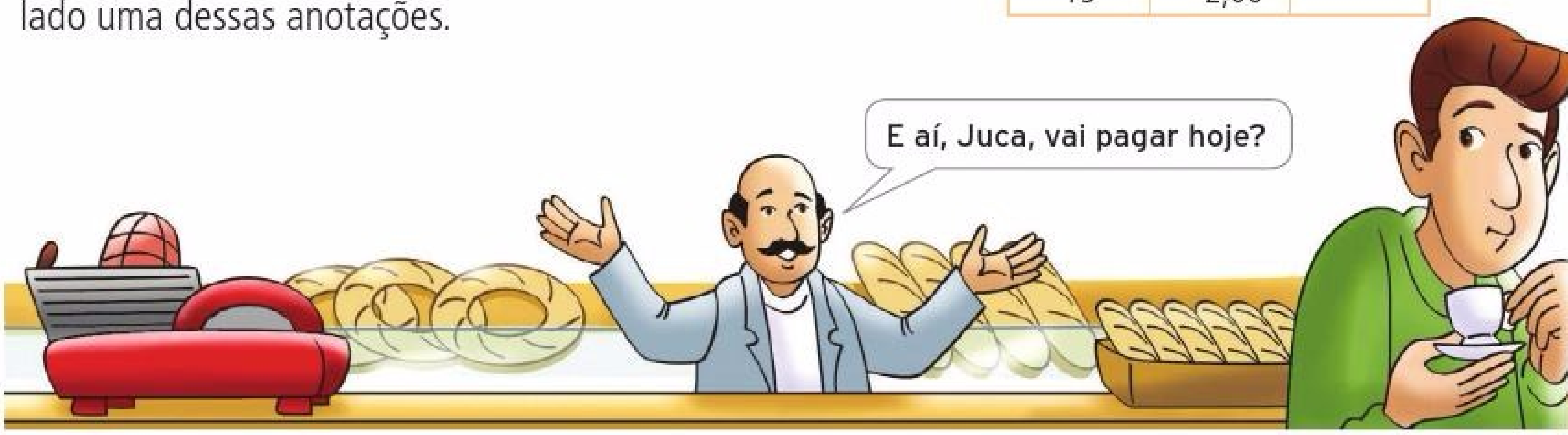
Para refletir e responder

Seu Antônio é dono de uma padaria.

Lá, Juca toma café da manhã e também almoça. Às vezes, ele paga na hora; outras vezes, "pendura". Seu Antônio anota tudo em um caderno. Observe ao lado uma dessas anotações.

Juca — março

Dia	Café	Almoço
3	−2,00	—
9	−2,00	—
10	−2,00	—
15	−2,00	—



HÉLIO SENATORE

- Qual é a dívida de Juca com seu Antônio? R$ 8,00.

Juliana logo pensou na adição para resolver o problema:

$$\underbrace{(-2) + (-2) + (-2) + (-2)}_{4 \text{ vezes } -2} = 4 \times (-2)$$

$$4 \times (-2) = \underbrace{-2 - 2 - 2 - 2}_{-8}$$

$$\boxed{4 \times (-2) = -8}$$

Como a adição efetuada tem 4 parcelas iguais a −2, podemos utilizar a multiplicação e indicar por **4 × (−2)**.

Vamos ver o que acontece com o produto de dois números negativos, por exemplo, (−3) × (−5), descobrindo um padrão na sequência apresentada a seguir.

−20	−15	−10	−5					

FOTOGRAFIAS: THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Um dos padrões pode envolver a adição: **cada número**, a partir do segundo, **é o anterior mais 5**.

$-20+5$	$-15+5$	$-10+5$	$-5+5$	$0+5$	$+5+5$	$\mathbf{+10+5}$	$+15+5$	
-20	-15	-10	-5	0	$+5$	$+10$	$\mathbf{+15}$	$+20$

Também podemos pensar na **multiplicação** de números inteiros **por -5**, como padrão. Vamos escrever uma sequência numérica começando com **$4 \times (-5)$** seguido de **$3 \times (-5)$**, e assim por diante, e completá-la observando o resultado anterior:

$4 \times (-5)$	$3 \times (-5)$	$2 \times (-5)$	$1 \times (-5)$	$0 \times (-5)$	$(-1) \times (-5)$	$(-2) \times (-5)$	$\mathbf{(-3)} \times \mathbf{(-5)}$	$(-4) \times (-5)$
-20	-15	-10	-5	0	$+5$	$+10$	$\mathbf{+15}$	$+20$

Observe que $(-3) \times (-5) = +15$.

Podemos chegar ao mesmo resultado utilizando o **oposto** ou o **simétrico** de um número inteiro:

$$(-3) \times (-5) =$$
$$= -(+3) \times (-5) =$$
$$= -[(+3) \times (-5)] =$$
$$= -[-15] = +15 = 15$$

-3 é o oposto de $+3$
ou -3 é $-(+3)$.

$(-3) \times (-5) = +15$

FOTOGRAFIAS: THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Exemplos:

- Qual é o valor do produto $(+5) \times (+8)$?

Como números inteiros positivos são também números naturais, podemos pensar em um produto de números naturais.

A multiplicação envolvendo dois números inteiros negativos é a operação que apresenta maior dificuldade de compreensão por parte dos alunos. Não existem situações do dia a dia por meio das quais ela possa ser entendida. Qualquer "justificativa" será formal e matemática. Para mais esclarecimentos, leia texto no **Manual do Professor**.

$$(+5) \times (+8) =$$
$$= 5 \times 8 = 40$$

$(+5) \times (+8) = +40 = 40$

Lembre-se:
$+1 = 1$
$+2 = 2...$

- Qual é o resultado de $(-8) \times (+2)$?

Lembrando o que aprendemos sobre números inteiros opostos ou simétricos, -8 é o oposto de $+8$:

$$(-8) \times (+2) =$$
$$= -(+8) \times (+2) =$$
$$= -(8 \times 2) = -16$$

$(-8) \times (+2) = -16$

Lembre-se:

- a multiplicação de dois números inteiros com sinais iguais:

$(+5) \times (+8) = +40$ — sinal positivo; produto dos módulos

$(-3) \times (-5) = +15$ — sinal positivo; produto dos módulos

O produto de dois números inteiros com **sinais iguais** é um número inteiro **positivo**, com módulo igual ao produto dos módulos dos fatores.

- a multiplicação de dois números inteiros com sinais diferentes:

$(+4) \times (-2) = -8$ — sinal negativo; produto dos módulos

$(-8) \times (+2) = -16$ — sinal negativo; produto dos módulos

O produto de dois números inteiros com **sinais diferentes** é um número inteiro **negativo**, com módulo igual ao produto dos módulos dos fatores.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

30. Em que situação o produto de dois números inteiros tem sinal negativo?
Quando os dois fatores têm sinais diferentes.

31. Certo mês, a conta bancária de Carlos tinha saldo positivo de R$ 900,00. Ele pagou algumas contas com cinco cheques no valor de R$ 140,00 cada um. Esse valor apareceu no extrato como cinco débitos de R$ 140,00. Como se indica o débito total, usando a multiplicação? Que registro corresponde a esse débito? $5 \times (-140)$; −R$ 700,00.

32. O produto de dois números inteiros é $+21$. Que escritas numéricas multiplicativas poderiam dar esse resultado?
Resposta possível: $(+3)\times(+7)$; $(-3)\times(-7)$.

33. Calcule:

a) $(+3) \times (-8)$ -24

b) $(+7) \times (-9)$ -63

c) $(+6) \times (-5)$ -30

d) $(-8) \times (-9)$ 72

34. Copie e complete corretamente esta tabela:

Frases	Expressão numérica	Resultado
O produto de -13 pelo oposto de 7.	$(-13) \times (-7)$	91
O produto de -80 pelo oposto de -42.	$(-80) \times (+42)$	-3360
O produto do oposto do oposto de 42 pelo oposto de 20.	$-(-42) \times (-20)$	-840

Usando a calculadora

- Que número aparece no visor da calculadora quando multiplicamos **31 406** por **2 385**? 74 903 310
- Agora, encontre estes produtos sem efetuar cáculos:

a) $(-31406) \times (+2385)$ $-74\,903\,310$

b) $(+31406) \times (-2385)$ $-74\,903\,310$

c) $(-31406) \times (-2385)$ $74\,903\,310$

d) $(-2385) \times (-31406)$ $74\,903\,310$

e) $(+2385) \times (-31406)$ $-74\,903\,310$

A multiplicação e as propriedades

Propriedade comutativa

A propriedade comutativa vale também para a multiplicação de números inteiros? Vamos verificar, calculando alguns produtos.

Exemplos:

- Com os números **+3** e **−2**.

$$(+3) \times (-2) = -6$$
$$\text{e } (-2) \times (+3) = -6$$
$$(+3) \times (-2) = (-2) \times (+3)$$

- Com os números **−5** e **−4**.

$$(-5) \times (-4) = 20$$
$$\text{e } (-4) \times (-5) = 20$$
$$(-5) \times (-4) = (-4) \times (-5)$$

Podemos mostrar que:

> Na multiplicação de números inteiros, vale a propriedade comutativa, isto é, **a ordem dos fatores não altera o produto**.

Elemento neutro

Já sabemos que 1 é o elemento neutro na multiplicação de números naturais.

Observe agora a multiplicação de números inteiros por **+1**:

$$(+5) \times (+1) = +5 \qquad (-5) \times (+1) = -5$$
$$(+1) \times (-5) = -5 \qquad (+1) \times (+5) = +5$$

> O **elemento neutro** da multiplicação de números inteiros é **+1** ou **1**.

Propriedade associativa

Observe duas maneiras de calcular **(+2) × (−7) × (+5)**:

- Calculamos (+2) × (−7) e, em seguida, multiplicamos o resultado por (+5).

$$\underbrace{(+2) \times (-7)} \times (+5) =$$
$$= (-14) \times (+5) = -70$$

- Calculamos (−7) × (+5) e, em seguida, multiplicamos o resultado por (+2).

$$(+2) \times \underbrace{(-7) \times (+5)} =$$
$$= (+2) \times (-35) = -70$$

Usando colchetes para indicar a ordem em que os cálculos foram efetuados:

$$[(+2) \times (-7)] \times (+5) = (+2) \times [(-7) \times (+5)]$$

Podemos mostrar que:

> Em um produto de três ou mais fatores, podemos **associá-los de formas diferentes** que o **resultado será sempre o mesmo**.

Propriedade distributiva da multiplicação em relação à soma algébrica

$$(-13) \times (+2 - 7)$$

Observe esta expressão ao lado.

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Podemos determinar o valor dessa expressão de dois modos:

- Calculando primeiro a soma algébrica.

$$(-13) \times \underbrace{(+2 - 7)}_{} =$$
$$= (-13) \times (-5) = \boxed{+65}$$

- Calculando primeiro o produto de -13 por $+2$ e depois o de -13 por -7 e adicionando os resultados obtidos.

$$\underbrace{(-13) \times (+2)}_{} + \underbrace{(-13) \times (-7)}_{} =$$
$$= (-26) + (+91) =$$
$$= -26 + 91 = \boxed{+65}$$

os **resultados** são **iguais**

$$\mathbf{(-13) \times (+2 - 7) = (-13) \times (+2) + (-13) \times (-7)}$$

Podemos mostrar que:

> O **produto de um número inteiro por uma soma algébrica** pode ser transformado na **soma algébrica dos produtos desse número pelas parcelas dessa soma**.

Incentive os alunos a trabalhar com o módulo dos números envolvidos em um cálculo. Veja as atividades 37, 39 e 40 e a seção **Investigue e explique**.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

35. Copie as sentenças, substituindo o ■ e usando a propriedade comutativa da multiplicação:

a) $(+8) \times (-6) =$ ■ $(-6) \times (+8)$

b) $(-10) \times (+4) =$ ■ $(+4) \times (-10)$

c) $(-16) \times (-6) =$ ■ $(-6) \times (-16)$

d) $(+12) \times (-12) =$ ■ $(-12) \times (+12)$

36. Calcule "de cabeça" e anote o resultado.

a) $(+3) \times (+1) =$ ■ 3

b) $(+1) \times (-8) =$ ■ -8

c) $(+1) \times (+179) =$ ■ 179

d) $(-1000) \times (+1) =$ ■ -1000

37. Qual é o valor da expressão $(-5) \times (-8) \times (-6)$? Que cálculos foram feitos? -240. Resposta pessoal.

38. Copie a expressão abaixo, substituindo o ■ por uma soma algébrica.

$$(-3) \times (-4) + (-3) \times (+9) = (-3) \times ■$$

$(-3) \times (-4) + (-3) \times (+9) = (-3) \times (-4 + 9)$

39. Responda às questões considerando esta expressão:

$$(-2) \times (-8) \times (+10) \times (-5)$$

a) Existe alguma associação de fatores que facilite o cálculo mental? Qual? a) Sim. Resposta possível: Calcular $(-2) \times (-5)$, $(-8) \times (+10)$ e o produto entre os resultados obtidos.

b) Que valor se obtém para essa expressão? -800

40. Observe a expressão:

$$(+536) \times (-1) \times (+1) \times (-1) \times (+1) \times (-1)$$

a) Qual é o sinal do produto? Negativo.

b) Qual é o valor desse produto? -536

c) Troque o sinal de um dos fatores dessa expressão para que o produto seja 536.

Resposta possível: $(-536) \times (-1) \times (+1) \times (-1) \times (+1) \times (-1)$

Investigue e explique

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega, reflitam sobre as questões e respondam.

- Calculem mentalmente:

$(+2) \times (-7) \times (+5)$ -70

$(-3) \times (-20)$ 60

$(-4) \times (-9) \times (+10) \times (-5)$ -1800

$(-1) \times (-11) \times (-7) \times (-5) \times (-2)$ -770

$(+5) \times (-2) \times (-1) \times (+4) \times (-5) \times (-6)$ 1200

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Agora, respondam:

- Qual é o sinal do produto quando existem:
  a) um, três ou cinco fatores negativos? Negativo.
  b) dois ou quatro fatores negativos? Positivo.
- As afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas? Verdadeiras.
  Quando temos um produto de dois ou mais números inteiros:
  a) se a quantidade de fatores negativos for par, o sinal do produto será positivo;
  b) se a quantidade de fatores negativos for ímpar, o sinal do produto será negativo.

Exercícios complementares

FAÇA NO CADERNO

41. Determine o valor de **n** em cada igualdade:

a) $(-9) \times n = -9$ 1

b) $n \times (+34) = (+34) \times (-60)$ -60

c) $n \times (-100) = 100$ -1

42. O produto de três números inteiros é negativo. Que sinais eles podem ter?
−, −, −; −, +, +; +, +, −; +, −, +

43. Determine apenas o sinal de cada produto:

a) $(-5) \times (+2) \times (-2) \times (+3) \times (-3)$ −

b) $(-1) \times (+3) \times (-7) \times (+2) \times (+5)$ +

c) $(-46) \times (+231) \times (-58) \times (-71) \times (+19)$ −

d) $(-83) \times (-145) \times (-71) \times (-9) \times (-343)$ −

e) $(-27) \times (+118) \times (+76) \times (-17) \times (+125)$ +

44. Calcule e depois responda:

a) $(+10) \times (-1)$ -10

b) $(-73) \times (-1)$ $+73$

c) $(+922) \times (-1)$ -922

A multiplicação de um número inteiro, positivo ou negativo, por -1 resulta no oposto do número? Sim.

Como dividir números inteiros?

Para refletir e responder

O produto de dois números inteiros é $+65$. Se um dos números é -13, qual é o outro número?

Se fosse $+13$, seria igual a 13...

... e bastaria calcular 65 : 13.

- Qual é a resposta para a questão acima?
  -5

Uma das maneiras de encontrar o número que multiplicado por -13 resulte $+65$ é calcular $(+65) : (-13)$ efetuando os cálculos com os valores absolutos desses números e fazendo um acerto de sinais depois.

$$\begin{array}{r|l} 65 & 13 \\ \hline 0 & 5 \end{array}$$

Então:

$65 : 13 = 5$, porque $5 \times 13 = 65$

Bom... 5 é o valor absoluto de um dos fatores e sei que o outro fator é -13, que é negativo.

FOTOGRAFIAS: THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Como o **produto** é **positivo**, os **dois fatores** têm **sinais iguais**; como um deles é -13, negativo, o outro também deve ser negativo, ou seja, é -5.

$$(-5) \times (-13) = +65$$

Portanto, -5 é o número que multiplicado por -13 resulta em $+65$.

Dizemos que:

$$(+65) : (-13) = -5 \quad \text{porque} \quad (-5) \times (-13) = +65$$

A operação efetuada para determinar o -5 foi uma **divisão de números inteiros**.

Podemos observar que a multiplicação e a divisão são operações inversas.

Exemplo:

Qual é o número que multiplicado por **−16** resulta em **−288**?

$$\begin{array}{r|l} 288 & 16 \\ \hline 128 & 18 \\ 0 & \end{array}$$

Da mesma forma que na situação anterior, calculamos $(-288) : (-16)$ efetuando uma divisão entre os valores absolutos desses números e, em seguida, fazendo um acerto de sinais.

Como um dos fatores é −16, negativo, o outro deve ser positivo, **+18** ou **18**.

O número que multiplicado por −16 resulta em −288 é 18.

Como: $(+18) \times (-16) = -288$, podemos escrever:

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

$(-288) : (-16) = 18$ ou

$(-288) : (+18) = -16$

Lembre-se, na divisão de dois números inteiros, se:

- dividendo e divisor têm sinais iguais:

$(+56) : (+8) = +7$

quociente dos módulos

sinal positivo

$(-288) : (-16) = +18$

quociente dos módulos

sinal positivo

- dividendo e divisor têm sinais diferentes:

$(+65) : (-13) = -5$

quociente dos módulos

sinal negativo

$(+56) : (-8) = -7$

quociente dos módulos

sinal negativo

Observações:

- Não existe divisão por zero.

Exemplo:

(−15) : 0 não tem significado, pois não existe um número inteiro cujo produto por zero seja igual a −15 .

- Zero dividido por qualquer número inteiro, diferente de zero, é igual a zero.

Exemplos:

0 : (+13) = 0, pois $(+13) \times 0 = 0$

0 : (−19) = 0, pois $(-19) \times 0 = 0$

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

45. Observe este produto:

$$(+14) \times (-65) = -910$$

a) Qual é o valor do quociente $(-910) : (-65)$? +14 ou 14

b) Qual é o valor do quociente $(-910) : (+14)$? −65

46. Calcule mentalmente e anote o resultado:

a) $(-18) : (+6)$ −3

b) $(-35) : (-5)$ 7

c) $(+70) : (+7)$ 10

d) $(+45) : (-9)$ −5

e) $(-49) : (+7)$ −7

f) $(-81) : (-9)$ 9

47. Qual é o quociente da divisão de -204 pelo oposto de -12? −17

48. Na divisão $(+2\,000) : (-10)$, qual é o resultado? −200

49. Nas igualdades a seguir, os ■ escondem números inteiros. Copie cada igualdade, substituindo o ■ pelo número escondido.

a) $(-18) : ■ = 9$ −2

b) $(-40) \times ■ = 120$ −3

c) $■ : (-4) = -25$ 100

d) $■ \times (-10) = -200$ 20

e) $■ : (-85) = 0$ 0

f) $0 : ■ = 0$ Resposta possível: 2

50. Decomponha -60 em um produto de dois números inteiros, de pelo menos três maneiras diferentes.
Respostas possíveis: $(+6) \times (-10)$, $(-3) \times (+20)$, $(-5) \times (+12)$

Usando a calculadora

- Calcule e anote:

a) $(-1\,156) : (+34)$ −34

b) $(+1\,560) : (-52)$ −30

c) $(-1\,161) : (+27)$ −43

d) $(-1\,008) : (-63)$ +16

e) $(+1\,161) : (-43)$ −27

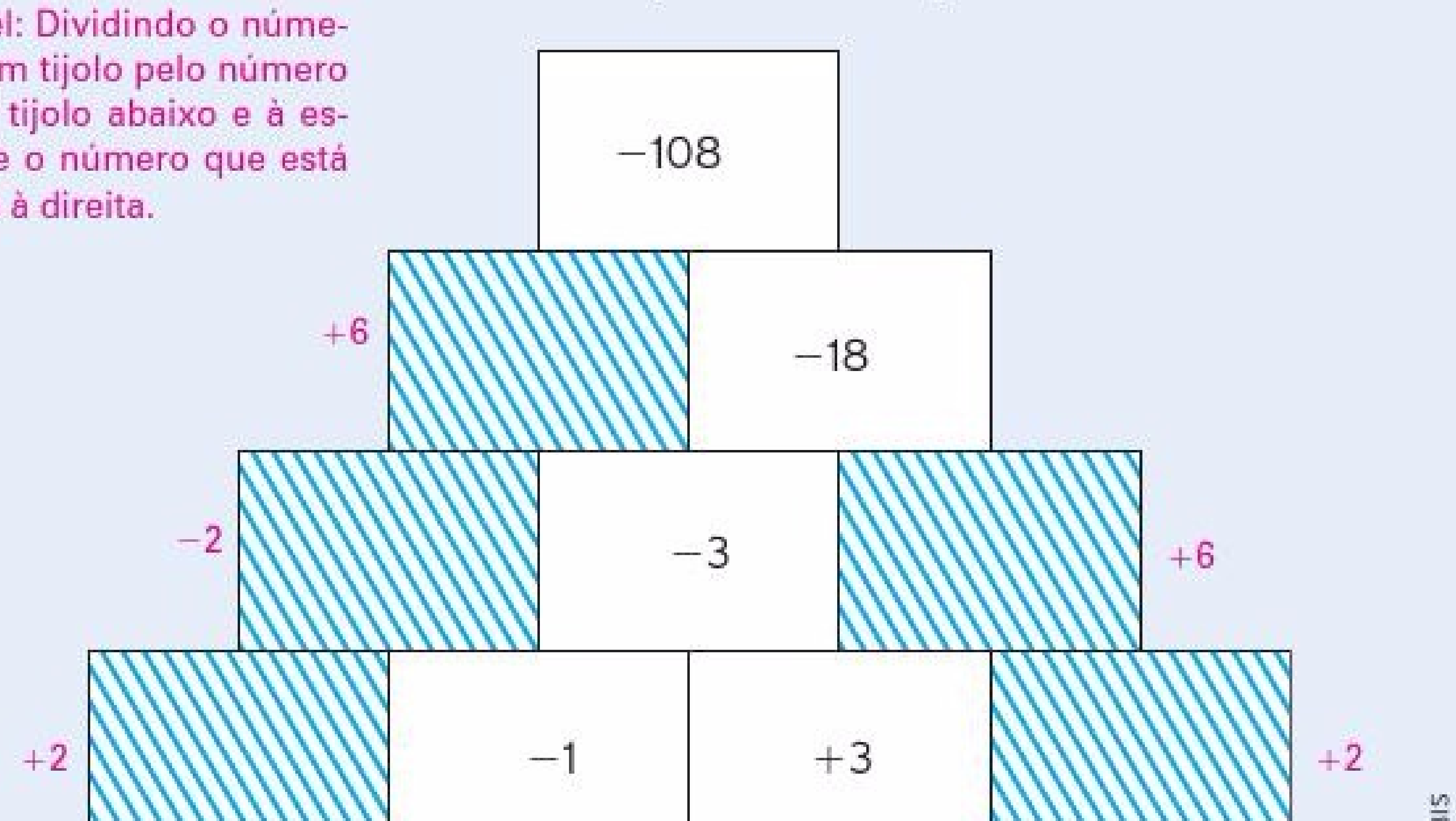
f) $(-3\,503) : (-31)$ +113

Troquem ideias e resolvam

FAÇA NO CADERNO

- Esta pirâmide de números inteiros tem um padrão. Que padrão é esse?

Resposta possível: Dividindo o número que está em um tijolo pelo número que está em um tijolo abaixo e à esquerda, obtém-se o número que está no tijolo abaixo e à direita.



- Copiem e completem no caderno a pirâmide de acordo com o padrão descoberto.

Exercícios complementares

FAÇA NO CADERNO

51. Copie estas igualdades, substituindo o ■ pelos símbolos $<$, $>$ ou $=$.

a) -146 ■ $(-8) \times (+9)$ $<$

b) $(+25) : (-25)$ ■ -1 $=$

c) 0 ■ $(-48) \times (+12 - 6)$ $>$

d) 169 ■ $(-13) \times (-18 + 5)$ $=$

52. Construa uma tabela como esta. Em seguida, complete-a, escrevendo dois quocientes para cada produto, envolvendo os mesmos números.

Multiplicação	Divisão
$(-38) \cdot (+25) = -950$	$(-950) : (-38) = +25$
	$(-950) : (+25) = -38$
$(-64) \cdot (-14) = +896$	$(+896) : (-14) = -64$
	$(+896) : (-64) = -14$
$(+26) \cdot (-57) = -1482$	$(-1482) : (+26) = -57$
	$(-1482) : (-57) = 26$
$(-93) \cdot (+34) = -3162$	$(-3162) : (-93) = 34$
	$(-3162) : (+34) = -93$

53. Faça o que se pede a seguir.

a) Pense em três números inteiros consecutivos, sendo $+1$ um deles. Qual é o produto desses números?
Resposta possível: $(-1) \times 0 \times (+1)$; 0

b) Considere o número -10 e escolha outros dois números inteiros menores que ele e que, juntos, formem três números inteiros consecutivos. Qual é o produto desses três números?
-12 e -11; -1320

54. Desenhe uma tabela como esta em seu caderno e complete-a. Use uma calculadora para determinar os quocientes.

Dividendo	Divisor	Quociente
-108	$+60$	$-1,8$
$+111$	-3	-37
$+96$	-12	-8
-58	$+4$	$-14,5$

a) Foi possível preencher toda a tabela com números inteiros? Não.

b) Quais são as divisões não exatas?
$(-108) : (+60)$; $(-58) : (+4)$

Explore outras situações que envolvam a pré-álgebra. Certifique-se de que os alunos conseguem utilizá-la como linguagem e generalização de propriedades dos números inteiros.

Uso de letras para representar números inteiros

Em Matemática, podemos usar letras minúsculas do nosso alfabeto para representar um número inteiro qualquer.

Exemplo:

Descubra o valor de **n** na igualdade $n - (-12) = -38$.

SHUTTERSTOCK

Podemos fazer um esquema e pensar nas operações e suas inversas:

$$\boxed{n} \xrightarrow{-(-12)} \boxed{-38}$$
$$\boxed{n} \xleftarrow{+(-12)} \boxed{-38}$$

$n - (-12) = -38$ ——— $n = -38 + (-12)$ ——— $n = -38 - 12$ ——— $\mathbf{n = -50}$

Podemos verificar se $\mathbf{-50}$ é o número que procuramos substituindo **n** por $\mathbf{-50}$ na igualdade dada:

$$n - (-12) = -38$$
$$-50 - (-12) = -38$$
$$-50 + 12 = -38 \quad \text{sentença verdadeira}$$

O valor de **n** é -50.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

55. A letra **n** representa um número inteiro. Descubra o valor de **n** nesta igualdade: 17

$$n + (-25) = -8$$

56. Qual é o valor destas letras? Descubra, copie e complete:

a) $\boxed{A} \xrightarrow[-30]{\times 8} \boxed{-240}$

b) $\boxed{C} \xrightarrow[-15]{\times(-10)} \boxed{150}$

c) $\boxed{D} \xrightarrow[20]{\times(-5)} \boxed{-100}$

57. Qual é o valor de **n** nos esquemas apresentados a seguir? Descubra, copie e complete:

a) $\boxed{n} \xrightarrow[520]{:(-13)} \boxed{-40}$

b) $\boxed{-15} \xrightarrow[-43]{\times n} \boxed{645}$

c) $\boxed{3 \times n} \xrightarrow[-72]{:(-8)} \boxed{27}$

d) $\boxed{2 \times n} \xrightarrow[-20]{+(-54)} \boxed{-94}$

58. A letra **x** representa um número inteiro. Descubra o valor de **x** nesta igualdade: −288

$$x : (-4) = 72$$

59. A letra **A** representa um número inteiro e é o valor desta expressão:

$$A = (-37 + 100) : (-3)$$

a) Qual é o valor de **A**? −21

b) Qual é o valor da expressão **A** : (−3)? 7

c) Se a letra **x** representa um número inteiro diferente de zero e **A** : x = 1, então qual é o valor de **x**? −21

d) Se a letra **c** representa um número inteiro e A + c = 0, então qual é o valor de **c**? 21

60. Copie esta tabela e complete-a observando os exemplos dados. Considere que a letra **n** representa um número inteiro.

Linguagem matemática	Significado
$n - (-6)$	Diferença entre um número inteiro e −6.
$n : (-4)$	Quociente de um número inteiro por −4.
$(-20) - n$	Diferença entre −20 e um número inteiro.
$n \times (+18)$	Produto de um número inteiro por +18.
$n : (-27)$	Quociente de um número inteiro por −27.

Troquem ideias e resolvam

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega, reflitam sobre as questões e respondam.

- Copiem os quadros em seus cadernos e completem-nos.

n	−6	10	−25	−98
2 × n	2 × (−6)	2 × 10	2 × (−25)	2 × (−98)
Valor de 2 × n	−12	20	−50	−196

n	53	91	−30	−48
2 × n + 1	2 × 53 + 1	2 × 91 + 1	2 × (−30) + 1	2 × (−48) + 1
Valor de 2 × n + 1	107	183	−59	−95

A letra **n** representa números inteiros, e **2 × n** representa o produto de **2** pelo valor de **n**.

- Se a letra **n** representa números inteiros, o que representa **2 × n + 1**?

Representa o produto de um número inteiro por 2 somado com 1.

Desafio

FAÇA NO CADERNO

Brincando de espelho

Para desenvolver esta atividade, providencie uma folha de papel quadriculado.

- Copie os números da figura a seguir, na posição em que eles estão, e complete as demais casas com os números inteiros, de modo que cada faixa azul funcione como "espelho".
Veja respostas no final do livro.

$(-4) \times (+5)$

$(-5) \times (+3)$

						6	6	12	18	24	30	36
		−20				5	5	10	15	20	25	30
						4	4	8	12	16	20	24
	−15					3	3	6	9	12	15	18
			−6			2	2	4	6	8	10	12
						1	1	2	3	4	5	6
−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6
						−1						
						−2						−12
						−3						
						−4						
						−5						
						−6						

$(+6) \times (-2)$

Não escreva no livro.

Veja respostas no final do livro.

- Os números da região amarela são "imagens" dos que estão na parte cor-de-rosa, refletidas no "espelho". Quais são esses números?
- Os números da região verde são "imagens" dos que estão na parte cor-de-rosa, refletidas no "espelho". Quais são esses números?
- Os números da região bege são "imagens" dos que estão na parte amarela ou na parte verde, refletidas no "espelho". Quais são esses números?
- Os espelhos dividiram o plano em quatro regiões. Escolha e escreva no papel quadriculado dois produtos de cada região. Respostas possíveis: **rosa:** $(+3) \times (+4) = 12$; $(+4) \times (+4) = 16$; **amarelo:** $(-2) \times (+4) = -8$; $(-1) \times (+6) = -6$; **verde:** $(+3) \times (-4) = -12$; $(+5) \times (-6) = -30$; **bege:** $(-2) \times (-5) = +10$; $(-5) \times (-5) = +25$

3 Potência e raiz quadrada

Simplificando a escrita multiplicativa

Algumas situações que envolvem a multiplicação têm todos os fatores iguais, como na situação a seguir.

Para refletir e responder

Em um jogo com cartelas vermelhas e verdes, os pontos nelas marcados são multiplicados.

As cartelas verdes representam pontos ganhos e as vermelhas, pontos perdidos. Em três jogadas seguidas, Edu retirou estas cartelas:

6 6 6

FRANCISCO VILACHÁ

- Ele ganhou ou perdeu pontos após a terceira jogada? Quantos?

Perdeu pontos; -216.

Como você deve ter notado, a situação apresentada envolve a multiplicação de fatores iguais.

Como Edu retirou três cartelas vermelhas, ele tem pontos perdidos em cada uma dessas jogadas. Esses pontos podem ser representados por números inteiros negativos. O total desses pontos é indicado por um **produto de três números inteiros iguais a −6**.

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

$$\underbrace{(-6) \times (-6) \times (-6)}_{-216} = (-6)^3$$

Lê-se: "menos seis ao cubo".

$$(-6)^3 = -216$$

Note que em $(-6)^3$ a base é um número inteiro e o expoente, um número natural.

O uso de **potências simplifica** uma **escrita multiplicativa** com fatores iguais.

Outro exemplo:

$$\underbrace{(-4) \times (-4) \times (-4) \times (-4) \times (-4)}_{-1024} = (-4)^5$$ ← Lê-se: "−4 à quinta potência".

Explore o conceito de potências fazendo analogia com o tema, já explorado com os números naturais. Certifique-se de que os alunos relacionam o sinal positivo ou negativo à quantidade de fatores com sinal negativo.

$(-4)^5 = -1024$

Para potências com números inteiros, em que o expoente é um número natural, também valem as propriedades a seguir:

- Um número inteiro qualquer elevado a **1** é igual a ele mesmo.

$0^1 = 0$ $\quad (+4)^1 = 4$ $\quad (-10)^1 = -10$ $\quad (-320)^1 = -320$

- Um número inteiro qualquer, diferente de zero, elevado a **0**, é igual a **1**.

$(+4)^0 = 1$ $\quad (-10)^0 = 1$ $\quad (-320)^0 = 1$

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

61. Represente estas expressões utilizando potências e calcule:

a) -15 elevado ao quadrado. $(-15)^2$; 225

b) a potência de base -10 e expoente 5. $(-10)^5$; -100000

c) -1 elevado à décima potência. $(-1)^{10}$; 1

d) a potência de base 0 e expoente 12. 0^{12}; 0

62. Identifique a base, o expoente e a potência nestas igualdades:

a) $(+21)^3 = 9261$ 21; 3; 9261

b) $(-1)^8 = +1$ −1; 8; +1 ou 1

c) $(-1)^{15} = -1$ −1; 15; −1

63. Escreva uma potência que represente um produto de oito fatores iguais a -7. $(-7)^8$

64. Responda às questões a seguir:

a) Qual é o quadrado de -20? 400

b) Qual é o cubo de -20? −8000

c) O que é menor: o quadrado de -20 ou o cubo de -20? O cubo de −20.

65. Qual é o valor destas potências?

a) $(-8)^3$ −512

b) $(-17)^2$ 289

c) $(-11)^3$ −1331

d) 0^{21} 0

e) $(+1)^{100}$ 1

f) $(-1)^{81}$ −1

66. Neste exercício, comece calculando as potências e, em seguida, responda às questões:

a) $(-4)^2$ 16

b) $(-4)^3$ −64

c) $(-10)^2$ 100

d) $(+8)^2$ 64

e) $(-8)^2$ 64

f) $(-5)^4$ 625

g) $(+3)^4$ 81

h) $(+3)^5$ 243

i) $(-2)^6$ 64

O que é comum a todas as potências:

- quando a base é um número positivo? A potência é sempre um número positivo.
- quando a base é um número negativo e o expoente é um número par? A potência é sempre um número positivo.
- quando a base é um número negativo e o expoente é um número ímpar? A potência é sempre um número negativo.

67. Positivo ou negativo? Identifique apenas o sinal destas potências:

a) $(-91)^3$ Negativo.

b) $(+13)^7$ Positivo.

c) $(-10)^8$ Positivo.

d) $(-1)^{30}$ Positivo.

e) $(-25)^7$ Negativo.

f) $(-145)^7$ Negativo.

68. Calcule o valor destas expressões:

a) $(-13 + 92 - 58)^0$ 1

b) $(-15 + 8 + 3 + 4)^{10}$ 0

c) $(-65 + 82 - 23)^1$ −6

Propriedades de potências

As mesmas propriedades das potências com números naturais valem para os números inteiros. Acompanhe a seguir.

Multiplicação de potências de bases iguais

Para calcular $(-7)^3 \times (-7)^5$, podemos usar a escrita multiplicativa para as potências.

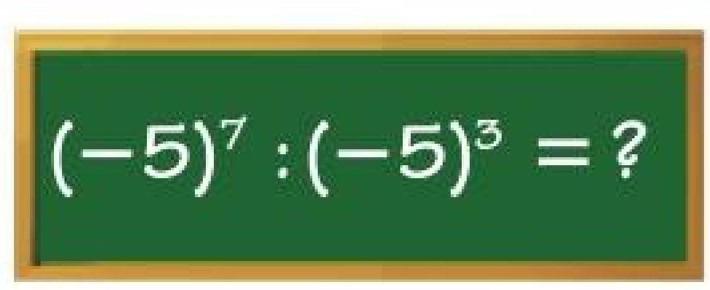
$$(-7)^3 \times (-7)^5 =$$

$$\underbrace{\overbrace{(-7) \times (-7) \times (-7)} \times \overbrace{(-7) \times (-7) \times (-7) \times (-7) \times (-7)}}_{(3 + 5) \text{ fatores iguais a } -7} = (-7)^{3+5} = (-7)^8$$

Podemos mostrar que, de modo geral:

> Multiplicamos potências de bases iguais conservando a base e adicionando os expoentes.

Divisão de potências de bases iguais



FOTOGRAFIAS: SHUTTERSTOCK

Podemos representar a divisão por uma fração:

$$(-5)^7 : (-5)^3 = \frac{(-5)^7}{(-5)^3} = \frac{(-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) \times \cancelto{1}{(-5)} \times \cancelto{1}{(-5)} \times \cancelto{1}{(-5)}}{\cancelto{1}{(-5)} \times \cancelto{1}{(-5)} \times \cancelto{1}{(-5)}}$$

$$(-5)^7 : (-5)^3 = (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) = (-5)^4$$

$$(-5)^7 : (-5)^3 = (-5)^{7-3} = (-5)^4$$

A quantidade de fatores que sobram é igual à diferença $7 - 3$.

Podemos mostrar que, de modo geral:

> Em uma divisão de potências de bases iguais, o quociente é uma potência com a mesma base e com expoente igual à diferença entre os expoentes do dividendo e do divisor.

Potência de potência

Observe como se calcula uma potência em que a base é outra potência:

- $[(-4)^5]^2 = (-4)^5 \times (-4)^5 = (-4)^{5+5} = (-4)^{2 \times 5} = (-4)^{10}$
- $[(-4)^5]^2 = (-4)^{2 \times 5}$

A base é $\mathbf{(-4)^5}$ e o expoente é **2**.

Podemos mostrar que:

> Uma potência, como $[(-4)^5]^2$, é igual a uma potência de base -4 com expoente igual ao produto dos expoentes 2×5.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

69. Copie as igualdades, substituindo o ■ e utilizando a propriedade do produto de potências de bases iguais.

a) $(+3)^4 \times (+3)^3 = $ ■ $(+3)^7$

b) $(-51)^5 \times (-51)^4 = $ ■ $(-51)^9$

c) $(-13)^5 \times (-13)^3 \times (-13)^4 = $ ■ $(-13)^{12}$

d) $(-10)^4 \times (-10)^6 \times (-10)^7 = $ ■ $(-10)^{17}$

70. Decomponha estas potências em um produto indicado de duas potências de bases iguais e calcule-o:

a) $(-4)^6$ — $(-4)^3 \times (-4)^3 = 4\,096$

b) $(-5)^5$ — $(-5)^2 \times (-5)^3 = -3\,125$

71. Use a propriedade da divisão de potências de bases iguais e calcule o valor do quociente:

a) $(+2)^{13} : (-2)^6$ -128

b) $(+4)^{12} : (+4)^8$ 256

c) $(-18)^{17} : (-18)^{16}$ -18

d) $(+19)^5 : (+19)^5$ 1

e) $(-3)^{21} : (-3)^{16}$ -243

f) $(-10)^{25} : (-10)^{24}$ -10

72. Copie cada igualdade, substituindo o ■ por uma potência de número inteiro:

a) $[(-4)^5]^3 = $ ■ $(-4)^{15}$

b) $[(-10)^8]^{10} = $ ■ $(-10)^{80}$

c) $[(-7)^3]^{10} = $ ■ $(-7)^{30}$

Potências de base 10 e a escrita numérica abreviada

Vários temas ligados a Matemática, Astronomia, Física, Economia, Biologia e outras ciências apresentam números muito "grandes" e com muitos zeros.

Você sabia que, quando os portugueses chegaram ao Brasil, a população mundial era de 438 000 000 de habitantes, aproximadamente?

SHUTTERSTOCK

Com o crescimento populacional, o número de habitantes no planeta, no ano de 2011, atingiu os **7 000 000 000**. Estimativas feitas em torno desse crescimento indicam que em 2100 seremos quase **11 000 000 000** de pessoas!

Fonte de pesquisa: Alves, J.E.D. Enxame humano?. Disponível em: <http://www.ecodebate.com.br/2013/09/20/enxame-humano-artigo-de-jose-eustaquio-diniz-alves/>. Acesso em: 19 jan. 2015.

Observe os mesmos números que aparecem nas informações anteriores, escritos de outra maneira:

438 000 000	7 000 000 000	11 000 000 000
438 milhões	7 bilhões	11 bilhões
438×10^6	**7×10^9**	**11×10^9**

$$438\,000\,000 = 438 \times 1\,000\,000 = 438 \times 10^6$$
$$7\,000\,000\,000 = 7 \times 1\,000\,000\,000 = 7 \times 10^9$$
$$11\,000\,000\,000 = 11 \times 1\,000\,000\,000 = 11 \times 10^9$$

$10^n = \underbrace{1\,000 \ldots 000}_{\textbf{n} \text{ zeros}}$

438×10^6, 7×10^9 e 11×10^9 são escritas abreviadas que utilizam potências de base 10.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

73. Leia com atenção estas informações. Identifique os números em que a escrita mais conveniente seria utilizar potências de base 10 e escreva-os nessa forma.

a) A distância da Terra à Lua é de aproximadamente 400 000 km. Resposta possível: 4×10^5

b) A população mundial prevista para o ano 2025 é de cerca de 8 600 000 000 de habitantes. 86×10^8

74. Represente estes números utilizando potências de base 10: Respostas possíveis:

a) 3 500 000 000 — 35×10^8
b) 80 000 000 — 8×10^7
c) 4 570 000 000 000 — 457×10^{10}
d) 3 004 000 000 000 — $3\,004 \times 10^9$

75. Qual é o valor da expressão $\dfrac{(10^5 \times 10)^4}{(10^4)^6}$? 1

76. Quais são os números representados por estas potências?

a) 53×10^6 53 000 000
b) $2,4 \times 10^8$ 240 000 000
c) $0,876 \times 10^9$ 876 000 000

77. O Universo é tão incrivelmente vasto que foi necessário criar novas unidades de medida para expressar a distância entre estrelas, planetas etc. Uma dessas unidades é o **ano-luz**. Um ano-luz é a distância percorrida pela luz em um ano, ou seja, 9 460 000 000 000 km, ou 9 trilhões e 460 bilhões de quilômetros. Escreva esse número usando potência de 10. 946×10^{10} quilômetros.

Aproveite o tema abordado na seção **Troquem ideias e resolvam** e converse com os alunos sobre as precauções que devem ser tomadas durante uma tempestade, o que devemos fazer para melhor nos proteger de eventuais relâmpagos etc.

Troquem ideias e resolvam

FAÇA NO CADERNO

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Junte-se a um colega, reflitam sobre as questões e respondam.

A Terra é atingida por relâmpagos 100 vezes por segundo. Fotografias de alta velocidade mostram que cada um deles se compõe de uma descarga elétrica principal e de uma descarga elétrica de volta. A principal viaja entre 160 e 1 600 quilômetros por segundo. A descarga de volta, muito mais brilhante, sobe pelo mesmo canal a 140 000 quilômetros por segundo.

- Quantas vezes por minuto a Terra é atingida por relâmpagos? E por hora? E por dia?
  6×10^3 vezes; 36×10^4 vezes; 864×10^4 vezes
- Se um raio leva 0,02 segundo viajando a 1 400 quilômetros por segundo para atingir a Terra, quanto tempo levará a descarga de volta para percorrer a mesma distância?

Na descida:
tempo = 0,02 segundo
velocidade = 1 400 km/s
espaço percorrido
1 400 × 0,02 = 28 km

Na subida:
velocidade = 140 000 km/s
espaço = 28 km
tempo = 28 : 140 000
= 0,0002 segundo

Raiz quadrada

Não há necessidade de enfatizar este tema, pois ele será retomado em anos posteriores.

Para refletir e responder

Nesta igualdade, o quadrado esconde um número inteiro.

$$\square^2 = +100$$

FOTOGRAFIAS: THINKSTOCK/GETTY IMAGES

- Em sua opinião, que números inteiros poderão estar escondidos sob o quadrado?

Resposta pessoal.

A raiz quadrada de um número envolve uma potência de expoente 2. Vamos relembrar o que aprendemos no estudo dos **números naturais**:

$$7^2 = 49 \longrightarrow \sqrt{49} = 7$$

Como $\mathbf{(+10)^2 = +100}$ e $\mathbf{(-10)^2 = +100}$, $+10$ e -10 podem estar escondidos sob o quadrado.

Pelo que aprendemos até aqui, tanto $+10$ como -10 poderiam ser a **raiz quadrada de 100**. Mas não podemos ter dois valores diferentes para $\sqrt{\mathbf{100}}$.

Assim, vamos considerar apenas um desses valores para $\sqrt{100}$.

Vamos combinar que $+10$ ou 10 é a raiz quadrada de 100.

$$\sqrt[2]{100} = +10 \text{ ou } \sqrt{100} = 10$$

Dizemos que 100 tem **raiz quadrada exata**.

Certifique-se de que os alunos compreenderam que, para a raiz quadrada, considera-se a raiz positiva.

Exemplos:

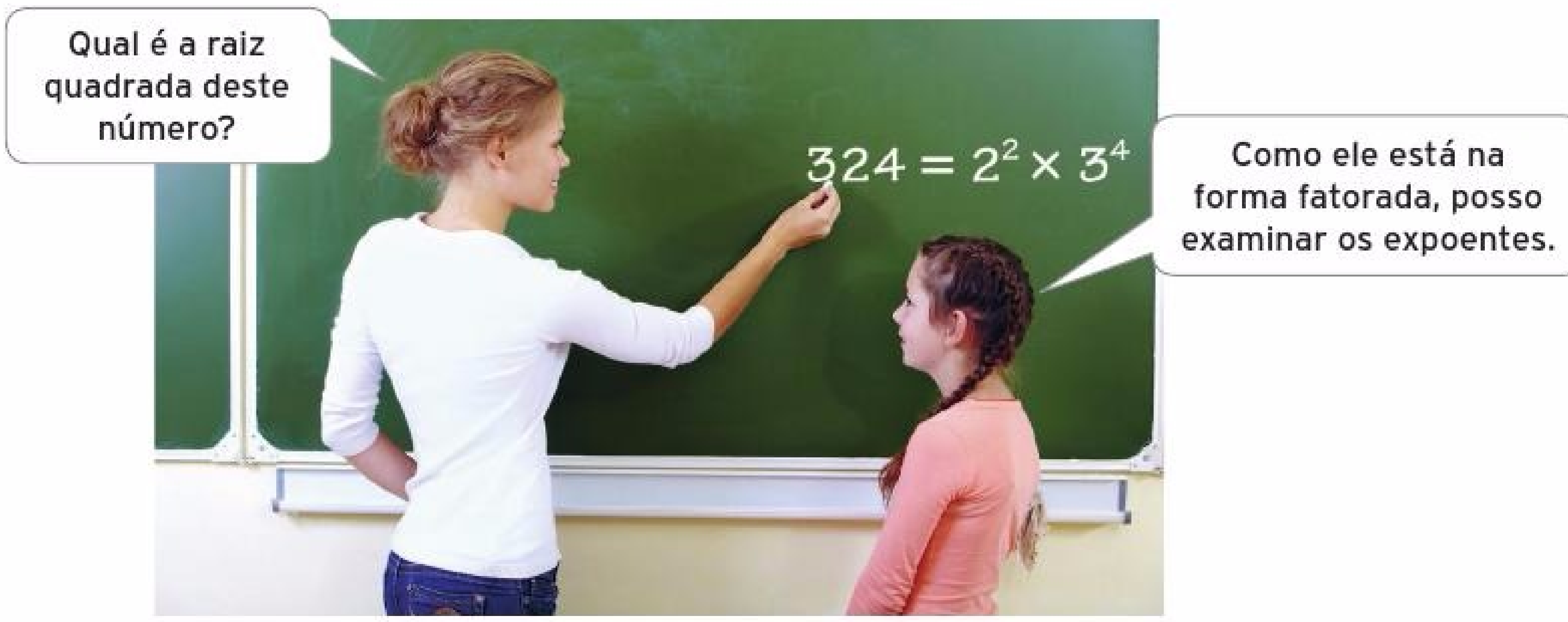
$\sqrt{81} = +9$, pois $(+9)^2 = 81$

$\sqrt{169} = +13$, pois $(+13)^2 = 169$

Mas atenção, pois: $-\sqrt{100} = -(+10) = -10$

Cálculo da raiz quadrada exata de um número inteiro

Observe a cena a seguir.



Quando um número inteiro positivo tem raiz quadrada exata, os expoentes dos fatores que aparecem na forma fatorada são todos números pares. Observe como procedemos nesse caso para calcular a raiz quadrada de 324:

$$\sqrt{324} = \sqrt{2^2 \times 3^4} = \sqrt{2 \times 2 \times 3^2 \times 3^2} = \sqrt{(2 \times 3^2)\,(2 \times 3^2)} = \sqrt{(2 \times 3^2)^2} = 2 \times 3^2$$

$$\sqrt{324} = 2 \times 9 \text{ ——— } \sqrt{324} = 18$$

Ou de forma simplificada:

FOTOGRAFIAS: THINKSTOCK/GETTY IMAGES

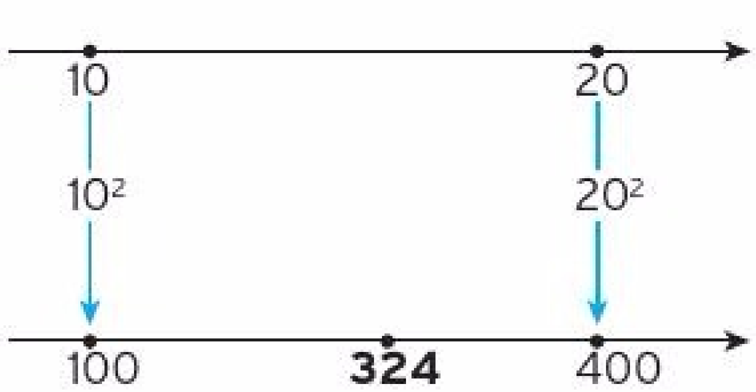
$$\sqrt{324} = \sqrt{2^2 \times 3^4} = 2^{2:2} \times 3^{4:2} = 2^1 \times 3^2$$

$$\sqrt{324} = 2 \times 9 = 18$$

Como 18 é um número natural, dizemos que 324 é um quadrado perfeito.

Outra maneira de calcular $\sqrt{324}$ é fazer algumas estimativas e localizar o número 324 entre duas centenas exatas que sejam quadrados perfeitos:

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{10} \times 10 = 100 \\ \mathbf{20} \times 20 = 400\end{array}\right] \text{ ——— } \sqrt{324} \text{ está entre 10 e 20.}$$



324 está mais próximo de 400 do que de 100.

$\sqrt{324}$ está mais próximo de 20 do que de 10.

Calculamos então o quadrado de números próximos a 20 e menores que ele:

$$19 \times 19 = 361$$

$$18 \times 18 = 324 \text{ ——— } 18^2 = 324 \text{ ——— } \sqrt{324} = 18$$

Exemplos:

- Calcular $\sqrt{729}$.

$729 = 3^6$, logo, $\sqrt{729} = \sqrt{3^6} = 3^{6:2} = 3^3 = 27$

- Calcular $\sqrt{1600}$.

$1600 = 16 \times 100 = 4^2 \times 10^2$, logo, $\sqrt{1600} = \sqrt{16 \times 100} = \sqrt{4^2 \times 10^2} = 4 \times 10 = 40$

Investigue e explique

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega, reflitam sobre as questões e respondam.

- É possível escrever os números a seguir como quadrados de números inteiros? Expliquem por quê. Não, pois todo número inteiro elevado ao quadrado resulta em um número não negativo.

-25 -1 -64 -9 -144 -400

- A afirmação a seguir é verdadeira ou falsa?

Um número inteiro negativo não tem raiz quadrada no conjunto dos números inteiros.

Verdadeira.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

78. Como $(+23)^2 = +529$, qual é o valor da raiz quadrada de 529? 23

79. Como $(-35)^2 = +1225$, qual é o valor de $\sqrt{1225}$? 35

80. Calcule:

a) $\sqrt{900}$ 30

b) $\sqrt{2\,500}$ 50

c) $\sqrt{3\,600}$ 60

d) $\sqrt{10\,000}$ 100

81. Calcule o valor de:

a) $-\sqrt{81}$ -9

b) $-\sqrt{144}$ -12

c) $-[-\sqrt{81}]$ 9

d) $210 - \sqrt{144}$ 198

82. Qual é o maior quadrado perfeito escrito com dois algarismos? 81

83. O número 72 não é um quadrado perfeito. Qual é o menor número, diferente de zero, que devemos multiplicar por 72 para que o produto seja um quadrado perfeito? 2

84. Marcos tem 64 selos quadrados, todos do mesmo tamanho. Ele organizou esses selos, arrumando-os em linhas e colunas, formando um quadrado. Em quantas linhas e colunas foram organizados esses selos? 8 linhas e 8 colunas.

85. Um quadrado tem 16 cm² de área. Aumentando 1 cm em cada lado, obtém-se um novo quadrado. De quanto é o aumento de área? 9 cm².

86. Qual é o perímetro de uma folha de papel quadrada de 100 cm² de área? 40 cm.

Mais sobre expressões numéricas

Para calcular o valor de expressões numéricas com números inteiros, comece com as somas algébricas entre parênteses e prossiga efetuando as operações entre colchetes.

Exemplos:

- Calcular o valor da expressão: $5 - [-8 - (-4 + 6) + 1]$.

$$5 - [-8 - (-4 + 6) + 1] = 5 - [-8 - (+2) + 1] =$$
$$= 5 - [-8 - 2 + 1] =$$
$$= 5 - [-9] = 5 + 9 = 14$$

- Calcular o valor da expressão: $-18 - 3 \times (-2)^3 + (-10) : (+2)$.

$$-18 - 3 \times \underbrace{(-2)^3}_{} + (-10) : (+2) =$$
$$= -18 - \underbrace{3 \times (-8)}_{} + \underbrace{(-10) : (+2)}_{} =$$
$$= -18 - (-24) + (-5) =$$
$$= -18 + 24 - 5 =$$
$$= +24 - 18 - 5 =$$
$$= +24 - 23 = +1 = 1$$

Calculamos primeiro as potências e simplificamos a expressão.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

87. Resolva as expressões:

a) $(-46 - 18) : (59 - 43)$ -4

b) $(-2)^3 - [-(6 + 4) + (3 - 2 - 1)]$ 2

c) $(-15 + 7) \times (-5 + 2) : (-8)$ -3

d) $[(-6 - 8) : (-15 + 1) - 3] \times$
$\times [-(3 - 4)^5 + 4 \times (-2)]$ 14

88. Resolva as expressões:

a) $100 + 2 \times (-5)^3 - (-45) : (+15)$ -147

b) $(-13)^0 + 10 \times (-2)^3 - (-2)^4 : (+4)$ -83

c) $(-4 + 1)^8 : (-3)^6 - 3 \times$
$\times (-4 - 5) + (-81) : (-3)^2$ 27

d) $(-27 + 43 - 54 + 99)^0 -$
$- [-40 - 2 \times (-4)^3] + (-12)^2$ 57

Exercícios de pré-álgebra darão aos alunos preparo para o estudo das equações de 1º grau com uma variável, dos sistemas de equações de 1º grau com duas variáveis e do cálculo algébrico, com compreensão e significado.

Exercícios complementares

FAÇA NO CADERNO

89. As letras **x** e **y** representam dois números inteiros. Cada uma delas é resultado de uma expressão:

$$x = (-27) : (-3)$$
$$y = (-2) : (+2) + (+3) : (-1)$$

Em multiplicações que envolvem letras, é conveniente substituir o sinal de multiplicação × por ·.

a) Qual é o valor da expressão $x - y$? 13

b) Qual é o valor de $\mathbf{x}^3$? 729

c) Qual é o valor de $4 \cdot x$? 36

d) Qual é o valor de $(4 \cdot x) : y$? -9

e) Qual é o valor de $(x + y)^2$? E de $x^2 + y^2$? 25; 97

90. Estas questões dizem respeito à expressão $\mathbf{a}^3$, na qual a letra **a** representa um número inteiro.

a) Se **a** for igual a -12, qual será o valor de $\mathbf{a}^3$? $-1\,728$

b) Se **a** for igual a 12, qual será o valor de $\mathbf{a}^3$? $1\,728$

c) Se **a** for igual a zero, qual será o valor de $\mathbf{a}^3$? 0

d) Se **a** for igual a -8, qual será o valor de $-\mathbf{a}^3$? 512

91. A letra **x** representa um número inteiro. A expressão $\mathbf{x}^2$ representa o quadrado do valor de **x**, e $\mathbf{2 \cdot x}$ representa duas vezes **x**. Com elas podemos escrever uma expressão como a deste quadro:

$$x^2 + 2 \cdot x + 1$$

a) Quando **x** é substituído pelo número -3, por exemplo, $\mathbf{x}^2$ representa $(-3)^2$, que é 9. Nesse caso, qual é o número representado pela expressão $x^2 + 2 \cdot x + 1$? 4

b) Qual é o número representado pela expressão $x^2 + 2 \cdot x + 1$, quando **x** é igual a 5? 36

c) Escolha três valores negativos para **x** e calcule o número representado por essa expressão. Resposta pessoal.
Foi obtido algum resultado negativo? Não.

Leitura

"Menos com menos dá mais ou menos?"

A ideia de número negativo apareceu na Matemática chinesa, na Antiguidade. Durante séculos ele foi usado pelos matemáticos gregos e hindus como instrumento para resolução de problemas, embora não fosse considerado solução para eles. No mundo ocidental, os números inteiros negativos passaram a ser aceitos por volta de 1600. No entanto, alguns séculos antes, em várias situações-problema ligadas ao comércio, por exemplo, esses números já eram citados em assuntos relacionados a lucros e prejuízos.

Sobre a origem dos sinais uma das hipóteses mais divulgadas é que a ideia tenha surgido com os comerciantes da época medieval, que utilizavam caixas de madeira para armazenar grãos, que deveriam conter uma quantidade fixa.

Mas quando as caixas ficavam cheias e eram pesadas, elas costumavam apresentar falta ou sobra. Se faltasse, por exemplo 10 kg, marcava-se a caixa com o número 10 com um tracinho na frente (–10). Em caso de sobra, por exemplo 3 kg, marcava-se a caixa com o número 3 com dois "tracinhos" cruzados na frente (+3)

Disponível em: <http://www.matematiques.com.br/conteudo.php?id=608>. Acesso em: 8 nov. 2014.

Revisão cumulativa e testes

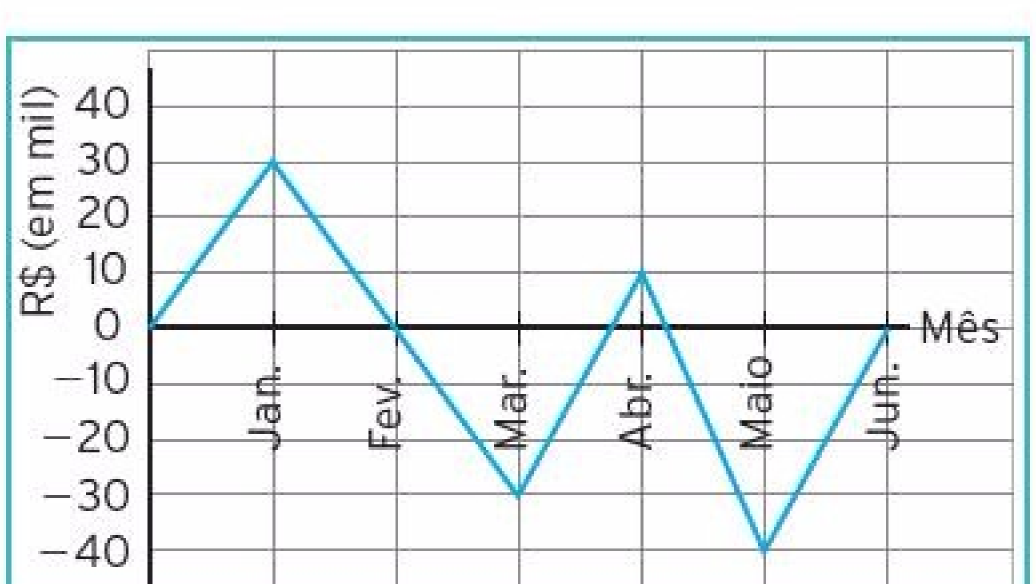
FAÇA NO CADERNO

1. Certo dia a temperatura que estava a -13 °C caiu 12 °C e depois subiu 7 °C.

a) Escreva uma expressão que descreva essa situação. $-13 + (-12) + (+7)$

b) Qual era a temperatura após a subida de 7 °C? -18 °C.

2. Este gráfico mostra o desempenho de uma fábrica de chocolates durante o primeiro semestre de certo ano.



Responda às questões consultando o gráfico:

a) Em que mês ocorreu o maior lucro? E o maior prejuízo? janeiro; maio.

b) A empresa teve lucro ou prejuízo nesse primeiro semestre? De que valor? Prejuízo; R$ 30 000,00.

3. Calcule o valor destas expressões numéricas:

a) $-202 - (-31 + 37 - 48) : (-7) + (-8) \cdot (+9)$ -280

b) $-[(-2)^6 : (-4)] - (-25 + 10) : 3$ 21

c) $[(-5)^6 : 25]^0 - (-3^4 + 1) : (-2)^3$ -9

4. Que número é menor: um que tenha módulo 33 ou um que tenha módulo 34? Depende do sinal desses números.

5. Copie as igualdades substituindo o ■ por um dos símbolos: $<$, $>$ ou $=$, de modo a torná-las verdadeiras:

a) $(-16) - (-36)$ ■ $(-19) - (-42)$ $<$

b) $(-107) - (+211)$ ■ $(+393) - (+148)$ $<$

c) $(-673) - (+484)$ ■ $(-701) - (+1\,990)$ $>$

6. A soma de dois números inteiros é 37. Um deles é -146. Qual é o outro número? 183

7. A soma de dois números inteiros é -395. Um deles é -109. Qual é o outro número? -286

8. A diferença entre dois números inteiros é -142. Um deles é -104. Qual é o outro número? 38; -246

9. Copie as igualdades substituindo o ■ por números inteiros, de modo a torná-las verdadeiras:

a) ■ : $(+13) = +12$ $+156$

b) ■ : $(-93) = +45$ $-4\,185$

c) ■ : $(-12) = -36$ $+432$

d) (-140) : ■ $= -20$ $+7$

e) (-147) : ■ $= +21$ -7

10. Escolha dois destes números, de modo que as frases sejam verdadeiras.

$+6$	-2	4
-4	3	6

a) A soma é $+7$ e o produto $+12$. 3 e 4

b) A soma é -1 e o produto -12. -4 e 3

c) A soma é -8 e o produto $+12$. -6 e -2

d) A soma é $+4$ e o produto -12. 6 e -2

11. Descubra dois números inteiros, de modo que deles resultem:

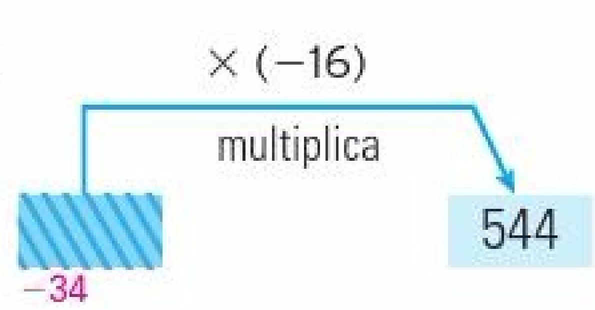
a) soma $+1$ e produto -6; 3 e -2

b) soma -2 e produto -15; 3 e -5

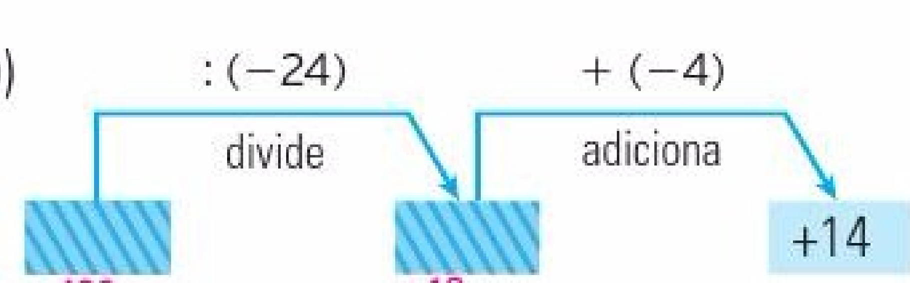
c) soma -11 e produto $+24$. -8 e -3

12. Quais números estão escondidos pelas cartelas nestes esquemas?

a)



b)



13. Pensei em um número inteiro, multipliquei-o por 4 e do resultado subtraí -30, obtendo -210. Em que número pensei? -60

14. Pensei em um número inteiro, elevei-o ao quadrado, ao resultado adicionei -35 e obtive 190. Em que número pensei? -15 ou 15

15. Positivo ou negativo? Determine apenas o sinal de cada potência e anote-o.

a) $[(-3)^4]^5$ Positivo.

b) $[(-3)^3]^5$ Negativo.

c) $[(-1)^6]^3$ Positivo.

d) $[(-5)^7]^9$ Negativo.

16. Decomponha estas potências em produtos de potências de mesma base e calcule-os:

Respostas possíveis.

a) $(-2)^{10}$ $(-2)^5 \times (-2)^5 = 1\,024$

b) $(-3)^7$ $(-3)^4 \times (-3)^3 = 2\,187$

c) $(-6)^5$ $(-6)^2 \times (-6)^3 = -7\,776$

d) $(-8)^6$ $(-8)^2 \times (-8)^4 = 262\,144$

17. Já sabemos que podemos calcular o valor de 2^{18}, por exemplo, dividindo o valor de 2^{20} por 4, que é o valor de 2^2. Então, faça os cálculos usando uma calculadora e registre os resultados.

$5^5 = 3\,125$
$2^{20} = 1\,048\,576$

a) Qual é o valor de 5^{10}? 9 765 625

b) Qual é o valor de 2^{16}? 65 536

c) Qual é o valor 2^{25}? 33 554 432

18. Calcule o valor destas expressões:

a) $(-10)^3 \times (8 - 18 + 17)^2$ $-49\,000$

b) $\sqrt{(-6)^3 + 5 \times 53} - 9^2 : 27$ 4

19. Considere $x = -18$ e $y = -4$ e responda:

a) Qual o valor de $x^2 + y$? 320

b) Qual o valor de $(x - y)^2$? 196

20. Que números ao quadrado resultam 2 500? −50 e 50

21. Considere $x = 10$ e $y = -6$ e responda:

a) As expressões $(x + y)^2$ e $x^2 + y^2$ têm o mesmo valor? Não.

b) Existe algum número inteiro para o qual os dois valores são iguais? Qual? Sim; zero.

22. O 10º termo da sequência 12, 8, 4, 0, −4, ... pode ser: c

a) $(-6) \times (-4)$

b) 6×4

c) $6 \times (-4)$

d) -12

23. Uma pessoa nasceu no ano −608 e viveu 38 anos. Essa pessoa morreu no ano: d

a) −646

b) 646

c) 570

d) −570

24. Se $x = -13$ e $y = -5$, então o valor de $(x - y)^2$ é: b

a) um número negativo.

b) um número menor que 100 e maior que 40.

c) um número menor que 40.

d) um número maior que 100.

25. Dentre estas afirmações, a verdadeira é: a

a) Todo número inteiro não positivo é menor ou igual a zero.

b) Todo número inteiro não negativo é menor ou igual a zero.

c) O zero é um número inteiro positivo.

d) A raiz quadrada de 100 pode ser −10 ou 10.

26. O valor de $[(-6)^3]^0$ é: c

a) zero

b) −6

c) 1

d) −1

27. João calculou a soma de dois números inteiros com sinais diferentes e obteve −63. Podemos afirmar que: b

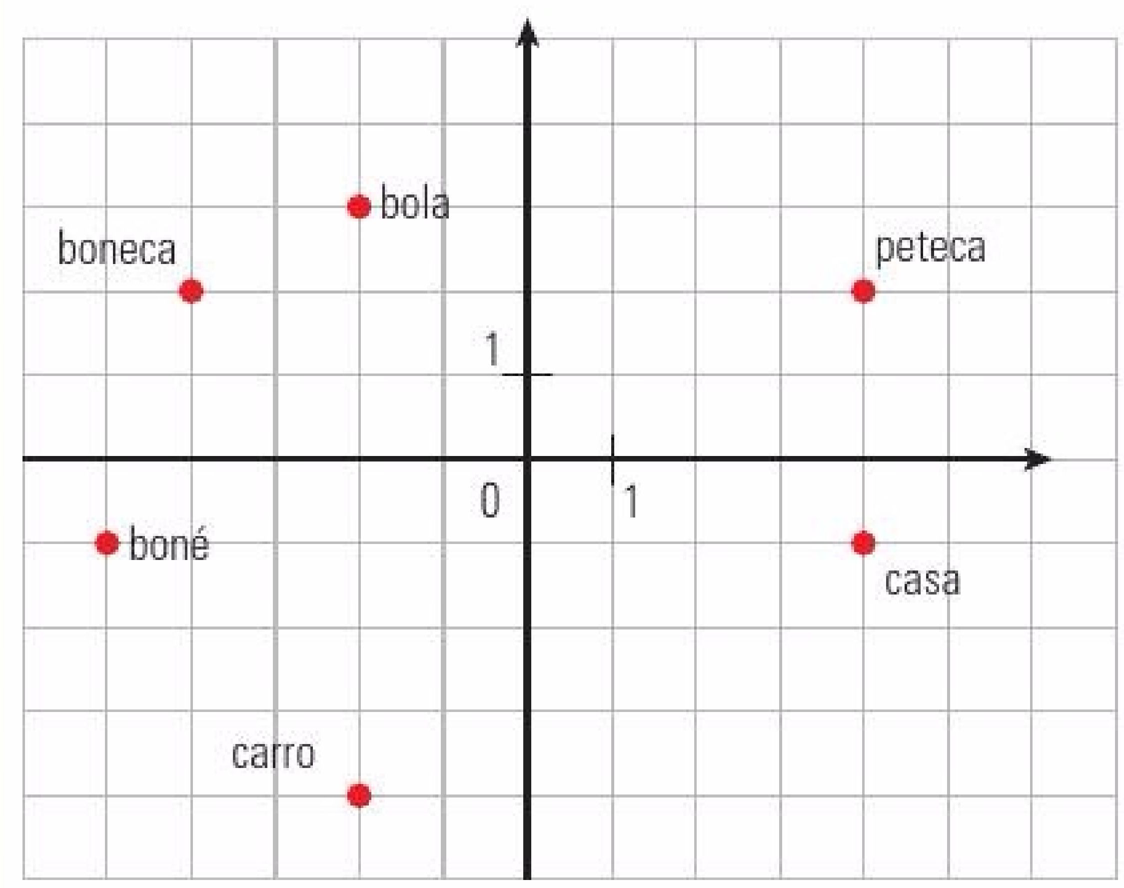
a) um dos números era zero e o outro, positivo.

b) o número com o maior módulo era negativo.

c) o número com o maior módulo era positivo.

d) o número com o menor módulo era negativo.

28. Observe a indicação:



Podemos afirmar que a localização do carro é dada pelo par ordenado: c

a) $(-4, 2)$

b) $(-2, 4)$

c) $(-2, -4)$

d) $(-4, -2)$

29. O cubo do cubo de −10 é: d

a) −10

b) 10

c) 1 000 000 000

d) −1 000 000 000

30. O valor de $\sqrt{2^8 \times 5^6}$ poderá ser dado por: a

a) $2^4 \times 5^3$

b) $2^4 \times 5^4$

c) $2^4 \times 5^2$

d) $2^6 \times 5^4$

UNIDADE 3

Ângulos e circunferências

LATINSTOCK

Nesta unidade...

1. Ângulos
2. Medidas de ângulo
3. Ângulos e retas
4. Circunferência e círculo
5. Estatística e probabilidade

O contorno da praça lembra uma circunferência e a praça toda lembra um círculo. Figuras geométricas como essas serão exploradas nesta unidade.

Imagine você no centro de uma praça circular, como a da fotografia da página ao lado, e dando um giro completo sem sair do lugar. Tal movimento corresponderá a um giro de 360º.

Nesse giro, a **direção** do seu olhar terá mudado várias vezes, e já aprendemos que uma **mudança de direção** pode ser representada por meio de um **ângulo**.

Você sabia...

JAMIE MCDONALD/GETTY IMAGES

- ... que "zerinho" é uma manobra em que um *skatista* dá um giro de 360º, de uma só vez ou em várias etapas?

Durante a execução de um "zerinho" a direção do olhar do *skatista* muda várias vezes. Ângulos estão presentes em brincadeiras como essa.

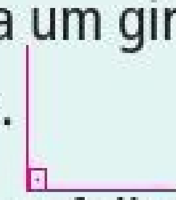
- ... que o GPS (*Global Positioning System*) opera com 24 satélites que orbitam ao redor da Terra?

Sua função é localizar quatro ou mais satélites, determinar a distância para cada um deles e transformar essa informação em coordenadas. Ângulos estão presentes em situações de localização de pontos.

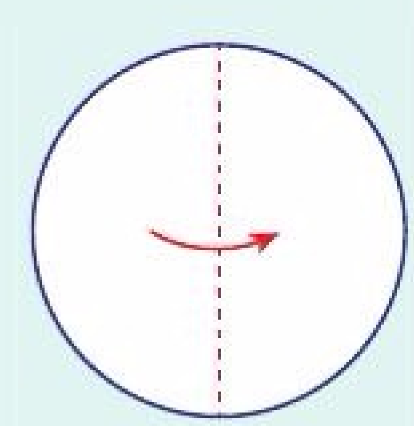
DETLEV VAN RAVENSWAAY/SCIENCE PHOTO LIBRARY/LATINSTOCK

O que você já sabe?

- Você conhece outras brincadeiras que envolvem ângulos? Conte aos colegas.
  Respostas possíveis: Jogo de futebol, jogo com bolinhas de gude e outras brincadeiras.
- Que ângulo pode ser associado a um giro de $\frac{1}{4}$ de volta? Desenhe-o em seu caderno e mostre-o a um colega.



- Letícia recortou um círculo de uma folha de papel. Depois, dobrou ao meio e ao meio novamente, sempre ajustando as bordas. Que ângulo apareceu na última dobra? Ângulo reto.



1 Ângulos

O que é ângulo?

Para refletir e responder

Bia fez um desenho no piso do parque e desafiou João:

FRANCISCO VILACHA

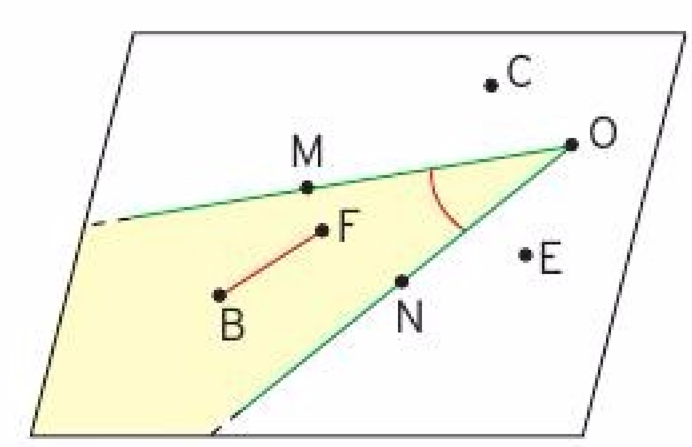
- Reflita sobre a consideração feita por João e dê sua opinião: você também acha que para ele chegar até onde se encontra Bia terá de cruzar uma das semirretas traçadas?

Sim, para chegar até Bia, João terá de cruzar uma das semirretas.

Duas semirretas de mesma origem e que não estão contidas em uma mesma reta, como as desenhadas por Bia na situação acima, dividem o plano em duas regiões com propriedades diferentes uma da outra. Uma delas é **convexa** e a outra, **não convexa**.

Nas figuras a seguir, observe o que ocorre com os pontos do plano destacados nessas regiões.

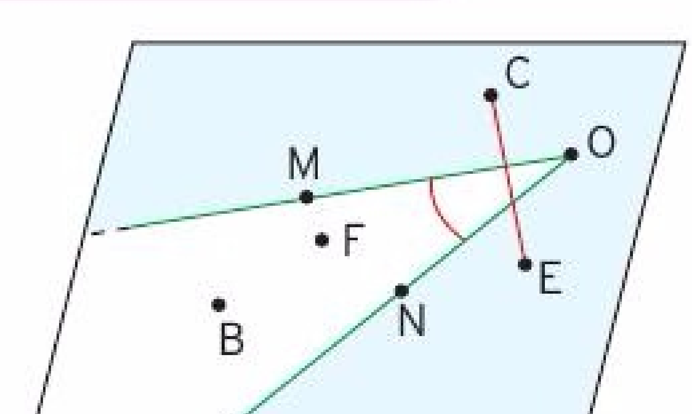
- Região **convexa**, parte do plano destacada em amarelo: os pontos B e F estão contidos nessa região e o segmento de reta que eles definem também. Qualquer segmento de reta como $\overline{BF}$ não cruza as semirretas da figura.



Uma região convexa como a que foi mostrada será chamada de **região angular**. Uma região angular é definida por um **ângulo**.

Duas semirretas de mesma origem e não contidas na mesma reta formam um **ângulo**.

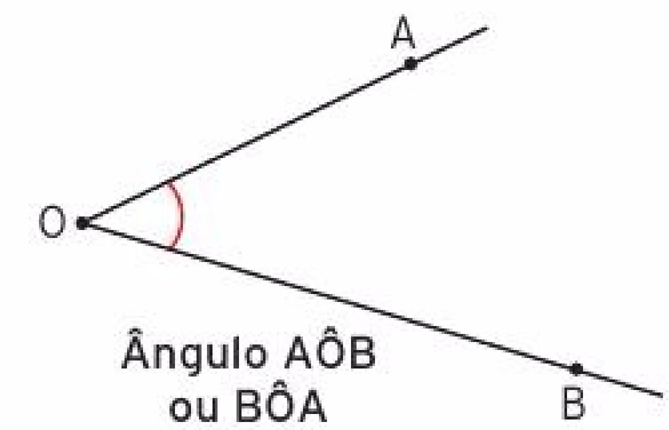
- Região **não convexa**, parte do plano destacada em azul: os pontos C e E estão contidos nessa região e o segmento de reta que eles definem não. Em outras palavras, $\overline{CE}$ cruza as semirretas da figura.



Você já sabe, mas vamos relembrar...

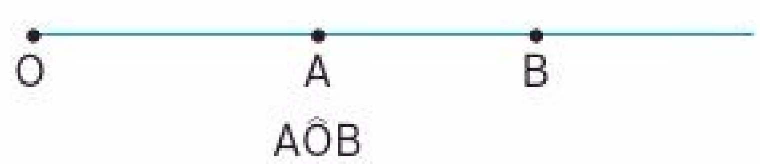
A figura ao lado representa o ângulo AÔB.

As semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ são os **lados** do ângulo AÔB. O ponto **O** é seu **vértice**.

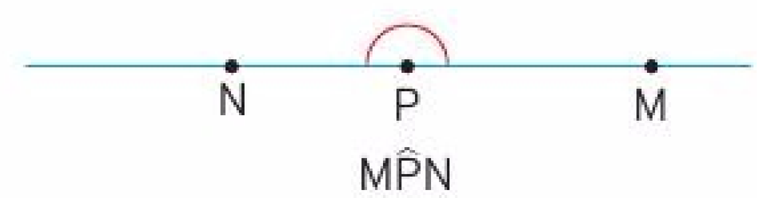


Vamos combinar.

- **Ângulo nulo**, nesse caso, as semirretas são coincidentes.



- **Ângulo raso**, nesse caso, as semirretas estão contidas na mesma reta, mas são opostas.

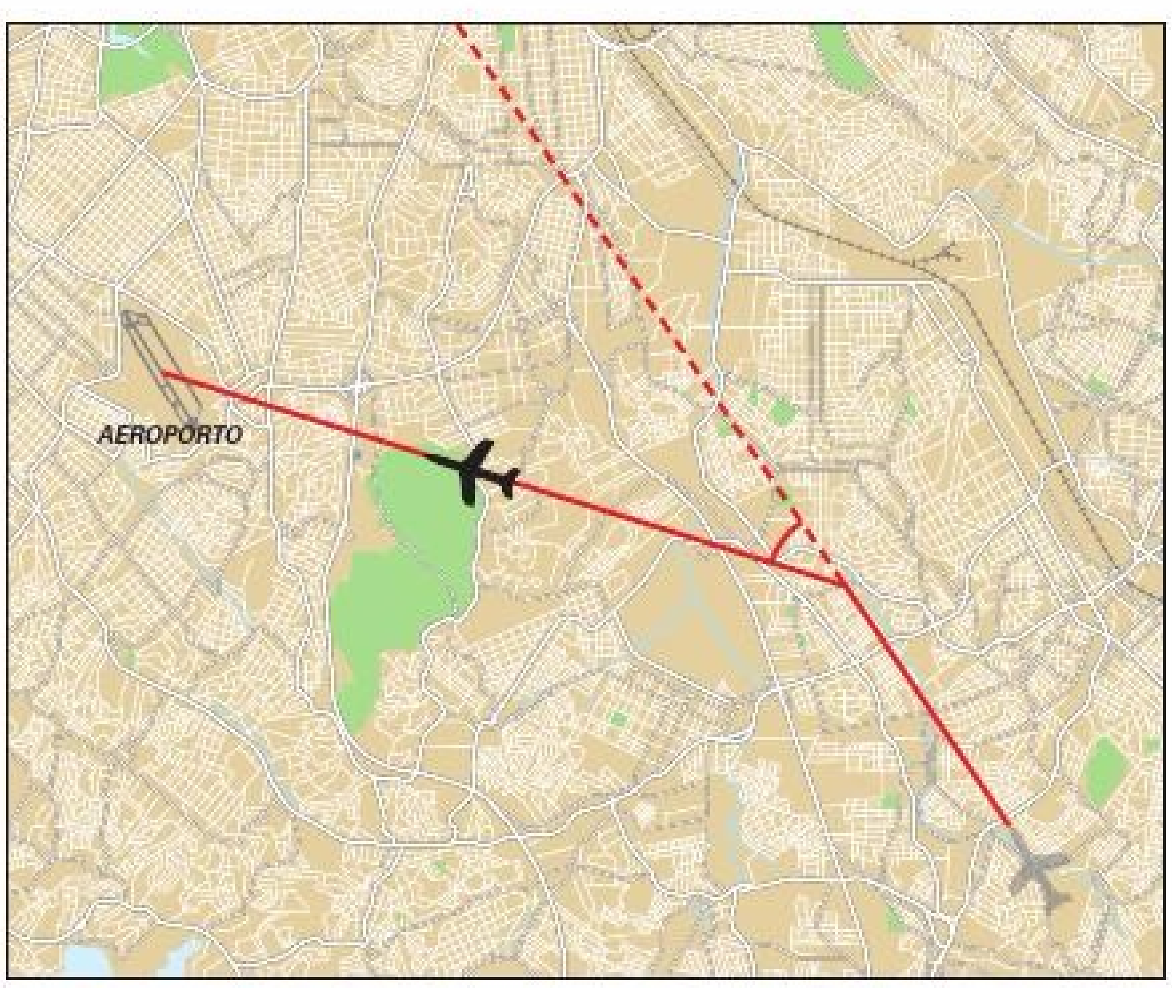


Usos do ângulo

Há diversos contextos em que o uso dos ângulos é necessário.

Em mudanças de direção

SONIA VAZ



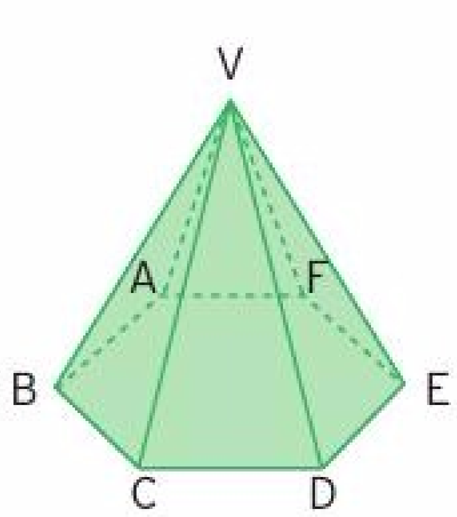
Este avião alterou sua rota para ir em direção ao aeroporto.

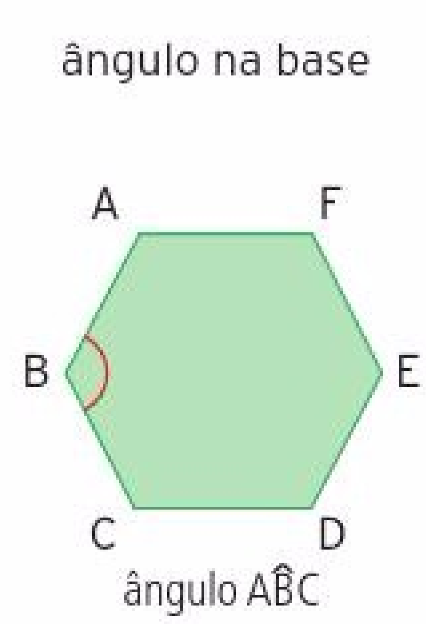
Inclinações

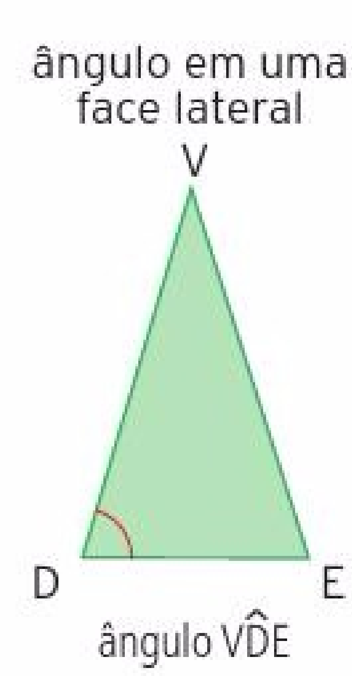
RUBENS CHAVES/PULSAR IMAGENS

Arquitetos e engenheiros projetam telhados para possibilitar o escoamento das águas da chuva ou da neve, e promover sombra, sem comprometer a harmonia das construções.

Em figuras geométricas



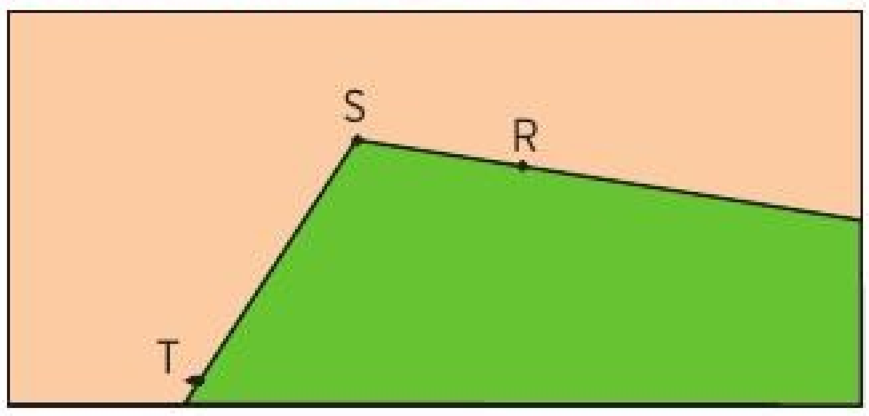




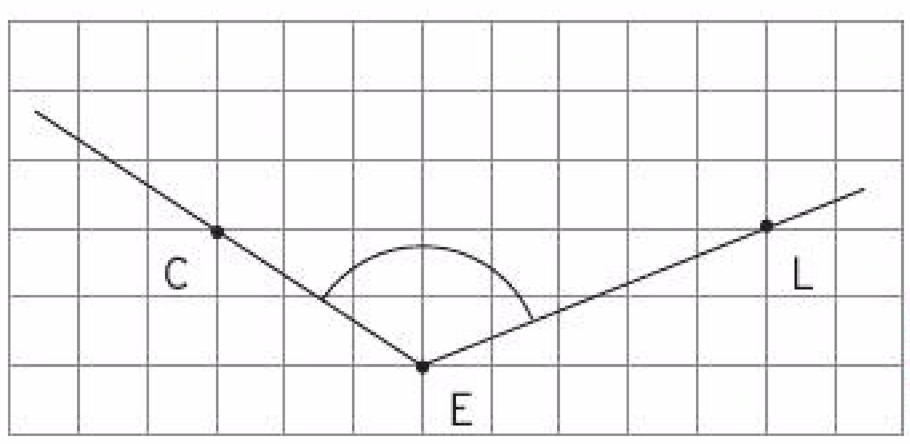
Fazer e aprender

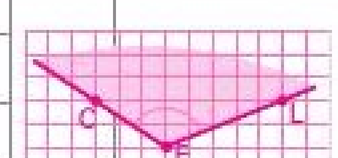
FAÇA NO CADERNO

1. Na figura abaixo, identifique as cores da região convexa e da região não convexa.
Região convexa: verde; região não convexa: laranja.

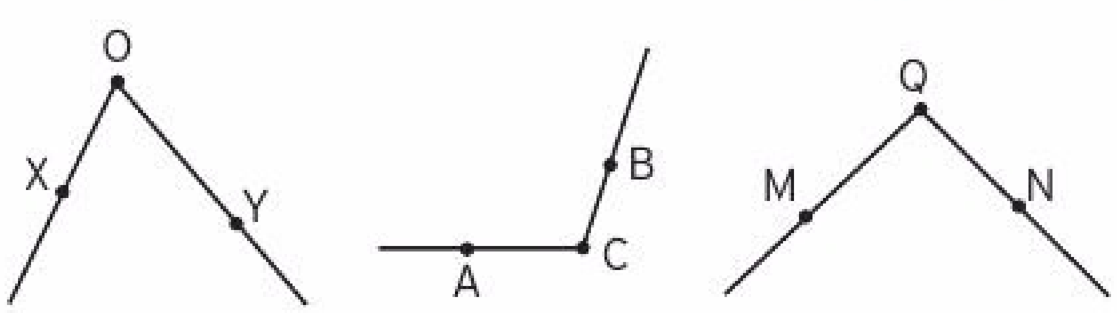


2. Copie a figura em uma folha de papel quadriculado e pinte a região angular $C\hat{E}L$.



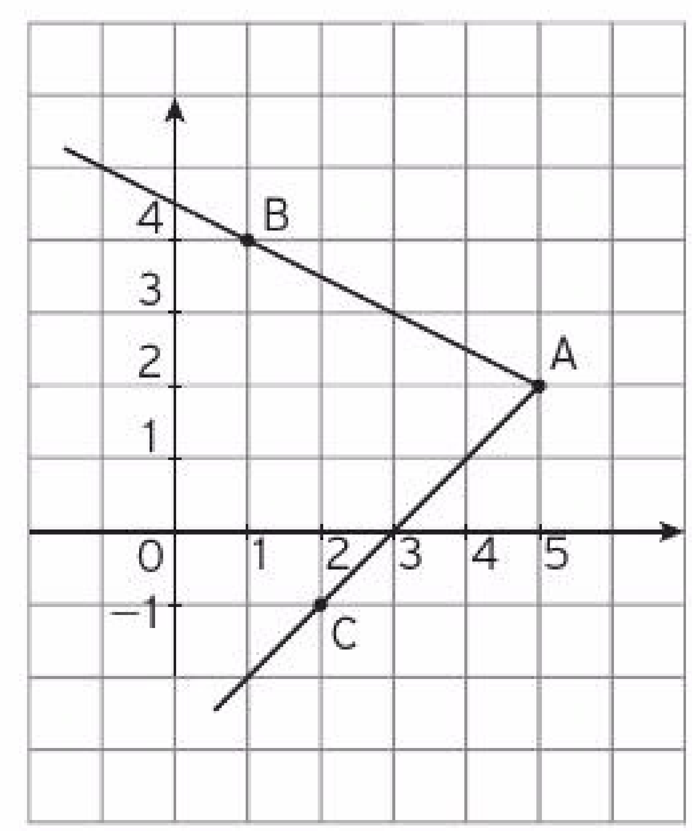


3. Identifique cada ângulo usando os pontos que estão assinalados nas figuras: $Y\hat{O}X$; $A\hat{C}B$; $N\hat{Q}M$



4. Identifique e anote os ângulos deste paralelogramo ABCD: $A\hat{B}C$, $B\hat{C}D$, $D\hat{A}B$, $C\hat{D}A$

5. Na figura, $B\hat{A}C$ tem vértice no ponto A (5, 2). Quais são as localizações dos pontos **B** e **C** por onde passam os lados de $B\hat{A}C$? B (1, 4); C (2, −1)

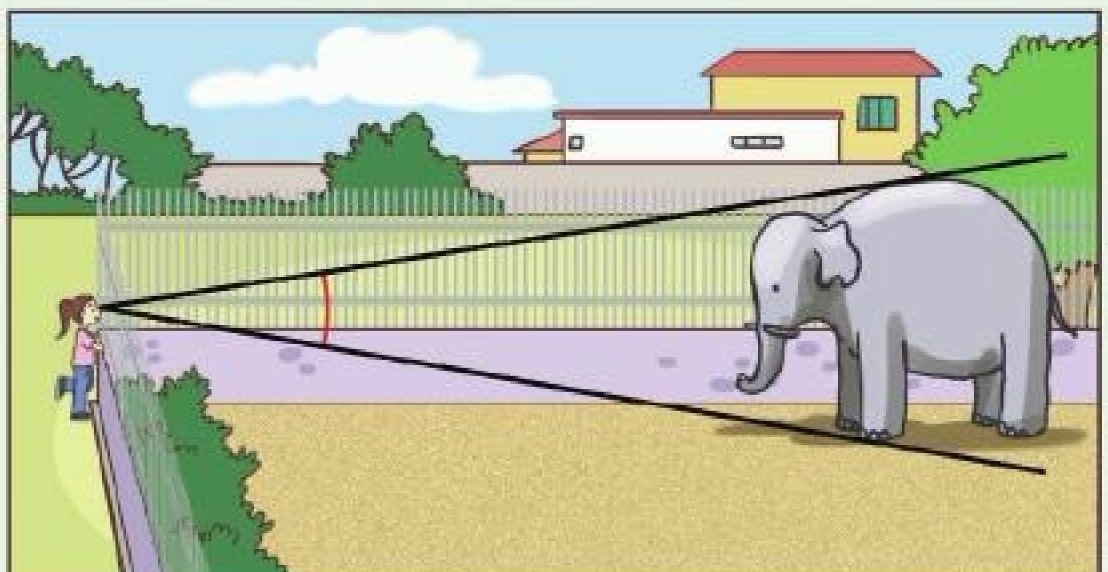


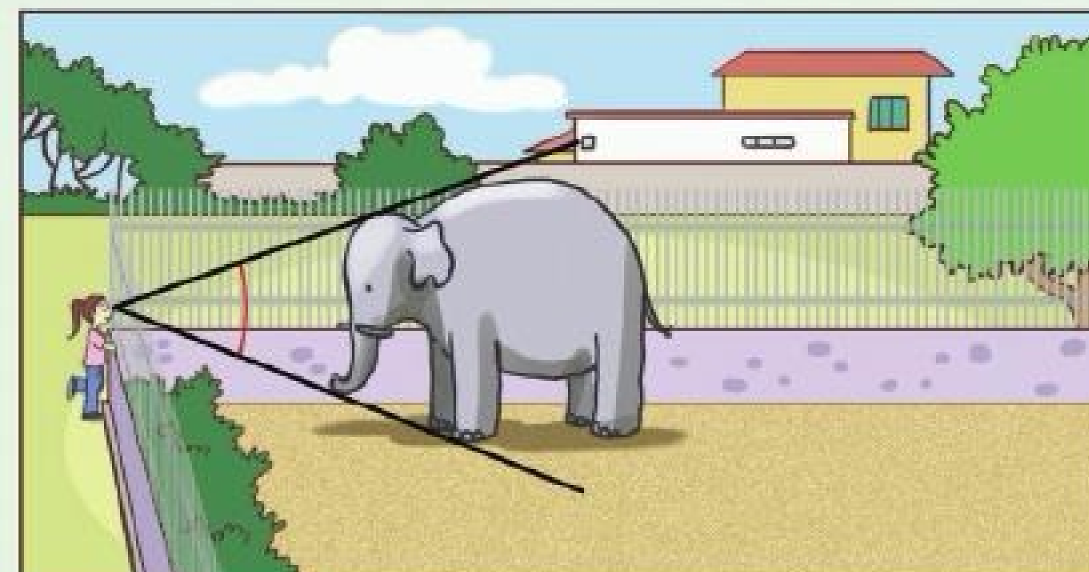
Investigue e explique

FAÇA NO CADERNO

Pense nisto: visto de longe, um elefante parece pequeno, mas, quando se chega perto dele, ele é bem maior do que parecia.

Experimente observar alguns objetos de longe e de perto, e dê sua opinião sobre o motivo dessa diferença.





HAGAQUEZART ESTÚDIO

- Por que isso acontece? Converse com os colegas e elaborem uma explicação.
Resposta possível: Quando o elefante está mais longe, ele é visto sob um ângulo menor e por isso parece menor do que realmente é.

2 Medidas de ângulo

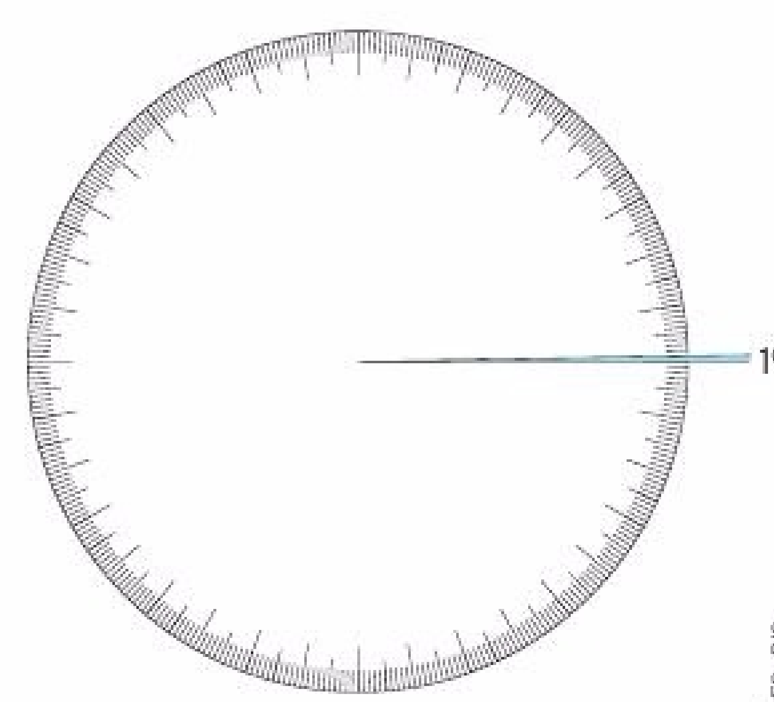
Medindo ângulos

Para refletir e responder

Antônio está contando a um amigo uma manobra que fez andando de *skate*.

- Antônio pode ter medido o ângulo usando uma fita métrica ou uma régua? Não.

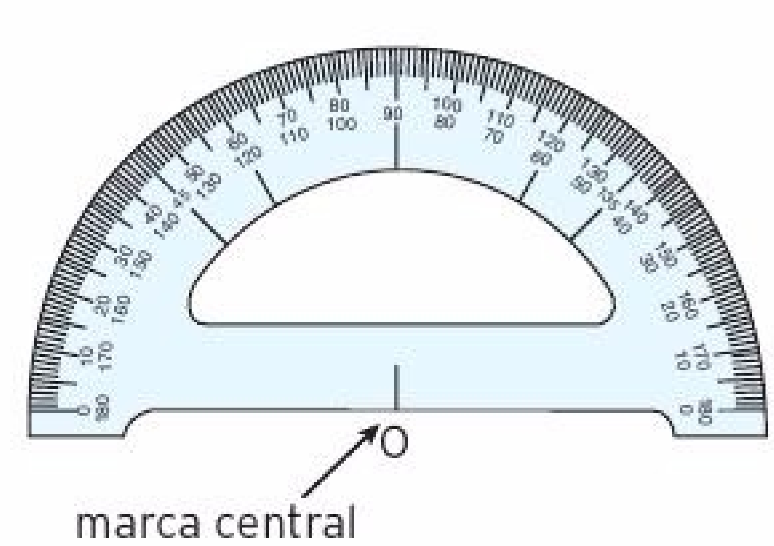
Dê sua opinião: de que maneira você mediria um ângulo? Conte aos colegas. Resposta pessoal.



Observe a circunferência ao lado. Ela está dividida em 360 partes iguais ou 360 arcos iguais.

Um ângulo com vértice no centro dessa circunferência e com lados que passam pelas extremidades de um desses arcos é um ângulo de 1 grau. Sua medida é indicada por **1º**.

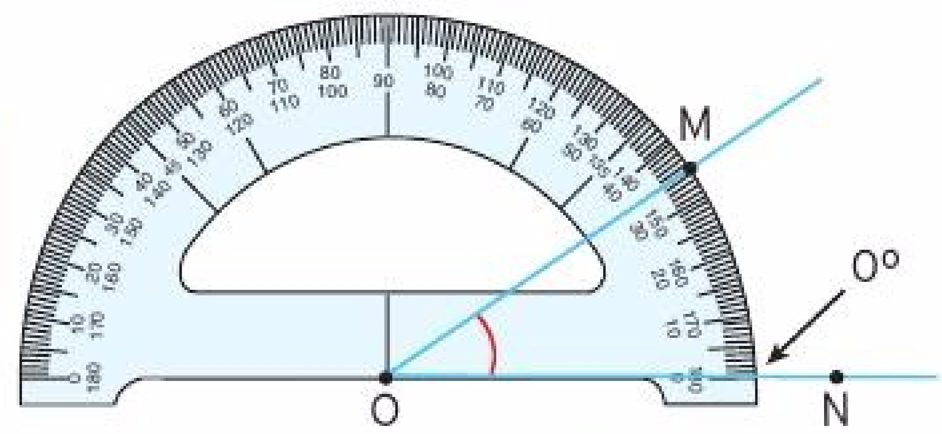
O **transferidor** é um dos instrumentos que podemos usar para medir ângulos. O transferidor é marcado em **graus**.



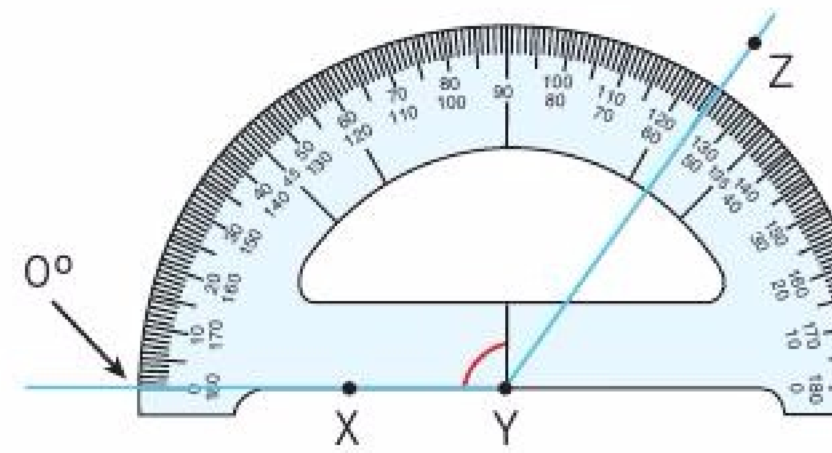
Para usá-lo de maneira correta, é preciso posicionar a marca central do transferidor sempre sobre o vértice do ângulo. A marca de 0º é ajustada sobre um dos lados do ângulo e a sua medida será obtida em graus, observando a marcação por onde passa o outro lado.

Exemplos:

Representamos a medida do ângulo MÔN por med MÔN.



med MÔN = 35º



med XŶZ ou med Ŷ = 125º

ILUSTRAÇÕES: BIS

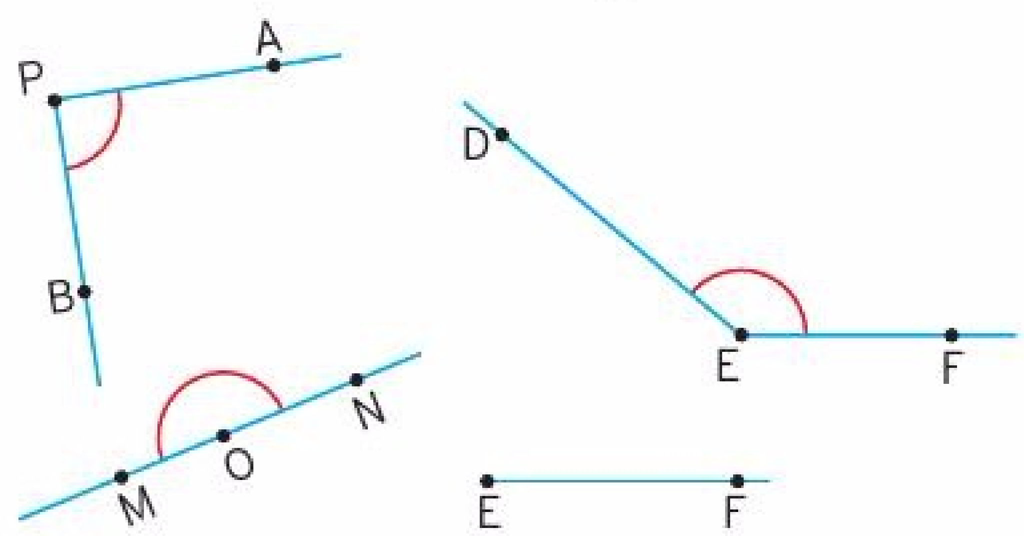
Lembre-se: o **ângulo reto**, que corresponde a um giro de $\frac{1}{4}$ de volta, **mede 90º**. Além disso, um **ângulo nulo** mede **0º** e um **ângulo raso**, **180º**.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

Explore situações nas quais os alunos possam manusear o transferidor como instrumento de medida de ângulos. Ver o texto e as atividades 6 e 7.

6. Observe cada um destes ângulos:



a) Estime a medida de cada ângulo. Resposta pessoal.

b) Usando um transferidor, meça cada ângulo e verifique se suas estimativas foram razoáveis. Resposta pessoal.

c) Faça uma tabela como esta e complete-a. Veja resposta no final do livro.

Ângulo	Estimativa	Medida

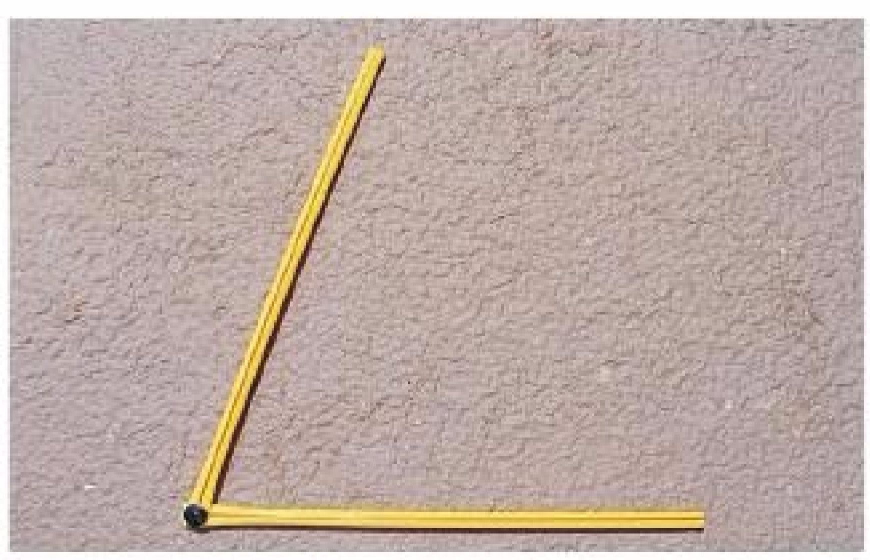
7. Utilize um transferidor e desenhe ângulos com as medidas indicadas: Veja resposta no final do livro.

a) med XÔY = 50°

b) med ÂBC = 85°

c) med MP̂N = 116°

8. Para representar alguns giros, Roberto pegou dois canudos e prendeu suas pontas cuidadosamente com um percevejo.



FÁBIO MORI

Ele manteve fixo um dos canudos e foi girando o outro.

Que medida Roberto pode ter associado a:

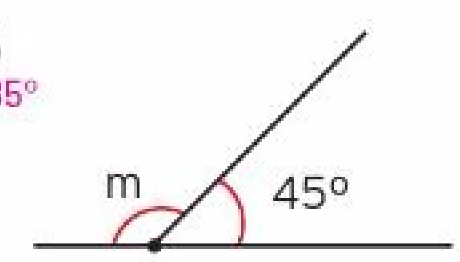
a) um giro de $\frac{1}{2}$ volta? 180°

b) um giro de 1 volta? 360°

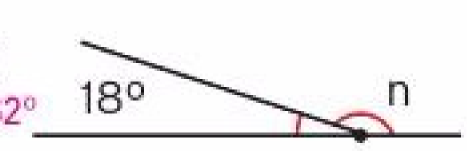
c) um giro de $\frac{1}{6}$ de volta? 60°

9. Qual o valor das medidas **m**, **n** e **p** assinaladas nas figuras a seguir? Atenção: nesta atividade não vale usar o transferidor.

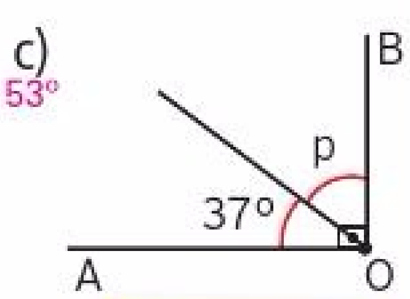
a) 135°



b) 162°

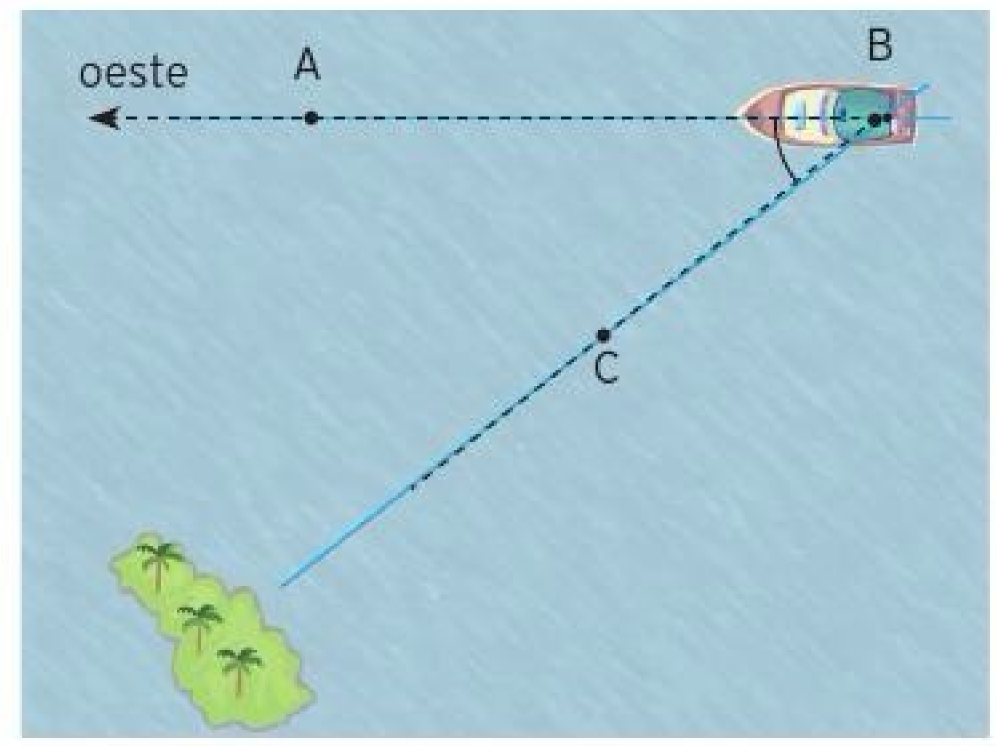


c) 53°



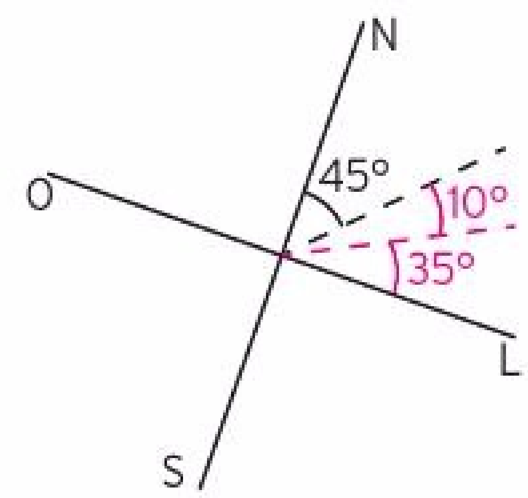
∟ indica ângulo reto.

10. Um velejador ia na direção leste-oeste quando avistou uma ilhota e decidiu ir até ela. Quantos graus ele precisou girar o barco para ir em direção à ilhota? 40°



BIS

11. Um avião estava voando em um ângulo de 45° com a direção norte, como mostra o esboço ao lado. Copie essa figura e indique nela um desvio de 10°, para a direita, feito pelo piloto.



12. Um barco está navegando em um ângulo de 38° com a direção sul quando faz um desvio de 50° para a esquerda. Faça um esboço como o do exercício anterior e indique o desvio e a nova direção do barco. Veja resposta possível no final do livro.

Desafio

Dando um jeitinho

Diego atrapalhou-se um pouco com essa história de ângulos, transferidor, medidas, mas conseguiu dar um jeitinho. Veja o que ele fez.

Ele ajeitou o vértice do ângulo na marca central do transferidor e girou-o até que o lado $\overrightarrow{YZ}$ passasse pela marca de 20°. Depois, deu uma olhada para ver por onde passava o lado $\overrightarrow{YX}$: 70°.

- Que medida Diego encontrou para o ângulo $X\hat{Y}Z$? 50°

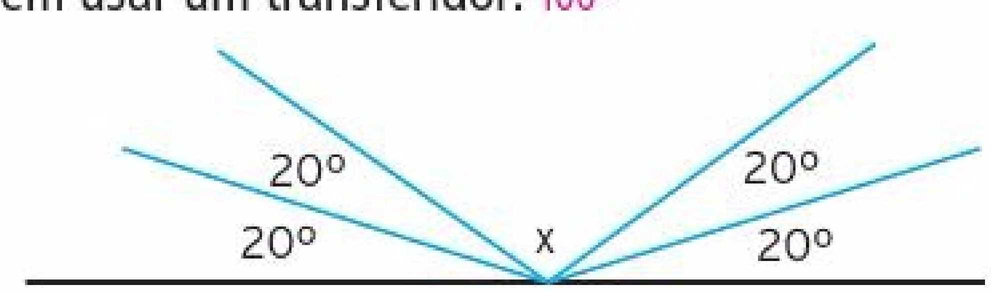
THINKSTOCK/GETTY IMAGES

FAÇA NO CADERNO

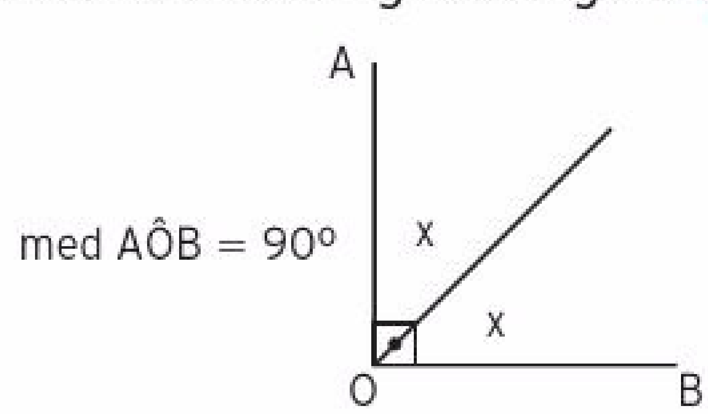
Exercícios complementares

FAÇA NO CADERNO

13. Na figura a seguir, calcule o valor da medida x sem usar um transferidor: 100°

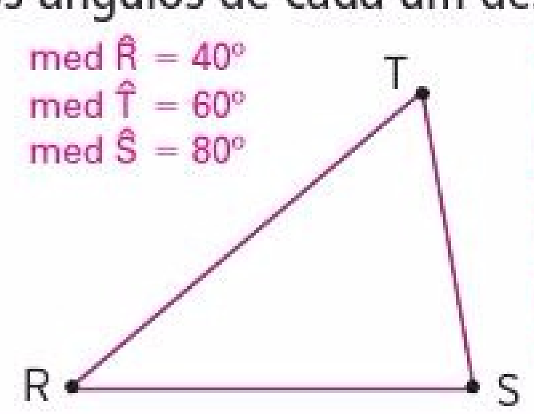


14. Qual o valor de x na figura a seguir? 45



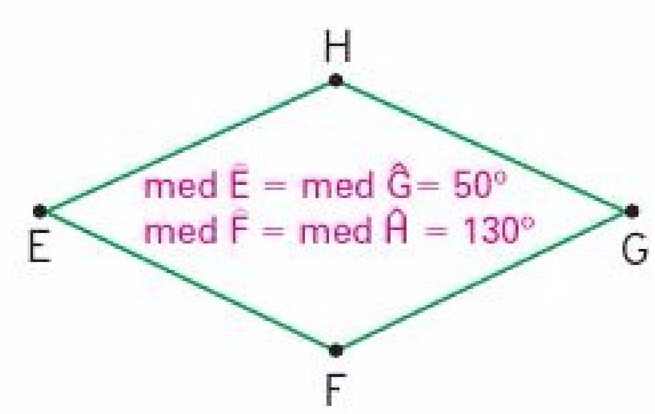
15. Utilize um transferidor e determine as medidas dos ângulos de cada um destes polígonos:

a) med $\hat{R}$ = 40°
med $\hat{T}$ = 60°
med $\hat{S}$ = 80°

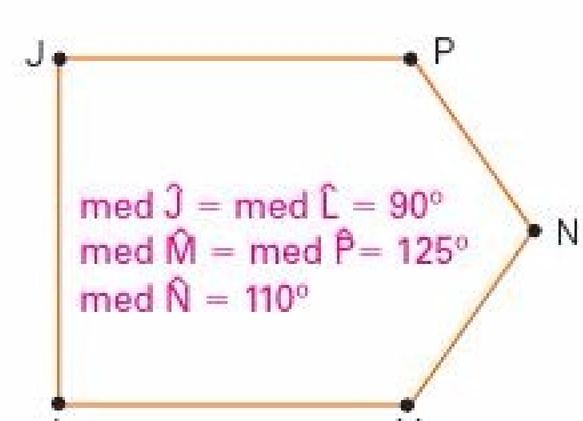


Proponha outras atividades envolvendo medidas de ângulos em figuras planas e faces de poliedros. Ver a atividade 15 e a seção **Troquem ideias e resolvam**.

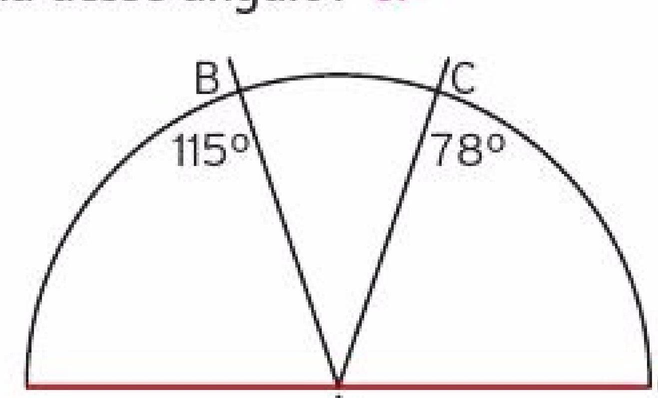
b)



c)



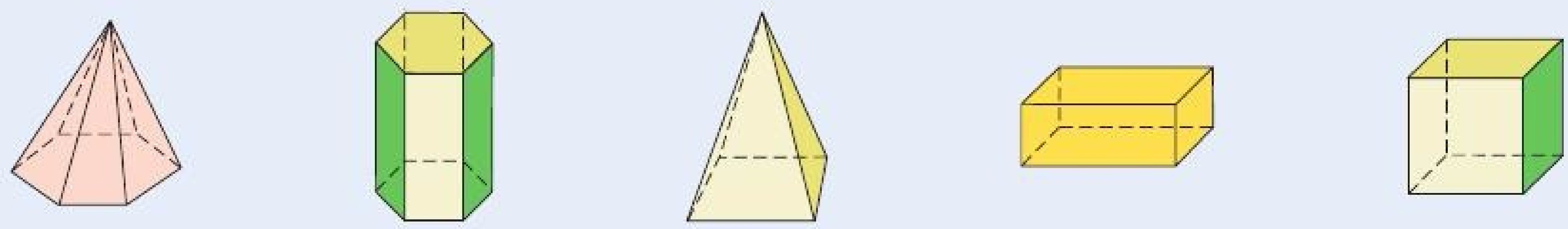
16. A figura abaixo mostra como foi colocado um transferidor para medir o ângulo $B\hat{A}C$. Qual é a medida desse ângulo? 37°



Troquem ideias e resolvam

FAÇA NO CADERNO

Combine com os colegas e tragam para a sala de aula algumas caixas e embalagens que tenham forma de poliedros, como estes:



- Coloquem as embalagens que vocês trouxeram sobre a carteira e, usando um transferidor, meçam os ângulos dos diferentes polígonos que compõem as faces desses poliedros. Resposta pessoal.

Desafio

FAÇA NO CADERNO

Ângulos e o ponteiro do relógio

Você já sabe que o ponteiro grande de um relógio faz um giro completo em 1 hora e que 1 hora corresponde a 60 minutos.

Qual o valor do ângulo correspondente ao giro que este ponteiro faz a cada 10 minutos? Explique por quê.

THINKSTOCK/ GETTY IMAGES

Resposta possível: 60°. Uma volta completa corresponde a um giro de 360°; o ponteiro grande faz 1 volta completa em 60 minutos, e como 10 minutos correspondem a um sexto de 60, em 10 minutos o ponteiro grande dará um giro correspondente a um sexto de volta, ou seja, 360° : 6 = 60°.

Submúltiplos do grau

SHUTTERSTOCK

Atualmente, navios, aviões, ônibus e até mesmo automóveis são dotados de instrumentos de orientação, como radares, GPS e rádio, que indicam o local em que se encontram e o rumo que estão seguindo. Esses instrumentos medem ângulos muito pequenos, utilizando unidades menores que 1 grau: o **minuto** e o **segundo**. Essas unidades são **submúltiplos do grau**.

Para escrever a medida de um ângulo nas unidades minuto e segundo, são usados agrupamentos de 60 em 60.

Dividindo **1 grau** em 60 partes iguais, cada parte corresponde a **1 minuto**.

$$1' = \frac{1}{60} \times 1^{\circ} \text{ e } 60' = 1^{\circ}$$

Dividindo **1 minuto** em 60 partes iguais, cada parte corresponde a **1 segundo**.

$$1'' = \frac{1}{60} \times 1' \text{ e } 60'' = 1'$$

1 minuto: 1'
1 segundo: 1''

Um grau é 60 vezes um minuto, um minuto é 60 vezes um segundo. Portanto, um grau é 3 600 vezes um segundo.

$$1^{\circ} \xrightarrow{1 \times 60} 60' \xrightarrow{60 \times 60} 3\,600''$$

Exemplos:

- Um ângulo que mede 48° pode ter sua medida transformada em minutos:

$$1° = 60' \text{ —— } 48° = 48 \times 60' = 2\,880'$$

- Um ângulo pode medir 35º 20′ 30″ e sua abertura será maior que 35º e menor que 36º.
- Um ângulo pode medir 44,5°, ou seja, 44° mais 0,5°; a medida 0,5° pode ser transformada em minutos:

$$1º = 60' \text{ —— } 0{,}5° = 0{,}5 \times 60' = 30'$$

$$\text{Logo: } 44{,}5° = 44°\ 30'$$

Muitos assuntos envolvem ângulos com medidas menores que 1°, ou seja, menores que 60′. Medidas como essas, quando transformadas em grau, são expressas por um número racional, de modo geral, na forma decimal.

Exemplo:

- Um ângulo pode medir 45′ e essa medida pode ser expressa em graus:

$$45' = 45 \times \underbrace{1'}_{1' = \frac{1°}{60}} \text{ —— } 45' = \left(\frac{45}{60}\right)^{\circ} \text{ —— } 45' = \left(\frac{3}{4}\right)^{\circ} = 0{,}75°$$

Vamos explorar apenas as unidades grau e minuto.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

17. Os ponteiros de um relógio formavam um ângulo de 20°. Após certo tempo, eles passaram a formar um ângulo com 14′ a mais que o anterior. Qual é a medida, em minutos, desse novo ângulo? 1 214′

18. Um navio que ia na direção norte-sul fez uma mudança de rota de 25° 37′. Um marinheiro transformou essa medida em minutos. Que resultado ele obteve? 1 537′

19. Escreva estas medidas em minutos:

a) 8° 45′ 525′ b) 100° 50′ 6 050′

20. Em cada ficha está anotada uma medida em minutos.

A	B	C
6 000'	5 400'	5 401'

Quais dessas fichas apresentam medidas maiores do que 90°? A e C

21. Uma professora de Matemática solicitou aos alunos que verificassem quantos minutos tem 32° 15′. Alice resolveu assim:

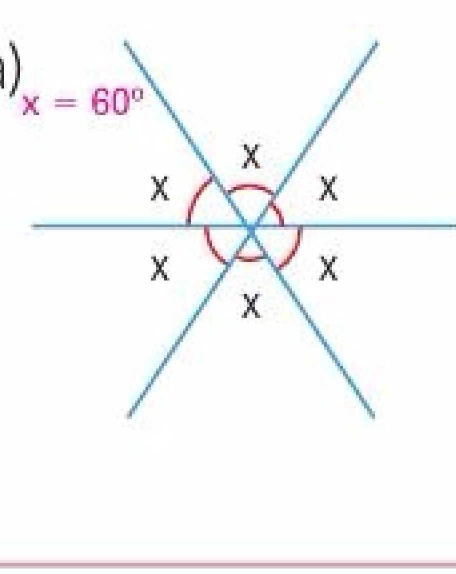
$$32° = 32 \times 1° = 32 \times 60' = 1920'$$

$$1920' + 15' = 1935'$$

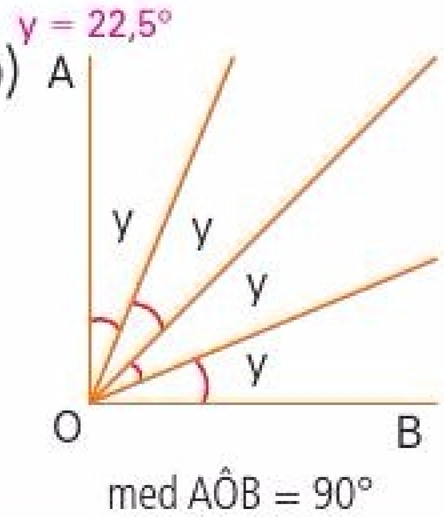
Alice respondeu corretamente? Justifique sua resposta. Sim, porque 1° = 60′ e para transformar 32° em minutos, Alice multiplicou 32 por 60′. Em seguida, somou o resultado obtido com 15′.

22. Calcule o valor das medidas **x** e **y** nas figuras a seguir:

a) x = 60°



b) y = 22,5°



med AÔB = 90°

Desafio

FAÇA NO CADERNO

Grau ou minuto?

Roberto escreveu as igualdades que estão no quadro. Que tal verificar todas elas? Se encontrar alguma errada, corrija-a.

Corretas: $93° 28' = 5608'$ e $125{,}8° = 125° 48'$; $135° = 8100'$.

$135° = 8000'$

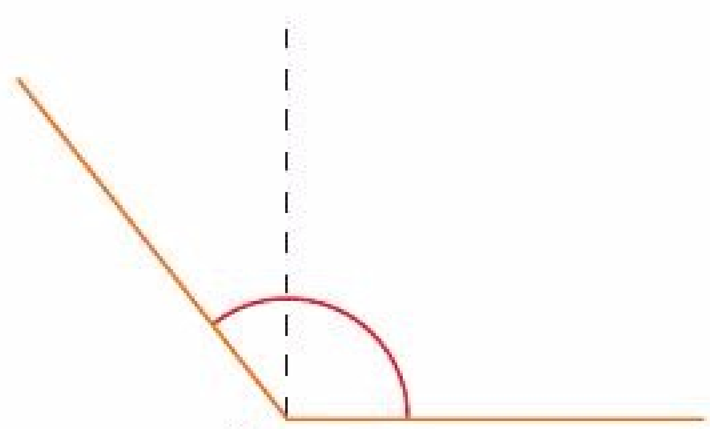
$93° 28' = 5608'$

$125{,}8° = 125° 48'$

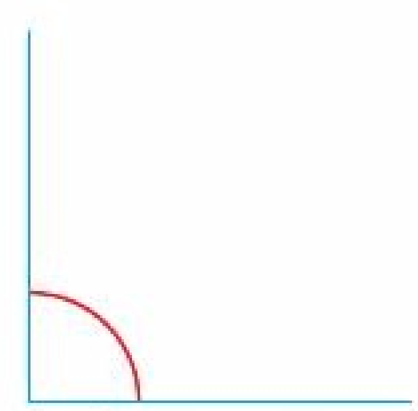
HÉLIO SENATORE

Classificação de ângulos

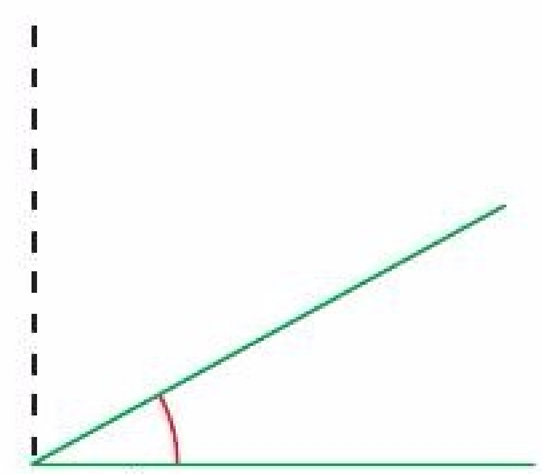
Classificamos um ângulo observando sua medida e comparando-a com a medida do ângulo reto, que é 90º.



Ângulo obtuso: medida maior que 90º.



Ângulo reto: medida igual a 90º.



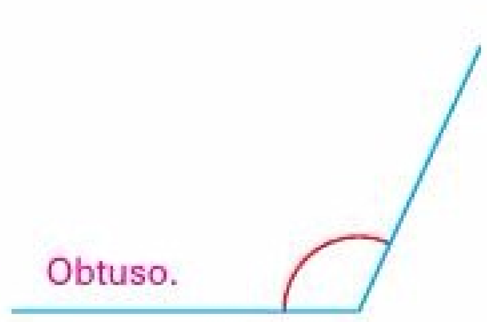
Ângulo agudo: medida menor que 90º.

Fazer e aprender

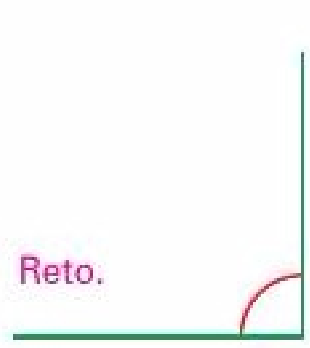
FAÇA NO CADERNO

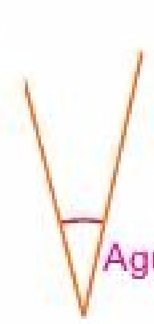
23. Agudos, retos ou obtusos? Identifique cada um destes ângulos.

Use um canto reto de uma folha de papel ou um transferidor.

a)  Obtuso.

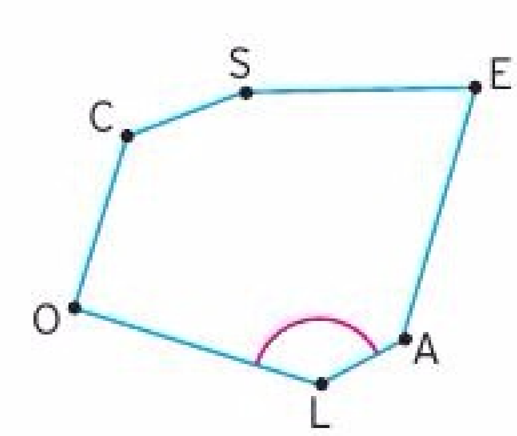
c)  Agudo.

b)  Reto.

d)  Agudo.

24. O polígono apresentado a seguir tem vários ângulos que são seus ângulos internos.

$O\hat{L}A$ é um dos ângulos internos desta figura.



FOTOGRAFIAS: THINKSTOCK/GETTY IMAGES

a) Identifique um ângulo interno agudo. $S\hat{E}A$

b) Identifique um ângulo interno reto. $C\hat{O}L$

c) Identifique um ângulo interno obtuso.

Resposta possível: $E\hat{S}C$

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

25. Em um relógio como o que você vê ao lado, o ponteiro pequeno dá um giro completo em 12 horas.

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

a) Qual a medida do ângulo formado pela mudança de direção desse ponteiro quando ele vai de 2 horas a 3 horas? 30°

b) De que tipo é esse ângulo? Agudo.

c) Descreva uma mudança de direção desse ponteiro e que corresponda a um ângulo obtuso. Resposta possível: Percurso de 12 horas a 16 horas.

Unidades de tempo: agrupamentos de 60 em 60

Para exprimir um período curto, como a duração de um jogo de futebol, usamos como unidades horas, minutos e segundos.

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Essas unidades de tempo se relacionam da mesma forma que as unidades de medidas de ângulos, graus, minutos e segundos: de 60 em 60.

Os símbolos usados para as unidades de tempo são diferentes daqueles que usamos para a medida de ângulos.

1 hora —— 1 h   1 minuto —— 1 min   1 segundo —— 1 s

1 h = 60 min e 1 min = 60 s

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

26. Responda às questões:

a) Quantos minutos correspondem a 0,5 hora? 30 minutos.

b) Quantos minutos correspondem a um quarto de hora? 15 minutos.

c) Quantos minutos correspondem a 3,5 horas? 210 minutos.

27. Em uma corrida da Fórmula 1 o vencedor completou todo o percurso em 3 h 32 min. A quantos minutos corresponde esse tempo? 212 minutos.

28. Em um campeonato de futebol, o jogo da final começará às 16 h 30 min. Uma partida de futebol tem normalmente dois tempos de 45 minutos cada e um intervalo de 15 minutos entre esses dois tempos.

a) Se não houver nenhum contratempo, a que horas terminará o jogo? 18 h 15 min

b) Em caso de empate, os jogadores descansam 10 minutos até o começo da prorrogação de 30 minutos, sem intervalo. Se isso acontecer, a que horas terminará a partida? 18 h 55 min

29. Rosana tem um disco de DVD que permite até 2 horas de gravação. Ela já gravou nesse disco um documentário com duração de 45 minutos.

a) Quanto tempo ela ainda tem para fazer novas gravações nesse disco? 1 h 15 min

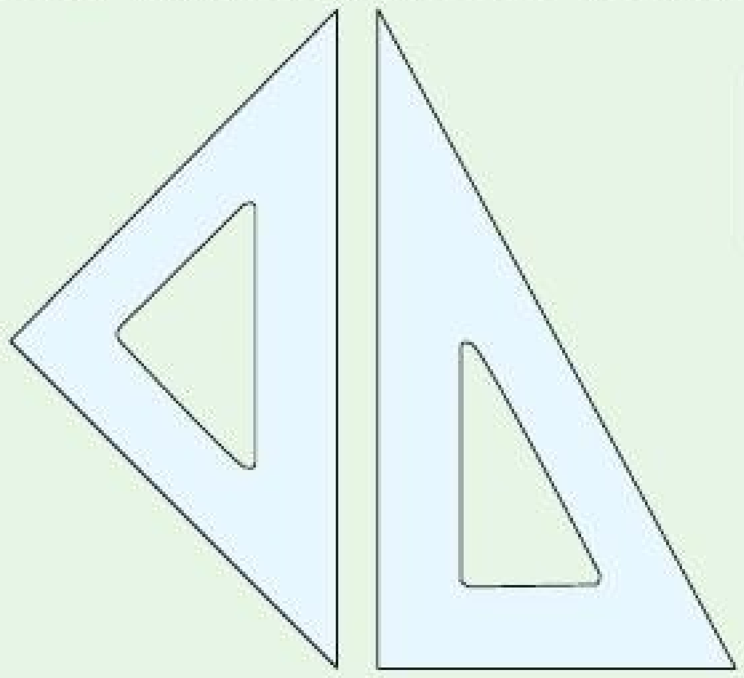
b) Ela poderá gravar o capítulo 13 da novela **Tudo acaba em *pizza***, que começa às 20 h 30 min e termina às 21 h 25 min? Justifique sua resposta. Sim, porque o capítulo que ela quer gravar tem 55 minutos de duração, e o disco comporta mais 1 h 15 min de gravação.

Nas atividades com cálculos envolvendo unidades de medida de tempo, procure insistir com os alunos para que indiquem todas as passagens. Isso poderá auxiliar na consolidação dos algoritmos das operações com essas medidas.

Investigue e explique

FAÇA NO CADERNO

Você já viu instrumentos de desenho como esses?



BIS

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

- O que eles têm em comum? Resposta possível: Um ângulo reto.
- Observe os ângulos não retos nesses esquadros. Qual a medida desses ângulos? 45°, 45° em um deles; 30°, 60° no outro.
- Mostre a um colega como desenhar um ângulo de 120° usando esses esquadros. Ajustando um canto de 90°, de um dos esquadros, com outro de 30°, de outro esquadro.
- Mostre a um colega como desenhar um ângulo de 135° usando esses esquadros. Ajustando um canto de 90°, de um dos esquadros, com outro de 45°, de outro esquadro.

Desafio

FAÇA NO CADERNO

Ângulos e comunicação

O grupo de pessoas que se encontra na lancha está comunicando alguma coisa, por meio de sinais, às pessoas que estão em um barco próximo.

Os sinais dizem ***storm***, palavra inglesa que significa "tempestade".

HÉLIO SENATORE

- Os ângulos agudos são formados pelos sinais que correspondem a quais letras? Os sinais correspondentes às letras **T** e **O**.
- E os ângulos obtusos? E o ângulo raso? Os sinais correspondentes às letras **S** e **M**. O sinal correspondente à letra **R**.

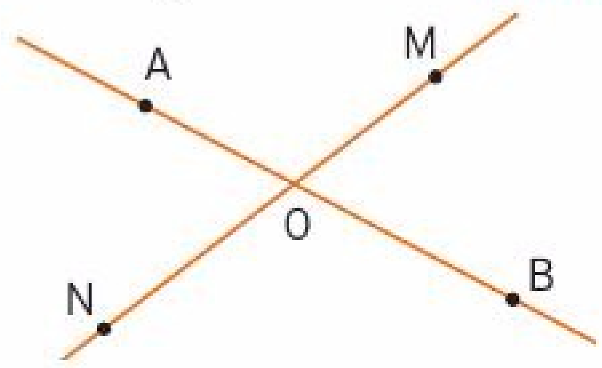
Exercícios complementares

FAÇA NO CADERNO

30. Na figura abaixo as retas concorrentes $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{MN}$ se interceptam no ponto **O**.

a) Quais são ângulos agudos? $A\hat{O}N$ e $M\hat{O}B$

b) Quais são ângulos obtusos? $A\hat{O}M$ e $N\hat{O}B$

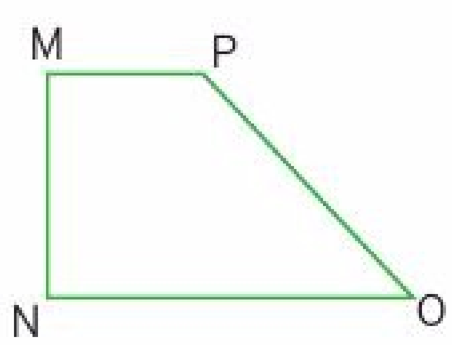


31. No trapézio, abaixo, identifique, entre os ângulos internos:

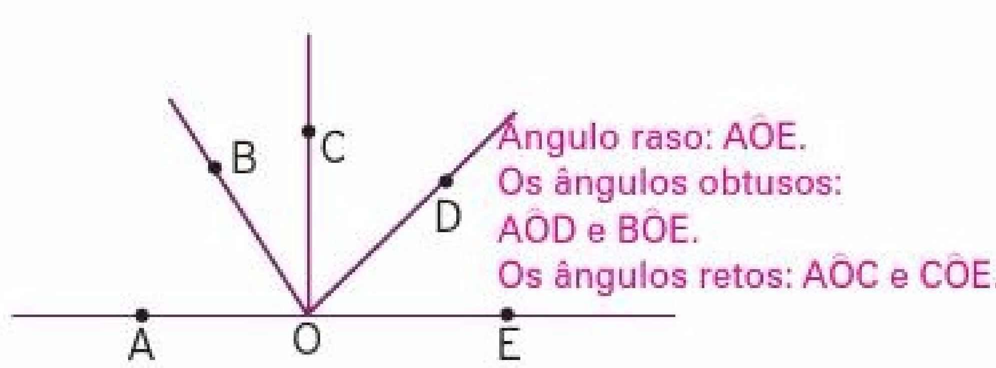
a) o ângulo agudo; $N\hat{O}P$

b) o ângulo obtuso; $O\hat{P}M$

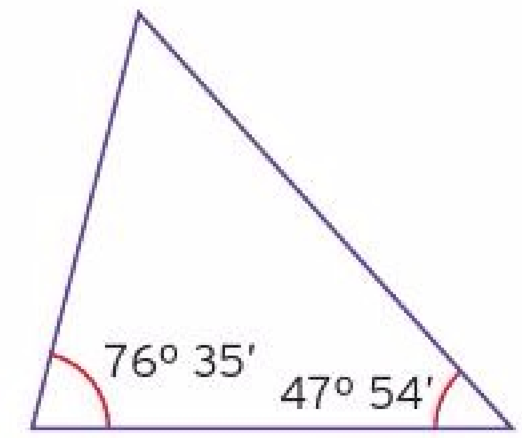
c) os ângulos retos. $P\hat{M}N$ e $M\hat{N}O$



32. Na figura, identifique e anote todos os ângulos obtusos, rasos e retos que têm um de seus lados sobre a reta $\overleftrightarrow{AE}$ e o vértice **O**.



33. Observe como se calcula a soma das medidas dos ângulos destacados no triângulo abaixo.



Adicione grau com grau, minuto com minuto.

	Graus	Minutos
	76°	35′
+	47°	54′
	123°	$\underbrace{89'}$

60′ + 29′ = 1° 29′

Soma:

$123^\circ\, 89' = 123^\circ + 1^\circ + 29' = 124^\circ\, 29'$

Verifique se aprendeu: calcule a soma das medidas dos ângulos indicados a seguir.

a) $59^\circ\, 38' + 25^\circ\, 54'$ 85° 32′

b) $76^\circ\, 54' + 19^\circ\, 49'$ 96° 43′

Desafio

FAÇA NO CADERNO

Operações com medidas de ângulos

Qual é a diferença entre as medidas dos ângulos destacados no triângulo apresentado na atividade 33? 28° 41′

Lembrem-se de que 76° correspondem a 75° 60′.

SHUTTERSTOCK

Agora, resolva este problema:

- A soma das medidas de três ângulos é 180°. Se o primeiro mede 47° 18′ a mais que o segundo, e este mede 30° 12′, qual é a medida dos outros dois ângulos? 77° 30′ e 72° 18′

3 Ângulos e retas

Ângulos congruentes

Para refletir e responder

Na entrada de um supermercado há duas esteiras rolantes.

A inclinação das rampas é dada pelos seguintes ângulos:

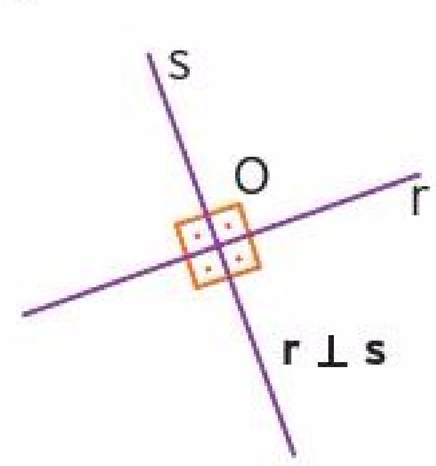
- O que se pode concluir sobre as medidas de $A\hat{O}B$ e $X\hat{P}Y$?
  As medidas são iguais.

Usando um transferidor, e medindo os ângulos apresentados, verificamos que ambos têm a mesma medida.

> Dois ângulos são **congruentes** quando têm medidas iguais.

Retas perpendiculares

Observe as retas **r** e **s** dadas na figura.



As retas **r** e **s** são concorrentes e formam quatro ângulos congruentes.

Note que a soma das medidas desses ângulos é 360°, ou seja, cada ângulo mede 90°.

As retas **r** e **s** são **retas perpendiculares**. Indica-se: **r** $\perp$ **s**.

Traçado de retas perpendiculares

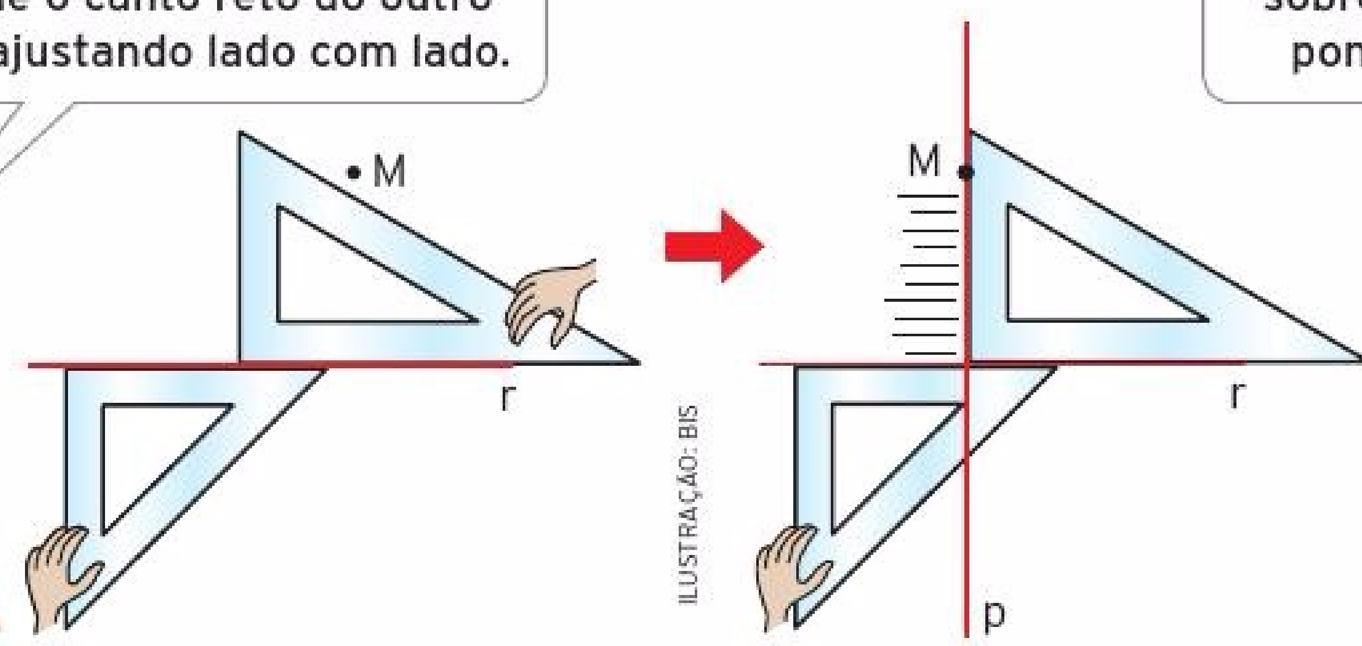
Podemos traçar retas perpendiculares com o auxílio de dois esquadros ou de um esquadro e uma régua.

Exemplo:

Traçado de uma reta perpendicular à reta **r** e que passa pelo ponto **M**.

Apoie um dos esquadros sob a reta **r** e mantenha-o fixo. Apoie o canto reto do outro esquadro no anterior, ajustando lado com lado.

Desloque o esquadro superior sobre o esquadro fixo até o ponto **M** e trace a reta **p**.



FOTOGRAFIAS: THINKSTOCK/GETTY IMAGES

A reta **p** passa por **M** e é perpendicular à reta **r**. Indicamos: **p ⊥ r**.

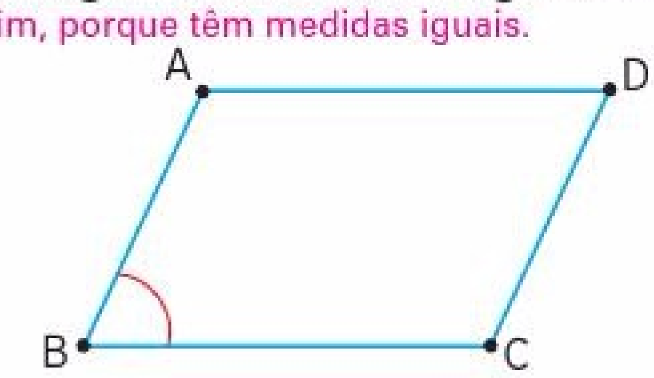
Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

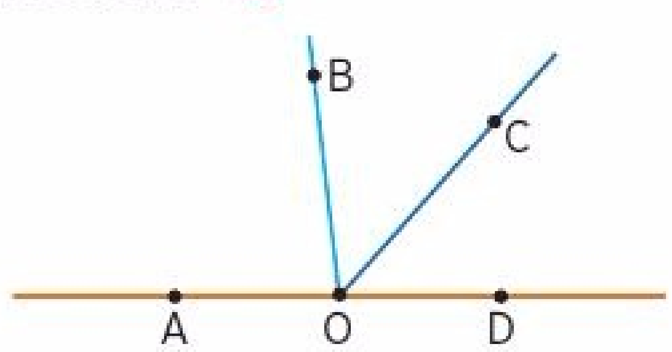
34. No paralelogramo ABCD, o ângulo $\hat{B}$ mede 65°. Nesse paralelogramo:

a) qual é o ângulo congruente a $\hat{B}$? $\hat{D}$

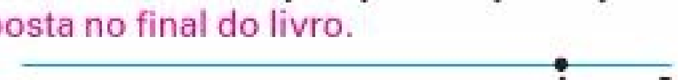
b) os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{C}$ são congruentes? Por quê?
Sim, porque têm medidas iguais.



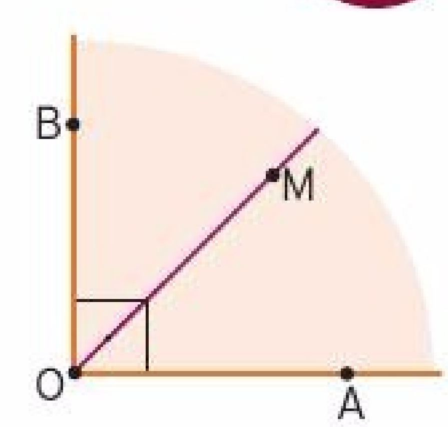
35. Nesta figura, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ e $\overrightarrow{OD}$ estão no mesmo plano. Sabe-se que CÔD é congruente a CÔB e a medida de CÔB é igual a 48° 30'. Qual é a medida de AÔB? 83°



36. Desenhe uma reta **s** e marque um ponto **A** sobre ela, como na figura abaixo. Trace uma reta perpendicular a **s** e que passe pelo ponto **A**.
Veja resposta no final do livro.

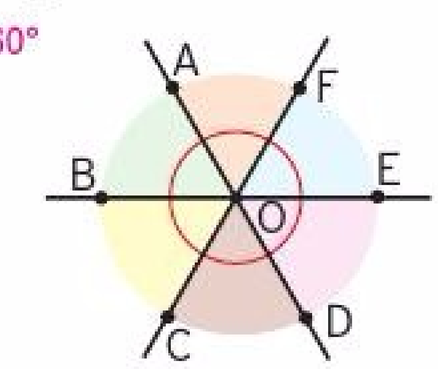


37. O ângulo BÔA é um ângulo reto. A semirreta $\overrightarrow{OM}$, na região angular BÔA, forma com os lados de BÔA ângulos congruentes. Qual é a medida desses ângulos? 45°



med BÔA = 90°

38. Os pontos **O**, **A**, **B**, **C**, **D**, **E** e **F** estão no mesmo plano, e os ângulos AÔB, BÔC, CÔD, DÔE, EÔF e FÔA são congruentes. Qual é a medida de cada um deles? 60°



39. Ricardo desenhou um ângulo AÔB com 121°. Na região angular AÔB ele traçou uma semirreta $\overrightarrow{OM}$, obtendo dois ângulos congruentes. Qual é a medida desses ângulos? 60° 30'

40. Desenhe uma reta **c** e trace três retas perpendiculares a ela. O que ocorre com as retas que você traçou?
São paralelas. Veja a resposta no final do livro.

Bissetriz de um ângulo

Vamos aprender mais sobre ângulos por meio de dobraduras.

Desenhe um ângulo com 50º em uma folha de papel e recorte-o com cuidado.

Faça uma dobra de modo que os lados do ângulo coincidam.

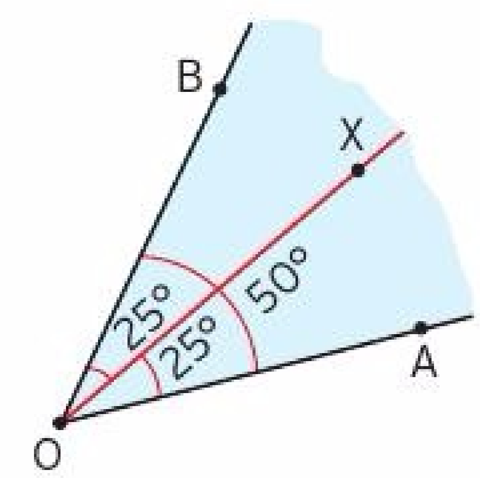
Em seguida, desdobre o papel e observe os ângulos que se formaram.

FOTOGRAFIAS: THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Veja na representação ao lado o resultado dessa dobradura.

A semirreta $\overrightarrow{OX}$ traçada sobre a dobra, na região angular $B\hat{O}A$, determina os ângulos $B\hat{O}X$ e $X\hat{O}A$, que são congruentes.

Dizemos que $\overrightarrow{OX}$ é a **bissetriz** de $B\hat{O}A$.

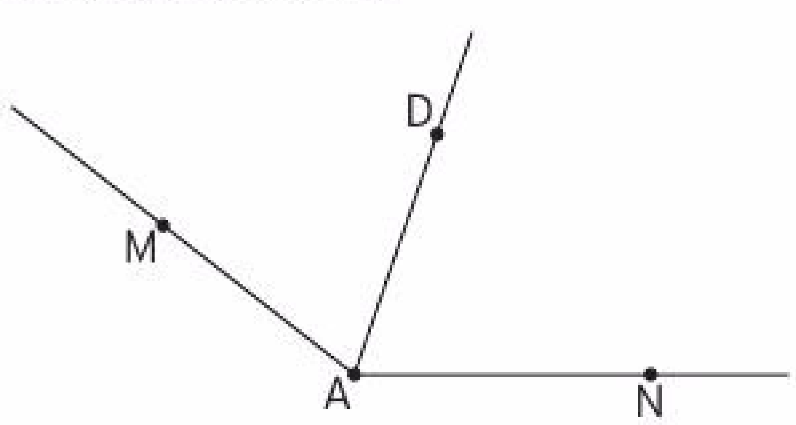


> **Bissetriz** de um ângulo é a semirreta que está na região angular desse ângulo, com origem em seu vértice e que forma com seus lados dois ângulos congruentes.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

41. O ângulo $M\hat{A}N$ mede 142°. E a semirreta $\overrightarrow{AD}$ é bissetriz de $M\hat{A}N$.



Qual é a medida dos ângulos $M\hat{A}D$ e $D\hat{A}N$? 71°

42. Utilize um transferidor e desenhe:

Respostas pessoais.

a) $A\hat{O}M$, com med $A\hat{O}M = 85°$, e sua bissetriz;

b) $X\hat{P}Y$, com med $X\hat{P}Y = 130°$, e sua bissetriz;

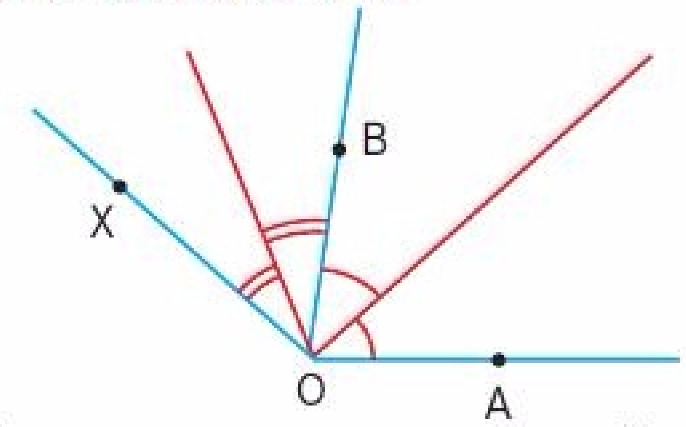
c) Agora é a sua vez!

Você desenha um ângulo qualquer e seu colega traça a bissetriz.

43. A bissetriz de um ângulo $P\hat{A}M$ determina dois ângulos com 36° na região angular dele. Qual é o valor da med $P\hat{A}M$? 72°

44. A bissetriz $\overrightarrow{OC}$ do ângulo $A\hat{O}B$ forma com o lado $\overrightarrow{OA}$ um ângulo com 22° 30′ na região angular dele. Qual é a medida do ângulo $A\hat{O}B$? 45°

45. Na figura abaixo, $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}X$ medem 80° e 55°, respectivamente. a) Resposta possível: A medida do ângulo formado pelas bissetrizes, na figura abaixo, é igual a 80° : 2 mais 55° : 2, ou ainda (80° + 55°) : 2. Ou 135° : 2.



a) Escreva um pequeno texto explicando, e justificando, como calcular a medida do ângulo formado pelas bissetrizes desses ângulos.

b) Quanto mede o ângulo formado pelas bissetrizes desses ângulos? 67,5° ou 67° 30′

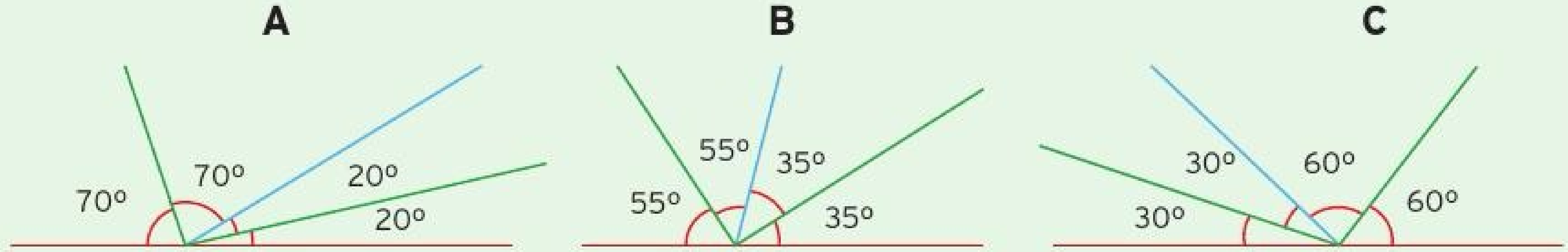
Investigue e explique

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega. Analisem as construções abaixo, reflitam sobre as questões propostas e encontrem respostas.

Cada figura apresenta ângulos construídos sobre um ângulo raso, de 180°.

Observem os ângulos com lados em verde: cada um deles está dividido em dois outros ângulos.



- O que há de comum entre os ângulos cujos lados estão representados em verde nas três figuras? São ângulos retos.
- Em cada figura, considere um ângulo formado por uma semirreta azul e uma vermelha. O que podemos afirmar sobre a semirreta verde que está na região angular desse ângulo? A semirreta verde é bissetriz do ângulo considerado.
- Desenhem uma figura como as que foram apresentadas: comece traçando um ângulo raso vermelho; em seguida, uma semirreta azul com origem no vértice do ângulo raso; por fim, trace as bissetrizes (em verde) dos ângulos formados. A regularidade observada no primeiro item permanece? Sim.

Desafio

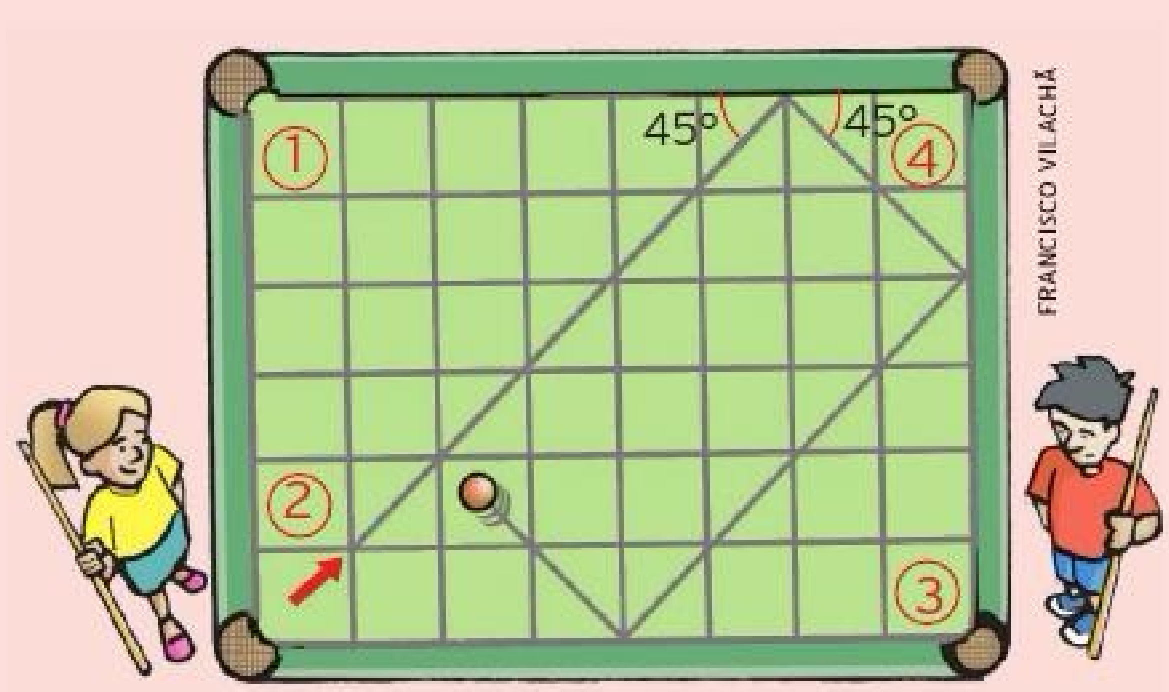
FAÇA NO CADERNO

Vamos jogar sinuca?

Que tal experimentar uma sinuca diferente?

Esta mesa tem apenas quatro caçapas, e sua superfície é um quadriculado de 8 por 6.

As regras também são diferentes:



- uma só bola em cada jogada;
- início da jogada sempre no mesmo canto;
- as tacadas devem ser dadas sempre formando um ângulo de 45° com as bordas;
- a bola bate em uma das bordas e segue seu movimento, formando ângulos de 45° com essas bordas.

Responda:

a) Começando no ponto indicado pela seta, em que caçapa a bola cairá? Caçapa 3.

b) Quantos quadrados a bola atravessará, antes de cair nessa caçapa? 23 quadrados.

c) Quantas vezes a bola baterá nas bordas, antes de cair nessa caçapa? 5 vezes.

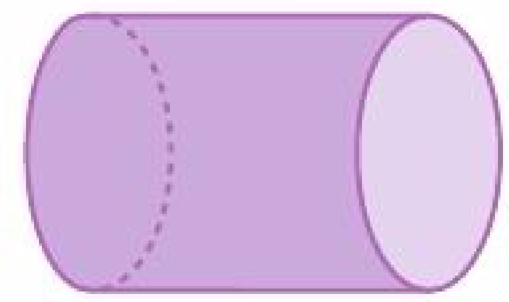
Fonte: Nigel Langdon; Charles Snape. Viva a Matemática! *Lisboa: Gradiva.*

4 Circunferência e círculo

O que é circunferência?

Para refletir e responder

Observe o objeto cilíndrico ao lado.

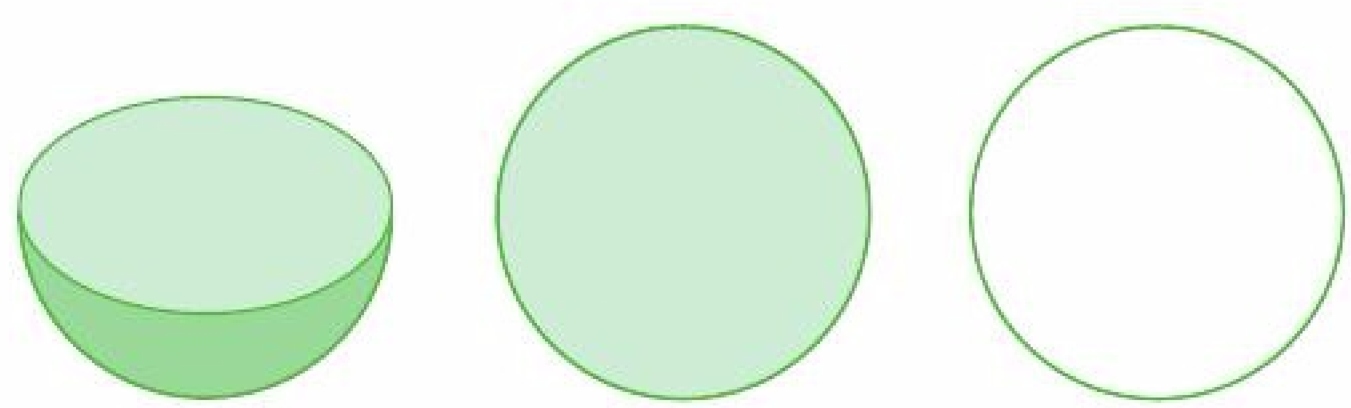


- Imagine uma pessoa fazendo um corte nesse objeto, de maneira que esse corte seja paralelo às bases do cilindro. Que figura aparecerá no contorno desse corte?

Circunferência.

Com cortes específicos em objetos com formas de esfera, cilindro e cone, obtemos figuras circulares.

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

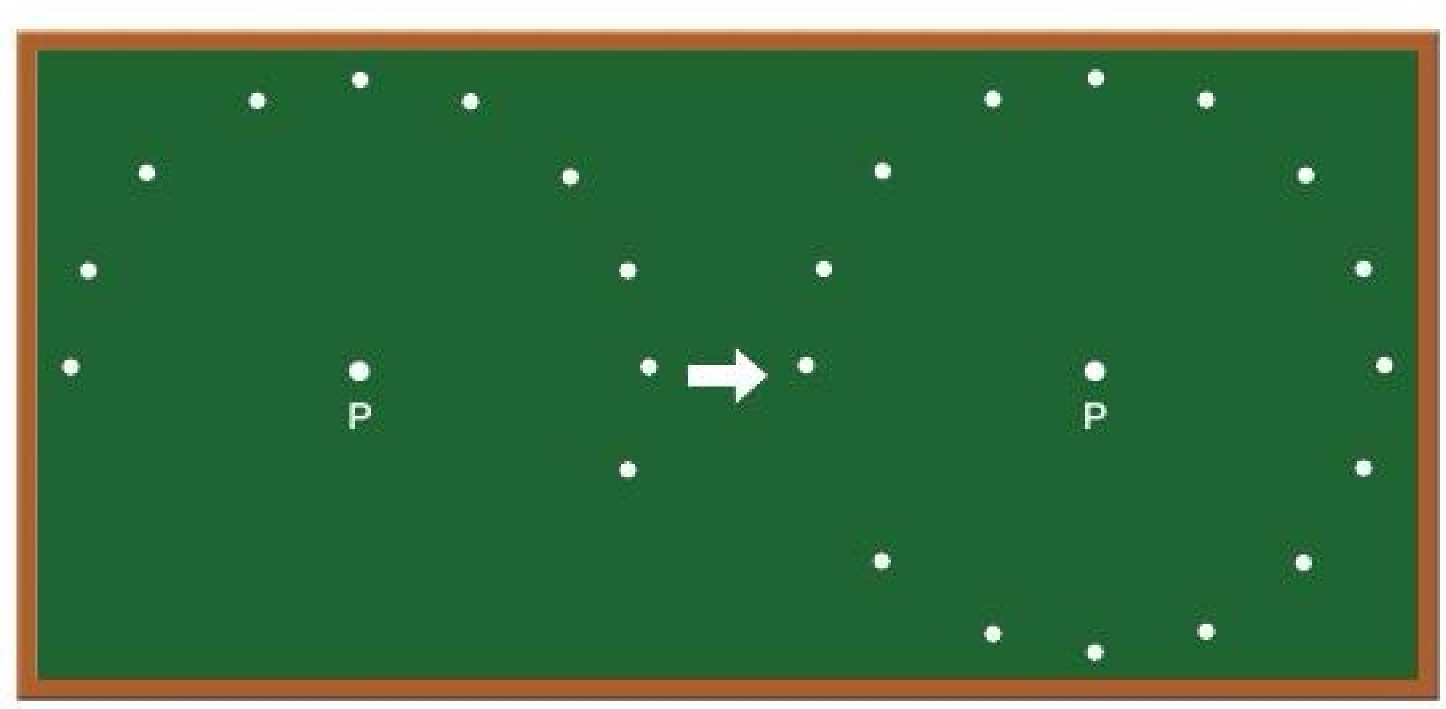


círculo circunferência

Como obter geometricamente uma circunferência?

Para saber, vamos analisar a situação apresentada a seguir: em um primeiro momento, foram destacados 10 pontos do plano, do quadro de giz, que estão a 2 cm de distância de **P**, no mesmo plano; depois, foram destacados outros 5 pontos nas mesmas condições.

Quantos pontos como esses podemos destacar?



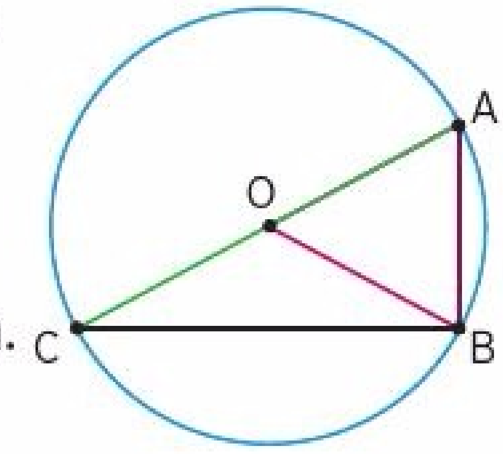
Circum é uma palavra latina que significa "ao redor".

Na situação apresentada, considerando um plano que contém o ponto **P**, podem ser destacados infinitos pontos desse plano e que estão a 2 cm de **P**. Eles compõem uma figura geométrica plana que é chamada de **circunferência** de **centro P** e **raio 2 cm**.

Circunferência é uma linha fechada em um plano cujos pontos estão à mesma distância de um ponto fixo desse plano. Esse ponto é o **centro** da circunferência.

Raio e corda

Na circunferência ao lado foram destacados seus principais elementos.



- O ponto **O** é o **centro** da circunferência.
- Os segmentos de reta $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ são **raios** da circunferência.
- Os segmentos de reta $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são **cordas** da circunferência.
- O segmento $\overline{AC}$ é um **diâmetro** da circunferência.

Lembre-se, em qualquer circunferência:

- **raio** é um segmento de reta com uma extremidade no centro e outra em um ponto dessa circunferência;
- **corda** é um segmento de reta com extremidades em dois pontos dessa circunferência;
- **diâmetro** é uma corda que contém o centro dessa circunferência.

A expressão "o raio de uma circunferência" refere-se à medida dos segmentos de reta que são raios dessa circunferência. O mesmo vale para diâmetro de uma circunferência.

Traçado de uma circunferência

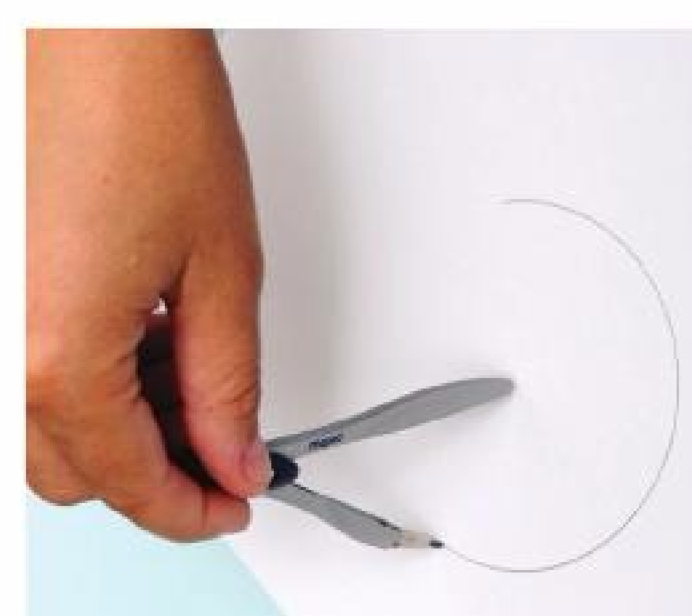
Para traçar uma circunferência é preciso determinar um ponto que será o centro e a medida do raio.

Um dos instrumentos que utilizamos para traçar uma circunferência é o **compasso**.

Observe como se usa esse instrumento para isso:

Abrimos o compasso com abertura igual à medida do raio da circunferência que vamos traçar.

Colocamos a ponta-seca do compasso sobre um ponto que será o centro da circunferência.



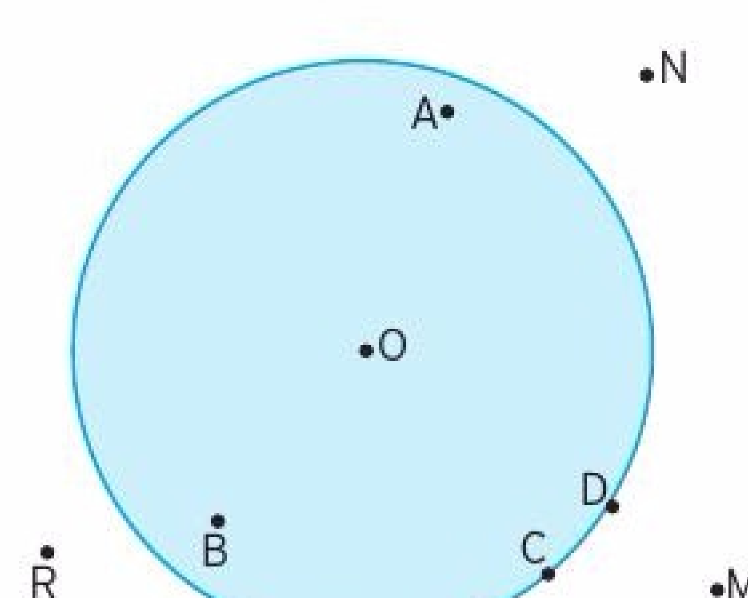
Mantemos fixa a ponta-seca do compasso e giramos a outra ponta, traçando a circunferência.

FOTOGRAFIAS: FERNANDO FAVORETTO/CRIAR IMAGEM

O que é círculo?

Círculo é uma figura formada por todos os pontos de uma circunferência e pelos pontos do plano dessa circunferência cujas distâncias ao centro sejam menores que o raio da circunferência.

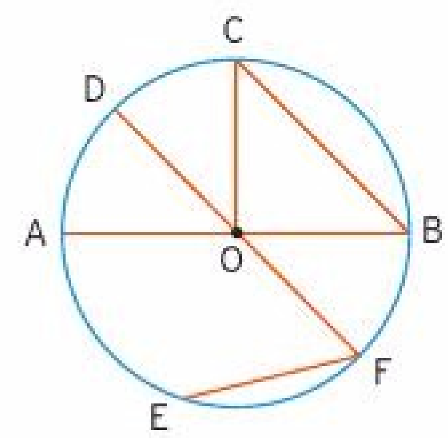
Na figura ao lado, temos um círculo de centro **O** e com raio de 2,0 cm. Os pontos **A**, **B**, **C**, **D** e **O** pertencem ao círculo.



Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

46. Observe a circunferência ao lado. Identifique e anote:



a) um raio; Resposta possível: $\overline{AO}$.

b) uma corda que não é um diâmetro; Resposta possível: $\overline{EF}$.

c) a maior corda; Resposta possível: $\overline{AB}$.

d) dois ângulos congruentes. $A\hat{O}D$ e $B\hat{O}F$.

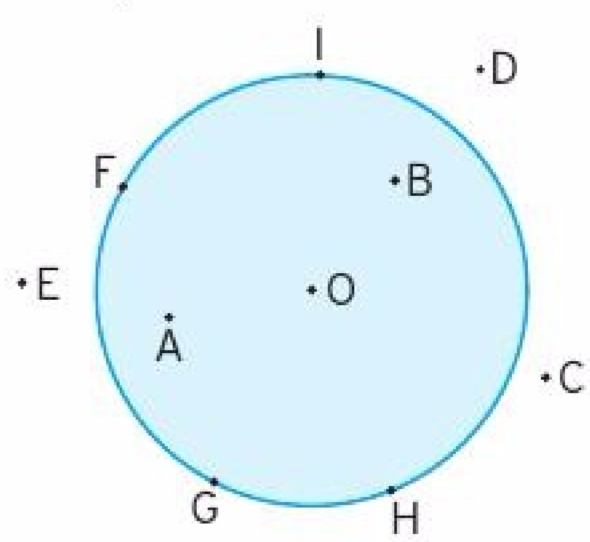
47. Quais são as maiores cordas de uma circunferência? Os diâmetros.

48. Desenhe: Ver respostas no final do livro.

a) uma circunferência com centro **A** e raio de 2,1 cm;

b) uma circunferência com centro **V** e diâmetro de 5 cm.

49. O raio deste círculo de centro **O** mede 1,5 m. Observe os pontos destacados:



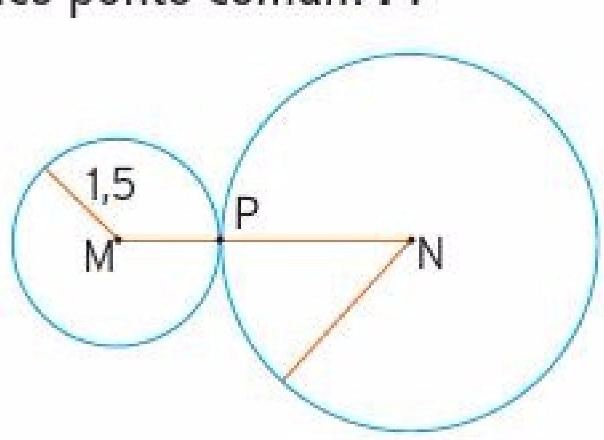
a) Quais estão a 1,5 m de distância do ponto **O**? F; G; H; I

b) Quais estão a uma distância menor que 1,5 m do ponto **O**? A; B; O

c) Quais estão a uma distância maior que 1,5 m do ponto **O**? D; C; E

d) Identifique quatro pontos que pertencem a esse círculo. Resposta possível: O; A; B; H

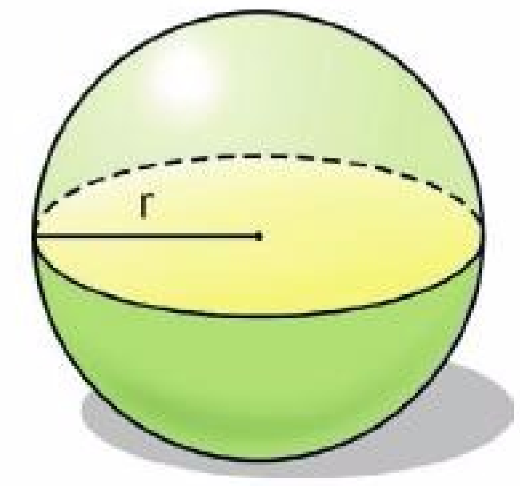
50. As circunferências com centros **M** e **N** têm um único ponto comum **P**.



Medidas indicadas em cm.

A distância de **M** a **N** é de 3,5 cm. Qual o diâmetro da circunferência de centro **N**? 4 cm.

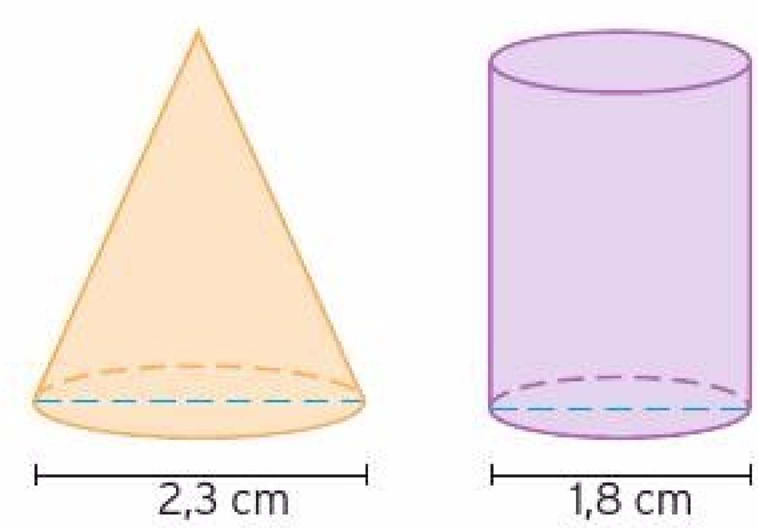
51. Imagine uma esfera na qual foi feito um corte plano como mostra a figura.



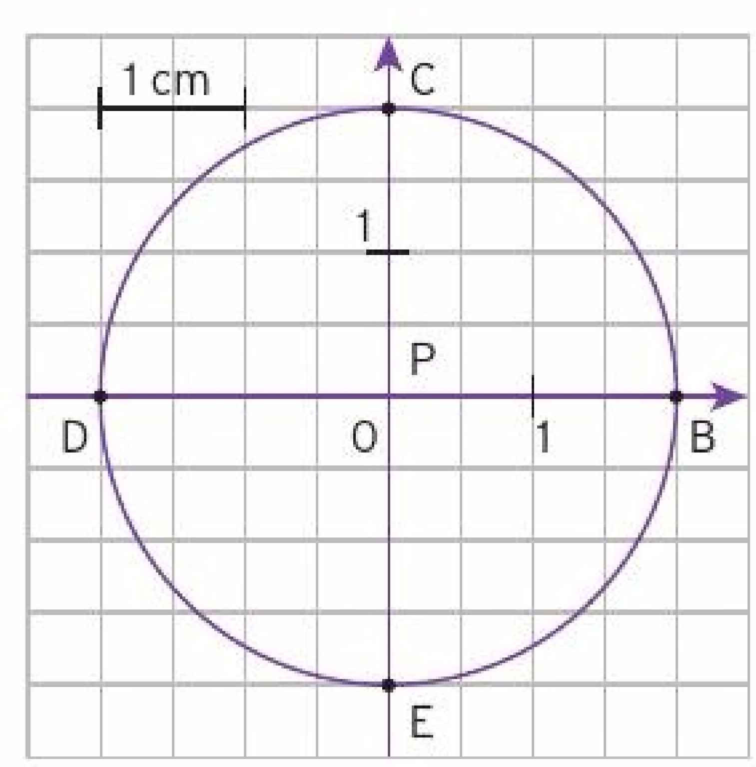
a) Qual é a figura geométrica obtida com esse corte? Círculo.

b) Todos os cortes feitos em uma esfera são circulares? Sim.

52. As bases do cilindro e do cone abaixo são círculos. Observe as medidas dos diâmetros dessas bases e calcule as medidas dos raios. 1,15 cm; 0,9 cm.



53. Esta circunferência tem o centro localizado no ponto P (0, 0).

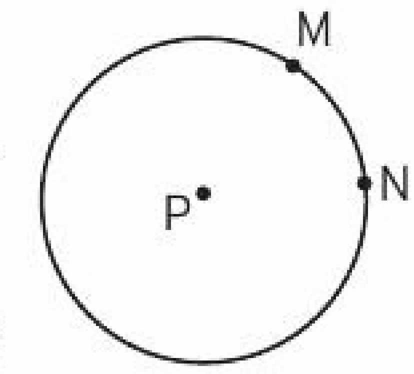


a) Quais são as localizações dos pontos B e D dessa circunferência? B (2, 0) e D (–2, 0).

b) Anote, indicando as extremidades, dois raios dessa circunferência. Resposta possível: $\overline{OD}$; $\overline{OC}$.

c) Qual é a medida, em centímetros, de um raio dessa circunferência? E de um diâmetro? 2 cm; 4 cm.

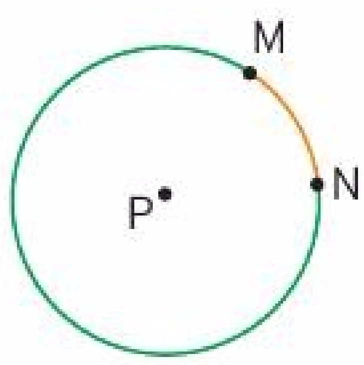
Arco, ângulo central e setor circular



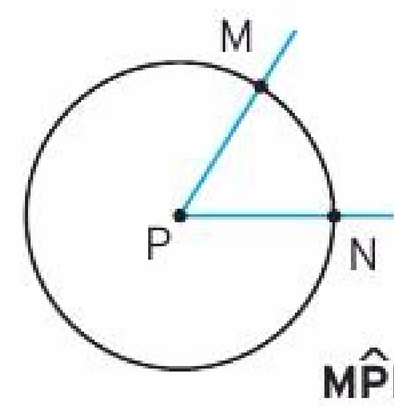
Vamos conhecer outras figuras geométricas relacionadas a circunferências e círculos.

Observe os pontos **M** e **N** pertencentes à circunferência com centro **P** e raio $\overline{PM}$.

Os pontos **M** e **N** dividem essa circunferência em duas partes. Cada uma delas é um **arco** dessa circunferência.

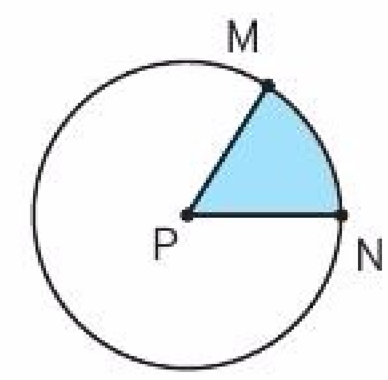


O ângulo de vértice **P**, e de lados que passam por dois pontos da circunferência, é chamado de **ângulo central**.



MP̂N é um ângulo central.

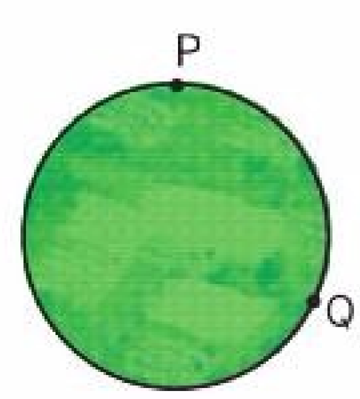
A região pintada de azul é o **setor circular** correspondente ao ângulo central MP̂N.



Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

54. Imagine que a circunferência ao lado seja um caminho em volta de um jardim todo gramado. Uma pessoa está no ponto **P** e quer ir até o ponto **Q** sem pisar a grama.



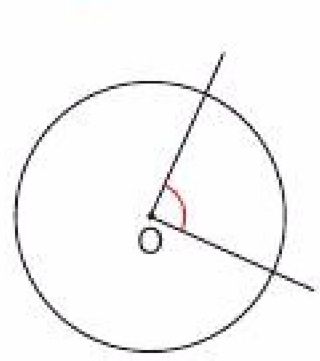
a) Andando sobre a circunferência, quantas maneiras há para fazer isso? Duas maneiras.

b) Que figuras geométricas formam esses caminhos? Arcos.

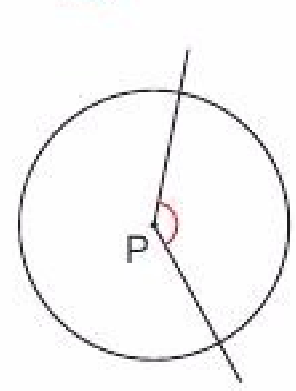
55. Desenhe um setor circular correspondente ao ângulo central de 180°. Veja resposta no final do livro.

56. Escolha, entre os valores destacados nas fichas, uma estimativa da medida de cada ângulo central.

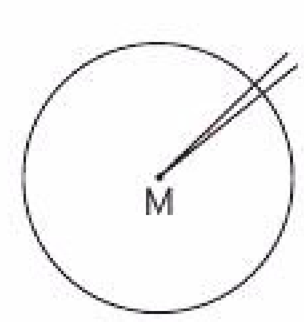
a) 70°, 90° ou 110° — 90°



b) 120°, 140° ou 160° — 140°

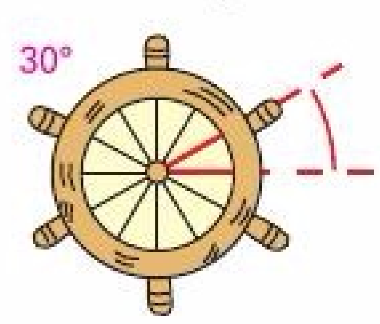


c) 5°, 10° ou 20° — 5°

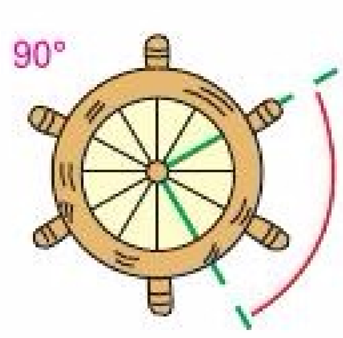


57. Determine a medida de cada ângulo central indicado nas figuras:

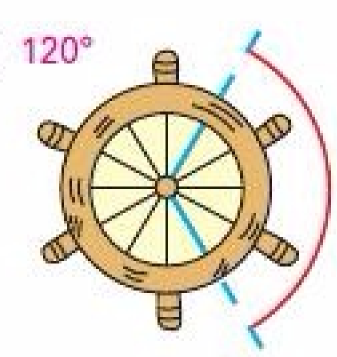
a) 30°



b) 90°



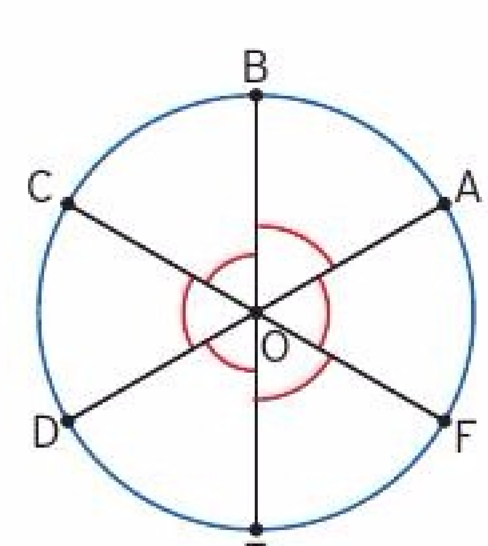
c) 120°



FRANCISCO VILACHÁ

58. Desenhe uma circunferência com centro **B** e nela um ângulo central com 75°. Destaque nessa circunferência um de seus arcos. Veja resposta no final do livro.

59. Na figura, os ângulos centrais indicados são congruentes. Quanto mede cada um deles? 60°



5 Estatística e probabilidade

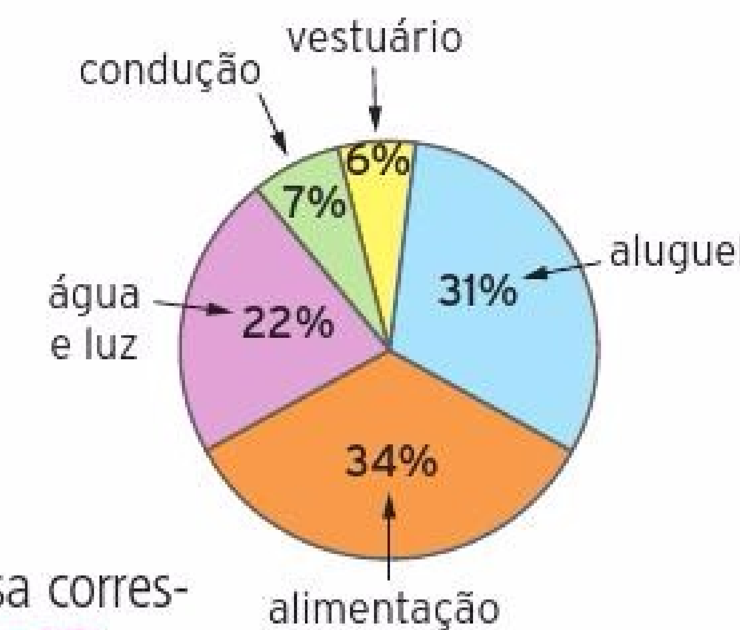
Gráfico de setores

Procure auxiliar os alunos na interpretação dos gráficos de setores para que façam uma leitura mais crítica das informações neles contidas. Solicite-lhes que tragam para a sala de aula temas do cotidiano presentes em jornais e revistas que possam fornecer dados para a construção de gráficos.

Para refletir e responder

As informações sobre todos os gastos mensais da família Ferreira estão representadas no gráfico ao lado, que mostra um círculo dividido em regiões, e cada região representa um porcentual.

Gastos mensais



- Qual é a maior despesa da família Ferreira? Essa despesa corresponde a quanto por cento dos gastos mensais? A alimentação. 34%

O gráfico apresentado acima é um **gráfico de setores**. Gráficos como esses são compostos por um círculo dividido em setores circulares. O círculo todo corresponde a 100%, ou seja, ao todo-referência do tema tratado.

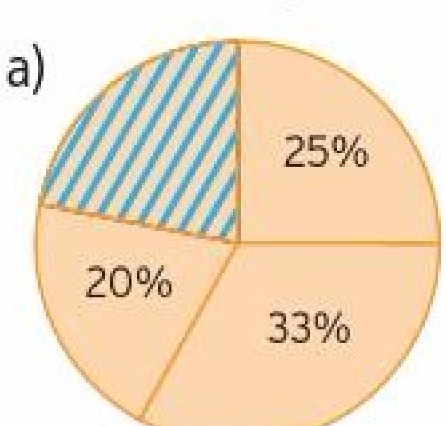
Na situação apresentada, 100% corresponde a todo o gasto mensal de uma família. Em uma leitura rápida, é possível perceber que os maiores gastos dessa família são feitos com alimentação e aluguel.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

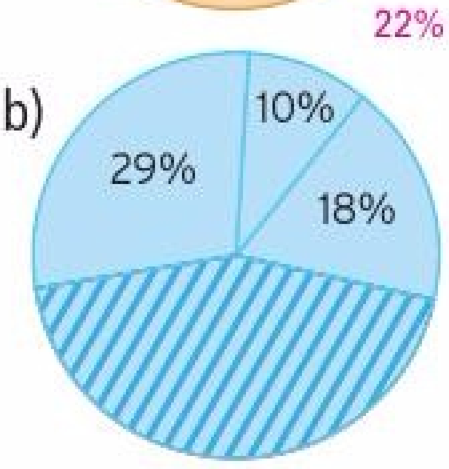
60. Escreva a porcentagem representada pela parte hachurada, em cada caso:

a)



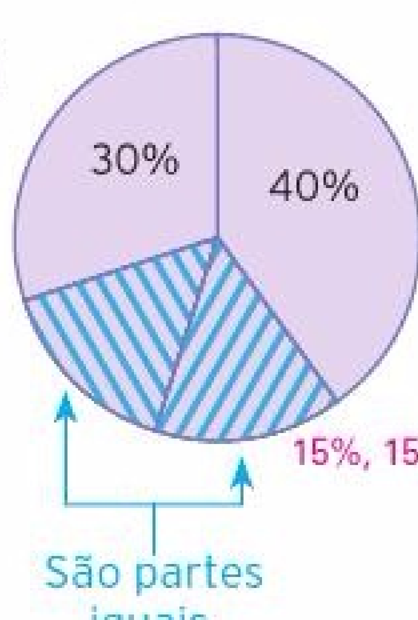
22%

b)



43%

c)



15%, 15%

61. Este gráfico indica, em porcentagens, os tipos de esporte praticados por um grupo de 160 rapazes. Cada rapaz pratica um único esporte.

Esportes preferidos

a) Quantos rapazes do grupo praticam futebol? 88 rapazes.

b) Quantos rapazes praticam vôlei e handebol? 72 rapazes.

Troquem ideias e resolvam

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a alguns colegas e procurem gráficos de setores em revistas e jornais.

- Recortem as situações que mais interessaram ao grupo e façam cartazes com esses recortes.
- Inventem questões sobre os dados que estão nos recortes escolhidos e troquem-nas com outro grupo.
- Respondam às questões que receberem do outro grupo.

Como construir um gráfico de setores?

Incentive os alunos a trabalhar com pesquisa, coleta e organização de dados sobre questões relacionadas aos temas transversais, tais como políticas públicas em saúde e educação, questões ambientais, consumo etc. Procure explorar atividades integradas às demais disciplinas.

Para saber, vamos considerar dados sobre a emissão de gases que influem no aquecimento global.

Que fatores contribuem para o aumento do efeito estufa na Terra?

As emissões de CO_2 continuam a crescer e sua concentração na atmosfera até 2100 pode alcançar valores de [...] 90 a 250% acima do nível de 1750.

[...]

Entre as fontes de outros gases de efeito estufa podemos citar os fertilizantes utilizados na agricultura [...], a produção e transporte de gás e petróleo, arrozais e os processos digestivos de ruminantes [...] e os condicionadores de ar e refrigeradores [...].

Disponível em: <http://www.ipam.org.br/saiba-mais/abc/mudancaspergunta/Quais-sao-as-principais-fontes-de-gases-de-efeito-estufa-decorrentes-das-atividades-humanas-/11/3>. Acesso em: 16 abr. 2015.

CO_2 é a fórmula química do dióxido de carbono, ou gás carbônico.

Veja alguns dados sobre as emissões globais de carbono para a atmosfera:

- 80% – Queima de combustível; 7,2 bilhões de toneladas de carbono por ano;
- 20% – Mudança de uso do solo; 1,6 bilhão de toneladas de carbono por ano.

Os porcentuais sobre os fatores que emitem gás carbônico, apresentados na matéria acima, somam 100% e serão representados por um círculo. Cada fonte de emissão será representada por um setor circular que é obtido calculando-se o ângulo central correspondente ao porcentual destacado para ela.

Exemplo:

A **queima de combustível** é representada por um setor circular determinado por um ângulo central correspondente a 80% do círculo.

80% de 360º $= 0{,}80 \times 360º \rightarrow$ 80% de 360º $= 288º$

Esse valor pode ser obtido com uma calculadora, digitando as teclas:

[.] [8] [×] [3] [6] [0] [=]

ou

[3] [6] [0] [×] [8] [0] [%]

O ângulo central correspondente a 20% é de (360º − 288º), que é igual a 72º.

Emissões globais de carbono para a atmosfera

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

62. Os dados de uma pesquisa sobre o local da casa em que as pessoas costumam assistir à televisão foram apresentados na tabela ao lado. Faça um gráfico de setores para representá-los. Veja resposta no final do livro.

Local onde as pessoas costumam assistir à televisão

Local	Porcentagem das pessoas entrevistadas
Sala de visita	36,2%
Sala de jantar	27,8%
Cozinha	20,9%
Quarto	14,4%
Não têm televisão	0,7%

Troquem ideias e resolvam

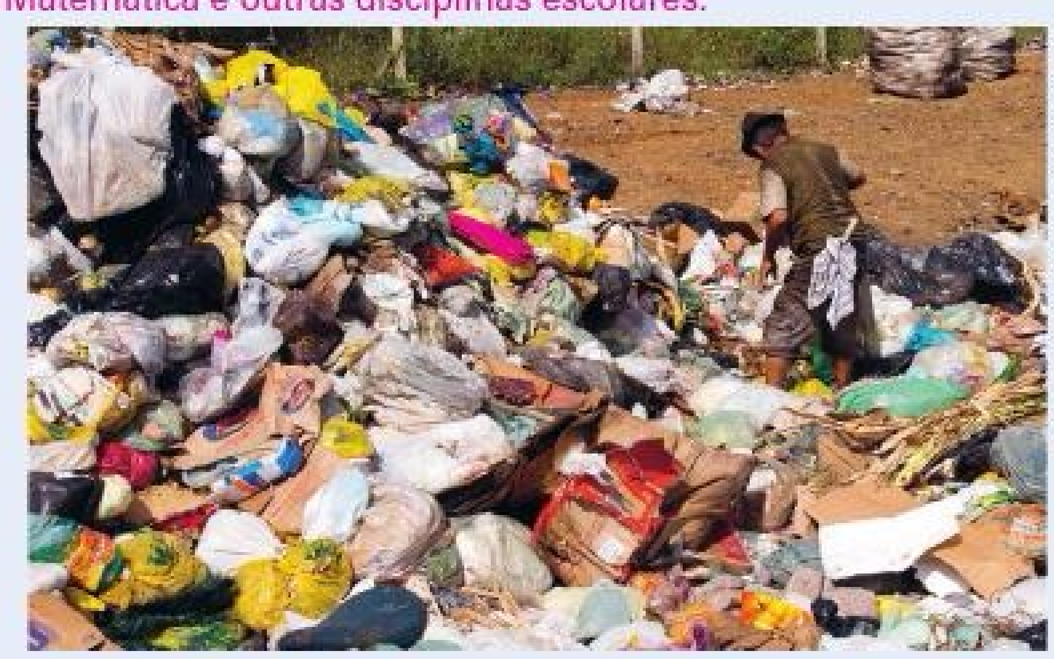
FAÇA NO CADERNO

Cuidando do meio ambiente

Este tema propicia formulação de questões relevantes relativas a dados da realidade física e social. Incentive reflexão e discussão em torno dele e avalie a possibilidade de desenvolver a interdisciplinaridade entre a Matemática e outras disciplinas escolares.

No Brasil, em 2011, 17,7% dos municípios coletavam e jogavam os resíduos sólidos em vazadouros a céu aberto, conhecidos como "lixões", onde milhares de pessoas trabalhavam catando restos de alimentos e sucata.

Em 2013, segundo a Associação Brasileira das Empresas de Limpeza Pública e Resíduos Especiais (ABRELPE), os "lixões" eram o destino final dos resíduos sólidos em 17,4% dos municípios brasileiros, como mostra a tabela a seguir:



DELFIM MARTINS/PULSAR IMAGENS

Lixão a céu aberto em Serra Talhada, PE. 2014.

Destino final dos resíduos sólidos nos municípios
Brasil — de 2011 a 2013

Ano	Porcentagem dos municípios que destinam a:		
	Vazadouro a céu aberto	Aterro controlado	Aterro sanitário
2011	17,7	24,2	58,1
2012	17,8	24,2	58,0
2013	17,4	24,3	58,3

Fonte de pesquisa: ABRELPE. Panorama dos resíduos sólidos 2012, p. 43; e Panorama dos resíduos sólidos 2013, p. 42. Disponíveis em: <http://www.abrelpe.org.br/Panorama/panorama2012.pdf> e <http://www.abrelpe.org.br/Panorama/panorama2013.pdf>. Acessos em: 17 abr. 2015.

a) De que trata a tabela? Destino final dos resíduos sólidos urbanos no Brasil.

b) Qual é o período destacado na tabela? De 2011 a 2013.

c) De 2012 a 2013, houve uma expansão no destino dos resíduos para os aterros sanitários. De quanto por cento dos municípios foi esse aumento? 0,3% dos municípios.

d) É possível dizer que em 2013 os aterros sanitários eram destino final em mais da metade dos municípios brasileiros? Justifique sua resposta. Sim, porque 58,3% correspondem a mais da metade dos municípios.

e) Comente como é tratado o lixo em sua cidade. Resposta pessoal.

f) Faça um gráfico de setores representando o destino final dos resíduos sólidos em 2013. Veja resposta no Manual do Professor.

Leitura

A Matemática e suas aplicações na Astronomia poderão motivar os alunos ao estudo das medidas dos ângulos.

Astronomia

A Astronomia é a mais antiga entre todas as ciências do conhecimento humano. Surgiu desde os tempos mais remotos a partir das nossas buscas incessantes por entender os fenômenos que nos cercam. Estudar Astronomia é falar de forma natural sobre Física, Química, Matemática e Biologia; então podemos dizer que estamos falando da ciência mais interdisciplinar de todas, pois engloba todas as ciências da natureza. Mas será que ela se restringe apenas a elas? Será que no processo de construção do conhecimento não somos surpreendidos também pelas ciências humanas?

NASA/COLABORADOR/GETTY IMAGES

O telescópio espacial *Hubble* está operando desde 1990. Foi colocado fora da atmosfera terrestre, o que lhe permite captar imagens muito mais nítidas do Universo.

Em princípio, estudar Astronomia é buscar respostas para essas e outras questões, que são de interesse de toda a humanidade. Um fato curioso é quanto mais procuramos respostas a essas indagações é que percebemos que mais questionamentos podem ser feitos, e que muito ainda precisamos aprender.

[...]

ROGER RESSMEYER/CORBIS/LATINSTOCK

Astrônomo usando um telescópio solar.

Espaço Ciência. Astronomia. Disponível em: <http://www.espacociencia.pe.gov.br/atividade/astronomia/>. Acesso em: 17 abr. 2015.

Talvez por isso o estudo dos astros constitua uma das mais antigas atividades científicas da humanidade. Caldeus, chineses, egípcios, gregos, maias e astecas foram povos antigos que se dedicaram à Astronomia.

Na Astronomia, ângulo é uma figura básica para o cálculo de distâncias consideradas inacessíveis, para estudar a localização de pontos no Universo e para fazer mapeamentos celestes.

Revisão cumulativa e testes

FAÇA NO CADERNO

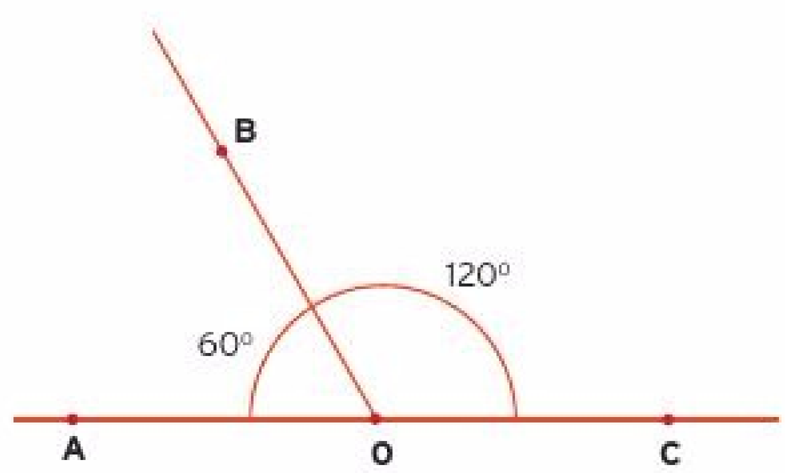
1. Uma companhia que distribui energia elétrica irá colocar luminárias em uma avenida com 18 km de extensão. A distância entre elas será de 400 m e a companhia vai colocar as luminárias no início e no final da avenida. Quantas luminárias serão colocadas? 46 luminárias.

2. Quantos graus gira o ponteiro das horas de um relógio em:

a) 3 horas? 90°   b) 0,5 hora? 15°

3. Em um campo de futebol, a marca do pênalti se encontra a uma distância de 11 jardas da linha do gol. A jarda é uma unidade de comprimento que vale 91 cm. Calcule essa distância em metro. 10,01 m.

4. Observe as informações nesta figura:



Determine a medida do ângulo formado pelas bissetrizes de $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$. 90°

5. Em um jogo, Pedro, Júlia e Daniela fizeram os seguintes pontos:

Jogadores	Pontos ganhos	Pontos perdidos
Pedro	148	85
Júlia	132	150
Daniela	141	141

a) Quem teve saldo negativo? Júlia.

b) Qual foi esse saldo? −18

6. Carolina foi ao banco e depois foi à feira. Seu irmão lhe disse que, enquanto ela fez essas coisas, o ponteiro das horas do relógio mudou de direção em 120°. Quanto tempo Carolina levou nessas atividades? 4 horas.

7. Um ângulo mede 67° 48′. Quanto falta para chegar a 105° 32′? 37° 44′

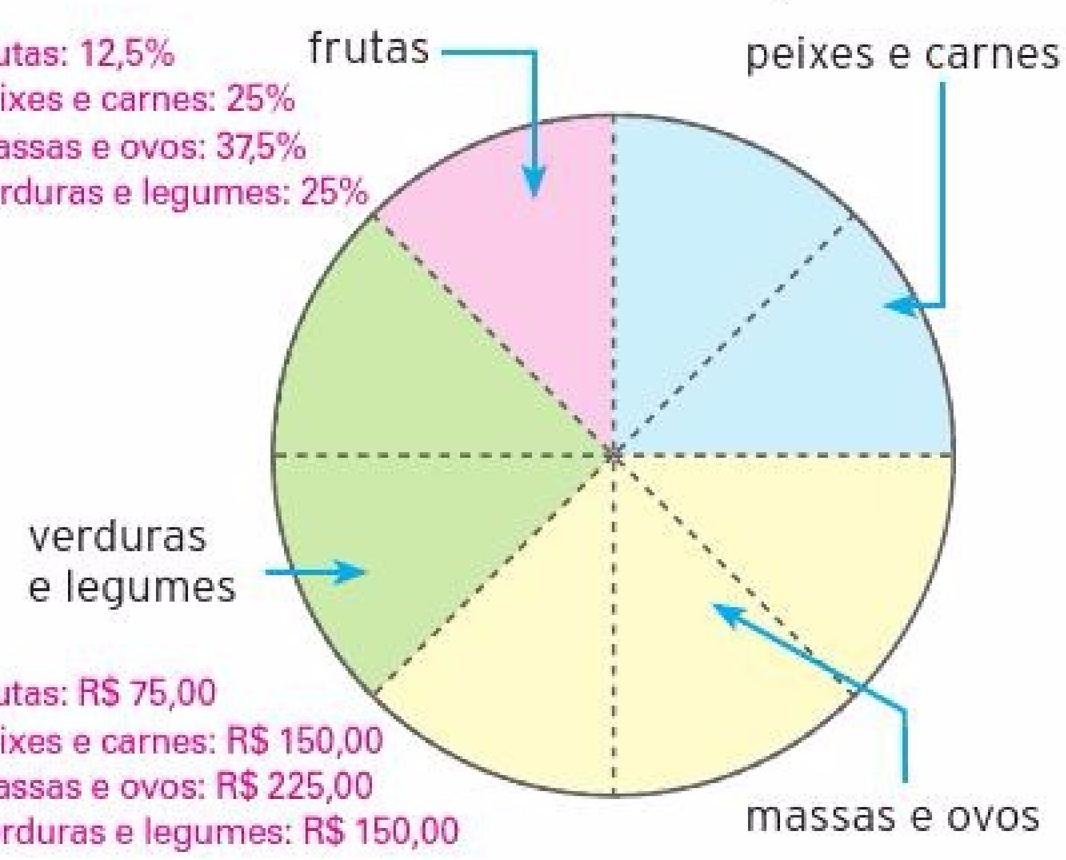
8. Em certo dia do mês de junho, a temperatura em São Joaquim era de −2 °C e a registrada em Florianópolis, 8 °C. Qual a diferença entre as temperaturas nas duas cidades nesse dia? 10 °C ou −10 °C

9. Maria mora no décimo sexto andar de um edifício cuja garagem fica no segundo subsolo. Para chegar até o seu carro, quantos andares ela precisa descer? 18 andares.

10. Este gráfico, dividido em 8 partes iguais, informa o gasto em alimentação de uma família.

Gasto com alimentação

a) Frutas: 12,5%
Peixes e carnes: 25%
Massas e ovos: 37,5%
Verduras e legumes: 25%



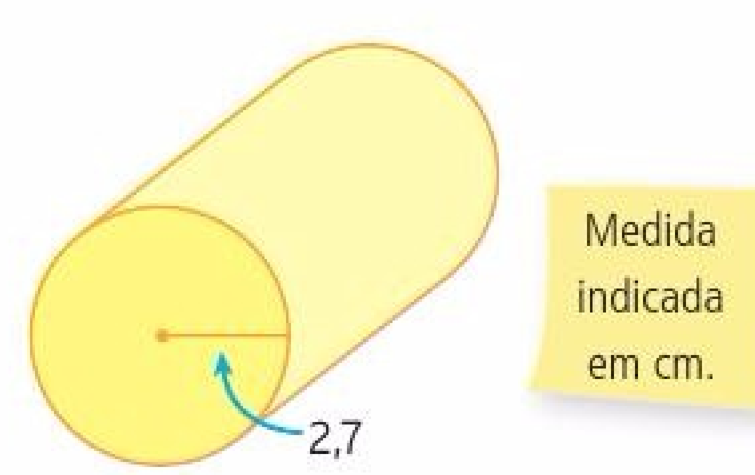
b) Frutas: R$ 75,00
Peixes e carnes: R$ 150,00
Massas e ovos: R$ 225,00
Verduras e legumes: R$ 150,00

Se a família gasta R$ 600,00 em alimentação:

a) escreva a porcentagem de gasto com cada tipo de alimento;

b) calcule o gasto com cada tipo de alimento.

11. Qual é a medida, em centímetros, dos diâmetros da base do cilindro representado a seguir? 5,4 cm



12. Um relógio indica que faltam 20 minutos para as 6 horas. São: b

a) cinco horas e vinte minutos.

b) cinco horas e quarenta minutos.

c) seis horas e vinte minutos.

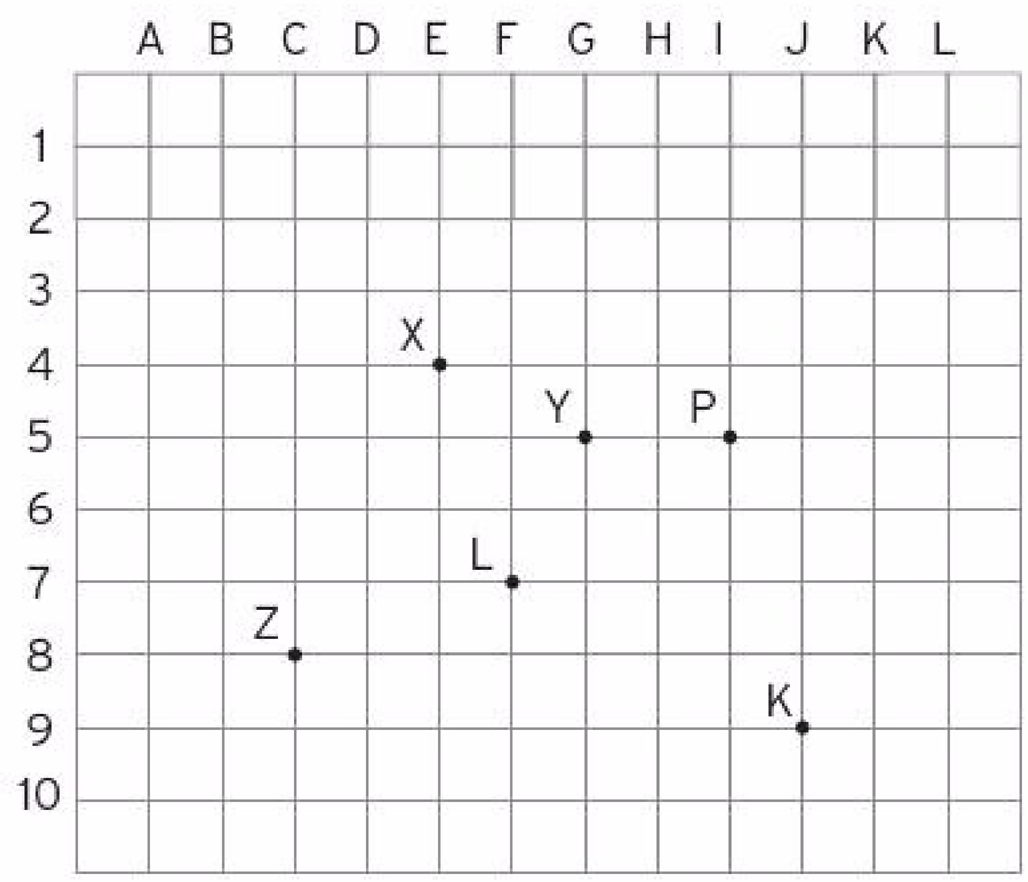
d) seis horas e quarenta minutos.

13. A bissetriz de um ângulo determina dois ângulos congruentes de 17° 30'. A medida desse ângulo é: c

a) 30° c) 35°

b) 34° d) 37°

14. (Prova Brasil) Observe a figura:



Legenda

X – Teatro Z – Estádio de futebol

K – *Shopping* P – Catedral

L – Quadra poliesportiva Y – Cinema

No esquema acima, estão localizados alguns pontos de uma cidade. A coordenada (5, G) localiza: d

a) a catedral. c) o teatro.

b) a quadra poliesportiva. d) o cinema.

15. (Encceja) Observe a figura:

Na fabricação de lápis, conforme o modelo, o fabricante utiliza-se de formas geométricas. Ao apontarmos uma das extremidades, as formas geométricas encontradas são: a

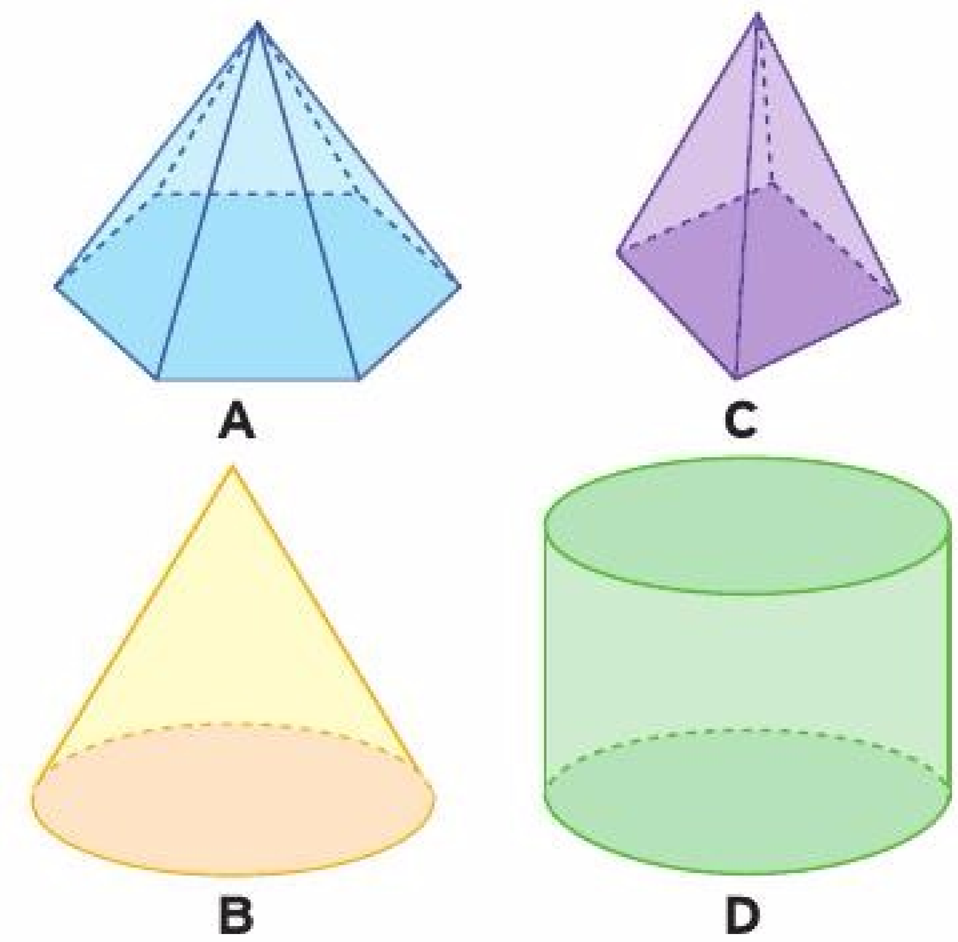
a) cilindro, cone e círculo.

b) cilindro, pirâmide e esfera.

c) prisma, pirâmide e esfera.

d) prisma, cone e círculo.

16. Observe estes sólidos:

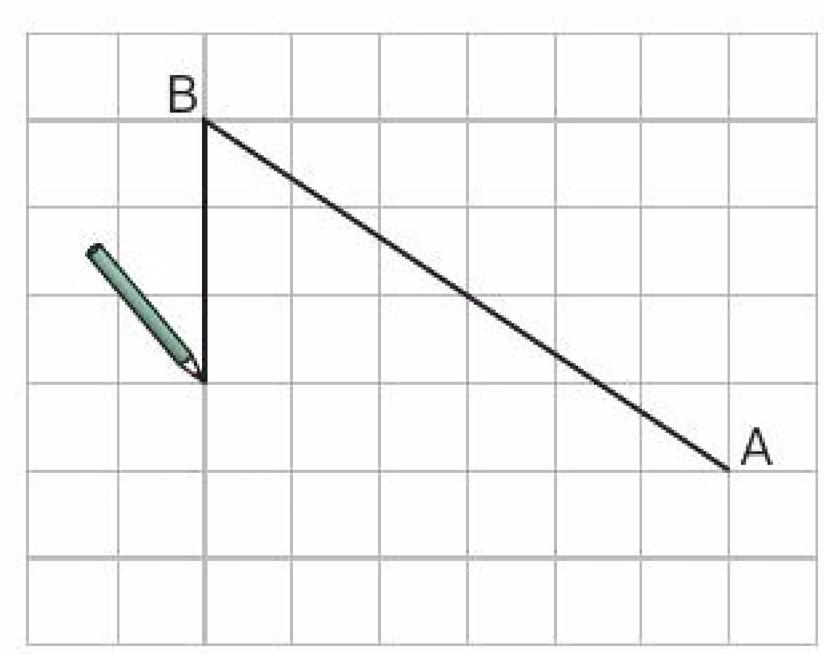


Quais deles têm bases circulares? b

a) A e B. c) C e D.

b) B e D. d) B e C.

17. (Encceja) Observe o desenho:



Para você completar o desenho do triângulo retângulo na malha quadriculada, partindo do ponto em que o lápis está desenhado e chegando ao ponto **A**, seria necessário: d

a) virar à direita até o ponto **A**.

b) virar à esquerda até o ponto **A**.

c) descer dois quadradinhos e virar à direita até o ponto **A**.

d) descer um quadradinho e virar à esquerda até o ponto **A**.

UNIDADE 4

Área e volume

A necessidade de demarcar e quantificar as superfícies alagadas às margens do Rio Nilo deu origem a uma geometria utilitária, que propiciou o desenvolvimento do cálculo de áreas e de volumes. Estes são os assuntos que serão explorados nesta unidade.

JAXPIX/ALAMY/LATINSTOCK

Nesta unidade...

Campo de arroz em área alagada às margens do Rio Nilo, no Egito. 2005.

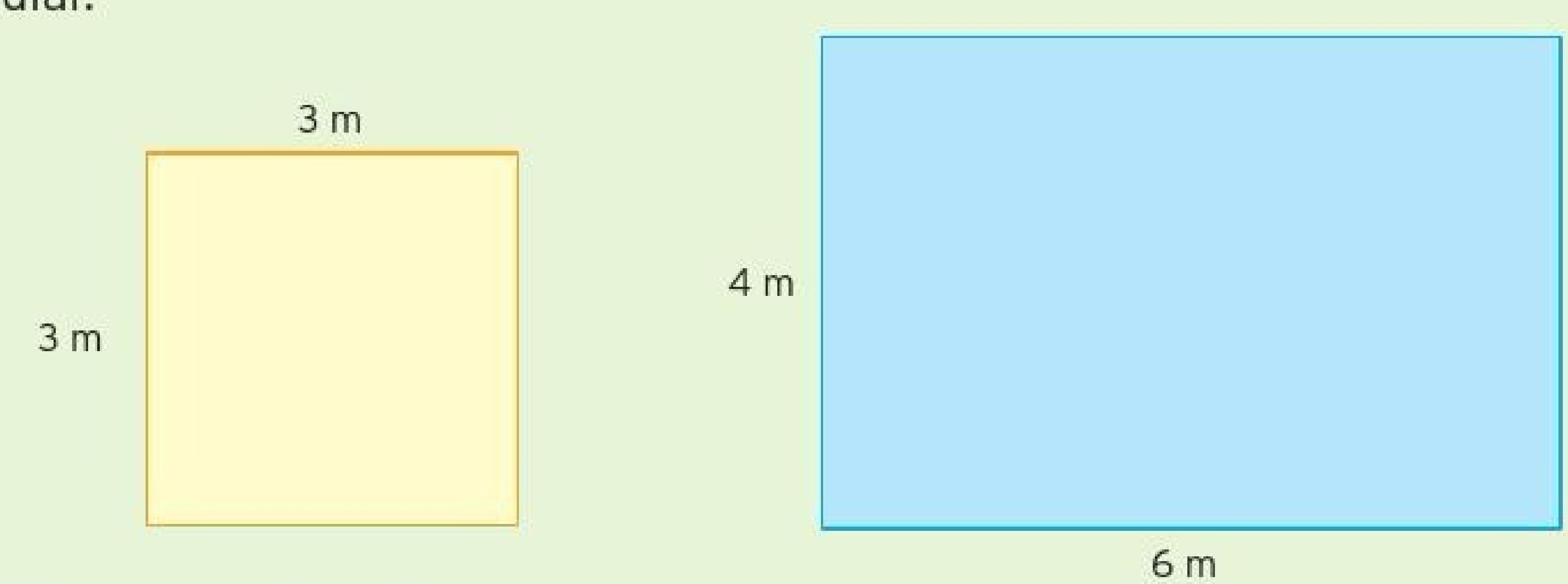
Muitos problemas que envolvem o cálculo da área de superfícies fazem parte do cotidiano de vários profissionais, em atividades como, por exemplo, de um pedreiro ou de um vendedor de uma loja de materiais de construção.

SHUTTERSTOCK

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Em geral, os pisos dos cômodos e os ladrilhos são retangulares ou têm a forma de quadrados.

Lembre-se de como se calcula a área de um retângulo como os seguintes e que a expressão **área de retângulo** é usada quando nos referirmos à área de uma região retangular.



O que você já sabe?

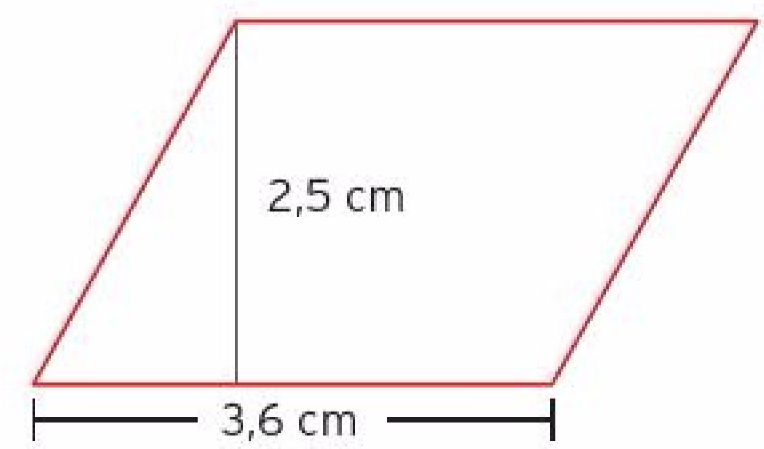
- Há ocasiões, na vida das pessoas, nas quais elas se envolvem com medidas de superfícies. Relate uma delas. Resposta possível: Compra de um tapete, de um imóvel, de tecidos.
- Qual é a unidade fundamental usada como padrão para medir superfície? Resposta possível: Metro quadrado.
- Qual é a área de cada uma das figuras representadas acima? $9\ m^2$; $24\ m^2$.

1 Usos de área

Revendo cálculos de área

Você já aprendeu a resolver problemas envolvendo áreas de figuras planas como os seguintes:

- O paralelogramo da figura tem 3,6 cm de base e 2,5 cm de altura. Qual é a área desse paralelogramo?



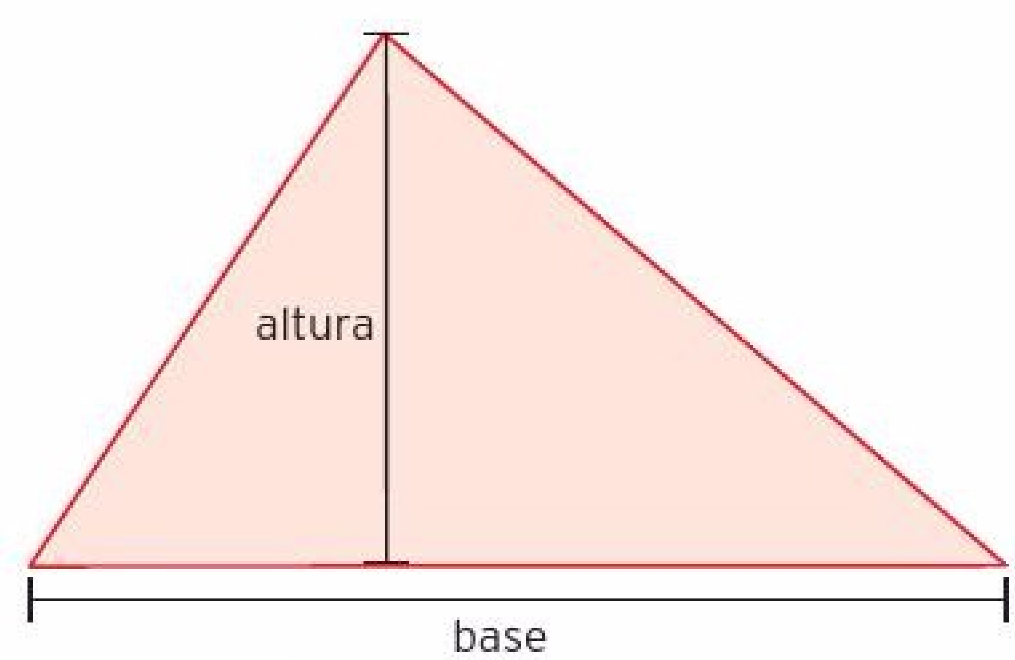
A **área de um paralelogramo** é o produto da medida de uma base pela medida da altura relativa a ela, medidos na mesma unidade.

A área desse paralelogramo é: $3,6 \text{ cm} \times 2,5 \text{ cm} = 9 \text{ cm}^2$.

De modo geral, temos:

$$\text{área do paralelogramo} = \text{base} \times \text{altura}$$

- E qual é a área de um triângulo com altura medindo 4 cm e medida da base igual ao dobro desse valor?



A **área de um triângulo** é a metade do produto da medida de um lado pela medida da altura relativa a esse lado, medidos na mesma unidade. Neste problema, a medida da altura é igual a 4 cm e a medida da base é igual a 2×4 cm, ou seja, 8 cm.

$$\text{Área: } \frac{8 \text{ cm} \times 4 \text{ cm}}{2} = 16 \text{ cm}^2.$$

De modo geral, temos: $$\text{área do triângulo} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$$

Proponha outras atividades que envolvam o cálculo da área de paralelogramos e triângulos, com as quais os alunos possam desenvolver habilidades na aplicação de fórmulas.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

1. Os lados de um quadrado medem 7,2 m. Calcule sua área. $51,84 \text{ m}^2$.

2. Calcule a área do paralelogramo em que a base mede 7 cm e a altura relativa a ela mede 4,8 cm. $33,60 \text{ cm}^2$.

3. A área do piso de um salão quadrado é 144 m^2.

a) Qual é a medida de cada lado desse salão? 12 m.

b) Se o salão tem uma porta com 1,60 m de largura, quantos metros de rodapé seriam necessários para revesti-lo? 46,40 m.

4. As medidas de um pedaço de papel retangular são números naturais. Quais são as possíveis medidas, em cm, desse tipo de folha, se sua área é 72 cm^2?
1 e 72; 2 e 36; 3 e 24; 4 e 18; 6 e 12; 8 e 9

5. O piso de uma cozinha mede 8 m por 6 m.

a) Qual a menor quantidade de lajotas quadradas de 40 cm de lado necessárias para recobrir todo o piso dessa cozinha caso não haja quebra de ladrilhos? 300 lajotas.

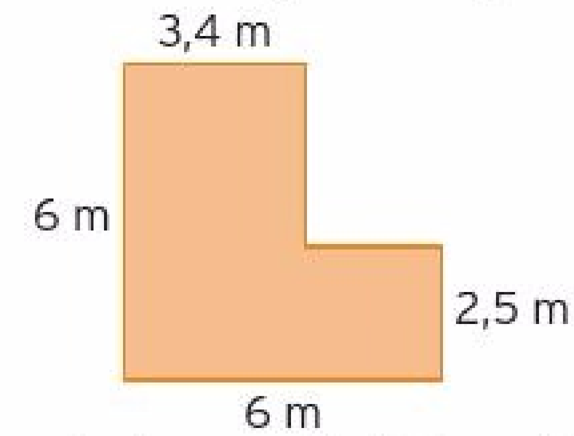
b) Prevendo perdas, Jorge costuma comprar 10% a mais do que necessita. Quantas lajotas Jorge deverá comprar? 330 lajotas.

6. Em um terreno quadrado com 20,5 m de lado, Antônio construiu uma piscina retangular de 12,5 m por 8 m. Na área que sobrou, construiu sua casa e um jardim. Quantos metros quadrados tem a área da casa e do jardim? 320,25 m^2.

7. A base de um retângulo mede 45 m, e a altura mede $\frac{2}{3}$ da base. Qual é a área desse retângulo? 1350 m^2.

8. Alice tem uma sala em L com cantos retos, como mostra o esquema a seguir. Para colocar carpete nessa sala, um vendedor aconselhou-a a comprar 10% a mais de revestimento. Quantos metros quadrados de carpete Alice precisa comprar?

29,59 m^2.



9. Um vidraceiro fez um vitral triangular com 42 cm de base e altura relativa a ela medindo $\frac{1}{3}$ da medida da base. Qual é a área desse vitral?
294 cm^2.

10. O perímetro de um triângulo equilátero é 216 cm. Calcule a área desse triângulo, sabendo que ele tem, aproximadamente, 62 cm de altura.
Aproximadamente, 2232 cm^2.

11. A área de um triângulo é igual a 15 cm^2. Se a base de outro triângulo for a metade da base desse triângulo e a altura for a mesma, qual será a área do outro triângulo? 7,5 cm^2.

Usando a calculadora

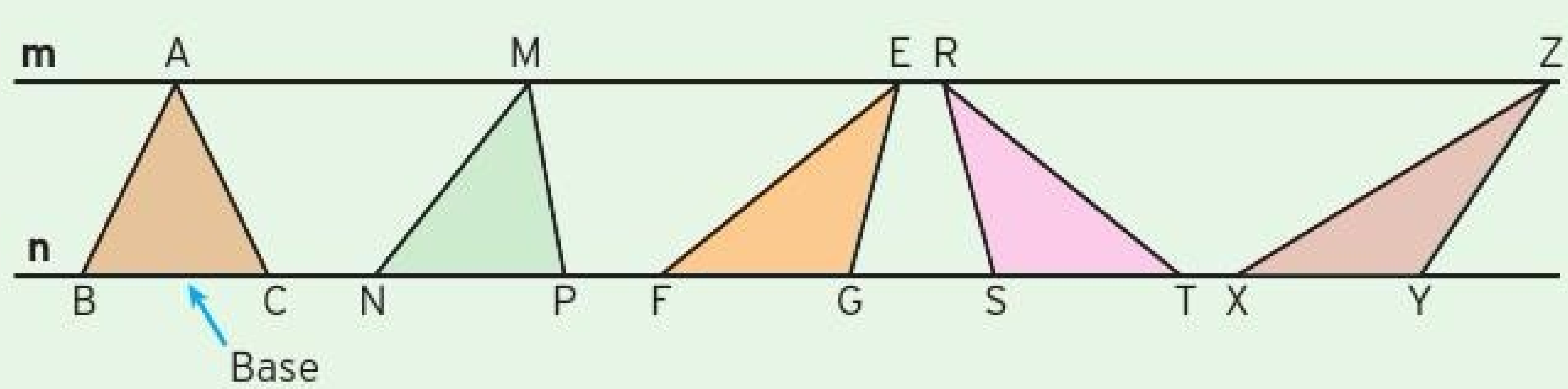
Observe o anúncio e calcule:

- o preço dos tapetes retangulares que medem 2,5 m de comprimento por 1,60 m de largura conforme o preço anunciado;
R$ 1040,00.
- um desconto de 5% para pagamento à vista na compra de um tapete como o do item anterior; R$ 52,00.
- o preço para pagamento à vista desse tapete. R$ 988,00.

Investigue e explique

FAÇA NO CADERNO

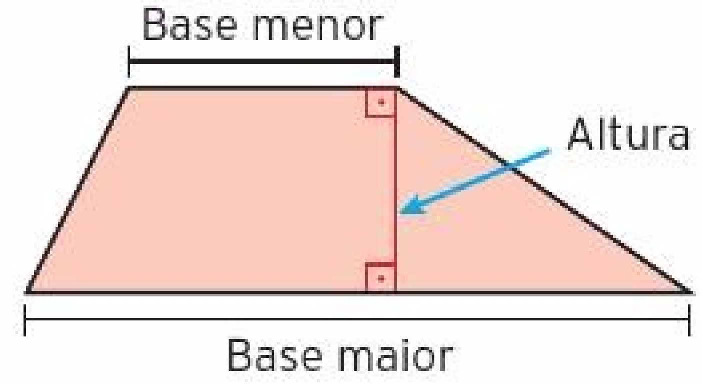
Na figura a seguir, **m** e **n** são retas paralelas, e os lados $\overline{BC}$, $\overline{NP}$, $\overline{FG}$, $\overline{ST}$ e $\overline{XY}$ têm a mesma medida.



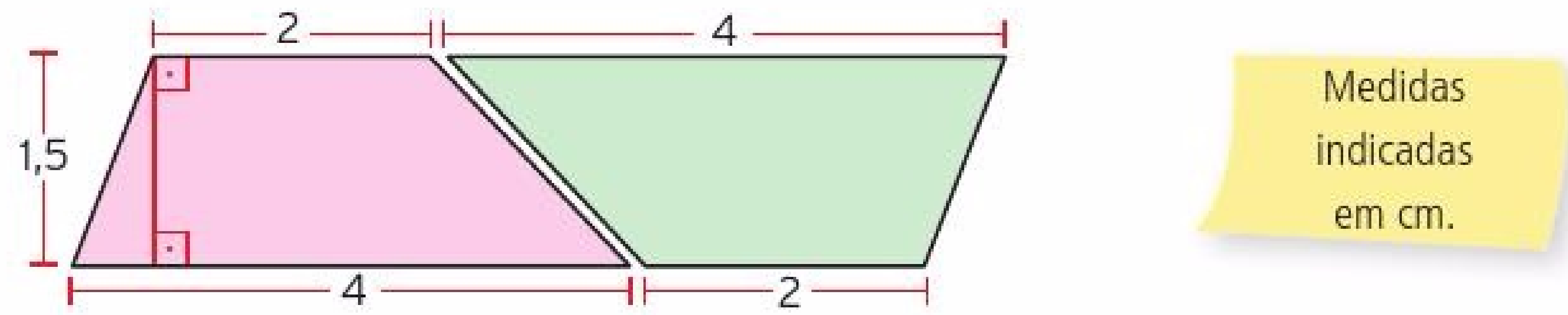
- Se o triângulo ABC tem 40,8 cm^2 de área, qual é a área de cada um dos outros triângulos? Explique por quê. 40,8 cm^2. Todos têm bases e alturas de medidas iguais e por isso têm áreas iguais.

Área de trapézios

Trapézios são quadriláteros que têm um único par de lados paralelos. Esses lados são chamados de base maior e base menor. Uma altura de um trapézio é um segmento de reta perpendicular às bases, com extremidades nessas bases.



Para calcular a área de um trapézio, compomos um paralelogramo com dois trapézios iguais. Veja a seguir como calcular a área de um trapézio que tem 2 cm de base menor, 4 cm de base maior e 1,5 cm de altura.



A medida da base desse paralelogramo é a soma das medidas das bases maior e menor do trapézio inicial. Além disso, ele tem altura igual à desse trapézio.

A área do paralelogramo formado é 6 cm $\times$ 1,5 cm $=$ 9 cm^2.

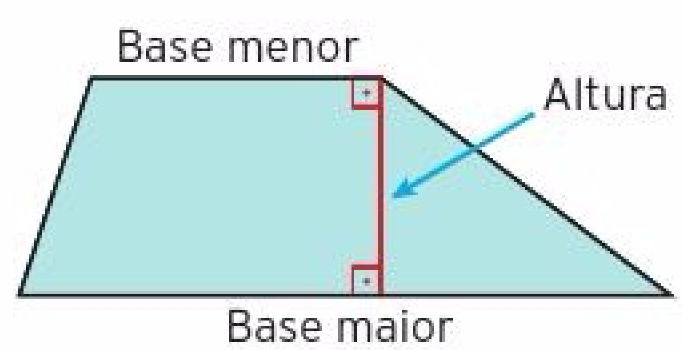
Como usamos dois trapézios iguais na composição desse paralelogramo, a área do trapézio é a metade da área desse paralelogramo construído, ou seja, 4,5 cm^2.

A área do trapézio é: (9 : 2) cm^2 $=$ 4,5 cm^2.

Essa área pode ser obtida pela multiplicação da soma das medidas das bases pela medida da altura e dividindo o produto por 2.

$$\text{área: } \frac{(4 + 2)\text{ cm} \times 1{,}5\text{ cm}}{2} = \frac{6\text{ cm} \times 1{,}5\text{ cm}}{2} = 4{,}5\text{ cm}^2$$

A **área de um trapézio** é igual à metade da soma da medida da base maior com a medida da base menor, multiplicada pela medida da altura, medidos na mesma unidade, ou, de forma simplificada:



$$\text{área do trapézio} = \frac{(\text{base maior} + \text{base menor})}{2} \times \text{altura}$$

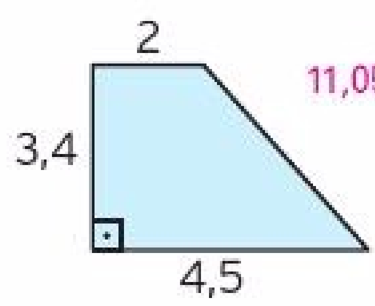
Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

Proponha outras atividades que envolvam o cálculo de áreas de paralelogramos, triângulos e trapézios, com as quais os alunos possam desenvolver habilidades na aplicação de fórmulas.

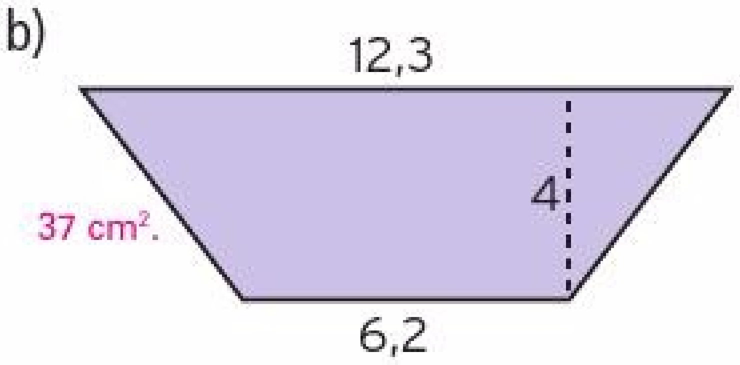
12. As medidas destas figuras são indicadas em cm. Determine a área dos trapézios.

a)



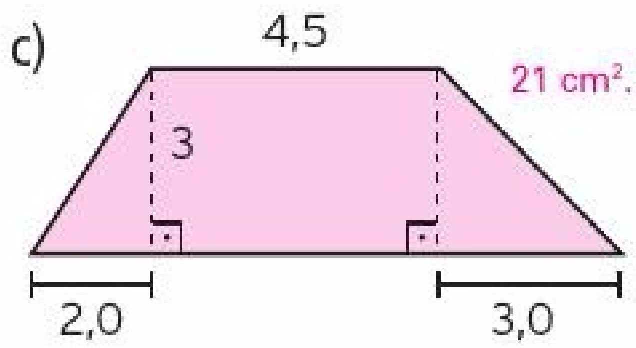
11,05 cm².

b)



37 cm².

c)



21 cm².

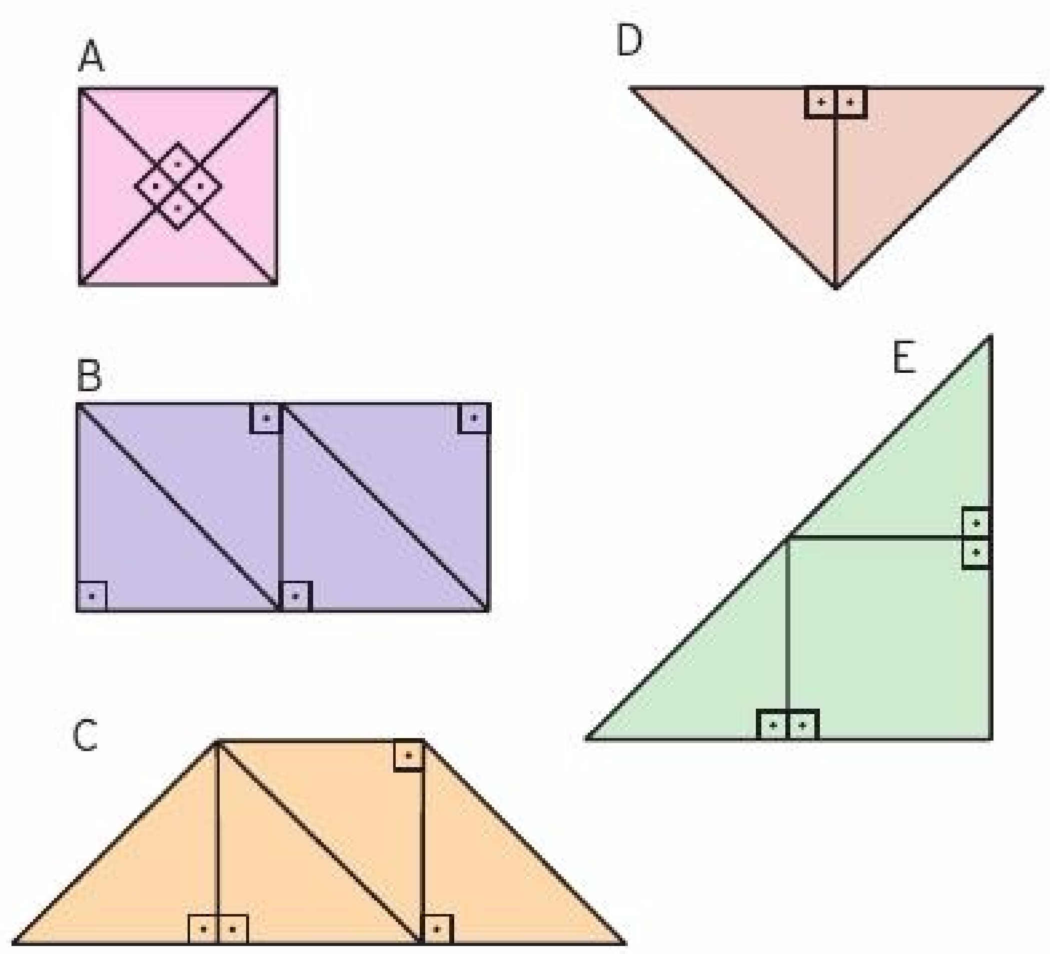
13. Em um trapézio, a base maior mede 24 cm e sua altura, 16,5 cm. Qual será sua área, se a base menor for $\frac{3}{4}$ da base maior? 346,5 cm².

14. Calcule a área de um trapézio sabendo que sua base menor mede 10,8 cm, sua base maior, 17,2 cm, e sua altura é a metade da soma das medidas das duas bases. 196 cm².

Exercícios complementares

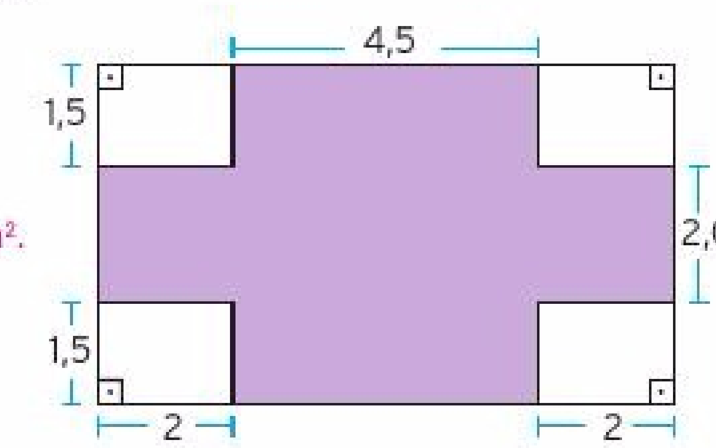
FAÇA NO CADERNO

15. Das figuras dadas, anote aquelas que têm a mesma área. B, C e E; A e D



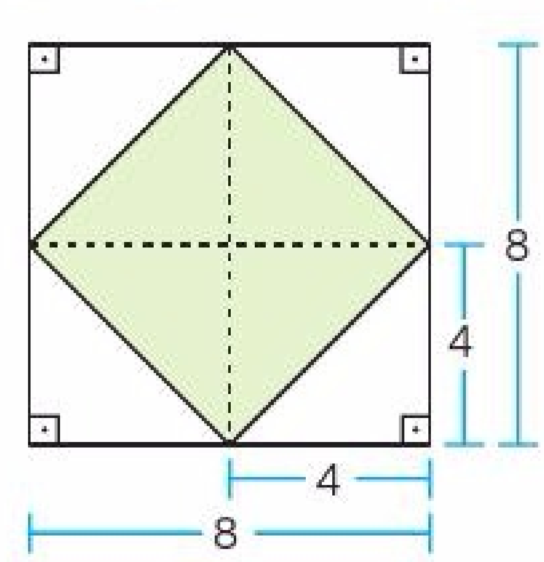
16. Calcule a área das regiões pintadas nas figuras, considerando que as medidas estão indicadas em cm.

a)



30,5 cm².

b)



32 cm².

Embalagem e a área total

Entre algumas aplicações dos estudos de sólidos geométricos, podemos destacar a construção de embalagens.

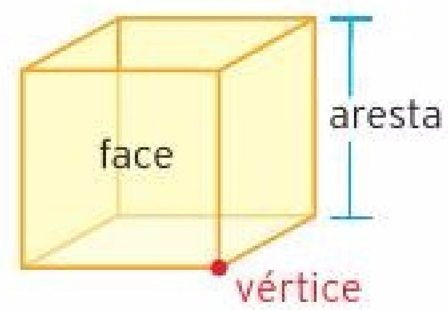
As embalagens dos produtos podem interferir em seus preços de venda. Por isso, existem profissionais que se dedicam ao estudo do cálculo das dimensões das caixas, procurando otimizar o armazenamento dos produtos, o custo dos materiais, a funcionalidade, a resistência e a aparência das embalagens.

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Embalagens utilizadas para armazenar produtos.

Para refletir e responder

Observe a representação de um cubo e sua planificação.



- Determine a área de toda a superfície do cubo, sabendo que as medidas das arestas são iguais a 5 cm. $150\ cm^2$.

Você já sabe que um cubo tem 6 faces e cada face é quadrada. Logo, a área de cada face é igual a $5^2\ cm^2$, ou seja, $25\ cm^2$.

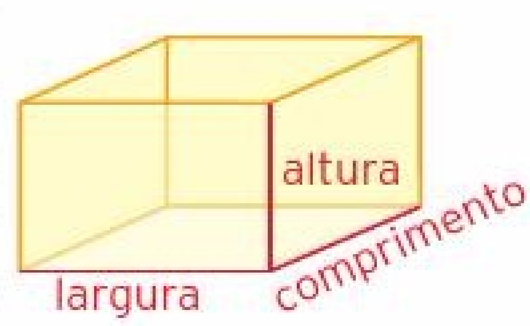
A soma das áreas de todas as faces desse cubo é igual a $(6 \times 25)\ cm^2$, que é igual a $150\ cm^2$.

A soma das áreas das faces de um cubo é denominada área total da superfície do cubo.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

17. Laís quer fazer uma embalagem fechada com a forma deste bloco retangular e as seguintes medidas: largura com 10,5 cm; comprimento com 15,6 cm e altura com 12 cm.



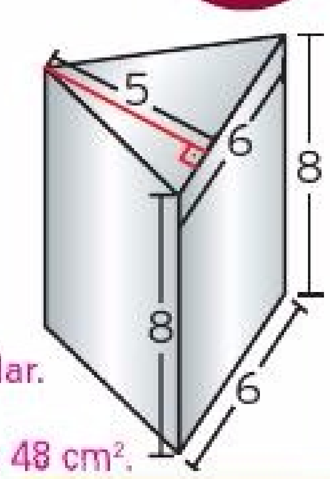
a) Quantas faces possuem dimensões com medidas:

- 10,5 cm e 15,6 cm? Duas faces.
- 12 cm e 15,6 cm? Duas faces.
- 12 cm e 10,5 cm? Duas faces.

b) Qual é a área total da superfície dessa embalagem? $954\ cm^2$.

18. Um bloco retangular tem 50 m de comprimento, 30 m de largura e 2,5 m de altura. Qual a área total de sua superfície? $3\,400\ m^2$.

19. Para construir uma embalagem com a forma e as medidas do poliedro a seguir, pode-se recortar algumas figuras geométricas em cartolina, observando as medidas, e juntar umas às outras usando fita adesiva.



Medidas indicadas em cm.

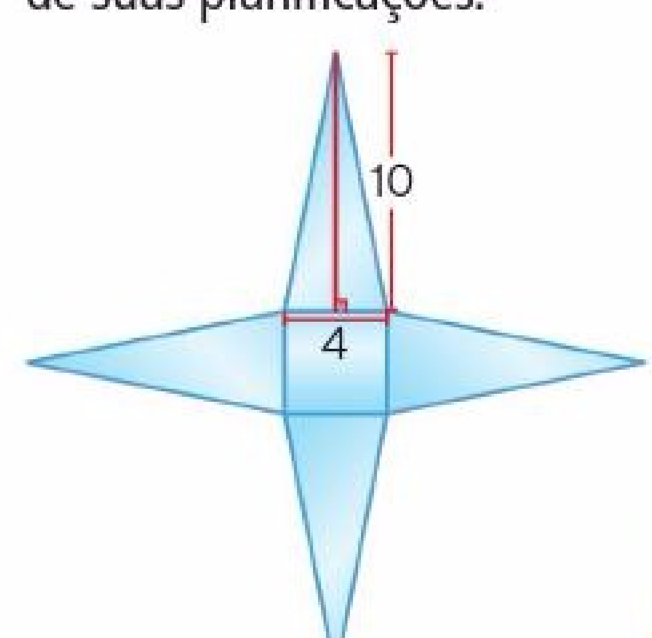
a) Quantas figuras geométricas de cada tipo é necessário recortar? 2 triângulos e 3 retângulos.

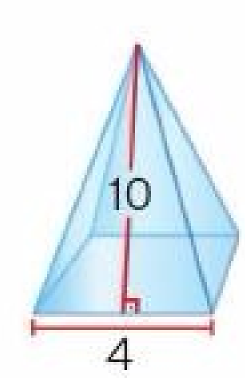
b) Que poliedro é esse? Prisma triangular.

c) Qual é a área de cada face? Faces triangulares: $15\ cm^2$. Faces retangulares: $48\ cm^2$.

d) Calcule a área total da superfície desse poliedro. $174\ cm^2$.

20. Estas figuras representam uma pirâmide e uma de suas planificações.





Medidas indicadas em cm.

a) De que tipo é essa pirâmide? Pirâmide de base quadrada.

b) Quantas faces tem essa pirâmide? 5 faces.

c) Quais polígonos são os contornos das faces? Um quadrado e 4 triângulos.

d) Calcule a área total desse poliedro. $96\ cm^2$.

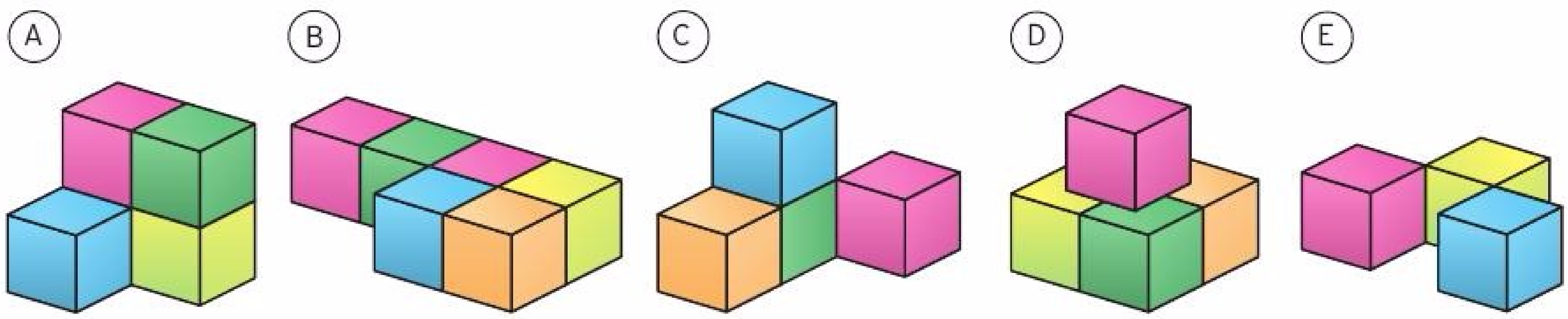
2 Medindo volumes

Proponha outras atividades de medição de volume utilizando unidades não padronizadas, com as quais os alunos possam perceber medidas diferentes, decorrentes da diferença entre as unidades escolhidas. Discuta com eles a necessidade de uma padronização. Nessas atividades, materiais concretos, como cubos e blocos retangulares, poderão ser de grande auxílio.

Empilhamento de cubos

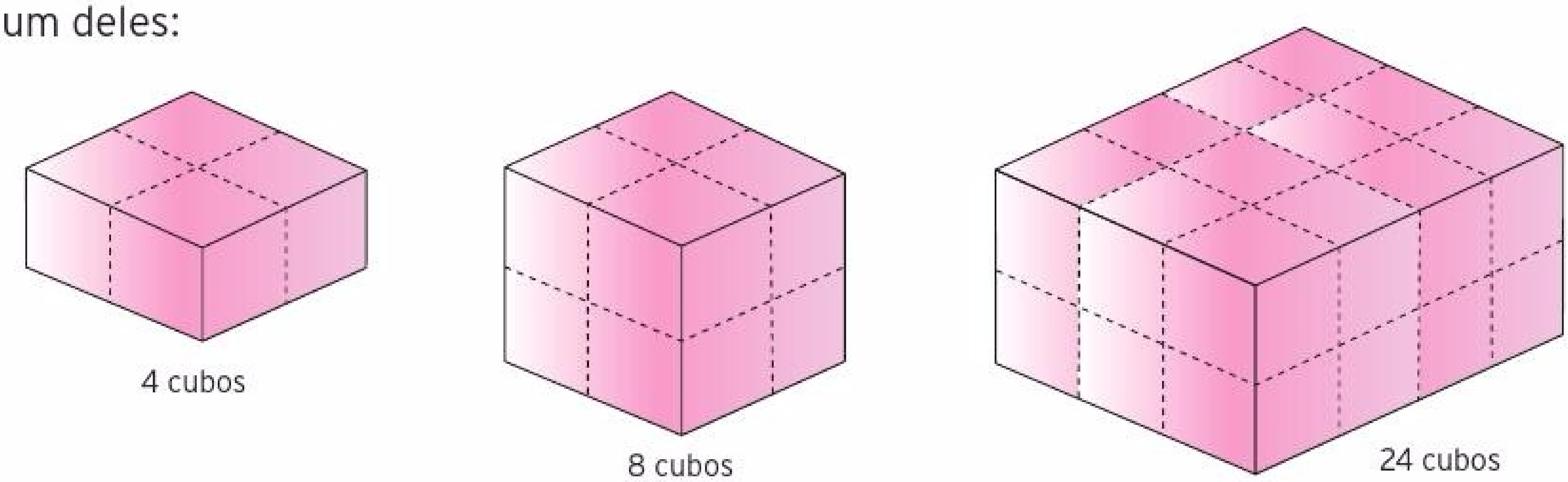
Em um empilhamento de cubos iguais, todo cubo tem uma face em comum com a de outro. Não é considerado empilhamento uma situação em que dois cubos ficam encostados apenas por uma aresta ou em que faces ficam desencontradas.

Observe estas montagens:



Apenas as montagens A e B podem ser consideradas empilhamentos de cubos.

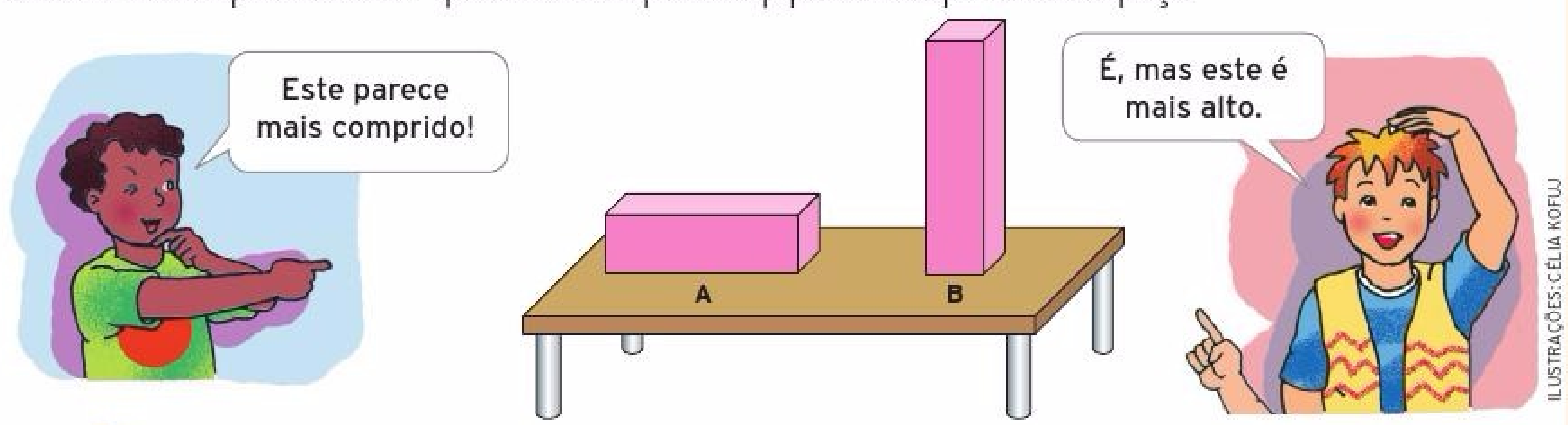
Observe empilhamentos que formam paralelepípedos e a quantidade de cubos que há em cada um deles:



O que é volume?

Para refletir e responder

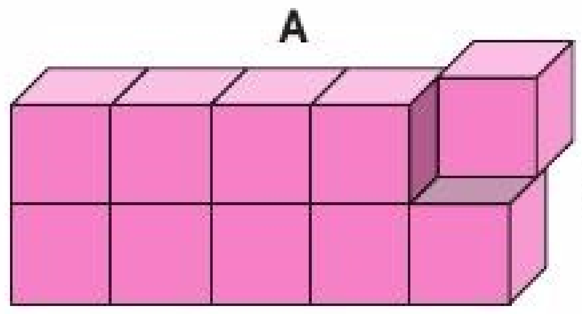
Lucas e Paulo querem saber qual dos dois paralelepípedos ocupa maior espaço.

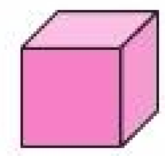


- Na sua opinião, qual deles ocupa maior espaço? Resposta pessoal.

Medimos o volume de um sólido comparando-o com outro sólido, escolhido como unidade de volume. O volume ocupado pelos paralelepípedos da situação anterior pode ser medido escolhendo-se um cubo pequeno como unidade de medida.

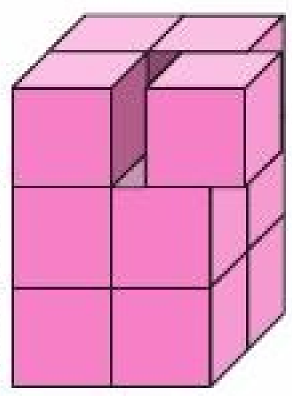
A



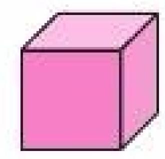
volume do paralelepípedo A: 10 

A unidade cabe **10** vezes.

B



ILUSTRAÇÕES: BIS

volume do paralelepípedo B: 12 

A unidade cabe **12** vezes.

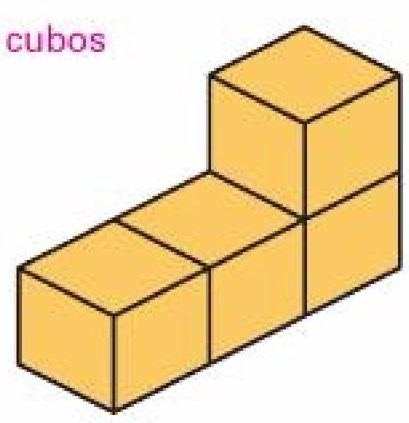
Isso significa que o paralelepípedo **B** ocupa maior espaço que o paralelepípedo **A**.

Fazer e aprender

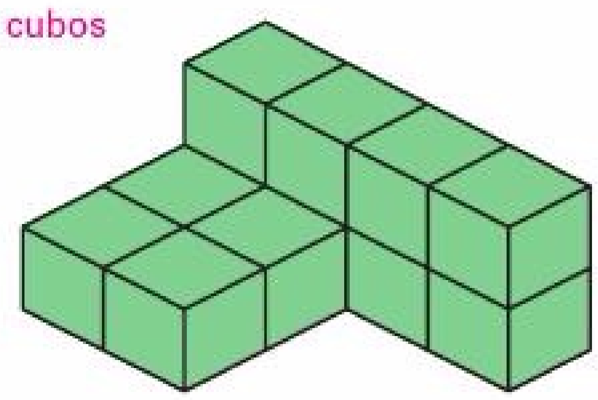
FAÇA NO CADERNO

21. Quantos cubos há em cada empilhamento?

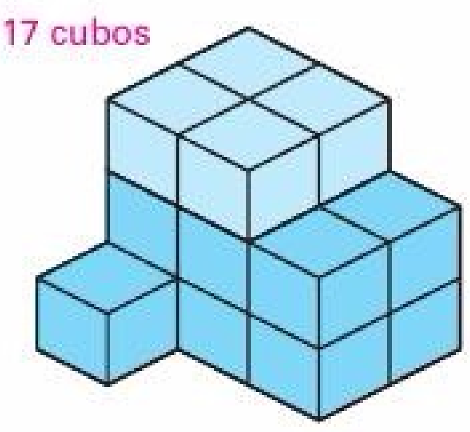
a) 4 cubos

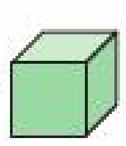


b) 12 cubos

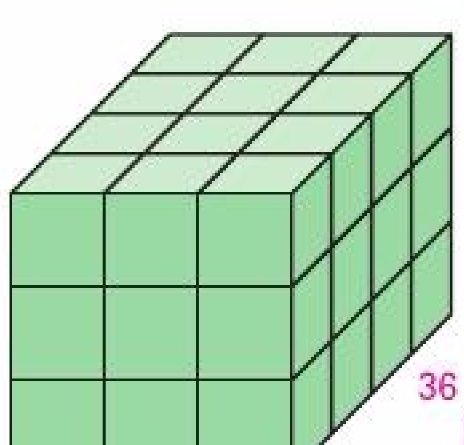


c) 17 cubos



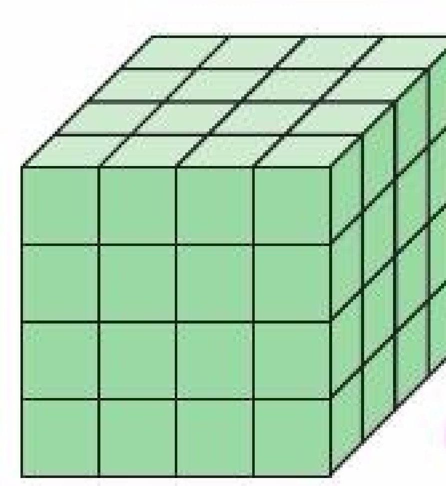
22. Utilizando o  como unidade de medida, determine o volume de cada paralelepípedo:

a)



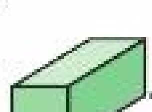
36

b)

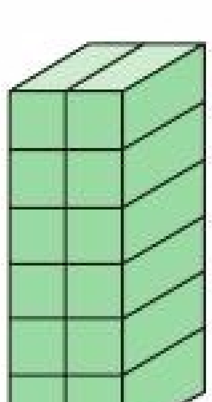


64

Verifique se os alunos observam a contagem de cubos por camadas. Isso poderá facilitar a compreensão da fórmula para o cálculo do volume de um cubo. Utilize materiais concretos, como caixas cúbicas transparentes.

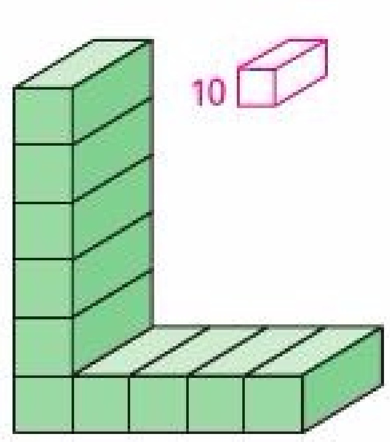
23. Agora, a unidade é o . Calcule o volume de cada sólido.

a)



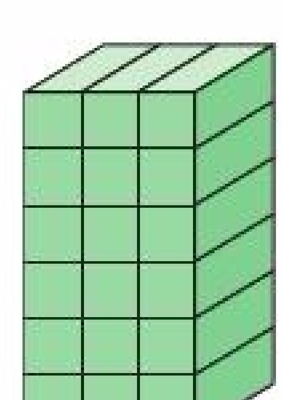
12

b)



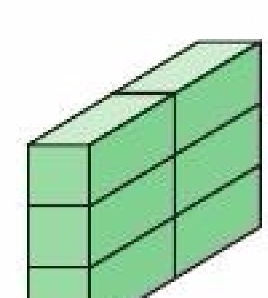
10

c)



18

d)



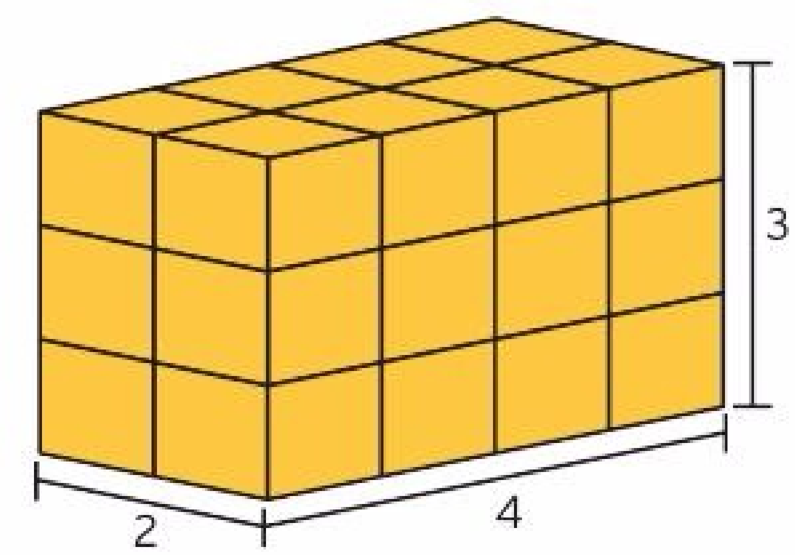
6

Volume de paralelepípedos

Para refletir e responder

Renato empilhou alguns cubos com 1 cm de aresta e construiu um paralelepípedo.

O paralelepípedo ficou com 2 cm de largura, 4 cm de comprimento e 3 cm de altura. Veja a figura ao lado.



- Qual é o volume desse paralelepípedo? $24\ cm^3$.

Um cubo com 1 cm de aresta tem **1 centímetro cúbico** (**1 cm³**) de volume.

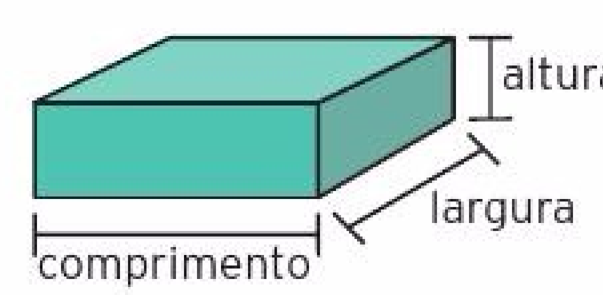
Comparando o volume do paralelepípedo acima com o de um cubo com 1 cm de aresta, podemos observar que este cabe 24 vezes nesse paralelepípedo.

Multiplicando as medidas desse empilhamento também obtemos 24:

$$2\ cm \times 3\ cm \times 4\ cm = 24\ cm^3$$

O paralelepípedo tem $24\ cm^3$ de volume.

Ou seja, multiplicando a medida da largura pela medida do comprimento e pela medida da altura desse paralelepípedo, obtém-se o volume do paralelepípedo acima na unidade **cm³**.



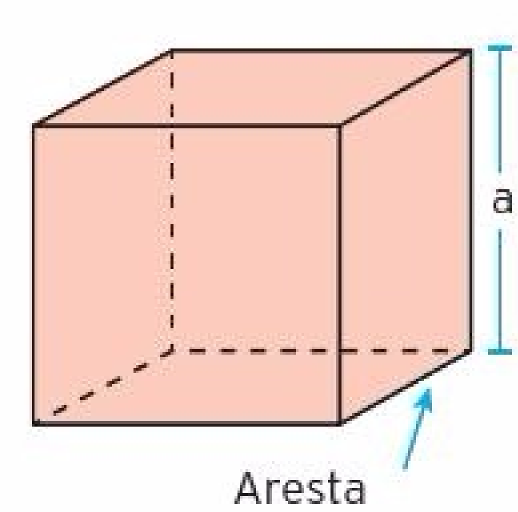
O **volume de um paralelepípedo** é o produto das medidas da largura, do comprimento e da altura, medidos na mesma unidade.

volume do paralelepípedo = largura × comprimento × altura

Volume de cubos

O **cubo** é um paralelepípedo no qual todas as arestas têm medidas iguais. Portanto, o volume de um cubo que tem 2 cm de aresta é o produto de 2 cm por ele mesmo três vezes:

Volume: $2\ cm \times 2\ cm \times 2\ cm = 2^3\ cm^3 = 8\ cm^3$



O **volume de um cubo** é o produto da medida de sua aresta por ela mesma três vezes ou, de forma simplificada:

volume do cubo = aresta × aresta × aresta = $(\text{aresta})^3$

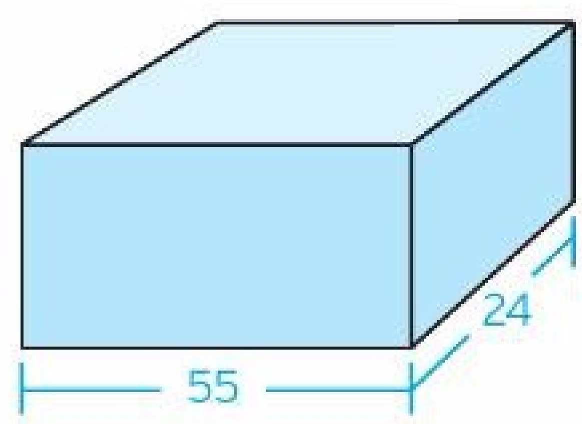
Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

24. Uma caixa tem a forma de um cubo de 40 cm de aresta. Qual é o volume dessa caixa? 64000 cm³.

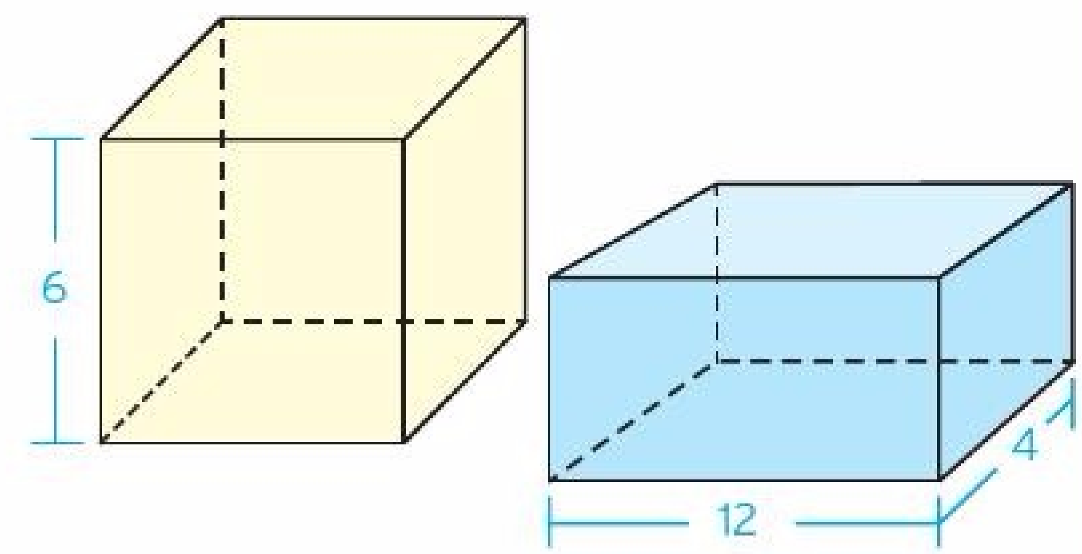
25. Laura tem um aquário com o formato desta figura:

Medidas indicadas em cm.



Que volume de água ele conterá quando o nível da água estiver a 30 cm de altura? 39600 cm³.

26. Nas figuras a seguir, as medidas estão indicadas em metros. Se o volume do cubo é igual ao volume do paralelepípedo, qual é a medida da altura do paralelepípedo? 4,5 m.



Desafio

Seria interessante desenvolver este desafio em grupo. Solicite a cada grupo que construa ou tenha disponíveis 27 cubos. Procure explorar as diferentes estratégias utilizadas pelos alunos. Para mais esclarecimentos, leia comentários no **Manual do Professor**.

FAÇA NO CADERNO

Um desafio saboroso

Um bolo em forma de cubo foi coberto de chocolate em cinco de suas faces. Depois, foi cortado em 27 cubos pequenos iguais.

- Quantos cubos pequenos terão:

a) 3 faces com cobertura? 4 cubos pequenos.

b) 2 faces com cobertura? 12 cubos pequenos.

c) uma face com cobertura? 9 cubos pequenos.

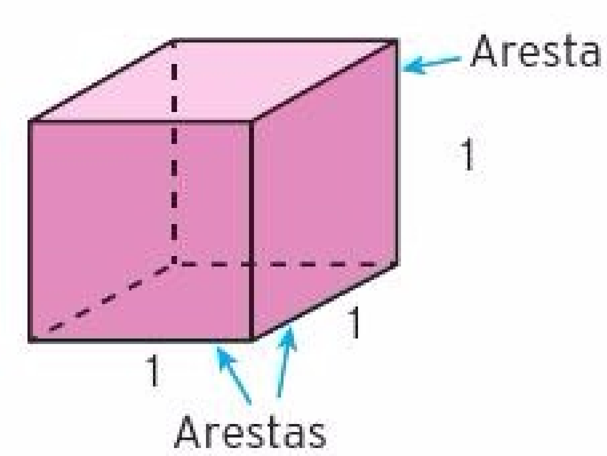
d) nenhuma face com cobertura? 2 cubos pequenos.

Unidades de medida de volume

No Sistema Internacional de Unidades, o **metro cúbico** foi escolhido como unidade fundamental de medida de volume.

Metro cúbico é a medida do espaço ocupado por um cubo com 1 metro de aresta.

A expressão **metro cúbico** é representada pelo símbolo **m³**.



Medidas indicadas em metro.

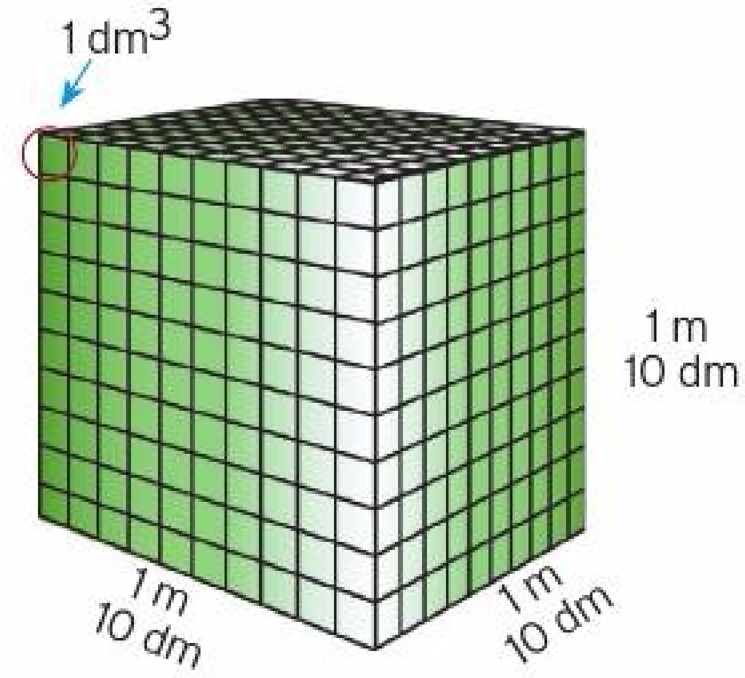
Relação entre m³, dm³ e cm³

Para medir volumes, existem múltiplos e submúltiplos do metro cúbico. As unidades mais utilizadas são o **decímetro cúbico** e o **centímetro cúbico**, cujos símbolos são, respectivamente, **dm³** e **cm³**.

$$1\ dm^3 = 0{,}001\ m^3 \text{ e } 1\ m^3 = 1000\ dm^3$$

$1\text{ cm}^3 = 0{,}000001\text{ m}^3$ e $1\text{ m}^3 = 1000000\text{ cm}^3$

$1\text{ cm}^3 = 0{,}001\text{ dm}^3$ e $1\text{ dm}^3 = 1000\text{ cm}^3$



Para comparar ou fazer cálculos com medidas de volume é importante que elas estejam **na mesma unidade**. Veja alguns exemplos.

- Transforme 32,5 m³ em dm³.

Para transformar uma medida expressa em m³ em dm³, multiplicamos essa medida por 1000.

$32{,}5\text{ m}^3 = (32{,}5 \times 1000)\text{ dm}^3 = 32500\text{ dm}^3$.

Observe que deslocamos a vírgula três casas decimais para a direita.

- Transforme 1652,4 cm³ em dm³.

Transformamos cm³ em dm³ dividindo por 1000 a medida expressa em cm³.

$1652{,}4\text{ cm}^3 = (1652{,}4 : 1000)\text{ dm}^3 = 1{,}6524\text{ dm}^3$.

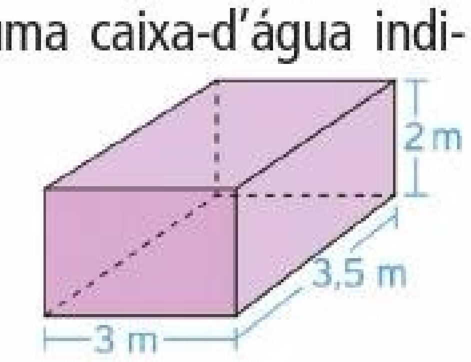
Observe que deslocamos a vírgula três casas decimais para a esquerda.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

27. Uma piscina tem 50 m de comprimento e 25 m de largura, e nela o nível da água está a 2 m de altura. Calcule o volume de água contido nessa piscina. 2500 m³.

28. Observe as medidas de uma caixa-d'água indicadas na figura. Qual a maior quantidade de água que pode ser armazenada nessa caixa-d'água?



21 m³.

29. Copie estas igualdades, substituindo o ■ por um número que as torne verdadeiras:

a) 1 000 dm³ = ■ m³ 1

b) 1 000 cm³ = ■ dm³ 1

c) 1 m³ = ■ cm³ 1000000

d) 1 000 cm³ = ■ m³ 0,001

e) 0,001 cm³ = ■ dm³ 0,000001

f) 1 cm³ = ■ m³ 0,000001

30. O volume de um recipiente é 250 dm³. Quantos cm³ de azeite, no máximo, pode conter esse recipiente? 250 000 cm³.

31. Um tanque contém 13,5 m³ de óleo. Quantos dm³ são necessários para encher três desses tanques? 40500 dm³.

32. Um forno de micro-ondas tem como dimensões externas 615 mm de largura, 368 mm de altura e 454 mm de profundidade. Qual é o volume desse micro-ondas em decímetros cúbicos? 102,74928 dm³.

33. Transforme:

a) 478 m³ em dm³; 478 000 dm³.

b) 6,7 dm³ em cm³; 6700 cm³.

c) 0,5 m³ em cm³; 500 000 cm³.

d) 6 000 mm³ em dm³; 0,006 dm³.

34. Em uma loja há dois aquários em forma de cubo: um com 40 cm de aresta e outro com 4 dm de aresta. Qual é o de maior volume? Os volumes são iguais.

35. As medidas da carroceria de um caminhão-baú são: 12 m de altura, 4 m de comprimento e 3 m de largura. Quantas caixas em forma de cubo com 40 cm de aresta esse caminhão transporta, quando totalmente carregado? 2250 caixas.

Usando a calculadora

A quantidade de areia contida em uma caixa cúbica com 80 cm de aresta, quando cheia, foi despejada em outra caixa cúbica com 1 m de aresta.

- Qual é o volume de cada caixa, em metros cúbicos? 0,512 m³; 1 m³.
- Quantos metros cúbicos de areia faltam para encher a segunda caixa? 0,488 m³.

3 Medindo capacidades

Procure enfatizar as unidades de medida de capacidades mais comuns no dia a dia dos alunos. Proponha situações de pesquisa sobre essas medidas, marcadas em embalagens. O experimento desta página poderá ser realizado em sala de aula.

Capacidade

Os líquidos e os gases em geral tomam a forma do recipiente que os contém. O volume interno do recipiente é a sua **capacidade**.

A palavra **capacidade**, quando se refere ao volume de um objeto, normalmente está associada à unidade de volume denominada **litro**.

FABIO R. MARTINS

Para refletir e responder

CÉLIA KOFUJI

- Comparando 1 dm³ de água com 1 litro, o que podemos afirmar?
Representam o mesmo volume de água.

O litro é representado pelo símbolo **L**. $1\ \text{L} = 1\ \text{dm}^3$

Como $1\ \text{m}^3 = 1000\ \text{dm}^3$ e $1\ \text{dm}^3 = 1\ \text{L}$, temos:

$$1\ \text{m}^3 = 1000\ \text{L}$$

Para medir pequenos volumes, o litro pode não ser a unidade mais adequada. Nesses casos, usamos submúltiplos do litro, dos quais o mais comum é o mililitro.

1 mililitro corresponde a **um milésimo do litro**. Seu símbolo é **mL**.

$$1\ \text{mL} = \frac{1}{1000}\ \text{L} = 0{,}001\ \text{L} \quad \text{e} \quad 1\ \text{L} = 1000\ \text{mL}$$

Relação entre as unidades de capacidade

Para comparar ou fazer cálculos com medidas de capacidade, é importante que elas estejam na mesma unidade.

VAGNER DE FARIAS

Podemos expressar em mililitros um volume medido em litros, multiplicando essa medida por 1 000.

$$3{,}68 \text{ L} = (3{,}68 \times 1000) \text{ mL} = 3\,680 \text{ mL}$$

Observe que deslocamos a vírgula três casas decimais para a direita.

E como transformar 12,5 mL em L?

Podemos expressar em litros um volume medido em mililitros dividindo essa medida por 1000.

$$12{,}5 \text{ mL} = (12{,}5 : 1000) \text{ L} = 0{,}0125 \text{ L}$$

Note que deslocamos a vírgula três casas decimais para a esquerda.

Fazer e aprender

Proponha outras situações nas quais os alunos usem estimativas e reflitam sobre a unidade mais adequada. Veja a atividade 36.

FAÇA NO CADERNO

36. Indique a unidade mais adequada para medir a capacidade de:

a) um copo de água; mL ou cm³

b) um tanque de gasolina; L

c) uma ampola de injeção; mL ou cm³

d) uma piscina. L ou m³

37. Um carro percorre 9 km com 1 L de gasolina. Supondo que esse consumo de gasolina seja sempre o mesmo, responda:

a) Quantos litros o carro consumirá para percorrer 180 km? 20 L.

b) Quanto uma pessoa gastará para percorrer 419 km com esse carro? Para responder a essa questão, procure saber o preço do litro da gasolina. Resposta pessoal.

38. Qual é a capacidade, em litros, de suco contido em cada recipiente a seguir?

Suco de maçã
335 mL
0,335 L

Suco de laranja
500 mL
0,5 L

FRANCISCO VILACHA

39. Transforme em mL:

a) 3,5 L 3 500 mL

b) 2,25 L 2 250 mL

c) 0,19 L 190 mL

d) 0,072 L 72 mL

40. Um frasco de detergente pode conter 600 mL. Qual a maior quantidade de frascos necessária para acondicionar 1 200 L de detergente? 2 000 frascos.

41. Transforme em litros:

a) 37 m³ 37 000 L

b) 6 m³ 6 000 L

c) 7,5 m³ 7 500 L

d) 0,086 m³ 86 L

e) 0,2 m³ 200 L

f) 0,005 m³ 5 L

42. Maria aproveitou uma promoção e comprou um frasco de amaciante como o do anúncio. Chegando em casa, dividiu o conteúdo em recipientes de meio litro.

FRANCISCO VILACHA

a) Qual a maior quantidade de recipientes que Maria obteve? 4 recipientes.

b) Se Maria vender cada recipiente de meio litro por R$ 1,80, ela terá lucro ou prejuízo? De quanto? Lucro, R$ 1,10.

43. Uma torneira despeja 250 mL de água por minuto em um vasilhame. Quanto tempo ela levará para despejar 4 L de água? 16 minutos.

44. Um laboratório precisa acondicionar 1 L de uma vacina em ampolas de 5 mL. Qual a maior quantidade de ampolas que serão usadas? 200 ampolas.

45. Transforme em m^3:

a) 1200 L $1{,}2\ m^3$

b) 68,4 L $0{,}0684\ m^3$

c) 195 800 mL $0{,}1958\ m^3$

46. Em cidades servidas por água encanada, é costume a companhia de distribuição de água instalar, na entrada das casas, hidrômetros, conhecidos popularmente como relógios de água. Esses instrumentos são utilizados para medir e registrar o consumo de água.
Em determinado dia, o medidor de uma fábrica registrou 23 148 m^3. Um mês depois, o mesmo hidrômetro registrou 23 532 m^3.
Qual foi, em litros, o consumo de água dessa fábrica nesse período? 384 000 L.

Troquem ideias e resolvam

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega, reflitam sobre o problema e encontrem uma solução.

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

$1{,}8\ m^3 = 1800$ L

- Se dobrarmos as medidas do comprimento, da largura e da altura dessa caixa-d'água, a capacidade dela também dobraria? Não, seria multiplicada por 8.
- Qual seria a capacidade da caixa nessas condições? 14400 L.

Exercícios complementares

FAÇA NO CADERNO

47. A capacidade de uma caixa-d'água é 7,2 m^3. Qual é a quantidade de água, em litros, necessária para encher essa caixa-d'água? 7 200 L.

48. O consumo de água de uma residência no mês de maio foi de 45 m^3. Quantos litros de água foram consumidos nesse mês? 45 000 L.

49. Um aquário tem a forma de um cubo de 40 cm de aresta. Quantos litros de água serão necessários para encher 80% desse aquário? 51,2 L.

50. Para combater a dengue, Maria preparou em um recipiente uma solução misturando 2 mL de água sanitária com 1 litro de água. Quantos mL dessa solução contém esse recipiente? 1 002 mL.

51. Uma caixa-d'água tem a forma de um cubo com 1 m de aresta. Se a caixa estiver cheia de água e uma pessoa retirar 10 litros de água, quantos litros restarão na caixa? 990 L.

Desafio

Procure observar e explorar as diferentes estratégias utilizadas pelos alunos na resolução deste desafio.

FAÇA NO CADERNO

Encrencas e possibilidades

Dona Maricota tinha uma vasilha, com 8 litros de capacidade, cheia de leite.

Prometeu às suas duas comadres dar 4 litros de leite para cada uma.

Ao fazer a partilha, dona Maricota se viu em uma encrenca: ela só tinha duas vasilhas vazias, uma em que cabiam 3 litros e outra em que cabiam 5 litros.

Ajude dona Maricota a sair da encrenca, usando apenas as três vasilhas que ela tem.

Respostas no final do livro.

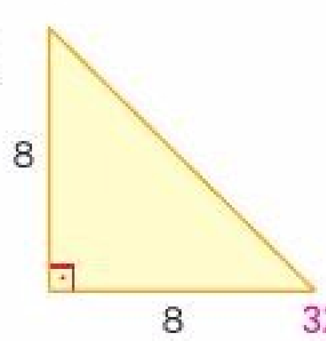
Revisão cumulativa e testes

FAÇA NO CADERNO

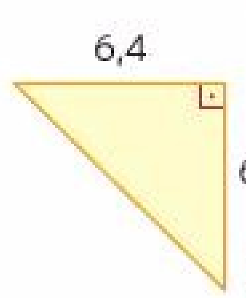
1. Os lados de um quadrado medem 7,2 m. Calcule a sua área em m^2 e em cm^2. 51,84 m^2; 518 400 cm^2.

2. Um terreno retangular tem 9,5 m de largura, e seu comprimento é o dobro desse valor. Qual é a área desse terreno? 180,5 m^2.

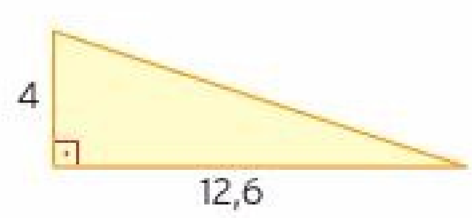
3. Calcule a área dos triângulos, sabendo que as medidas dos lados estão indicadas em cm.

a) 

32 cm^2.

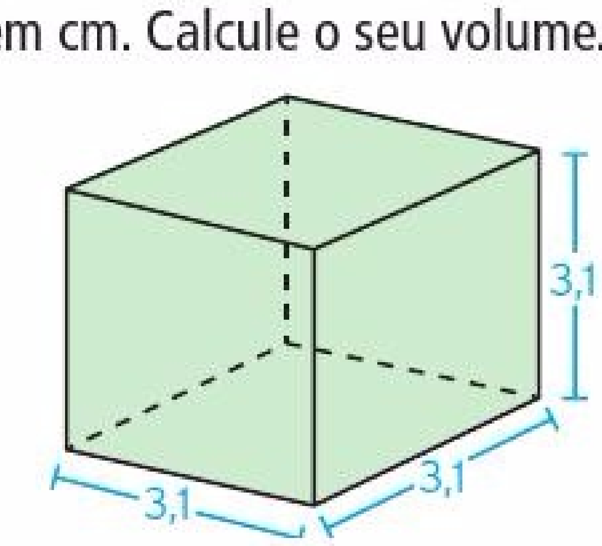
b) 

20,48 cm^2.

c) 

25,2 cm^2.

4. Neste cubo, as medidas das arestas estão indicadas em cm. Calcule o seu volume.



29,791 cm^3.

5. Dois ângulos são complementares e um deles excede o outro em 17°. Qual é a medida de cada ângulo? 36° 30' e 53° 30'

6. Duas torneiras com a mesma vazão enchem um tanque em 1 h e 20 min. Em quanto tempo cinco torneiras com a mesma vazão encherão o mesmo tanque? 32 minutos.

7. Numa prova acertei 62% das questões e errei 19 delas. A prova tinha: b

a) 62 questões.

b) 50 questões.

c) 43 questões.

d) 19 questões.

8. (Saresp) Milton vai preparar uma vitamina de leite com banana. Precisa de 250 mililitros de leite e uma banana para fazer um copo de vitamina. Para que Milton prepare 8 copos de vitamina, ele precisará de quantos litros de leite? a

a) 02

b) 04

c) 06

d) 08

UNIDADE 5

Números racionais

JASON HAWKES/CORBIS/LATINSTOCK

Labirinto de jardim de Traquair House, localizado em Peeblesshire, Escócia.

Nesta unidade...

1. Racionais positivos e racionais negativos
2. Ampliação do conjunto dos números inteiros
3. Representação geométrica
4. Operações
5. Números racionais e potências
6. Estatística e probabilidade

Podemos usar frações para indicar partes desse jardim em relacão ao todo. Nesta unidade, vamos estender o conhecimento adquirido sobre números inteiros explorando situações que envolvam números racionais positivos ou negativos.

Os números racionais estão presentes no cotidiano das pessoas. Esses números aparecem em notícias divulgadas em jornais, em revistas e na televisão. Saber ler números desse tipo, operar com eles e interpretá-los é fundamental.

Leia e observe os números citados nos textos a seguir.


STOCKTREK IMAGES/GETTY IMAGES

A Terra leva cerca de 365 dias mais $\frac{1}{4}$ de dia para completar uma volta em torno do Sol. A distância entre os dois astros é de $1{,}5 \times 10^8$ km.

GERSON GERLOFF/PULSAR IMAGENS

Em 28 de junho de 2011, o Brasil atingiu a temperatura mais baixa da sua história. Aconteceu em Urupema (SC), às 7h30: menos 8,8 graus. Naquele inverno, mais de 30 cidades tiveram temperatura abaixo de zero.

O que você já sabe?

- Um dia tem 24 horas. Quantas horas correspondem a $\frac{1}{4}$ do dia? 6 horas
- O que significa 0,1 do ano? 1,2 mês ou 1 mês e 6 dias.
- $\frac{1}{4}$ e $\frac{25}{100}$ são frações equivalentes e representam o mesmo número racional. Como se indica $\frac{1}{4}$ na forma decimal? Resposta possível: 0,25.
- A temperatura "menos 8,8 graus Celsius" pode ser indicada por $-8{,}8$ °C. Por que se acrescenta o sinal "−" antes de 8,8? Resposta possível: Porque é uma temperatura menor que 0° C.

1 Racionais positivos e racionais negativos

Onde encontramos números racionais negativos?

Dada a importância do tema, inicie propondo aos alunos uma pesquisa sobre números racionais em revistas, jornais, programas de TV, feiras, supermercados, farmácias etc. Realize um painel em classe com o material coletado e promova discussões que envolvam os números racionais. Procurar fazer um diagnóstico dos conhecimentos que eles têm sobre o assunto. Para mais esclarecimentos, leia texto no **Manual do Professor**.

Para refletir e responder

Como aparece o resultado de $(-15) : (4)$ em uma calculadora?

Providencie uma calculadora e digite esta sequência de teclas: − 1 5 ÷ 4 =

- O que apareceu no visor? Respostas possíveis: −3,75 ou 3,75−.

Já sabemos que:

- $(-3) \cdot +4$ é igual a -12
- $(-4) \cdot 4$ é igual a -16

Isso significa que o resultado de $(-15) : 4$ está entre -3 e -4, ou seja, o quociente **não é um número inteiro**. Mas sabemos que o resultado do cálculo proposto deve ser negativo. Além disso, o número que apareceu no visor possui um ponto que corresponde a uma vírgula.

Para que cálculos como esse tenham um resultado, ampliamos o significado de número racional, que já estudamos, dividindo números inteiros:

Usando frações...

$$\text{número} = (-15) : 4 = \frac{-15}{4} = -\frac{15}{4}$$

Usando decimais...

$$\text{número} = (-15) : 4 = -(15 : 4) = -3{,}75$$

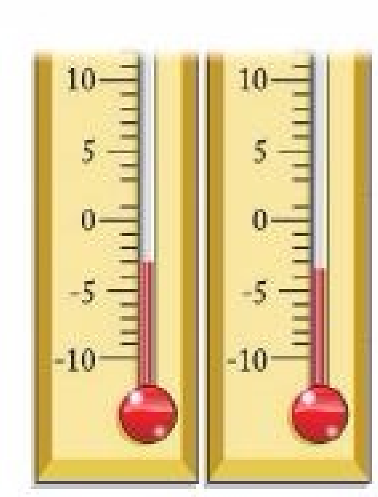
Quocientes como esses são números racionais positivos ou negativos.

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Portanto, em Matemática, números racionais negativos são encontrados em divisões de um número inteiro negativo por outro positivo e também em divisões de um número inteiro positivo por outro negativo.

Veja outro exemplo.

- -3 °C é uma temperatura negativa, entre -5 °C e 0 °C.
- $-3{,}5$ °C é outra temperatura negativa, entre -5 °C e 0 °C.



HÉLIO SENATORE

Chamamos de **número racional** todo número que pode ser escrito na forma fracionária, em que o numerador e o denominador são números inteiros, com denominador diferente de zero.

Números racionais e a propriedade fundamental das frações

Para números racionais na forma fracionária, vale a propriedade fundamental das frações que já conhecemos: podemos multiplicar, ou dividir, os termos de uma fração por um número inteiro diferente de zero e o resultado será outra representação do mesmo número.

Vejamos alguns exemplos.

- $-\dfrac{5}{4} = -\dfrac{10}{8}$ (numerador e denominador $\times 2$) $\quad -1{,}25$

  $-\dfrac{5}{4} = -\dfrac{(-15)}{(-12)} = -\left(+\dfrac{15}{12}\right) = -\dfrac{15}{12}$ (numerador e denominador $\times (-3)$) $\quad -1{,}25$

  $-\dfrac{5}{4}$, $-\dfrac{10}{8}$ e $-\dfrac{15}{12}$ são iguais a $-1{,}25$.

- $-\dfrac{36}{72} = -\dfrac{18}{36}$ (numerador e denominador $: 2$) $\quad -0{,}5$

  $-\dfrac{36}{72} = -\dfrac{(-2)}{(-4)} = -\dfrac{2}{4}$ (numerador e denominador $: (-18)$) $\quad -0{,}5$

  $-\dfrac{36}{72}$, $-\dfrac{18}{36}$ e $-\dfrac{2}{4}$ são iguais a $-0{,}5$.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

1. Estes quocientes são números racionais. Apresente a escrita fracionária de cada um.

a) $(-9) : (-10)$ $\frac{9}{10}$

b) $(+14) : (+15)$ $\frac{14}{15}$

c) $(-26) : (+37)$ $-\frac{26}{37}$

d) $(-53) : (-67)$ $\frac{53}{67}$

2. Expresse cada situação por meio de um número racional.

a) A distribuição de R$ 25,00 em quatro quantias iguais. R$ 6,25

b) Quatro metros e meio abaixo do nível do mar. $-4{,}5$ m

c) O valor de cada parcela de um saque total de R$ 100,00 feito em 8 vezes. −R$ 12,50

3. Um número multiplicado por -10 resulta em $+9$. Que número é esse? $-\frac{9}{10}$ ou $-0{,}9$

4. Escreva três frações que representem o número racional $-\dfrac{5}{7}$. Respostas possíveis: $-\frac{10}{14}$; $-\frac{20}{28}$; $-\frac{50}{70}$

5. Escreva três frações que representem o número racional $-14{,}8$. Respostas possíveis: $-\frac{148}{10}$; $-\frac{74}{5}$; $-\frac{296}{20}$

Usando a calculadora

Estes quocientes são números racionais. Escreva a forma decimal de cada um.

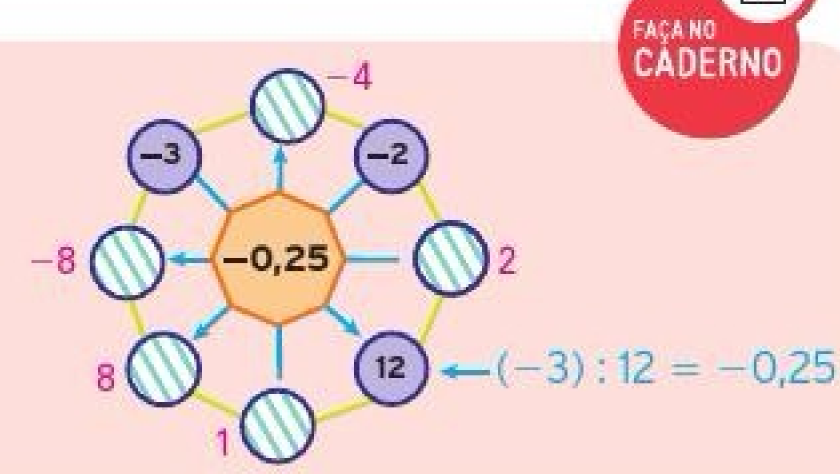
a) $(-11) : (-4)$ $+2{,}75$ b) $(-18) : (+5)$ $-3{,}6$ c) $(-48) : (-25)$ $+1{,}92$ d) $\dfrac{-12}{-60}$ $+0{,}2$

Desafio

FAÇA NO CADERNO

Uma roda de números

Copie a figura e complete os círculos da roda com os números: -8, -4, 1, 2 e 8, de modo que o quociente entre os números, no sentido da seta, seja sempre $-$**0,25**.



2 Ampliação do conjunto dos números inteiros

Sendo este um tema de natureza teórico-matemática, não há necessidade de enfatizá-lo, pois ele será retomado em anos posteriores. Certifique-se apenas de que os alunos percebem a inclusão de um conjunto em outro e a ampliação do conceito de número. Além do texto, veja a atividade 9.

Um número inteiro é um número racional?

Reunindo em um único grupo os números racionais positivos, os números racionais negativos e o zero, teremos o **conjunto dos números racionais**, representados pelo símbolo $\mathbb{Q}$.

Alguns números que pertencem a $\mathbb{Q}$:

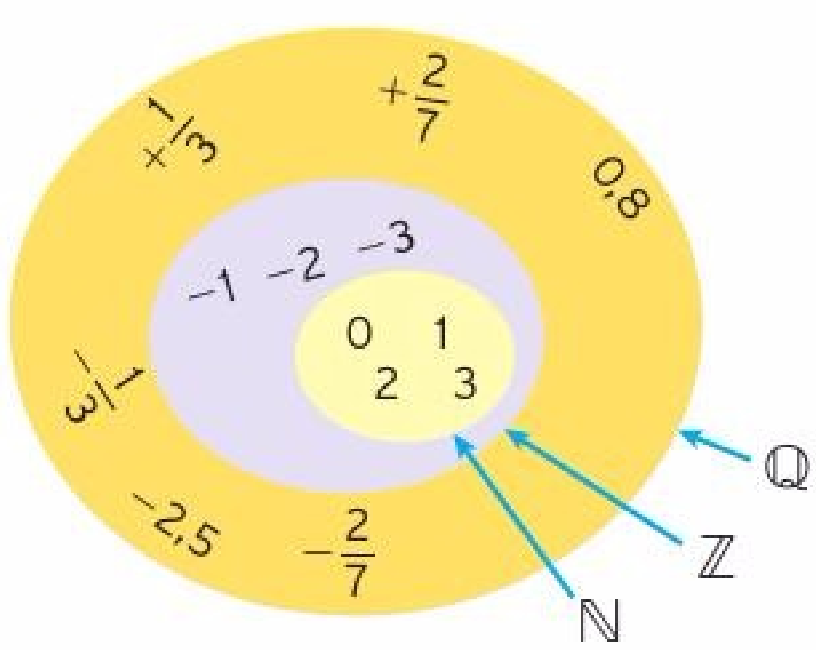
$-13{,}6$ $\quad \frac{3}{7}$ $\quad -\frac{4}{23}$ $\quad 0{,}14$ $\quad 59$ $\quad 0$

Todo número inteiro é um número racional, pois pode ser escrito na forma fracionária.

Podemos, ainda, dizer que todo número que pertence a $\mathbb{Z}$ pertence, também, a $\mathbb{Q}$.

Exemplo: $-8 = \frac{-48}{+6}$, ou $-8 = -\frac{48}{6}$ —— $-8 \in \mathbb{Z}$ e $-8 \in \mathbb{Q}$.

Neste diagrama, representamos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$.



O conjunto dos números racionais é uma ampliação do conjunto dos números inteiros.

O conjunto dos números inteiros, por sua vez, é uma ampliação do conjunto dos números naturais.

Dízimas periódicas

Clóvis está tentando distribuir, igualmente, R$ 29,00 entre seus três sobrinhos, de maneira que cada um receba a maior quantia possível.

FOTOGRAFIAS: THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Clóvis não pode distribuir o dinheiro como planejou, não é mesmo? Mas por que isso ocorreu?

Isso aconteceu porque o **resto** da divisão de 29 por 3, a partir de certo momento, é sempre 2. Assim, o quociente tem uma forma decimal com **infinitas ordens decimais** e nele o **algarismo 6** se repete sempre.

29 | **3**
2 — **9,666...**
Décimos $\xrightarrow{\times 10}$ 20
2
Centésimos $\xrightarrow{\times 10}$ 20
2
Milésimos $\xrightarrow{\times 10}$ 20
2...

Dizemos que: 9,666... é uma **dízima periódica** de período 6.

Em lugar de repetir o período, podemos colocar sobre ele um traço ou um ponto.

$9{,}666... = 9{,}\overline{6} = 9{,}\dot{6}$ —— 9,666... é um decimal não exato.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

6. Alguns destes números racionais são também números inteiros. Quais são eles? a; d; e; f

a) $-\dfrac{16}{16}$ c) $\dfrac{30}{18}$ e) $\dfrac{0}{25}$

b) $-\dfrac{9}{27}$ d) $-\dfrac{42}{21}$ f) $-\dfrac{63}{3}$

7. Entre os números racionais $\dfrac{19}{2}$, $-\dfrac{35}{4}$ e $\dfrac{49}{6}$, qual deles tem escrita decimal e não exata? $\dfrac{49}{6}$

8. Vamos trabalhar com a escrita numérica decimal.

$+\dfrac{89}{10}$ 8,9 $\dfrac{5}{3}$ 1,6666... $-\dfrac{27}{20}$ −1,35 $-\dfrac{15}{11}$ −1,3636... $-\dfrac{13}{90}$ −0,1444... $\dfrac{4}{33}$ 0,1212...

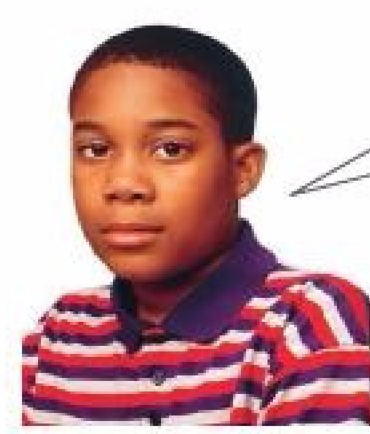
a) Apresente a escrita numérica decimal de cada número racional que aparece nos quadros acima.

b) Quais desses números representam uma dízima periódica? $\frac{5}{3}$; $-\frac{15}{11}$; $-\frac{13}{90}$; $\frac{4}{33}$

Qual é o período de cada dízima periódica que você encontrou? 6; 36; 4; 12

9. Quem está certo? Rafael e Mariana.

Rafael



Pedro

Mariana

FOTOGRAFIAS: THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Usando a calculadora

- Divida o número 5 775 pelos números inteiros que estão nos quadros.

2, 3, 4, 5, 8, 9, 11, 13

−27, −18, −16, −15, −13

Inteiro	Decimal exato	Dízima periódica
525	2887,5	641,6666...
1925	1443,75	−213,88888...
1155	721,875	−320,833333...
−385	−360,9375	−444,230769...
		444,230769...

Número racional

Inteiro	Decimal exato	Dízima periódica
525		
		−320,833333...

5 775 : 11 5 775 : (−18)

- Construa uma tabela como esta ao lado e anote os quocientes obtidos na coluna que achar mais adequada.

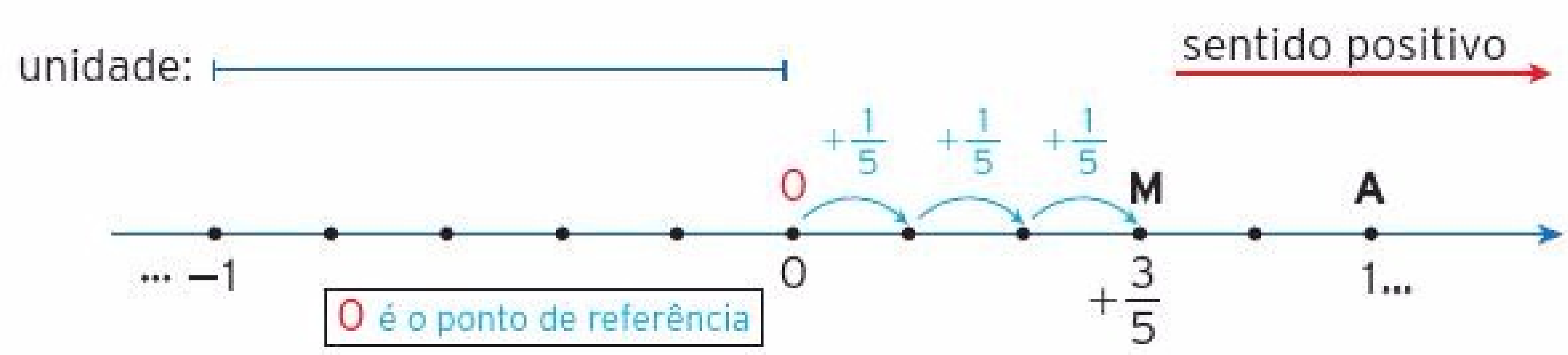
3 Representação geométrica

Incentive os alunos a utilizar o que sabem sobre a reta numerada e proponha algumas situações-problema nas quais possam ampliar o conceito de oposto ou simétrico de um número inteiro. Certifique-se de que sabem como dividir a unidade para representar números racionais na forma fracionária.

Reta numerada

Para refletir e responder

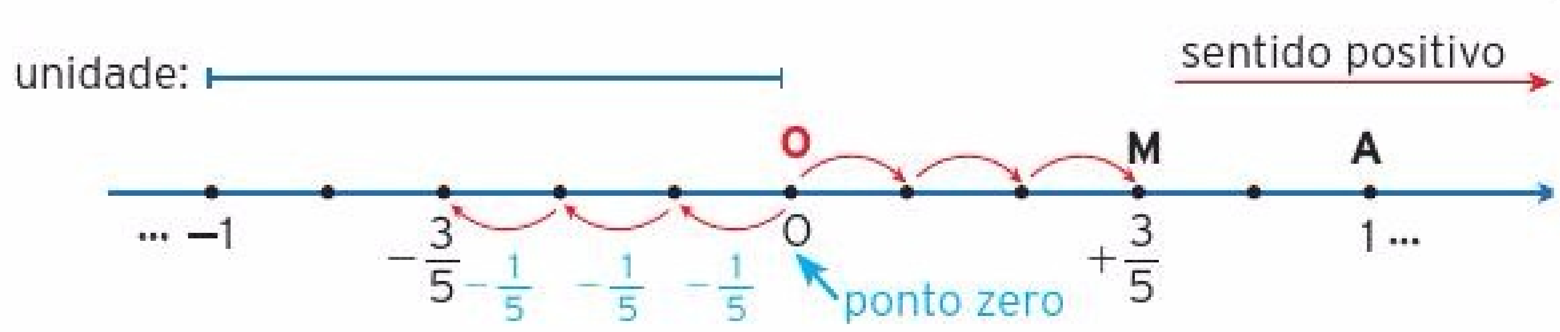
Nesta reta numerada, a unidade foi dividida em 5 partes iguais.



- O ponto M representa $+\frac{3}{5}$. Como podemos representar $-\frac{3}{5}$? Resposta possível: Contamos 3 partes iguais a $\frac{1}{5}$ partindo do zero, no sentido negativo.

Do mesmo modo como fazemos com os números inteiros e os racionais positivos, também representamos os números racionais negativos por pontos de uma reta numerada.

O ponto simétrico a M na reta numerada, em relação a O, representa $-\frac{3}{5}$ nessa reta.



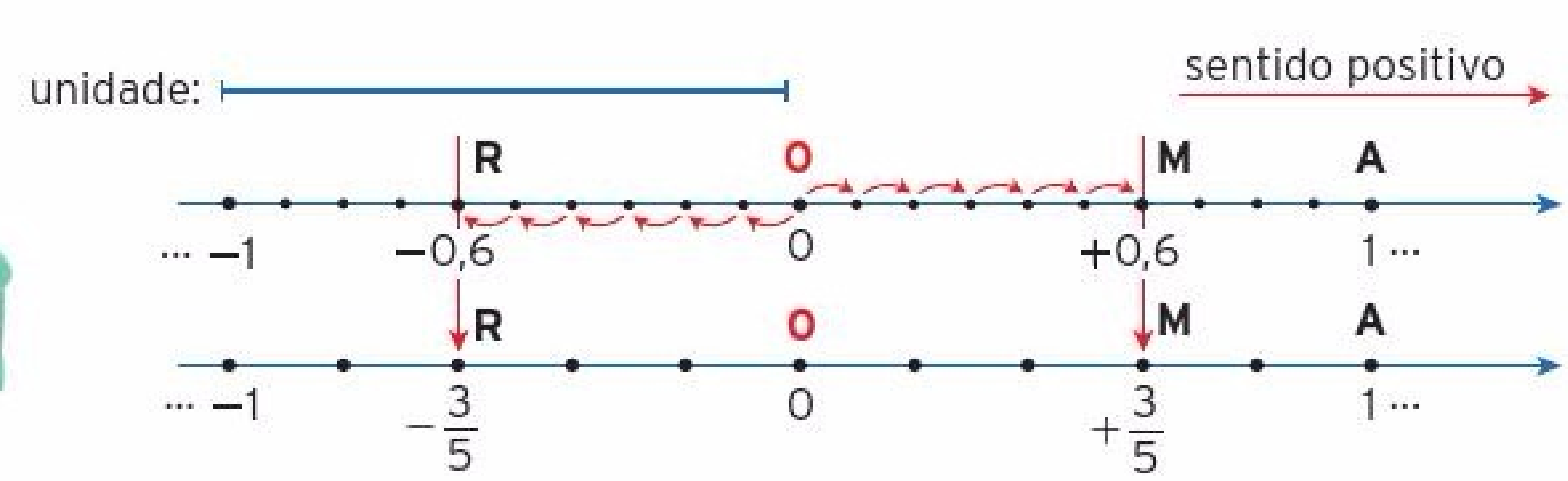
Também podemos representar na reta numerada esses números racionais escritos na forma decimal.

$-\frac{3}{5} = -0{,}6$

$+\frac{3}{5} = +0{,}6$

Veja ao lado como representar $+0{,}6$ e $-0{,}6$ dividindo a unidade em 10 partes iguais.

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

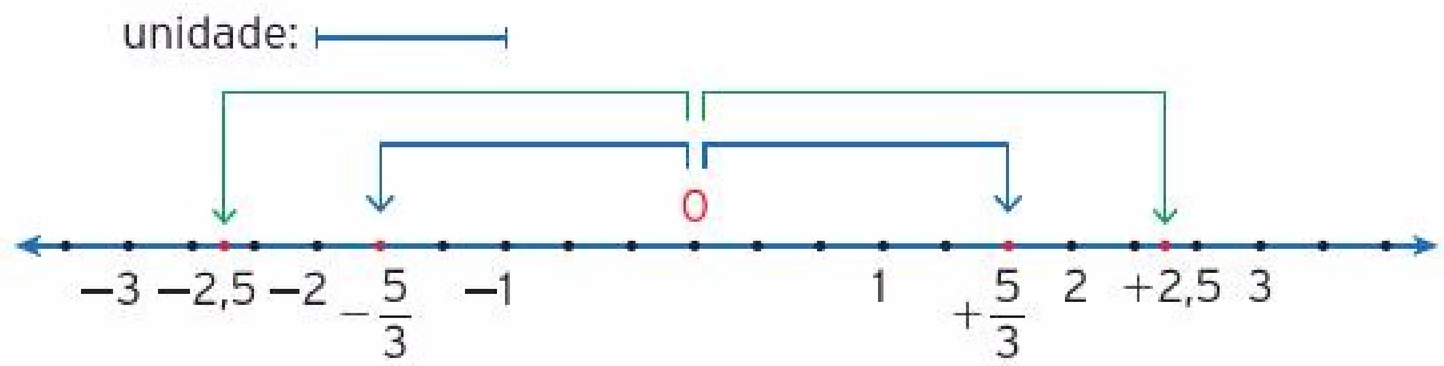


Números racionais opostos e módulo

Números racionais que estão à mesma distância do zero, na reta numerada, são **números opostos** ou **números simétricos**.

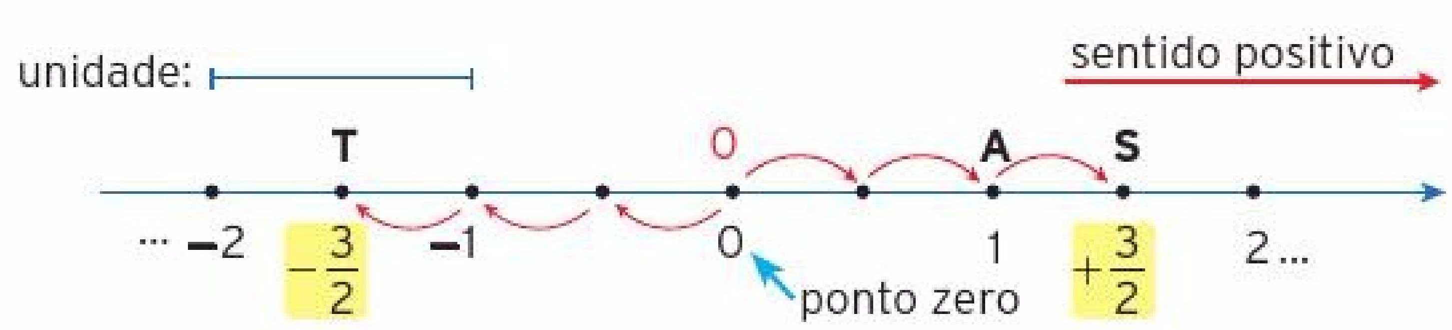
Na reta numerada abaixo, são opostos ou simétricos:

- $+\frac{5}{3}$ e $-\frac{5}{3}$
- $+2,5$ e $-2,5$



Módulo, ou **valor absoluto**, de um número racional é a distância dele ao zero na reta numerada.

Veja um exemplo.



O módulo de $+\frac{3}{2}$ é $\frac{3}{2}$ —— Indica-se $\left|\frac{3}{2}\right| = \frac{3}{2}$.

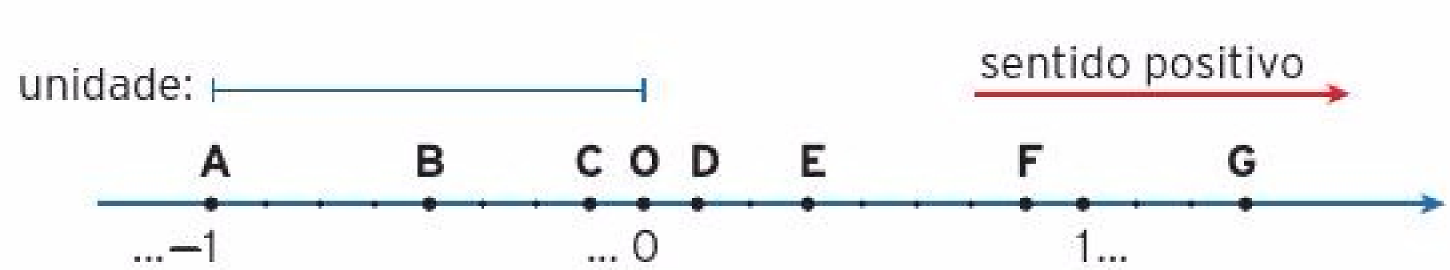
O módulo de $-\frac{3}{2}$ é $\frac{3}{2}$ —— Indica-se $\left|-\frac{3}{2}\right| = \frac{3}{2}$.

Se o módulo de um certo número é 1,5, por exemplo, esse número pode ser +1,5 ou −1,5.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

10. Nesta figura, a unidade foi dividida em 8 partes iguais e alguns pontos foram destacados na reta.



Anote as afirmações corretas e reescreva as incorretas, corrigindo-as.

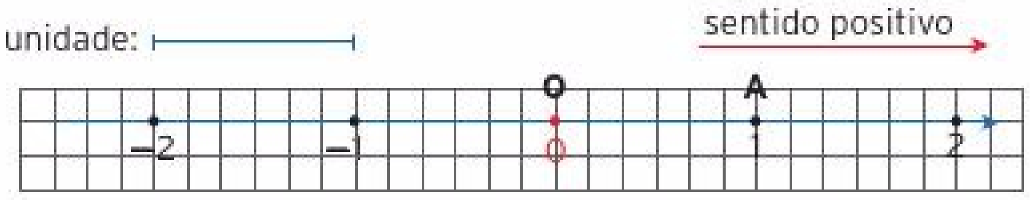
Ⓐ O ponto **D** representa $\frac{1}{8}$. Correta.

Ⓑ O ponto **E** representa $\frac{1}{4}$. Incorreta. O ponto E representa $\frac{3}{8}$.

Ⓒ O ponto **C** representa $-\frac{1}{8}$. Correta.

Ⓓ −0,4 é representado pelo ponto **B**. Incorreta. −0,5 é representado pelo ponto **B**.

11. Copie a reta numerada a seguir em uma folha de papel quadriculado.



a) Represente, na reta desenhada, estes números racionais.

$-\frac{7}{4}$ $\frac{1}{4}$ $-\frac{1}{4}$ $\frac{2}{4}$ $-\frac{3}{4}$ $\frac{7}{4}$ $-1,5$

Ver respostas possíveis no final do livro.

Nessas representações, $-\frac{3}{4}$, por exemplo, é a abscissa do ponto destacado na reta para representá-lo.

B: $-\frac{7}{4}$; C: $-1,5$; D: $-\frac{3}{4}$; E: $-\frac{1}{4}$; F: $\frac{1}{4}$; G: $\frac{2}{4}$; H: $\frac{7}{4}$;

b) Observe a representação dos números obtida, nomeie os pontos destacados nessa reta numerada e identifique a abscissa de cada ponto.

c) Nessa mesma reta numerada, represente os pontos: Ver respostas possíveis no final do livro.

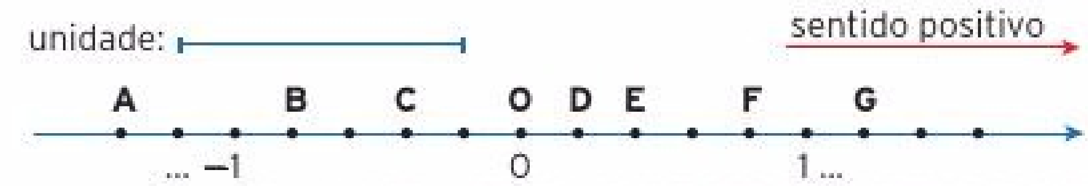
L de abscissa $\frac{4}{2}$

K de abscissa $-0,5$

M de abscissa $-\frac{4}{2}$

12. Anote as abscissas dos pontos **A**, **B**, **C**, **D**, **E** e **F**, usando um número racional na forma decimal:

A unidade foi dividida em 5 partes iguais.



A: $-1,4$; B: $-0,8$; C: $-0,4$; D: $0,2$; E: $0,4$; F: $0,8$; G: $1,2$

13. Copie as sentenças, substituindo o ■ por um número racional, de modo que sejam verdadeiras: Respostas possíveis.

a) O oposto de $\frac{7}{10}$ é ■. $-\frac{7}{10}$ ou $-0,7$

b) O simétrico de $-0,4$ é ■. $0,4$ ou $\frac{4}{10}$

14. Copie estas sentenças, substituindo o ■ por um número racional, de modo que sejam verdadeiras:

a) O módulo de $-\frac{3}{8}$ é ■. $\frac{3}{8}$

b) O valor absoluto de $-0,16$ é ■. $0,16$

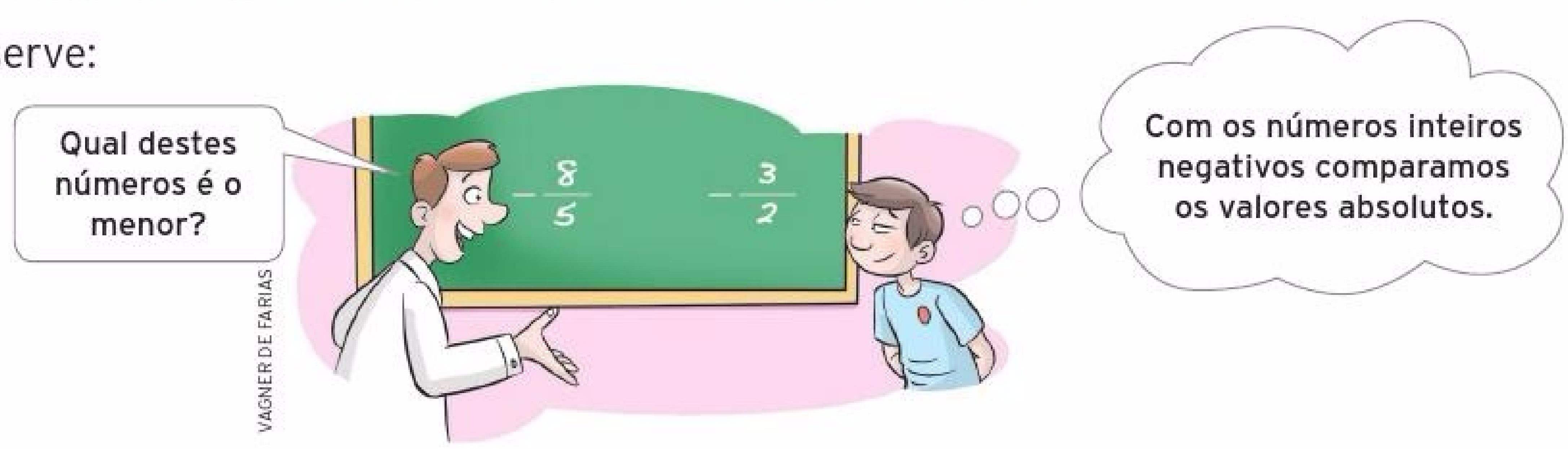
c) O valor absoluto de $-3,25$ é ■. $3,25$

Represente as mesmas sentenças anteriores substituindo o ■ por símbolos que indicam valor absoluto ou módulo:

■ $= \frac{3}{8}$ $\left|-\frac{3}{8}\right|$ ■ $= 0,16$ $|-0,16|$ ■ $= 3,25$ $|-3,25|$

Comparação de números racionais

Observe:



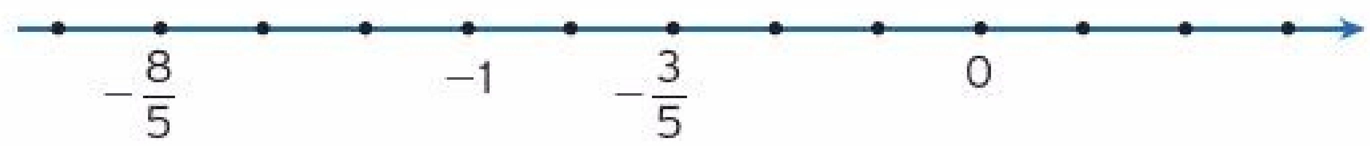
Na reta numerada, como acontece com os números inteiros, os números racionais são representados em ordem crescente, da esquerda para a direita.

Comparamos dois números racionais observando a representação desses números na reta numerada ou observando seus valores absolutos.

Exemplos:

- $-\frac{8}{5}$ e $-\frac{3}{5}$

Representamos esses números na reta numerada:



$-\frac{8}{5}$ é representado à esquerda de $-\frac{3}{5}$, ou seja, $-\frac{8}{5}$ é menor que $-\frac{3}{5}$.

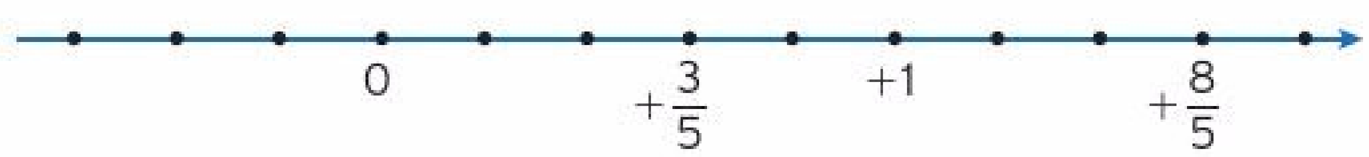
Observando os módulos: $\left|-\frac{8}{5}\right| = \frac{8}{5}$ e $\left|-\frac{3}{5}\right| = \frac{3}{5}$ —— $\left|-\frac{8}{5}\right| > \left|-\frac{3}{5}\right|$

Como os dois números são negativos, aquele que tem **maior** módulo é **menor** que o outro.

Então, $-\frac{8}{5} < -\frac{3}{5}$.

- Agora, vamos comparar dois números positivos, $\frac{8}{5}$ e $\frac{3}{5}$.

Representamos esses números na reta numerada:



$\frac{8}{5}$ é representado à direita de $\frac{3}{5}$, ou seja, $\frac{8}{5}$ é maior que $\frac{3}{5}$.

Observando os módulos: $\left|\frac{8}{5}\right| = \frac{8}{5}$ e $\left|\frac{3}{5}\right| = \frac{3}{5}$ —— $\left|\frac{8}{5}\right| > \left|\frac{3}{5}\right|$

Como os dois números são positivos, aquele que tem **maior** módulo é o **maior**.

Então, $\frac{8}{5} > \frac{3}{5}$.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

15. Em um local, a temperatura que era de $-0{,}8$ °C passou a $-3{,}8$ °C. A temperatura subiu ou desceu? Quantos graus? Desceu. 3 °C.

16. Copie estas sentenças, substituindo o ■ por $<$, $=$ ou $>$:

a) $\frac{3}{8}$ ■ $\frac{2}{3}$ $<$

b) $-\frac{7}{6}$ ■ $-\frac{5}{4}$ $>$

c) $\frac{9}{24}$ ■ $\frac{3}{8}$ $=$

d) $-\frac{11}{6}$ ■ $-\frac{17}{15}$ $<$

e) 6,3 ■ 6,03 $>$

f) 10,5 ■ 10,500 $=$

17. A abscissa de **M** é $-\frac{8}{15}$ e a de **P** é $-\frac{11}{15}$.

a) Qual desses pontos tem abscissa maior? M

b) Qual deles está mais distante do zero? P

18. Copie as sentenças a seguir substituindo o ■ por $<$, $=$ ou $>$:

a) $-\frac{5}{3}$ ■ $-\frac{5}{4}$ $<$

b) $+\frac{3}{4}$ ■ $-\frac{2}{7}$ $>$

c) $-2{,}08$ ■ $-2{,}8$ $>$

19. Qual é o número simétrico de 12,68? $-12{,}68$

20. Certa manhã de inverno, a cidade de Campos do Jordão, no estado de São Paulo, amanheceu com uma temperatura oposta a 2,7 °C. Que temperatura era essa? $-2{,}7$ °C ou 2,7 °C abaixo de zero.

21. Célia pensou em um número de valor absoluto $\frac{13}{5}$. Em que número ela pode ter pensado? $-\frac{13}{5}$ ou $\frac{13}{5}$

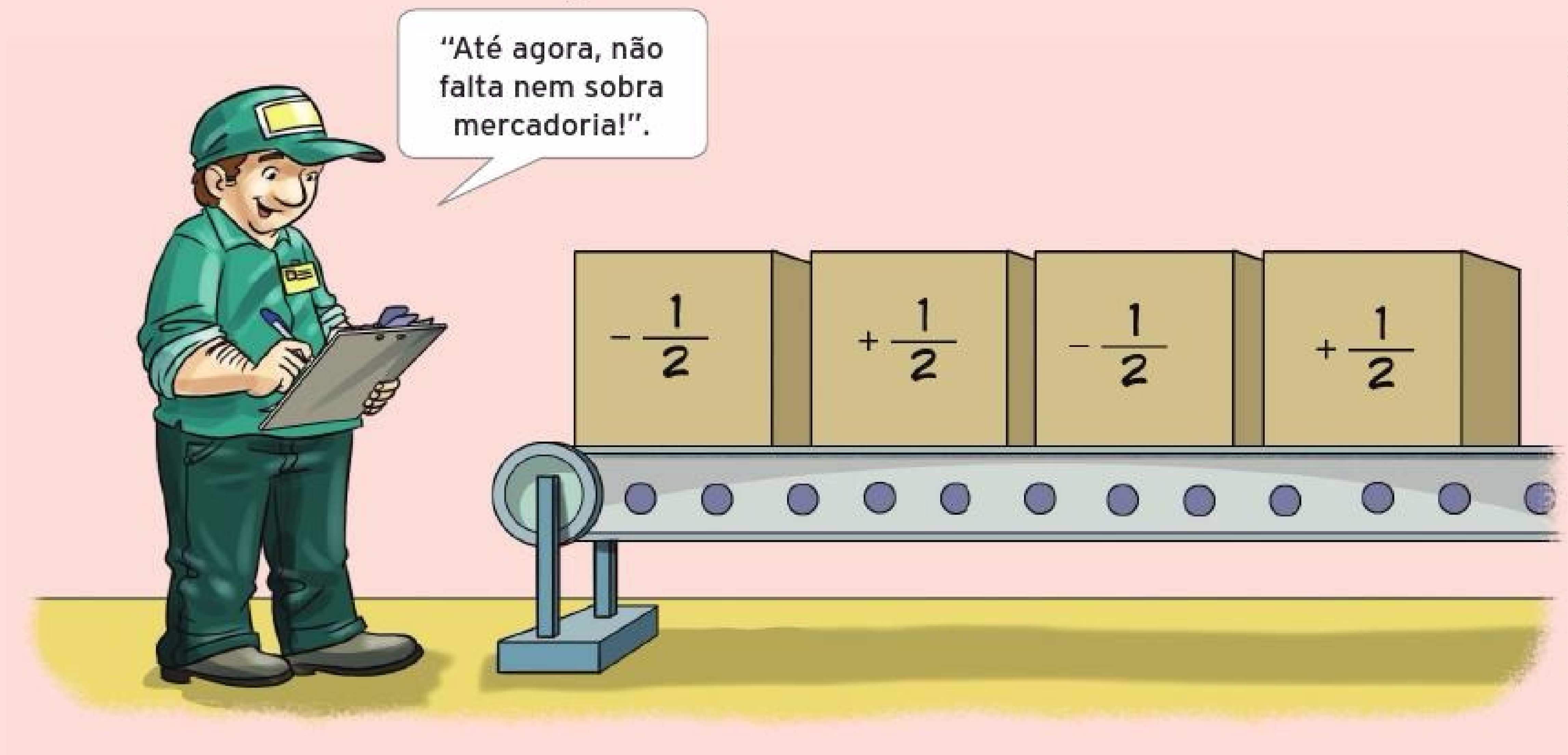
Desafio

FAÇA NO CADERNO

Falta ou sobra mercadoria?

Sérgio pesa as caixas com frango que chegam ao depósito de um supermercado. Nessas caixas, admitem-se variações de $\frac{1}{2}$ kg para mais ou para menos.

Se uma delas tem $\frac{1}{2}$ kg a menos do que deveria, ele assinala $-\frac{1}{2}$ na caixa. Mas, se tem $\frac{1}{2}$ kg a mais do que deveria, ele assinala $+\frac{1}{2}$. Observe o que ele assinalou em quatro das caixas que recebeu.



- A conclusão de Sérgio está correta? Explique por quê.

Sim. A caixa que tem $-\frac{1}{2}$ é compensada com a que tem $+\frac{1}{2}$ e como, até o momento, há duas caixas com cada uma dessas marcas, não há mercadoria a menos nem a mais.

Exercícios complementares

FAÇA NO CADERNO

22. Márcia escreveu uma sequência numérica com um padrão, mas escondeu alguns números. Quais são eles? Copie e complete.

−3,8	−3,8	3,8	−3,8	−3,8	3,8	−3,8	−3,8	3,8	−3,8

23. O número racional 3,4 é o módulo de quais números racionais? −3,4 ou 3,4

24. O ponto **R** tem abscissa −4 e o ponto **S**, $-\frac{24}{6}$. Qual deles está mais próximo de zero?
Nenhum dos dois, **R** e **S** são coincidentes.

25. Compare estes números racionais e escreva-os na ordem decrescente: $\frac{9}{2} > \frac{5}{2} > 2 > -\frac{9}{4} > -\frac{7}{2} > -8{,}05 > -8{,}5$

$$\frac{5}{2}; -\frac{7}{2}; -\frac{9}{4}; \frac{9}{2}; -8{,}05; 2; -8{,}5.$$

26. Um mergulhador está a −18,074 m de altitude quando vê um submarino a −16,074 m de altitude. Qual deles está mais longe da superfície do mar? O mergulhador.

27. Lembra-se de como eliminamos os parênteses de $-\left(+\dfrac{12}{7}\right)$? Explore a eliminação de parênteses, incentivando os alunos a fazer analogias com os conceitos aprendidos com os números inteiros. Veja a atividade 27.

Basta lembrar do oposto de um número.

$-\left(+\dfrac{12}{7}\right)$ ———— $-\left(+\dfrac{12}{7}\right) = -\dfrac{12}{7}$

Oposto de $+\dfrac{12}{7}$, que é $-\dfrac{12}{7}$.

Copie, eliminando os parênteses:

a) $-\left(-\dfrac{12}{7}\right)$ $\dfrac{12}{7}$

b) $-(-4{,}9)$ 4,9

c) $-(+0{,}07)$ $-0{,}07$

d) $-(-10{,}5)$ 10,5

28. Copie e complete estas sentenças substituindo o ■ por um número racional. Respostas possíveis.

a) $-\dfrac{7}{8} >$ ■ $-\dfrac{5}{8}$ b) $\dfrac{10}{3} >$ ■ -2 c) $-3{,}403 =$ ■ $-3{,}40300$

Explore a pré-álgebra, incentivando os alunos à percepção desse tema como linguagem e generalização da aritmética. Certifique-se de que trabalham com compreensão e significado, pois isso os preparará para a definição formal de módulo, em anos posteriores.

Troquem ideias e resolvam

FAÇA NO CADERNO

Nesta atividade, a letra **x** representa um número racional e $|x|$, o valor absoluto de **x**. Em cada sentença, quais valores de **x** a tornam verdadeira?

a) $|x| = 3$ b) $|x| = \dfrac{3}{4}$ c) $|x| = 0{,}6$ d) $|x| = 0$ a) -3 ou 3; b) $-\dfrac{3}{4}$ ou $\dfrac{3}{4}$; c) $-0{,}6$ ou 0,6; d) 0

O objetivo principal desta seção é envolver os alunos em observação, comparação, análise de padrões numéricos e generalizações. Em caso de utilização de uma calculadora, alerte os alunos para o fato de que os resultados que aparecem no visor sempre são apresentados como se fossem decimais exatos, mesmo em caso de dízimas periódicas. Para mais esclarecimentos, leia comentários no **Manual do Professor**.

Investigue e explique

FAÇA NO CADERNO

0,3333333333333...

Veja os números ao lado.

Alguns números parecem "brincar" com nossa cabeça.

$$-\frac{1}{9} = -0{,}11111111111\ldots$$

Observe também esta dízima periódica:

$$-\frac{2}{9} = -0{,}222222222\ldots$$

É uma dízima periódica negativa!

FOTOGRAFIAS: THINKSTOCK/GETTY IMAGES

- Agora, calcule as três primeiras dízimas a seguir e tente descobrir pelo menos um padrão entre elas. Escreva as outras dízimas, sem efetuar divisões. Se desejar, use uma calculadora.

a) $-\dfrac{3}{9}$ $-0{,}33333\ldots$ b) $-\dfrac{4}{9}$ $-0{,}44444\ldots$ c) $-\dfrac{5}{9}$ $-0{,}55555\ldots$ d) $-\dfrac{6}{9}$ $-0{,}66666\ldots$ e) $-\dfrac{7}{9}$ $-0{,}77777\ldots$ f) $-\dfrac{8}{9}$ $-0{,}88888\ldots$

- Observe as casas decimais dos números obtidos. Que dízima periódica corresponde a $-\dfrac{9}{9}$? $-0{,}99999999\ldots$
- Como $-\dfrac{9}{9}$ é igual a -1, que igualdade pode ser escrita envolvendo -1 e $-0{,}99999\ldots$? $-1 = -0{,}99999999\ldots$
- Que dízima periódica corresponde ao número **1**? 0,9999999...

4 Operações

Se achar conveniente, inicie o estudo das operações com números racionais envolvendo os racionais absolutos ou fazendo uma revisão do assunto. Explore as operações propondo situações-problema, pois desse modo elas terão mais significado. Em relação aos sinais, incentive os alunos a fazer uma analogia com as operações realizadas com os números inteiros.

Adição e subtração

Propicie situações nas quais os alunos se envolvam paralelamente com a adição e a subtração, pois isso poderá auxiliá-los no aprendizado e na compreensão das ideias associadas a essas operações.

Para refletir e responder

As marcações nas caixas abaixo indicam a quantidade, em fração de quilograma, que falta em cada uma para completar a massa total de macarrão que cada uma deve conter.

- Que fração de quilograma está faltando ao todo? Dê sua opinião: como indicar o total de macarrão que está faltando nas duas caixas usando frações de quilograma e sinais positivo ou negativo? ______

$\frac{1}{5}$ kg; Resposta possível: $\left(-\frac{1}{5}\right)+\left(-\frac{3}{5}\right)$ kg ou $-\frac{4}{5}$ kg.

O conhecimento que você tem sobre operações com números inteiros positivos e negativos pode ser estendido para os números racionais.

Então, vamos relembrar alguns procedimentos que já conhecemos e estendê-los para o cálculo com números racionais.

Eliminação de parênteses

Exemplos:

- **Com números inteiros**

$+(+5) = +5 = 5$ $\qquad +(-5) = -5$ $\qquad -(-5) = +5 = 5$

- **Com números racionais indicados na forma fracionária:**

$$-\left(+\frac{3}{10}\right) = -\frac{3}{10} \qquad -\left(-\frac{3}{10}\right) = +\frac{3}{10} = \frac{3}{10}$$

- **Com números racionais indicados na forma decimal:**

$+(+4,8) = +4,8 = 4,8$ $\qquad +(-4,8) = -4,8$ $\qquad -(-4,8) = +4,8 = 4,8$

Cálculos de somas e diferenças

Exemplos:

- **Com números racionais indicados na forma fracionária:** inicia-se eliminando os parênteses.

$$\left(+\frac{3}{4}\right)+\left(-\frac{2}{5}\right)=\frac{3}{4}-\frac{2}{5}=\frac{5\cdot 3-4\cdot 2}{\underset{\text{m.m.c. }(4,\,5)\,=\,20}{20}}=\frac{15-8}{20}=\frac{7}{20}$$

$$\boxed{\left(+\frac{3}{4}\right)+\left(-\frac{2}{5}\right)=\frac{7}{20}}$$

- **Com números racionais indicados na forma decimal:** inicia-se eliminando os parênteses.

$(-20{,}5) - (-3{,}2) = -20{,}5 + 3{,}2 = -17{,}3$

Relação entre adição e subtração

Lembre-se: adição e subtração são operações inversas. Veja um exemplo.

Pedro pensou em um número. Esse número adicionado a $-1{,}25$ resulta em $-1{,}5$. Em que número Pedro pensou? $-0{,}25$

Observe um esquema com as informações do problema:

$$\text{número} \xrightarrow{+(-1{,}25)} -1{,}5 \qquad -1{,}5 \xrightarrow{-(-1{,}25)} \text{número}$$

número : $(-1{,}5) - (-1{,}25)$

número : $(-1{,}5) \underbrace{-(-1{,}25)}_{\text{O oposto de } -1{,}25} = -1{,}5 + 1{,}25 = -0{,}25$

Pedro pensou no número $-0{,}25$.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

29. Calcule estas somas algébricas:

a) $-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-\frac{2}{5}$ $-\frac{3}{20}$

b) $3-\frac{3}{2}-\frac{1}{4}+\frac{17}{4}$ $+\frac{11}{2}$

c) $-1{,}2+3{,}8-5{,}4-6{,}8$ $-9{,}6$

30. Qual é o valor destas somas?

a) $\left(-\frac{7}{15}\right)+\left(+\frac{1}{6}\right)$ $-\frac{3}{10}$

b) $(-0{,}78)+(+1{,}47)$ $0{,}69$

31. Calcule estas diferenças:

a) $\left(-\frac{5}{12}\right)-\left(-\frac{3}{4}\right)$ $\frac{1}{3}$

b) $(+4{,}8)-(+6{,}12)$ $-1{,}32$

c) $(-17{,}64)-(-30{,}4)$ $12{,}76$

32. A soma de dois números racionais é $-\frac{9}{5}$. Um deles é $\frac{97}{10}$. Calcule o outro número. $-\frac{23}{2}$

33. Subtraindo-se um número de 52, obtém-se $-85{,}6$. Que número é esse? $137{,}6$

34. Calcule o valor destas expressões:

a) $\left(-\frac{7}{12}\right)-\left(-\frac{1}{8}\right)-\left(-\frac{3}{8}\right)$ $-\frac{1}{12}$

b) $(-1{,}25)+(-0{,}125)-(-1{,}08)$ $-0{,}295$

35. Renato escreveu um número racional na forma decimal e adicionou a ele $\frac{67}{25}$. Para sua surpresa, o resultado foi zero. Que decimal ele escreveu? $-2{,}68$

Exercícios complementares

FAÇA NO CADERNO

36. No início do mês, o saldo bancário de Dino era de R$ 32,46. Durante o mês, ele pagou contas com dois cheques: um no valor de R$ 78,30 e outro de R$ 119,85. Também fez um depósito no valor de R$ 158,00.

a) Qual foi o valor total da movimentação na conta feita por ele durante o mês? −R$ 40,15

b) Qual é o saldo de Dino no final desse mês? −R$ 7,69

37. Calcule o valor destas somas:

a) $-\dfrac{12}{5} + 0{,}6$ $-\frac{9}{5}$ ou $-1{,}8$

b) $-0{,}4 - \dfrac{5}{2} + \dfrac{7}{3}$ $-\frac{17}{30}$ ou $-0{,}5\overline{6}$

c) $\dfrac{14}{15} - 1{,}4 - \dfrac{8}{3} + 1{,}8$ $-\frac{4}{3}$ ou $-1{,}\overline{3}$

38. Qual é o valor da diferença

$\left(-\dfrac{7}{6}\right) - (+0{,}5)$? $-\frac{5}{3}$ ou $-1{,}\overline{6}$.

39. Calcule o valor destas expressões numéricas:

a) $(-1{,}25) - \left(+\dfrac{3}{8}\right)$ $-\frac{13}{8}$ ou $-1{,}625$

b) $-(11{,}75) - \left(-\dfrac{1}{4}\right) + \left(+\dfrac{3}{5}\right)$ $-\frac{109}{10}$ ou $-10{,}9$

c) $\left(-\dfrac{3}{4}\right) + \left(-\dfrac{5}{6}\right) - \left(-\dfrac{7}{3}\right)$ $\frac{3}{4}$ ou $0{,}75$

d) $(-1{,}2) + (-0{,}654) + (+0{,}546)$ $-1{,}308$

e) $\left(-\dfrac{3}{5}\right) - (-1) + \left(+\dfrac{1}{4}\right) - \left(+\dfrac{9}{4}\right)$ $-\frac{8}{5}$ ou $-1{,}6$

40. As letras **x** e **y** representam números racionais. Sendo: $x = (-3{,}5) + \dfrac{33}{12}$ e $y = -\dfrac{33}{12}$, calcule o valor de:

a) x $-\frac{3}{4}$ ou $-0{,}75$

b) $x + y$ $-\frac{7}{2}$ ou $-3{,}5$

c) $-x + y$ -2

d) $-(-x + y)$ 2

Incentive os alunos a usar calculadora em atividades semelhantes à proposta nesta seção. O objetivo é envolvê-los em observação, comparação, análise de padrões numéricos e generalizações.

Usando a calculadora

Em muitas situações, os números conseguem nos surpreender. Veja esta:

O número $-\dfrac{8}{3}$ é igual a $-$**2,66666**..., que é uma **dízima periódica de período 6**. Essa dízima pode ser obtida dividindo-se −8 por 3. Na calculadora, digite $\boxed{-}\ \boxed{8}\ \boxed{:}\ \boxed{3}\ \boxed{=}$.

CRISTINA XAVIER/ FINEPHOTO

- Calcule agora estes produtos e anote-os. A primeira operação já está resolvida.

$-2{,}6 \times 3 = 7{,}8$ $\boxed{-}\ \boxed{2}\ \boxed{\cdot}\ \boxed{6}\ \boxed{\times}\ \boxed{3}\ \boxed{=}$

$-2{,}66 \times 3 = ■$ $-7{,}98$

$-2{,}666 \times 3 = ■$ $-7{,}998$

$-2{,}6666 \times 3 = ■$ $-7{,}9998$

$-2{,}66666 \times 3 = ■$ $-7{,}99998$

$-2{,}666666 \times 3 = ■$ $-7{,}999998$

$-2{,}6666666 \times 3 = ■$ $-7{,}9999998$

- Compare os resultados obtidos e verifique se existe algum padrão entre eles.
- Os valores ao lado não cabem no visor de uma calculadora simples. Mesmo assim, é possível encontrar o resultado pelas observações feitas? Que valores são eles? Sim. −7,99999998; −7,999999998; −7,9999999998
- Os produtos encontrados aproximam-se cada vez mais de um número inteiro. Que número é esse? −8

$-2{,}66666666 \times 3$

$-2{,}666666666 \times 3$

$-2{,}6666666666 \times 3$

Desafio

FAÇA NO CADERNO

Qual é a sequência?

No quadro ao lado, alguns números estão ocultos.
Nessa sequência numérica existe pelo menos um padrão.

2	$\frac{3}{2}$	1		0		-1			

Então, que tal descobrir um padrão nessa sequência numérica? Pista: 2 é o mesmo que $\frac{4}{2}$.

- Que padrão foi possível descobrir? Cada número, a partir do segundo, é: (número anterior) $-\frac{1}{2}$.
- Que números estão ocultos segundo o padrão descoberto? Respostas possíveis: $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$; $-\frac{3}{2}$; -2; $-\frac{5}{2}$

Multiplicação

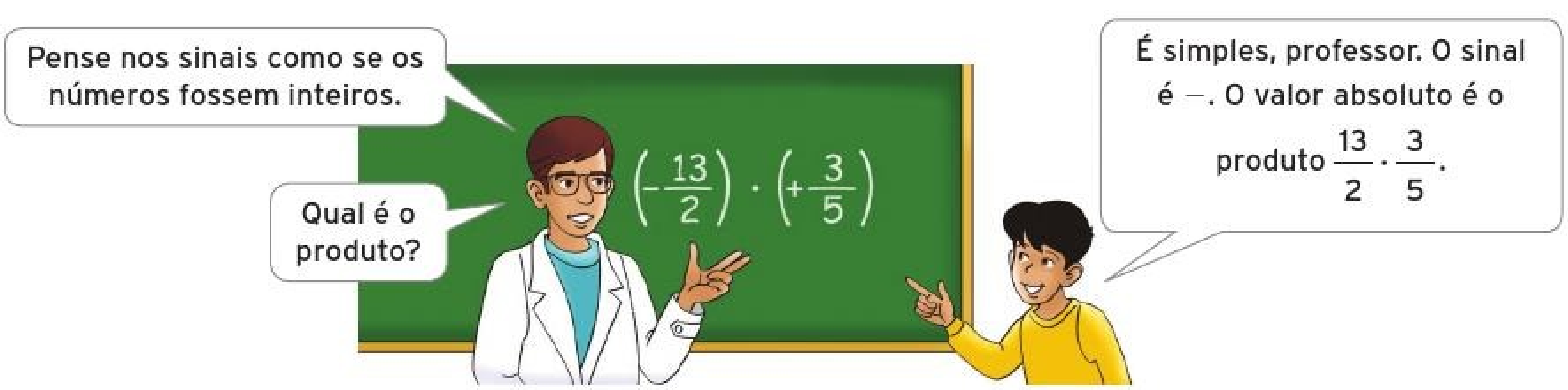
Vamos explorar situações que envolvem a multiplicação de números racionais relembrando alguns procedimentos que já conhecemos sobre cálculos desse tipo que envolvem números naturais e números racionais positivos, estendendo os resultados para cálculos com números racionais.

Decidindo o sinal do produto

Multiplicação com dois números inteiros

- Se os sinais são iguais, o produto é positivo: $(-12) \cdot (-20) = +240$
- Se os sinais são diferentes, o produto é negativo: $(+12) \cdot (-20) = -240$

Multiplicação com números racionais indicados na forma fracionária



$$\left(-\frac{13}{2}\right) \cdot \left(+\frac{3}{5}\right) = -\left(\frac{13}{2} \cdot \frac{3}{5}\right) = -\frac{13 \cdot 3}{2 \cdot 5} = -\frac{39}{10} = -3{,}9$$

$$\left(-\frac{13}{2}\right) \cdot \left(+\frac{3}{5}\right) = -\frac{39}{10} = -3{,}9$$

Os sinais são **diferentes**...
... o produto é **negativo**.

Multiplicação com números racionais na forma decimal

Em $(-2{,}8) \cdot (-0{,}43)$, os fatores têm, ao todo, **três casas decimais**; portanto, o **produto** terá também **três casas decimais**. Observe:

ILUSTRAÇÕES: HÉLIO SENATORE

$$(-2{,}8)\cdot(-0{,}43) = +(\underbrace{2{,}8\cdot 0{,}43}) =$$
$$= +(1{,}204) =$$
$$= 1{,}204$$
$$(-2{,}8)\cdot(-0{,}43) = 1{,}204$$

Cálculos:

$$\begin{array}{r}
2{,}8 \\
\times\ 0{,}43 \\
\hline
84 \\
+\ 112\ \ \\
\hline
1{,}204
\end{array}
\quad
\begin{array}{l}
\rightarrow \text{1 casa decimal} \xrightarrow{\times 10} \\
\rightarrow \text{2 casas decimais} \xrightarrow{\times 100} \\
\leftarrow \\
\leftarrow \\
\leftarrow \\
\text{3 casas decimais} \quad \div 1000
\end{array}
\quad
\begin{array}{r}
28 \\
\times\ 43 \\
\hline
84 \\
+\ 112\ \ \\
\hline
1204
\end{array}$$

Inverso multiplicativo

Certifique-se de que os alunos compreendem o conceito de inverso de um número racional. Ele poderá ser utilizado na divisão, em várias situações-problema e na resolução de equações.

Um número racional, diferente de zero, tem sempre um **inverso multiplicativo** que é outro número racional. O produto de um número racional pelo seu inverso multiplicativo é sempre igual a 1.

Exemplo:

$$\left(-\frac{4}{7}\right)\cdot\left(-\frac{7}{4}\right) = +\frac{\cancel{4}^1\cdot\cancel{7}^1}{\cancel{7}^1\cdot\cancel{4}^1} = \frac{1\cdot 1}{1\cdot 1} = 1$$

O produto é 1!!!

$-\frac{7}{4}$ é o **inverso multiplicativo**, ou apenas **inverso**, de $-\frac{4}{7}$.

$-\frac{4}{7}$ é o **inverso multiplicativo**, ou apenas **inverso**, de $-\frac{7}{4}$.

$-\frac{7}{4}$ e $-\frac{4}{7}$ são **números inversos**.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

41. Em uma expressão como a deste quadro, quantas casas decimais terá o produto? Cinco casas decimais.

$(-3{,}04)\cdot(-0{,}6)\cdot(+12{,}37)$

42. Qual é o inverso multiplicativo de $-\frac{3}{7}$? $-\frac{7}{3}$

43. Calcule os produtos a seguir.

a) $\left(+\frac{7}{60}\right)\cdot\left(-\frac{10}{21}\right)$ $-\frac{1}{18}$

b) $(+0{,}5)\cdot(-10{,}15)\cdot(-2{,}4)$ 12,18

44. Calcule o dobro destes números:

a) $-\frac{13}{80}$ $-\frac{13}{40}$ ou $-0{,}325$

b) 10,07 20,14

c) $-34{,}09$ $-68{,}18$

45. Qual é o valor da soma do quádruplo de $-\frac{19}{16}$ com o dobro de $-4{,}905$? $-14{,}56$ ou $-\frac{364}{25}$

46. Qual é o inverso multiplicativo de cada número?

$\frac{5}{9}$ $\frac{9}{5}$ $-\frac{8}{3}$ $-\frac{3}{8}$ $2{,}4$ $\frac{5}{12}$ $-0{,}8$ $-1{,}25$

47. "O som dos meus sonhos!!!", foi o que ocorreu a Carlos ao ler o anúncio que caiu em suas mãos. Ele não teve dúvidas: foi à loja e realizou o sonho. Ele se comprometeu a pagar em 9 parcelas, como anunciado.

a) Quanto vai custar o aparelho de som que Carlos comprou? R$ 1 234,26


STOCKXPERT/IMAGE PLUS

Aparelho de som
9 × de **137,14**

b) Carlos já pagou 3 parcelas e, portanto, ainda está devendo à loja. De quanto é a sua dívida? R$ 822,84.

Divisão

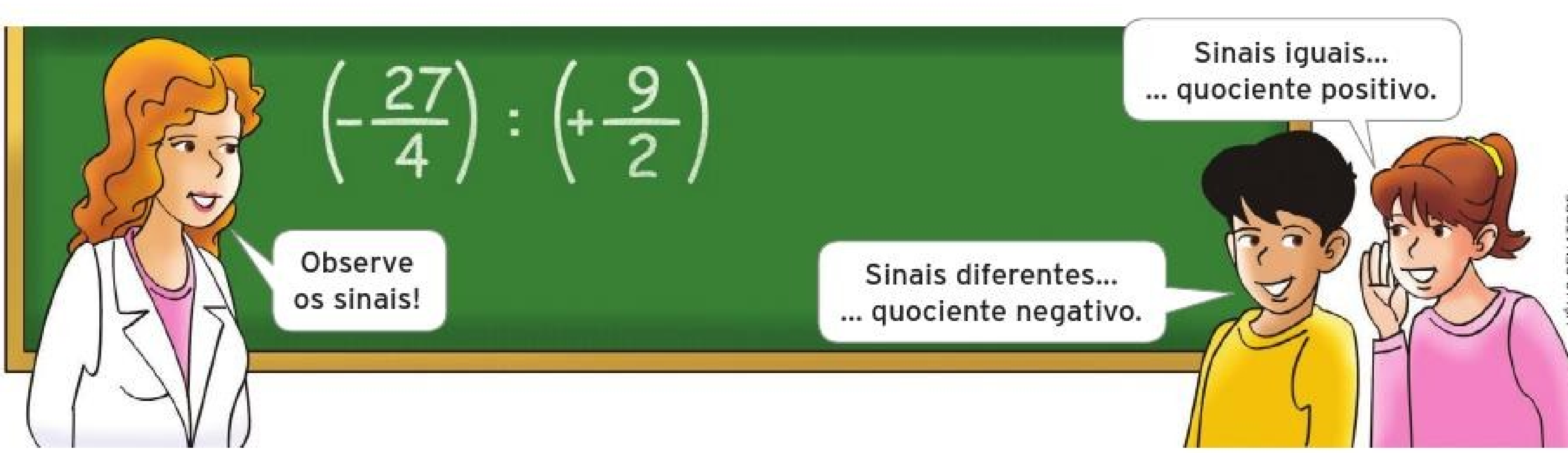
Vamos também estender para a divisão de números racionais os procedimentos que já conhecemos sobre cálculos desse tipo que envolvem números naturais e números racionais positivos.

Decidindo o sinal do quociente

Divisão com números inteiros

- Se os sinais são iguais, o quociente é positivo —— $(-36) : (-9) = +4 = 4$
- Se os sinais são diferentes, o quociente é negativo —— $(+36) : (-9) = -4$

Divisão com números racionais indicados na forma fracionária



HÉLIO SENATORE

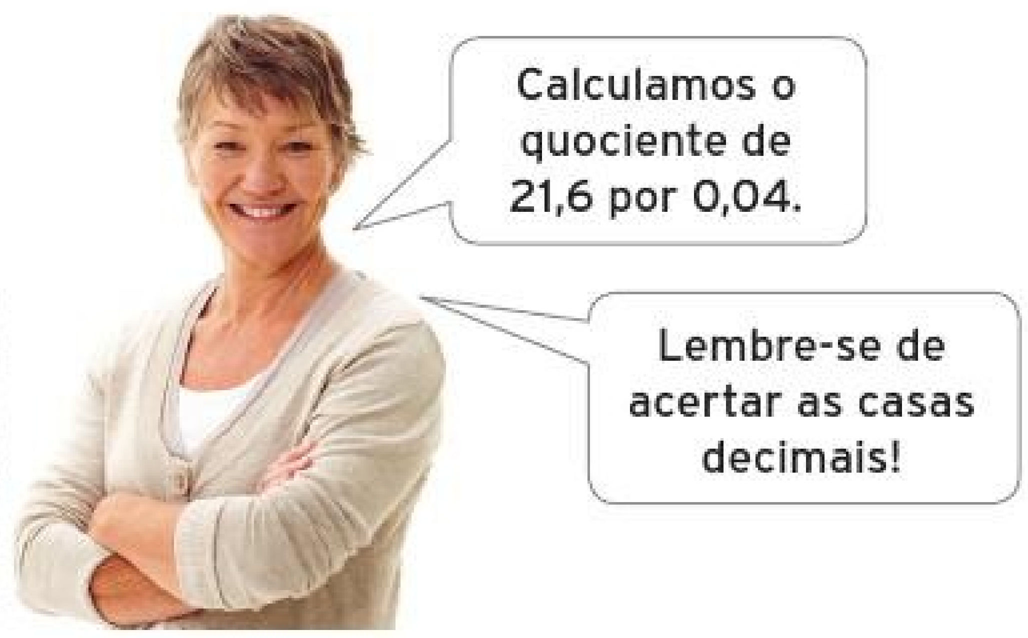
O módulo do quociente é o resultado de $\frac{27}{4} : \frac{9}{2}$. Calculamos esse quociente multiplicando $\frac{27}{4}$ pelo inverso multiplicativo de $\frac{9}{2}$.

$$\left(-\frac{27}{2}\right) : \left(+\frac{9}{2}\right) = -\left(\frac{27}{4} : \frac{9}{2}\right) = -\left(\frac{\cancel{27}^{\,3}}{\cancel{4}_{\,2}} \cdot \frac{\cancel{2}^{\,1}}{\cancel{9}_{\,1}}\right) = -\frac{3 \cdot 1}{2 \cdot 1} = -\frac{3}{2} = -1{,}5$$

$$\left(-\frac{27}{4}\right) : \left(+\frac{9}{2}\right) = -\frac{3}{2} = -1{,}5$$

Divisão com números racionais indicados na forma decimal

Qual é o resultado de $(+21,6) : (-0,04)$?



THINKSTOCK/GETTY IMAGES

$(+21,6) : (-0,04) = -(21,6 : 0,04)$

$$21,6 \;|\; 0,04 \quad \longrightarrow \quad 2160 \;|\; 004$$

$$\begin{array}{r|l} 2160 & 004 \\ \hline 16 & 540 \\ 00 & \end{array}$$

$(+21,6) : (-0,04) = -540$

Certifique-se de que os alunos compreendem que é possível dividir e encontrar quocientes maiores que o dividendo. Por outro lado, também é possível multiplicar e encontrar produtos menores que os fatores. Veja a atividade 50 e a seção **Investigue e explique**.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

48. Dividindo $-\frac{42}{11}$ por $-\frac{60}{22}$, que resultado se obtém? $\frac{7}{5}$

49. Determine os quocientes.

a) $\left(+\frac{32}{5}\right) : (-40)$ $-\frac{4}{25}$

b) $\left(-\frac{24}{75}\right) : \left(+\frac{56}{15}\right)$ $-\frac{3}{35}$

c) $\left(-\frac{13}{12}\right) : (-2,6)$ $\frac{5}{12}$

d) $\left(+\frac{75}{8}\right) : (-25)$ $-\frac{3}{8}$

e) $(+24) : \left(-\frac{32}{25}\right)$ $-\frac{75}{4}$

f) $(+1,69) : (-0,65)$ $-2,6$

50. Qual é o número que, multiplicado por 0,05, resulta em -35? -700

51. Qual é o número que, dividido por $\frac{2}{3}$, é igual a $-\frac{4}{5}$? $-\frac{8}{15}$

Investigue e explique

FAÇA NO CADERNO

Você já sabe que a multiplicação e a divisão estão relacionadas entre si. Nesta atividade, você vai encontrar quocientes calculando produtos.

- Reflita sobre a situação a seguir e encontre uma explicação.

Resposta possível: como 0,5 é igual a $\frac{1}{2}$ e $1\,856 : \frac{1}{2}$ é igual a $1\,856 \times 2$, $1\,856 : 0,5$ dá o mesmo resultado que $1\,856 \times 2$.

$1\,856 : 0,5 = ?$

Multiplicando 1 856 por 2, teremos o quociente!

VAGNER DE FARIA

Pista: 0,5 é o mesmo que $\frac{1}{2}$.

- Efetue os cálculos apresentados a seguir e encontre um padrão.

a) $84 : 0,2$ 420
$84 \cdot 5$ 420

b) $320 : 0,2$ 1 600
$320 \cdot 5$ 1 600

c) $1\,000 : 0,2$ 5 000
$1\,000 \cdot 5$ 5 000

Resposta possível: dividir um número por 0,2 dá o mesmo resultado que multiplicar esse número por 5.

- O valor de $(-15,09) : (0,25)$ pode ser encontrado multiplicando $-15,09$ por um dos números abaixo. Qual deles? Explique por quê.

2 | 4 | 5 | 10

Resposta possível: por 4 porque 0,25 é igual a $\frac{1}{4}$; dessa forma, $(-15,09) : (0,25)$ será igual a $(-15,09) : \frac{1}{4}$, ou seja, será igual a $(-15,09) \cdot 4$.

Exercícios complementares

FAÇA NO CADERNO

52. Calcule:

a) $(-36):(-70)$ $\frac{18}{35}$

b) $\left(-\frac{48}{25}\right):\left(+\frac{16}{50}\right)$ -6

c) $0:\left(-\frac{35}{13}\right)$ 0

d) $\left(-\frac{15}{37}\right):0$ Não existe.

e) $0:\left(-\frac{9}{35}\right)$ 0

f) $\left(+\frac{100}{13}\right):\left(-\frac{25}{26}\right)$ -8

53. Represente estas expressões usando as operações e calcule:

a) o produto de $-1{,}8$ por $-\frac{15}{72}$; $\frac{3}{8}$

b) o quociente de $\frac{42}{64}$ por $-\frac{49}{24}$; $-\frac{9}{28}$

c) o quociente de $-0{,}05$ por $\frac{35}{40}$; $-\frac{2}{35}$

d) o quociente de $-\frac{50}{13}$ pelo inverso multiplicativo de $-0{,}39$. $1{,}5$

54. Esta cartela oculta um número. Multiplicando esse número por 3,04 e adicionando 9,97 ao resultado, obtemos $-15{,}87$. Que número está na cartela? $-8{,}5$

?

55. A expressão $\dfrac{-\frac{4}{9}}{-\frac{20}{3}}$ é igual a $\left(-\frac{4}{9}\right):\left(-\frac{20}{3}\right)$.

Qual é o valor de $\dfrac{-\frac{4}{9}}{-\frac{20}{3}}$? $\frac{1}{15}$

56. Qual é o valor da expressão deste quadro?

$$\frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+1}}}$$

$\frac{3}{5}$ ou 0,6

Desafio

FAÇA NO CADERNO

Verdadeiro ou falso?

A igualdade ao lado expressa uma sentença matemática. Nela a letra **m** representa um número racional. Note que ela não é verdadeira para qualquer valor atribuído a **m**.

$$\frac{2\cdot m+25}{13}=1$$

Vamos verificar se a expressão é verdadeira para $m=-\frac{1}{4}$.

$$\frac{2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)+25}{13}=\frac{-\frac{1}{2}+\frac{50}{2}}{13}=\frac{-\frac{49}{2}}{\frac{13}{1}}=-\frac{49}{2}\cdot\left(\frac{1}{13}\right)=-\frac{49}{26}$$

Falso.

- Ela é verdadeira para $m=0$? Para que valor de **m** ela é verdadeira? Não. $m=-6$.

Pista: frações em que o numerador é igual ao denominador são iguais a 1.

Troquem ideias e resolvam

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega e resolvam.

Usando um programa de computador, Ana desenhou um pequeno retângulo.

Ao acionar uma vez certo comando, ela consegue dobrar a área do retângulo que está na tela do computador. Acionando esse comando 10 vezes, o retângulo ficou com 200 cm² de área.

- Quantas vezes Ana acionou o comando para que o retângulo tivesse 100 cm² de área? 9 vezes.

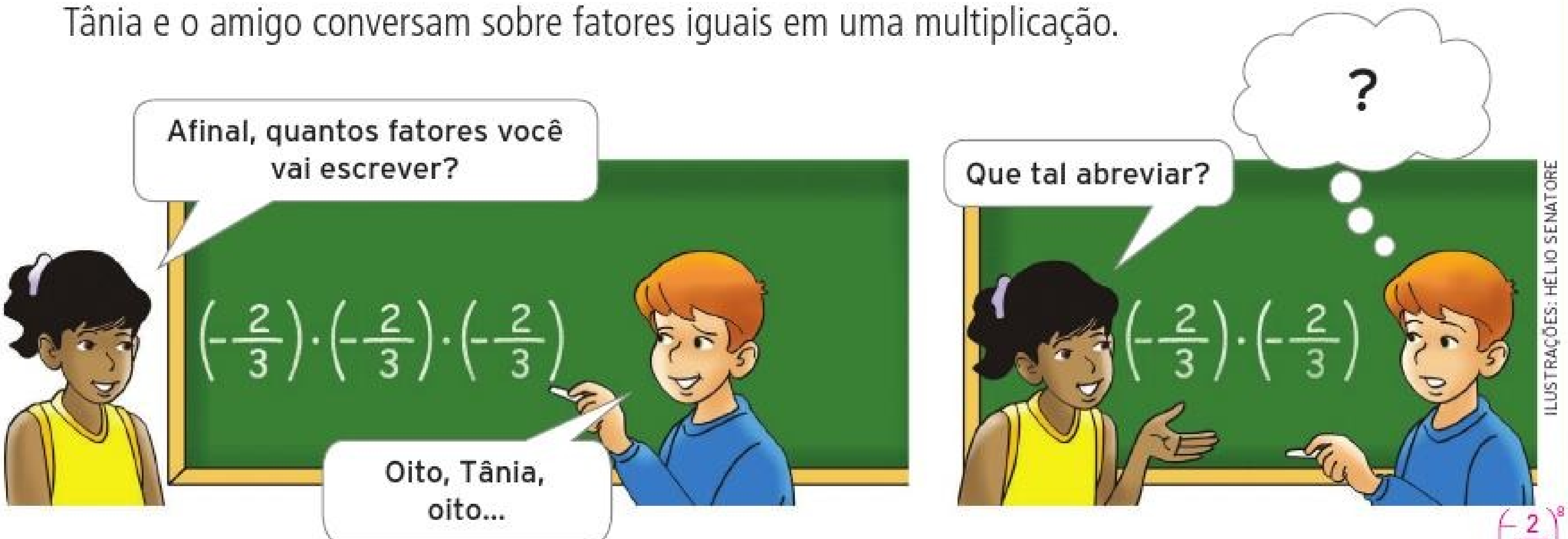
5 Números racionais e potências

Certifique-se de que os alunos compreendem a importância do tema. As potências têm aplicação em várias áreas, pois facilitam a escrita e os cálculos com números muito grandes ou muito pequenos.

Potência: expoentes inteiros positivos

Para refletir e responder

Tânia e o amigo conversam sobre fatores iguais em uma multiplicação.



$\left(-\frac{2}{3}\right)^8$

- Dê sua opinião: como seria uma forma abreviada para a expressão que a garota está escrevendo?
- Quais das expressões abaixo correspondem ao produto que ele está escrevendo? b, c

a) $-\left(-\frac{2}{3}\right)^8$ b) $\frac{(-2)^8}{(-3)^8}$ c) $\left(-\frac{2}{3}\right)^8$ d) $-\frac{2^8}{3^8}$

Se você se lembrou do que já aprendeu sobre potências de outros tipos de números, como, por exemplo, de números racionais positivos, deve ter identificado os itens **b** e **c** como sendo uma forma abreviada correta de indicar o produto que a garota estava escrevendo.

Note que, no item **c**, a base é um número racional e o expoente é um número inteiro positivo. Como calcular uma potência como essa?

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^8=\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=$$

$$=+\frac{2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2}{3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3}=+\frac{2^8}{3^8}=\mathbf{\frac{256}{6561}}$$

$\left(-\frac{2}{3}\right)^8=+\frac{2^8}{3^8}$ ou $\left(-\frac{2}{3}\right)^8=\frac{256}{6561}$

Na expressão acima, observe que a base é um número racional negativo, o expoente é um número par e a potência é um número racional positivo.

Para você lembrar:

Se a base é um número racional positivo, a potência é um número positivo.

Se a base é um número racional negativo, o sinal da potência depende do expoente. Com expoente par, é positivo, e com expoente ímpar, é negativo.

Vamos combinar:
√ Quando o expoente é 1, a potência é sempre igual à base.
√ Quando a base é diferente de zero e o expoente é 0, a potência é sempre igual a 1.

Utilizamos o termo "combinar" com o significado de "convencionar", por considerarmos este último muito complexo para alunos deste nível.

Algumas potências de bases racionais:

$\left(+\frac{2}{5}\right)^2 = +\left(+\frac{4}{25}\right) = \frac{4}{25}$ $\quad \left(-\frac{1}{3}\right)^3 = -\frac{1}{27}$ $\quad (+5{,}16)^0 = 1$

$\left(-\frac{1}{3}\right)^2 = +\frac{1}{9} = \frac{1}{9}$ $\quad (0{,}8)^1 = -0{,}8$ $\quad \left(-\frac{12}{707}\right)^0 = 1$

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

57. Identifique a base, o expoente e a potência na igualdade $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8}$. $-\frac{1}{2}$; 3; $-\frac{1}{8}$

58. Apresente duas potências: uma positiva e outra negativa de base $-\frac{9}{13}$. Respostas possíveis: $\left(-\frac{9}{13}\right)^{10}$; $\left(-\frac{9}{13}\right)^{27}$

59. Qual é o valor de $(-32{,}18)^0$? 1

60. Elevando $-0{,}54$ a um determinado expoente, obteve-se o resultado 1. Que expoente foi esse? 0

61. Calcule estas potências:

a) $\left(-\frac{7}{5}\right)^3$ $-\frac{343}{125}$

b) $\left(-\frac{3}{2}\right)^5$ $-\frac{243}{32}$

c) $(-0{,}9)^3$ $-0{,}729$

d) $\left(+\frac{10}{9}\right)^5$ $\frac{100\,000}{59\,049}$

e) $(+0{,}1)^4$ 0,0001

f) $(-0{,}15)^2$ 0,0225

62. Anote o valor de cada expressão:

a) $(-10 + 3{,}409)^0$ 1

b) $\left(\frac{8}{3} - 2\right)^1$ $\frac{2}{3}$

63. Calcule o valor destas expressões numéricas:

a) $\left(-8 + \frac{13}{2}\right)^3 - \frac{1}{12} : \left(-\frac{2}{3}\right)^2$ $-\frac{57}{16}$

b) $-10 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right)^3$ $-\frac{59}{40}$

64. Neste exercício, as letras **a**, **z** e **y** representam números racionais.

$$a = \frac{25}{8} - \frac{13}{4}$$

a) Qual é o valor de a^3? $-\frac{1}{512}$

b) Se $a \cdot y = 1$, então qual é o valor de **y**? -8

c) Se $z + a = 0$, então qual é o valor de **z**? $\frac{1}{8}$

65. Neste exercício, as letras **x** e **y** representam números racionais diferentes de zero.

Se $x = -\frac{2}{5}$ e $x^3 \cdot y = 1$, qual é o valor de y^5? $-\frac{125}{8}$

Usando a calculadora

FAÇA NO CADERNO

Vamos usar a tecla [+/−] no cálculo de potências?

Já sabemos que com a sequência [2] [+/−] digitamos −2 na calculadora.

- Então, comece digitando estas sequências e anote os resultados:

[2] [+/−] [x] [=] 4

[2] [+/−] [x] [=] [=] −8

[2] [+/−] [x] [=] [=] [=] 16

Escreva os valores obtidos usando potências. $(-2)^2$; $(-2)^3$; $(-2)^4$

- Comparando os resultados obtidos e sem fazer cálculos, escreva uma potência para:

[2] [+/−] [x] [=] [=] [=] [=] [=] [=] [=] [=] $(-2)^9$

- Calcule $(-2{,}3)^5$ usando a calculadora. −64,36343

Investigue e explique

FAÇA NO CADERNO

Já reparou que todo o conhecimento acumulado sobre potências continua valendo para os números racionais?

Veja os cálculos em um produto de potências de bases iguais:

$$\left(-\frac{9}{5}\right)^2 \cdot \left(-\frac{9}{5}\right) = \left(-\frac{9}{5}\right) \cdot \left(-\frac{9}{5}\right) \cdot \left(-\frac{9}{5}\right) = \left(-\frac{9}{5}\right)^{2+1}$$

$$\left(-\frac{9}{5}\right)^2 \cdot \left(-\frac{9}{5}\right) = \left(-\frac{9}{5}\right)^{2+1} = \left(-\frac{9}{5}\right)^3$$

- Descreva como indicar o produto abaixo na forma de potência.

$$\left(-\frac{4}{5}\right)^3 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right)^2 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right)^{10} = \left(-\frac{4}{5}\right)^{15}$$

Resposta possível: O resultado é uma potência de base $-\frac{4}{5}$ e expoente igual a 3 + 2 + 10.

- Observe o quadro abaixo: as igualdades apresentadas obedecem a um padrão. Encontre-o e, depois, indique os quocientes seguintes na forma de potência.

$$\left(+\frac{3}{2}\right)^8 : \left(+\frac{3}{2}\right)^4 = \left(+\frac{3}{2}\right)^4$$

$$\left(-\frac{8}{10}\right)^{10} : \left(-\frac{8}{10}\right)^2 = \left(-\frac{8}{10}\right)^8$$

$$(-0{,}45)^9 : (-0{,}45)^5 = (-0{,}45)^4$$

a) $\left(+\frac{5}{7}\right)^{12} : \left(+\frac{5}{7}\right)^4$ $\left(+\frac{5}{7}\right)^{12-4} = \left(+\frac{5}{7}\right)^8$

b) $\left(-\frac{9}{10}\right)^8 : \left(-\frac{9}{10}\right)^2$ $\left(-\frac{9}{10}\right)^{8-2} = \left(-\frac{9}{10}\right)^6$

Potências e expoentes negativos

Certifique-se de que os alunos compreendem a importância desse tema. As potências com expoente negativo têm aplicação em várias áreas, pois facilitam a escrita e o cálculo com números "muito pequenos".

Pode parecer estranho, mas existem números racionais com expoentes negativos. Eles são muito utilizados nas áreas de Ciências, Biologia, Física e em pesquisas específicas de outras áreas.

O valor de 2^{-1} pode, por exemplo, ser encontrado observando um padrão presente na sequência numérica seguinte.

2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	2^{-1}
16	8	4	2	1	?

Cada termo dessa sequência, a partir do segundo, é o anterior dividido por **2**. Então, o termo seguinte ao 1 deverá ser **1 : 2**, ou seja, $\mathbf{\frac{1}{2}}$, e podemos escrever:

$$2^{-1} = \frac{1}{2},$$

2^{-1} é o inverso de 2.

ou seja, $2^{-1} \cdot 2 = 2^{-1} \cdot 2^1 = 2^{-1+1} = 2^0 = 1$

Podemos continuar dividindo por 2 os termos da sequência numérica anterior e obtemos o resultado de $\mathbf{2^{-2}}$. Observe:

2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	2^{-1}	2^{-2}
16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$\frac{1}{2^2}$

:2 :2 :2

$$2^{-2} = \frac{1}{4} \quad \text{ou} \quad 2^{-2} = \frac{1}{2^2} \quad \text{ou} \quad 2^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Observe também que $\mathbf{2^{-2}}$ e $\mathbf{2^2}$ são números inversos.

$$2^{-2} \cdot 2^2 = 2^{-2+2} = 2^0 = 1$$

2^{-2} é o inverso de 2^2, ou seja, de 4.

Se **a** representa um número racional diferente de zero, então $a^{-1} = \frac{1}{a}$ e $\mathbf{a^{-1}}$ é o **inverso** de **a**.

Outros exemplos:

- $\left(+\frac{3}{8}\right)^{-1} = +\frac{1}{\frac{3}{8}} = \underbrace{\frac{8}{3}}_{\text{inverso de } \frac{3}{8}}$
- $(+0{,}6)^{-3} = \left(+\frac{6}{10}\right)^{-3} = \left(+\frac{\cancel{10}^{\,5}}{\cancel{6}_{\,3}}\right)^3 = \left(+\frac{5}{3}\right)^3 = \frac{125}{27}$

Assim, esta é a generalização da definição anterior:

Se **a** representa um número racional diferente de zero, e **n**, um número natural, $\mathbf{a^{-n}}$ e $\mathbf{a^{n}}$ são números inversos.

$$\mathbf{a^{-n} \cdot a^{n} = a^{-n+n} = a^{0} = 1}$$

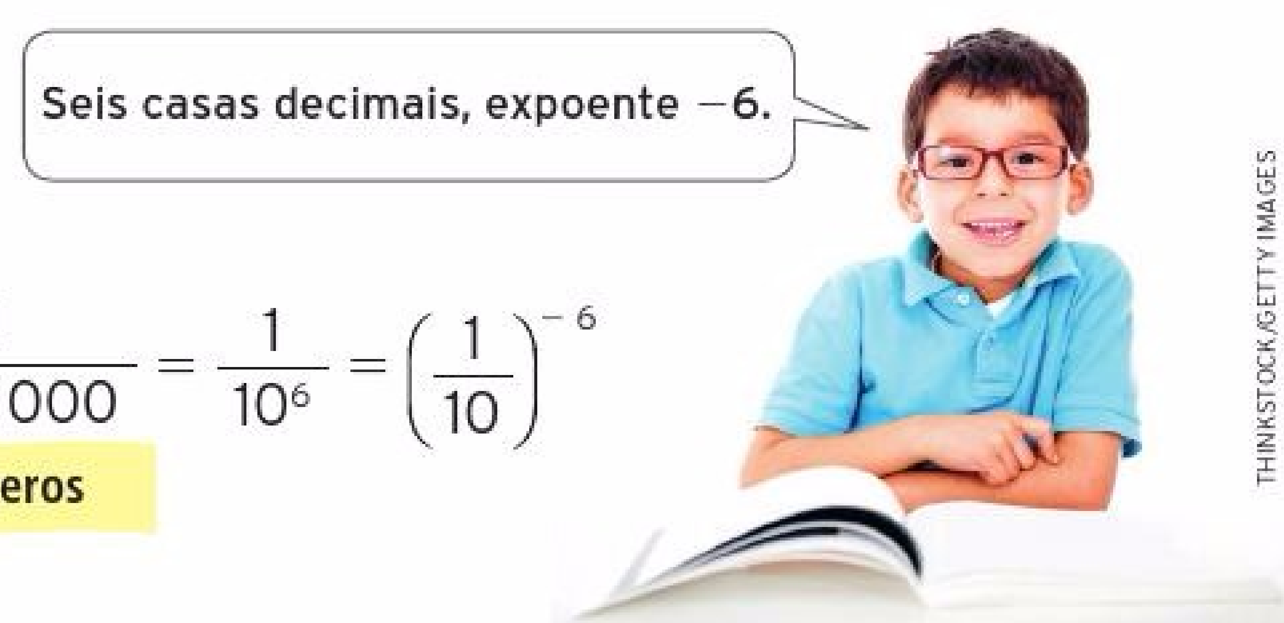
$$\mathbf{a^{-n} = \frac{1}{a^{n}}} \quad \text{ou} \quad \mathbf{a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^{n}}$$

Usos da potência de expoente negativo

A escrita de um número racional na forma decimal pode ser simplificada com o uso de **potências de base 10** com **expoentes negativos**. Essa simplificação facilita também os cálculos que fazemos nas situações em que elas estão envolvidas.

Exemplo:

O número apresentado no quadro abaixo costuma ter sua escrita abreviada por meio de expoentes negativos com base 10. Veja:



THINKSTOCK/GETTY IMAGES

$$\underbrace{0{,}000001}_{\text{seis casas decimais...}} = \frac{1}{\underbrace{1000\,000}_{\text{...seis zeros}}} = \frac{1}{10^{6}} = \left(\frac{1}{10}\right)^{-6}$$

Outros exemplos:

- $0{,}000000001 = 10^{-9}$
- $0{,}00008 = \dfrac{8}{100\,000} = \dfrac{8}{10^{5}} = 8 \cdot \dfrac{1}{10^{5}}$ —— $0{,}00008 = 8 \cdot 10^{-5}$

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

66. Calcule o valor de:

a) $\left(-\dfrac{41}{19}\right)^{-1}$ $-\dfrac{19}{41}$ b) $(-4)^{-5}$ $-\dfrac{1}{1024}$ c) $(0{,}05)^{-2}$ 400 d) $\left(-\dfrac{1}{10}\right)^{-5}$ $-100\,000$

67. Como $27 = 3^{3}$, usando expoentes inteiros negativos, podemos escrever 3^{-3} para representar $\dfrac{1}{27}$. Procedendo da mesma forma, como podemos escrever $\dfrac{1}{16}$? 2^{-4}

68. Copie estas sentenças, substituindo o ■, de modo a torná-las verdadeiras:

a) $\left(-\dfrac{9}{4}\right)^{-1}$ é o inverso de ■. $-\dfrac{9}{4}$ b) $(25)^{-1}$ é o inverso de ■. 25 c) $\left(-\dfrac{4}{25}\right)^{3}$ é o inverso de ■. $\left(-\dfrac{4}{25}\right)^{-3}$

69. Escreva estes números, usando potências de 10:

a) 0,00003 $3 \cdot 10^{-5}$ c) 0,00000092 $92 \cdot 10^{-8}$ e) −0,00016 $-16 \cdot 10^{-5}$

b) 0,0000005 $5 \cdot 10^{-7}$ d) −0,0006 $-6 \cdot 10^{-4}$ f) −0,000418 $-418 \cdot 10^{-6}$

70. Determine o valor da expressão: $(-0{,}002)^{-3}$. $-125 \cdot 10^{6}$ ou $(-5)^{3} \cdot 10^{6}$

Troquem ideias e resolvam

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega, reflitam sobre o problema e encontrem uma solução.

Aline resolveu economizar algum dinheiro.

FOTOGRAFIAS: THINKSTOCK/GETTY IMAGES

No quinto dia, no entanto, ela percebeu que não iria conseguir chegar ao décimo. Então, mudou de ideia e começou com duas moedas de R$ 0,10.

- Que quantia Aline conseguiu economizar em 10 dias, guardando as moedas de R$ 0,10?
  20 460 centavos de real ou R$ 204,60.

Desafio

FAÇA NO CADERNO

Particularidades das potências de dez

Construa em seu caderno uma tabela como esta e complete-a. Em seguida, descubra um padrão entre os números que aparecem e responda à questão abaixo.

Potência de 10	Valor	Quantidade de casas decimais
10^{-2}	0,01	2
10^{-3}	0,001	3
10^{-4}	0,0001	4
10^{-5}	0,00001	5
10^{-6}	0,000001	6

- Copie em seu caderno esta frase e complete-a:
  A potência de base 10 em que o expoente é um número inteiro negativo é um decimal com tantos zeros ■. ... quanto o valor absoluto do expoente.

6 Estatística e probabilidade

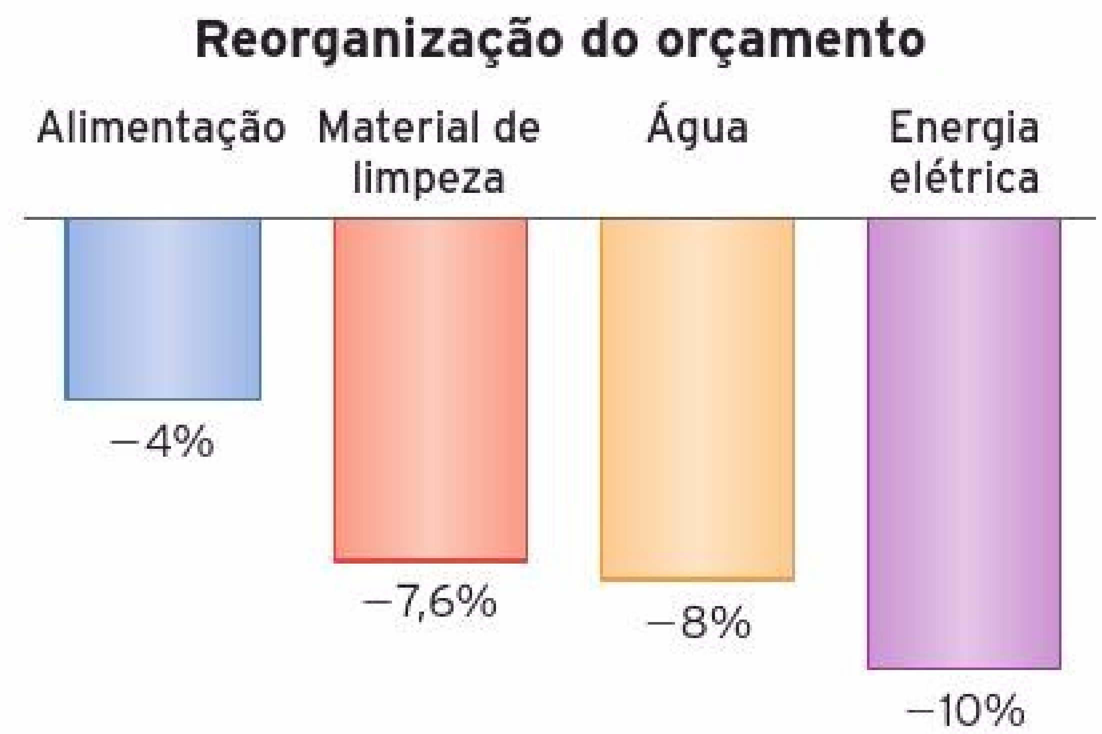
Dada a importância da Estatística atualmente, incentive o interesse dos alunos pelo tema, orientando-os a pesquisar em revistas e jornais assuntos de interesse deles. É possível também integrar a Estatística a outras disciplinas e aos temas transversais.

Os números racionais negativos e os gráficos

Já conhecemos um pouco sobre gráficos que representam resultados de pesquisas. Vamos aprender a representar dados coletados, quando eles são números racionais negativos.

Exemplo:

Uma rede de hotéis reorganizou seu orçamento, realizando alguns cortes em seus gastos. O gráfico ao lado mostra a situação dos itens afetados, dois meses depois dos cortes.



Na leitura desse gráfico, observamos que, no item material de limpeza, o registro −7,6% significa que houve um corte de 7,6% no gasto com esse tipo de material.

Vamos supor que o gasto com o material de limpeza era de R$ 12 000,00 antes de serem efetuados os cortes. Vamos calcular a quantia que a rede de hotéis economizou nesse item:

$-7{,}6\%$ de $12\,000 = -7{,}6\% \cdot 12\,000 = -0{,}076 \cdot 12\,000 = -912$

−912 significa corte de R$ 912,00 nos gastos, ou seja, houve uma economia de R$ 912,00 com material de limpeza.

Média aritmética

É comum ouvir frases como estas em nosso dia a dia:

– Em Português, estou com notas acima da **média**.
– A velocidade **média** de certo piloto na Fórmula 1 é de 280 km/h.
– Garçom, por favor, traga uma **média** e pão com manteiga.

Como se pode ver, a palavra **média** pode ter vários significados. Um deles é utilizado quando trabalhamos com valores numéricos.

Exemplo:

Esta tabela mostra o número de gols marcados pelo jogador Pinguim nos dez primeiros jogos de um campeonato.

Pinguim goleador

Jogo	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º
Número de gols	2	3	2	0	2	1	2	2	4	2

Em situações como essa, dizemos que Pinguim fez, **em média**, 2 gols por partida nesses dez jogos.

O valor **2** é denominado **média aritmética** dos valores 2, 3, 2, 0, 2, 1, 2, 2, 4, 2 e é calculado adicionando-se todos os valores (número de gols) e dividindo a soma obtida pelo número total de jogos.

$$\text{Média aritmética} = \frac{2+3+2+0+2+1+2+2+4+2}{10} = \frac{20}{10} = 2$$

Essa média significa que, se Pinguim pudesse marcar o mesmo número de gols por partida, ele marcaria 2 gols em cada uma.

A **média aritmética** de **n** valores é o quociente que obtemos dividindo a soma desses valores por **n**.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

71. Observe o gráfico dado no texto da página 138.
Veja resposta no final do livro.

a) Construa um gráfico de barras com esses dados.

b) O que significa o registro −4% em alimentação? Um corte de 4% no gasto com alimentação.

c) Encontre a média aritmética dos porcentuais que aparecem no gráfico. −7,4%

72. Laura tem 12 anos e faz parte do time titular feminino de basquete da escola. As outras titulares desse time têm 11, 13 e duas têm 10 anos. Qual é a idade média das titulares desse time de basquete? 11,2 anos.

73. Os registros no quadro abaixo mostram as despesas que a equipe de Pedro teve ao fazer um trabalho durante o primeiro semestre para uma escola. De quanto foi a despesa média por mês nesse período? R$ 41,40

Mês	Março	Abril	Maio	Junho
Despesa R$	49,00	32,80	25,50	58,30

Troquem ideias e resolvam

FAÇA NO CADERNO

O sr. Antônio tem uma padaria há mais de 1 ano. Para controlar gastos e receitas, ele anota diariamente os valores que recebe com a venda de pães e outros produtos, bem como os gastos. Observem o que o gerente disse ao entregar as anotações sobre a venda diária de pães:

Dia da semana	Venda do dia (R$)
Segunda-feira	1 200,00
Terça-feira	860,00
Quarta-feira	
Quinta-feira	640,00
Sexta-feira	730,00

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

- Qual foi o faturamento com a venda de pães na quarta-feira? R$ 1 070,00

Leitura

Tão rápido que 1 segundo é tempo demais!

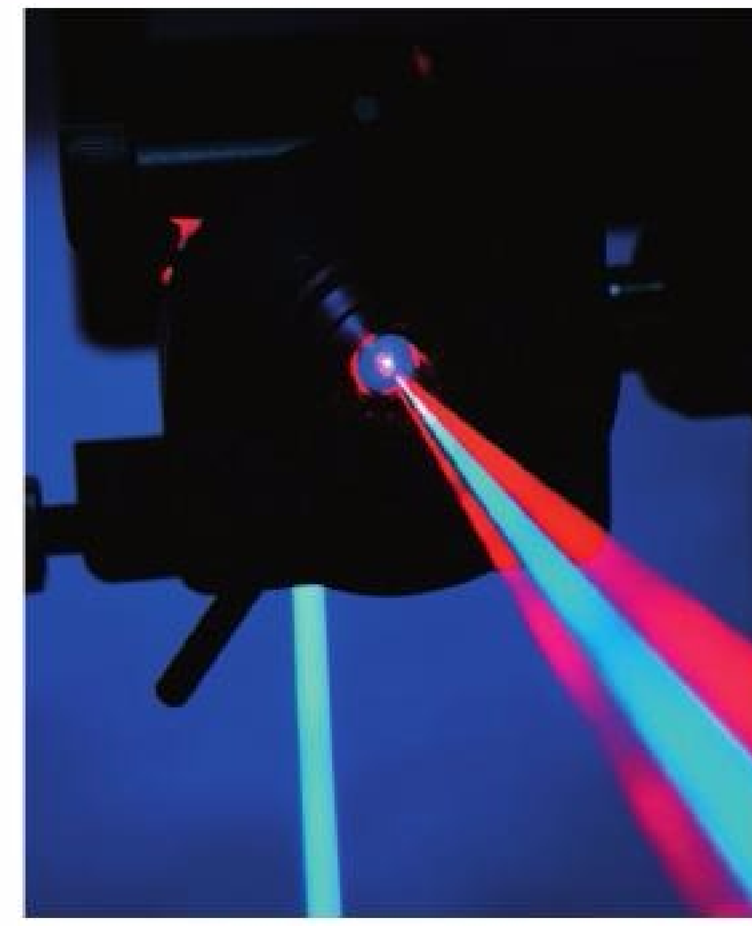
As pesquisas em vários campos avançaram tanto, os intervalos de tempo se tornaram tão pequenos, mas tão pequenos, que unidades, como o segundo, ficaram inadequadas para medi-los. Os cientistas criaram, então, o **femtossegundo**.

1 quatrilhão de vezes **1 femtossegundo** é igual a **1 segundo**.

$10^{15} \cdot 1$ femtossegundo $= 1$ segundo

1 femtossegundo $= 10^{-15}$ segundo

O mais breve disparo de raio *laser* que se consegue produzir em laboratório dura **10 femtossegundos**.


VOLKER STEGER/SPL/LATINSTOCK

Disparo de *laser*.

Revisão cumulativa e testes

1. Calcule:

a) $(-990) : (+11)$ -90

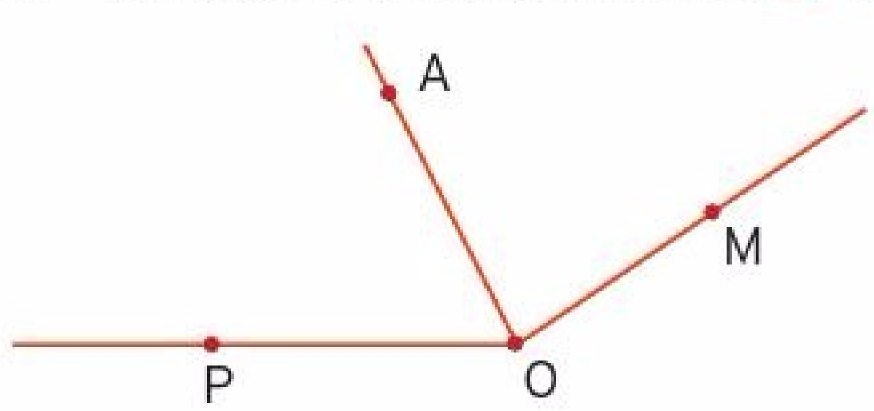
b) $(-10\,000) : (-500)$ 20

c) $(+480) : (-36)$ $-\frac{40}{3}$

d) $(-1\,200) : (+800)$ $-\frac{3}{2}$

2. Se $x = -9 : (-3)^3 - 24 : (-18 + 14)^2$, qual é o valor de $x^3 : \left(-\frac{14}{36}\right)$? $\frac{49}{12}$ ou $4\frac{1}{12}$.

3. Na figura, med $M\hat{O}P = 146° \, 38'$ e med $A\hat{O}P = 63° \, 49'$. Qual é a medida de $M\hat{O}A$? $82° \, 49'$



4. Calcule o valor destas expressões:

a) $\left(+\frac{9}{82}\right) \cdot \left(-\frac{7}{12} - \frac{9}{8}\right)$ $-\frac{3}{16}$ ou $-0{,}1875$.

b) $\left(-0{,}03 + \frac{8}{25}\right) \cdot \left(-\frac{40}{29}\right)$ $-\frac{2}{5}$ ou $-0{,}4$.

5. No produto $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^2$, as bases são diferentes, mas os expoentes são iguais. Observe como escrevemos:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{9}{4}\right) \cdot \left(\frac{9}{4}\right) =$$

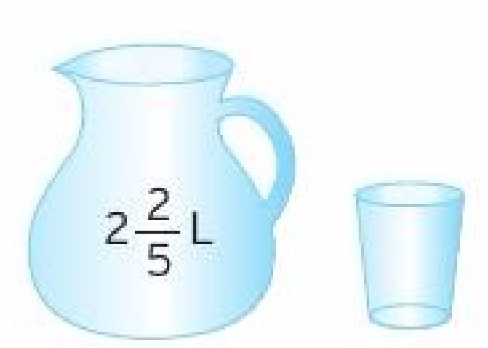
$$= \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{4}\right) \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{4}\right) = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{4}\right)^2.$$

Qual é o valor de $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^2$? $\frac{9}{4}$

6. Mário obteve estas notas nas provas de Matemática de certo bimestre: 6,5; 7,0; 5,0; 8,5 e 6,0. Calcule a média aritmética dessas notas. 6,6

7. Os salários dos funcionários de um escritório são: R$ 383,00; R$ 540,00; R$ 625,00; R$ 900,00; R$ 950,00 e R$ 1 000,00. Qual é o salário médio dos funcionários desse escritório? R$ 733,00

8. Esta figura mostra dois recipientes com suas capacidades. Quantos copos cheios de suco enchem uma jarra? 8 copos de suco.



BIS

9. Esta tabela mostra quantos quilômetros um atleta correu, por dia, durante um período de treinamento. Qual foi a média diária, em quilômetros, percorrida por esse atleta nesse período?
Aproximadamente 17,14 km por dia nesse período.

Dia da semana	Dom.	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	Sáb.
Percurso (km)	16	18	15,6	17	19	14,4	20

10. Pesquisas científicas indicam que o Universo tem, atualmente, cerca de treze bilhões e setecentos milhões de anos. Esse número corresponde a: c

a) $137 \cdot 10^9$

b) $137 \cdot 10^6$

c) $13{,}7 \cdot 10^9$

d) $13{,}7 \cdot 10^6$

11. O décimo termo da sequência

−1	2	−4	8	−16...

é: c

a) −512

b) −1 024

c) 512

d) 1 024

12. A expressão $43\,000 \cdot 10^{-8}$ corresponde a: c

a) 0,0043

b) 0,043

c) 0,00043

d) 0,43

13. (Saresp) Em 5 partidas de voleibol, Duda fez 12, 15, 11, 18 e 14 pontos. A sua média de pontos nessas partidas foi: d

a) 11

b) 12

c) 13

d) 14

14. (Saresp) Foi realizada uma pesquisa entre todas as crianças de 8 anos de um certo estado para saber se estavam alfabetizadas. Para tal, foi aplicada uma prova cujo valor variava de 0 a 10, sendo considerada alfabetizada a criança com nota superior a 5,0. A média obtida nesta prova foi 5,4. Dentre as opções abaixo, a única que se pode concluir pela média é que: d

a) todas as crianças estão alfabetizadas;

b) nenhuma criança está alfabetizada;

c) alguma criança tirou 5,4;

d) há crianças alfabetizadas.

15. Em um exame biométrico, o professor de Educação Física mediu a altura dos alunos da classe de Alice. Esses valores, em metros, com o correspondente número de cada aluno figuram nesta tabela:

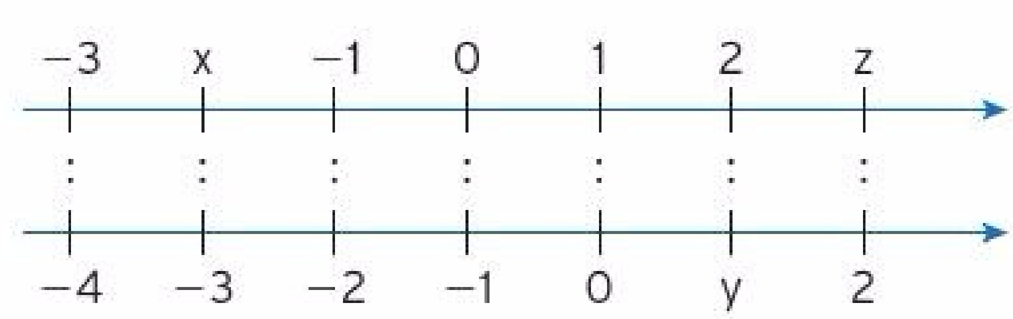
Nº do aluno	**Altura (em m)**	**Nº do aluno**	**Altura (em m)**
1	1,62	14	1,65
2	1,75	15	1,55
3	1,64	16	1,61
4	1,60	17	1,64
5	1,59	18	1,58
6	1,68	19	1,58
7	1,48	20	1,61
8	1,45	21	1,69
9	1,52	22	1,74
10	1,68	23	1,65
11	1,57	24	1,53
12	1,77	25	1,62
13	1,71	26	1,43

Utilize uma calculadora e responda:

a) Alice tem 1,62 m. Quantos alunos são mais altos que ela? E mais baixos?
11 alunos; 13 alunos.

b) Qual é a altura média da classe? A altura de Alice está acima ou abaixo da média?
1,61 m; acima da média.

16. (Saresp) Observe atentamente estas retas ordenadas:



A ordenação correta entre os números representados pelas letras **x**, **y** e **z** é: a

a) $x < y < z$

b) $x < z < y$

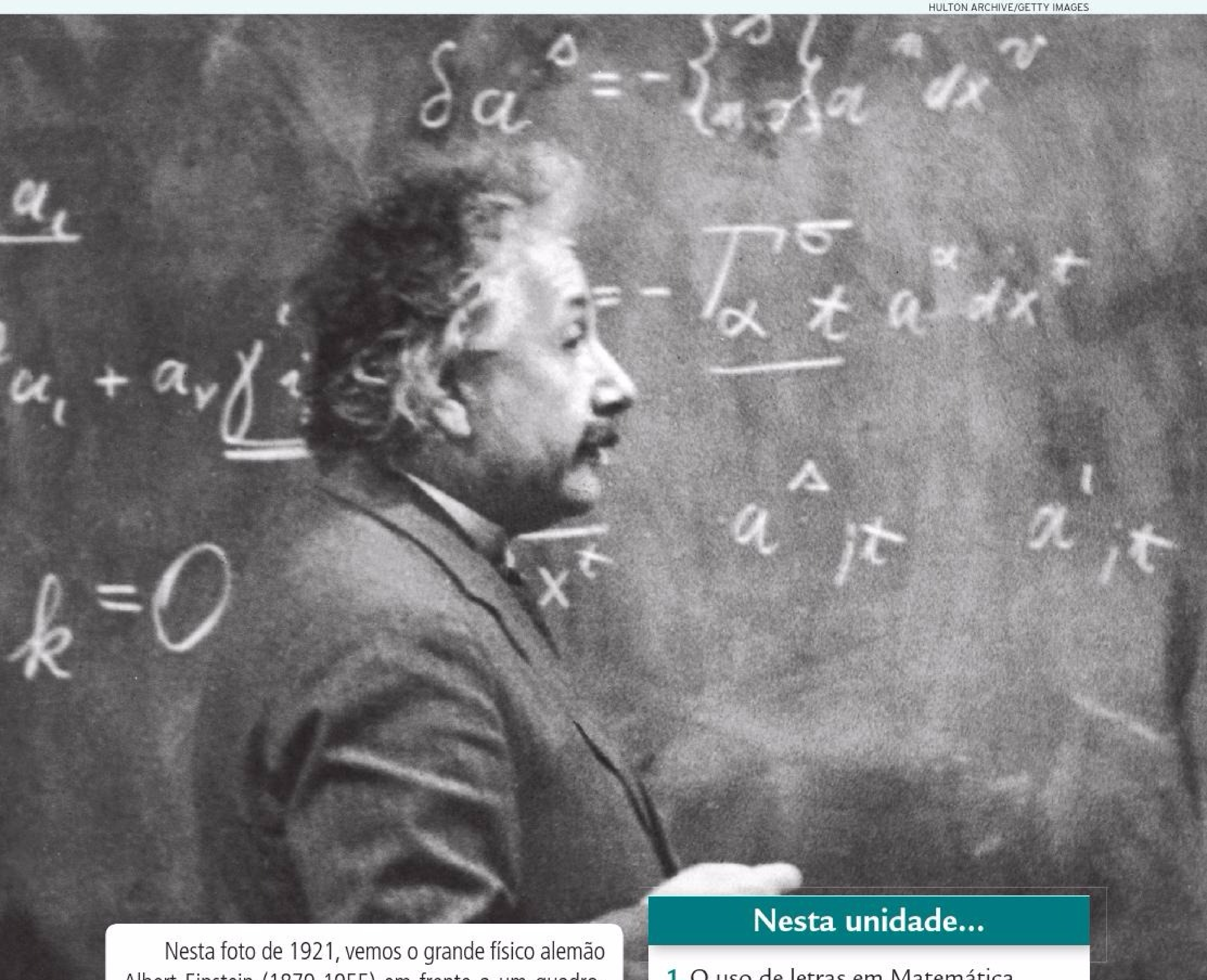
c) $y < x < z$

d) $y < z < x$

UNIDADE

6 Equações

HULTON ARCHIVE/GETTY IMAGES



Nesta foto de 1921, vemos o grande físico alemão Albert Einstein (1879-1955) em frente a um quadro-negro, no qual ele escreveu diversas equações.

Equação é o tema que será explorado nesta unidade.

Nesta unidade...

1. O uso de letras em Matemática
2. Equações de 1º grau com uma incógnita
3. Equações e resolução de problemas

Você já explorou sequências numéricas que apresentam padrões. Vamos rever uma delas.

FOTOGRAFIAS: THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Os garotos estão certos: são números ímpares maiores que 10. Já sabemos que na sequência dos números naturais o sucessor de um número par é um número ímpar e que um número par, qualquer, é produto de um número natural por 2. Então, um padrão presente na sequência apresentada poderá ser "Cada número é o produto de um número natural, maior que 4, por 2 mais 1".

$11 = 2 \times 5 + 1$

$15 = 2 \times 7 + 1$

$13 = 2 \times 6 + 1$

$17 = 2 \times 8 + 1$

O que você já sabe?

- Na sequência acima, que número vem imediatamente depois de 21? 23
- Acrescentando outros números à sequência acima, o número 1 000 apareceria nela? Explique por quê. Resposta possível: Não, porque 1 000 não é um número ímpar.
- **9 999** é um número ímpar. Que número natural deve ser multiplicado por 2 e adicionado a 1 para obtê-lo? 4 999
- Se a letra **n** representar um número natural qualquer, a expressão **2 × n**, ou **2 · n**, representa um número par. Como você representaria um número ímpar qualquer usando a letra **n**? $2 \cdot n + 1$

1 O uso de letras em Matemática

Explore o tema, propondo situações simples, pois ele será retomado em anos posteriores. Certifique-se de que os alunos compreendem o significado das expressões utilizadas na linguagem matemática que está sendo desenvolvida. Para mais esclarecimentos, leia texto no **Manual do Professor**.

O uso de letras como números

Para refletir e responder

Uma fábrica de roupas produz 20 calças por hora. A quantidade de calças confeccionadas é registrada por um encarregado.

LUCIANA WHITAKER/ OLHAR IMAGEM

- De que modo ele pode fazer esse registro?

Resposta pessoal.

Vamos começar a ler, compreender e representar informações por meio de uma linguagem composta por símbolos matemáticos e letras refletindo sobre a situação proposta.

Um dos registros que o encarregado poderá fazer é anotar, em uma tabela, a quantidade de calças confeccionadas conforme o número de horas decorridas.

HÉLIO SENATORE

Produção de calças

Tempo (horas)	Quantidade (nº de calças)
1	20
2	$2 \times 20 = 40$
4	$4 \times 20 = 80$
...	...

O encarregado poderá, também, representar a quantidade de horas de produção por uma letra, por exemplo, **t**. Nesse caso, a quantidade de calças produzidas no tempo **t** seria de $\mathbf{20 \times t}$, ou ainda, $\mathbf{20 \cdot t}$.

$\mathbf{20 \cdot t}$ é uma **expressão algébrica** e **t** representa uma **variável**.

Note que atribuindo a **t** o valor 2, a expressão $\mathbf{20 \cdot t}$ será igual a 40. Dizemos que 40 é o **valor numérico** de $\mathbf{20 \cdot t}$, para **t** igual a 2.

Outros exemplos:

- $\mathbf{m - 9}$ significa:
  - ✓ a diferença entre um número qualquer e 9;
  - ✓ um número qualquer diminuído de 9.
- $\mathbf{\frac{a}{3}}$ significa:
  - ✓ o quociente de um número qualquer por 3;
  - ✓ a terça parte de um número qualquer.

O valor numérico de $\frac{a}{3}$ para $a = 60$ é igual a $\frac{60}{3}$, ou seja, 20.

De maneira simplificada, chamamos de **expressão algébrica** uma expressão que envolve números, letras e operações indicadas entre eles.

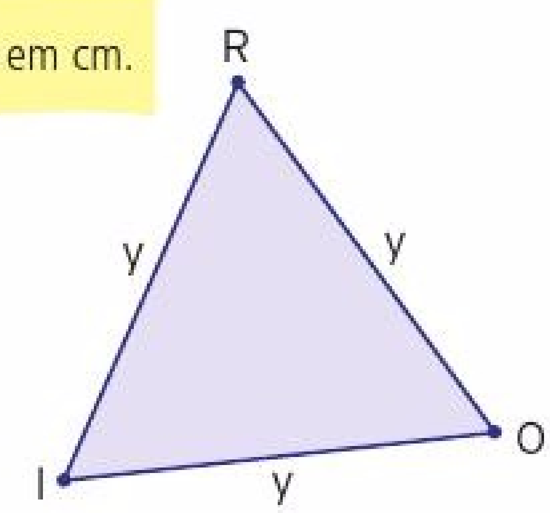
As **letras** são as **variáveis** da expressão algébrica: a elas podem ser atribuídos valores numéricos racionais quaisquer.

Existem expressões algébricas que podem ser simplificadas.

Exemplo:

Veja como indicar o perímetro de um triângulo equilátero qualquer com medida de lado desconhecida. Como a medida é desconhecida, ela é indicada por uma letra qualquer, por exemplo, y.

y, medida em cm.



perímetro = y + y + y

$\text{perímetro} = 3 \cdot \underbrace{y}_{\text{medida dos lados}}$

Portanto, simplificando:

y + y + y = 3 · y ou **3y**

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

1. Forme pares com as expressões algébricas (identificadas por números) e as frases correspondentes (identificadas por letras) e anote-os:

(1) $x + 8$ (2) $6 \cdot x$ (3) $4 - x$

1 e B; 2 e A; 3 e C.

(A) O sêxtuplo de x. (B) x acrescido de 8 unidades. (C) A diferença entre 4 e x.

2. Copie o quadro seguinte e complete-o escrevendo uma expressão algébrica para cada frase e uma frase para cada expressão algébrica.

Expressão algébrica	Frase
$4 \cdot x + 6$	O quádruplo de um número qualquer adicionado a 6 unidades.
$-2{,}4 \cdot x$	O produto de $-2{,}4$ por um número qualquer.
$x + 3 \cdot x$	Um número qualquer adicionado ao seu triplo.
$2 \cdot x - 5$	A diferença entre o dobro de um número qualquer e 5.

3. Analise cada uma das afirmações e indique as que estão corretas. Reescreva as afirmações incorretas, de modo que sejam verdadeiras.

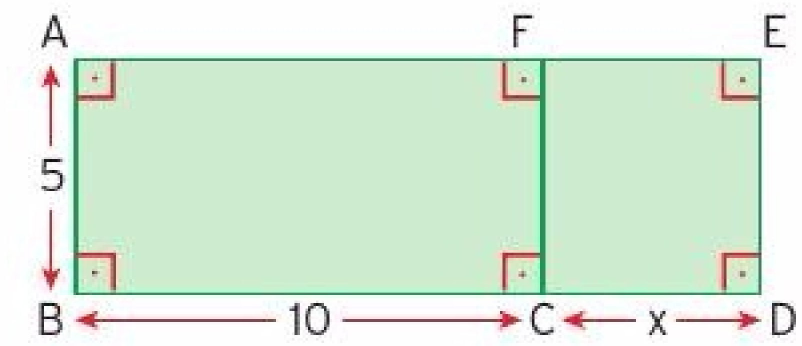
a) O valor numérico da expressão algébrica $a - 12$ para $a = 10$ é -2. Corretas: a e d.

b) O valor numérico da expressão algébrica $2 \cdot y + 5$, quando atribuímos a y o valor $\frac{1}{2}$, é $\frac{1}{2}$.
Incorreta. O valor numérico da expressão algébrica $2 \cdot y + 5$, quando atribuímos a y o valor $\frac{1}{2}$, é 6.

c) Os valores numéricos das expressões algébricas $2 \cdot n$ e n^2 para $n = 3$ são iguais.
Incorreta. Para $n = 3$, o valor numérico de $2 \cdot n$ é 6 e o valor numérico de n^2 é 9.

d) Para $x = 7$ o valor numérico da expressão algébrica $x + \frac{x}{7}$ é 8.

4. Observe a figura ao lado, na qual as letras indicam medidas em centímetros, e responda às questões a seguir.



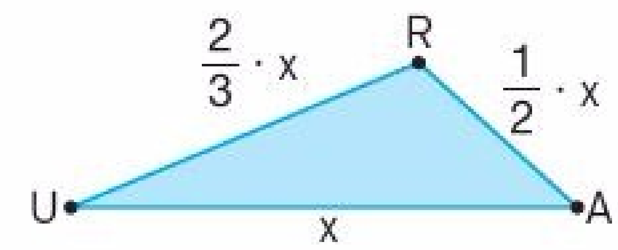
a) Indique a medida do lado $\overline{BD}$ por meio de uma expressão algébrica. $10 + x$

b) Indique a área de ABDE por meio de uma expressão algébrica. $5 \cdot (10 + x)$

c) Se x for igual a 40 cm a área de ABCE será: $250\ cm^2$.

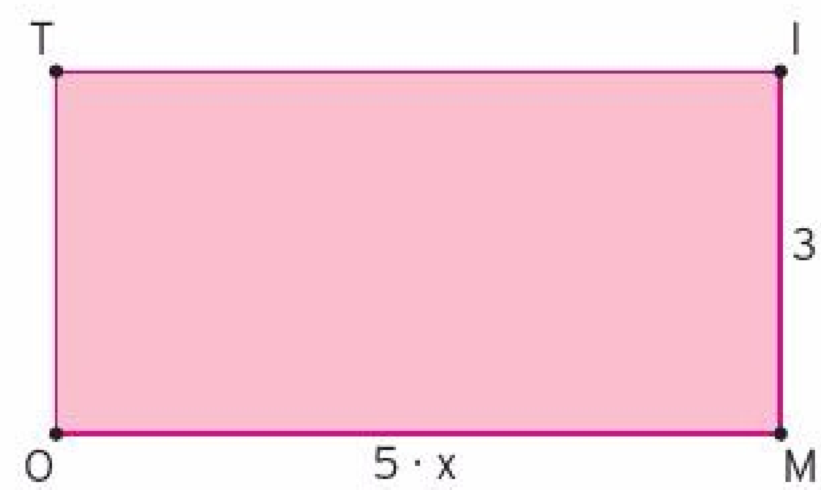
$200\ cm^2$	$100\ cm^2$	$250\ cm^2$

5. Nesta figura, a letra x representa uma medida em certa unidade.



Represente o perímetro do triângulo RUA, usando uma expressão algébrica simplificada. $\frac{13}{6} \cdot x$ ou $\frac{13}{6} x$

6. Neste retângulo, a letra x representa uma medida em centímetros.



a) Represente o perímetro de **TOMI**, usando uma expressão algébrica. $10 \cdot x + 6$ ou $10x + 6$ (em cm).

b) Represente a área de **TOMI**, usando uma expressão algébrica. $15 \cdot x$ ou $15x$ (em cm^2).

A área do retângulo é igual a base × altura.

7. Escreva uma forma simplificada para cada expressão algébrica apresentada nos seguintes quadros:

a) $12 \cdot x + 15 \cdot x$ — $27 \cdot x$ ou $27x$

b) $-20 \cdot a - 18 \cdot a$ — $-38 \cdot a$ ou $-38a$

c) $72 \cdot n - 47 \cdot n$ — $25 \cdot n$ ou $25n$

Troquem ideias e resolvam

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega, discutam e resolvam.

- Observem a seguinte sequência de figuras:

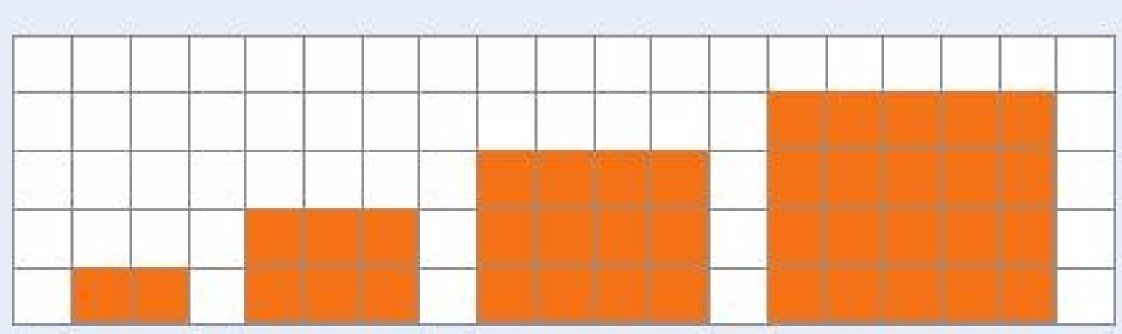


figura 1 figura 2 figura 3 figura 4

O número de quadradinhos da figura 1 é obtido multiplicando 1 por 2.

O número de quadradinhos da figura 2 é obtido multiplicando 2 por 3.

O número de quadradinhos da figura 3 é obtido multiplicando 3 por 4 e assim por diante.

- Copie esta tabela em seu caderno, observe-a e complete-a.

Figura	1	2	3	4	5	6
Nº de quadradinhos	2	6	12	20	30	42

- Como podemos determinar o número de quadradinhos da figura 12 sem desenhá-la? E da figura 20? Multiplicando 12 por 13. Multiplicando 20 por 21.
- Entre as expressões escritas nos quadros, qual delas representa o número de quadradinhos da figura **n**? $n \cdot (n + 1)$

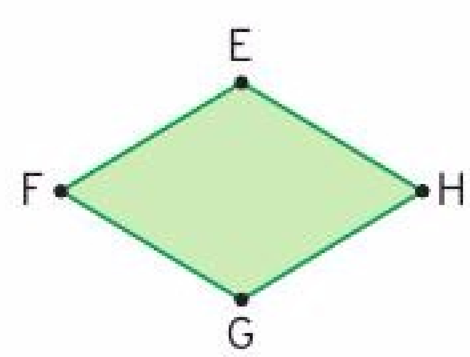
$n + (n + 1)$ $\quad$ $2 \cdot n$ $\quad$ $n \cdot (n + 1)$ $\quad$ $2 \cdot n + 1$

Exercícios complementares

FAÇA NO CADERNO

8. Na figura, EFGH é um losango. Copie e complete uma tabela como esta, calculando o perímetro de EFGH para cada valor dado na tabela em que **m** representa um número racional positivo.

Lado (cm)	1	3	6	0,5	1,5	24,8	m
Perímetro (cm)	4	12	24	2	6	99,2	$4 \cdot m$

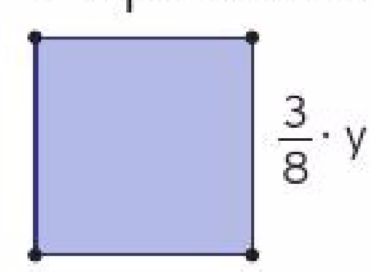


9. Para responder a estas questões, considere que a letra x representa a idade de uma pessoa.

a) Que expressão representa a idade dessa pessoa daqui a 10 anos? $x + 10$

b) Que expressão representa a idade dessa pessoa há 5 anos? $x - 5$

10. Que expressão algébrica simplificada representa o perímetro do quadrado abaixo? $\frac{3}{2} \cdot y$ ou $\frac{3y}{2}$

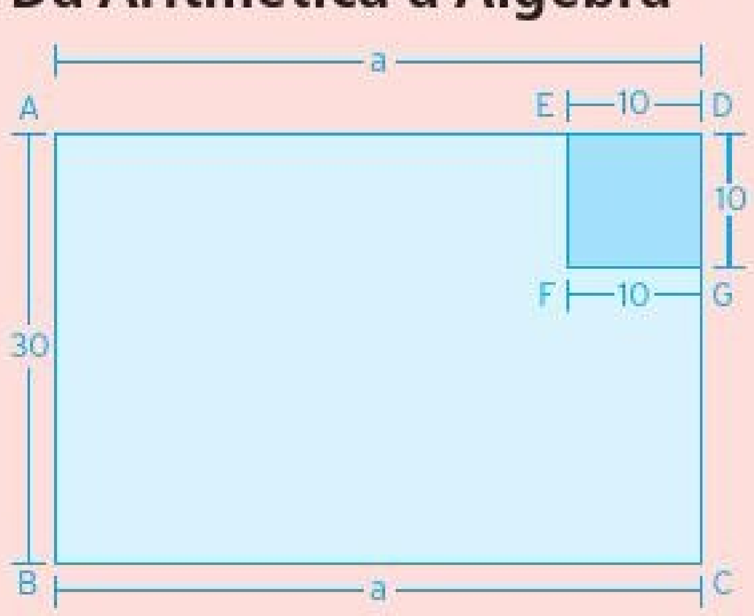


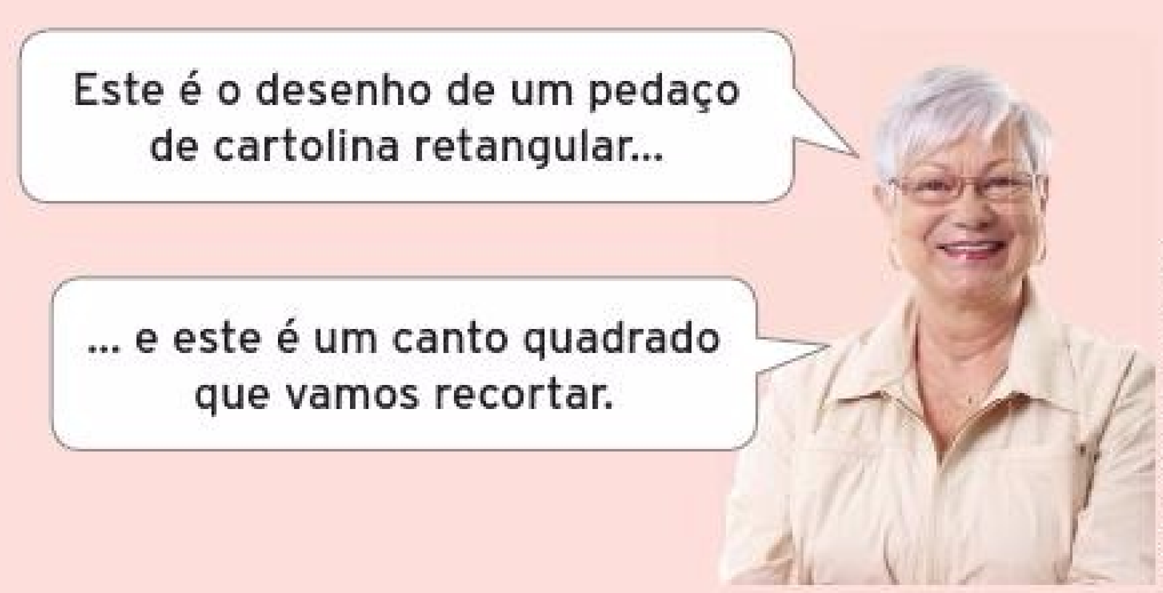
y representa um número racional positivo.

Desafio

FAÇA NO CADERNO

Da Aritmética à Álgebra





Os lados da figura estão indicados em centímetros. A letra **a** representa a medida do comprimento do pedaço de cartolina.

- Escreva uma expressão algébrica para representar a medida do segmento de reta $\overline{AE}$. Qual é a medida do segmento de reta $\overline{CG}$? $a - 10$; 20 cm.
- Quantos lados terá o polígono que sobrar? Qual é esse polígono? 6 lados; hexágono.
- Qual é a área do canto quadrado que será recortado? 100 cm^2.
- Represente, por meio de uma expressão algébrica, a área do polígono obtido após o recorte do canto quadrado. $30 \cdot a - 100$ ou $30a - 100$ (em cm^2).
- Que área do pedaço de cartolina resta caso o comprimento inicial seja de 45 cm? 1 250 cm^2.

2 Equações de 1º grau com uma incógnita

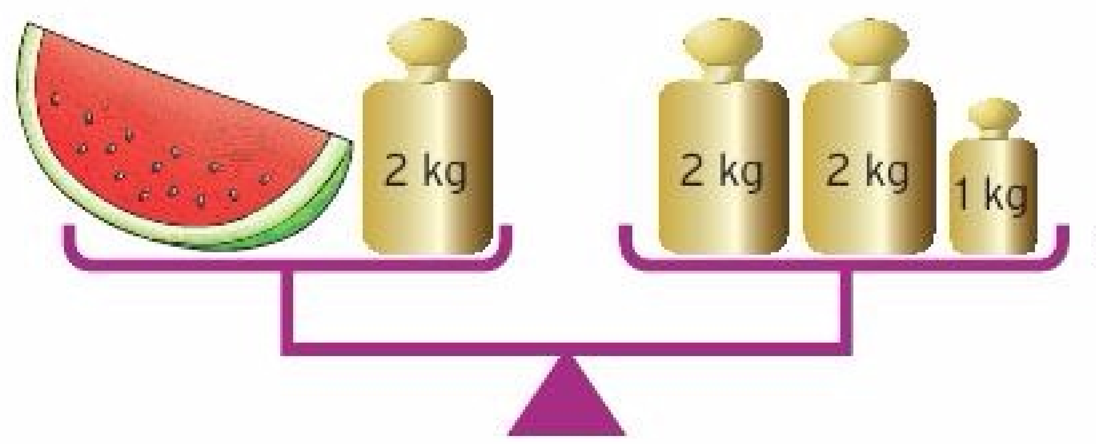
O equilíbrio em jogo

Explore as propriedades da igualdade, utilizando o conceito de equilíbrio e balanças de dois pratos. Se possível, solicite aos alunos que construam uma balança por grupo e concretizem as questões propostas para encontrar as soluções.

Para refletir e responder

A ilustração ao lado mostra uma balança de dois pratos equilibrada.

Quando isso ocorre, a massa dos objetos colocados em um prato é igual à massa dos objetos que estão no outro prato.



- Quantos quilogramas tem o pedaço de melancia?
3 kg.

Essa não foi difícil de responder, não é?

São 3 kg, porque retirando um peso de 2 kg de cada prato a balança continuará em equilíbrio. Em um dos pratos estará o pedaço de melancia e, no outro, pesos que ao todo somam 3 kg.

Problemas como esse podem ser solucionados escrevendo e resolvendo uma **equação**. Então, leia um pouco do que diz a História sobre o assunto.

Há alguns milhares de anos, os matemáticos já tinham muito interesse na resolução de equações.

Elas eram utilizadas, na maior parte das vezes, para resolver problemas que mais pareciam enigmas: tinham um ar romântico, ou misterioso, e às vezes envolviam mágicas e truques de adivinhação.


FRANCISCO VILACHÁ

Existem vários caminhos para resolver um problema que envolve números.

Um deles é representar o número que queremos determinar por uma letra e escrever uma sentença envolvendo uma igualdade, as operações e a letra escolhida. Quando fazemos isso, dizemos que equacionamos o problema.

Vamos aprender a escrever uma **equação** que traduza as informações de uma situação, trabalhar com letras como se elas fossem números e obter soluções da equação que poderão ser soluções do problema, caso existam.

Exemplo:

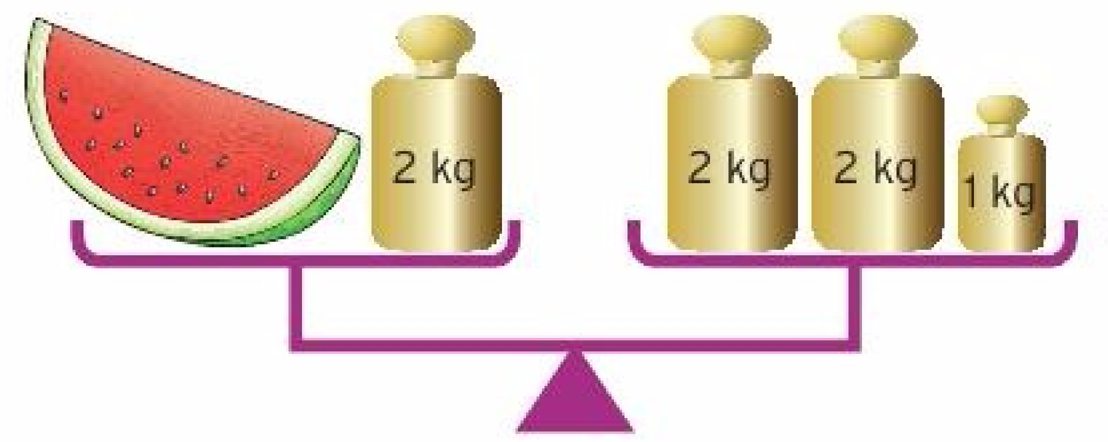
Retomando o problema do início do capítulo,

x — massa do pedaço de melancia

(número desconhecido)

x + 2 — massa em um dos pratos

5 — massa no outro prato



Equação: x + 2 = 5

É importante lembrar que, neste exemplo, como x representa a massa de um objeto, seu valor é um número racional positivo.

Dizemos que **x + 2 = 5** é uma **equação de 1º grau com uma incógnita**. Nessa equação, o maior expoente da incógnita x é 1 e por isso dizemos que ela é do 1º grau.

A letra que representa o número desconhecido é a **incógnita** da equação.

Uma **equação** é uma sentença matemática que expressa uma **igualdade** entre **duas expressões algébricas**.

Observe que nessa equação cada uma das expressões é um membro da equação e qualquer parcela desses membros é um **termo** da equação.

$$\underbrace{x + 2}_{\text{1º membro}} = \underbrace{5}_{\text{2º membro}}$$

O que é solução de uma equação?

Uma equação nem sempre se transforma em uma sentença verdadeira para qualquer valor da incógnita.

Exemplo:

Considere a equação **x + 2 = 5**.

Atribuindo a **x** o valor 5:	Atribuindo a **x** o valor 3:	Atribuindo a **x** o valor 10:
$5 + 2 = 5$	$3 + 2 = 5$	$10 + 2 = 5$
Falso	Verdadeiro	Falso

Quando uma equação se transforma em uma sentença verdadeira para um valor atribuído à incógnita, esse valor é chamado **solução** ou **raiz** dessa equação.

No caso do exemplo acima, 3 é raiz da equação **x + 2 = 5**.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

11. Anote as sentenças matemáticas que são equações de 1º grau com uma incógnita. d

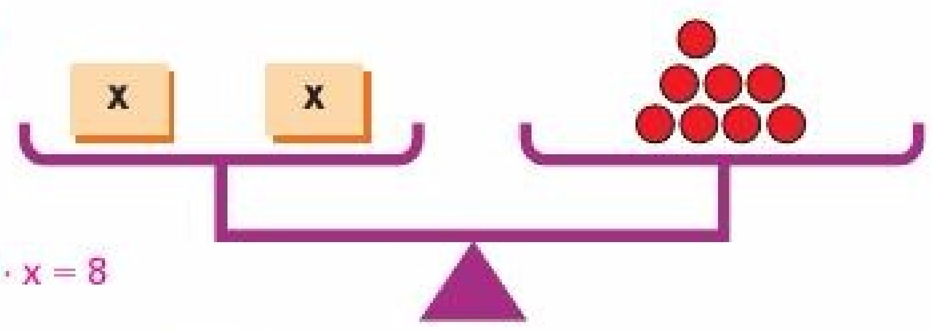
a) $18 = 14 + 7 - 3$ b) $15 \cdot x - 5 < 6$ c) $y^2 - 25 = 0$ d) $5 \cdot t - 31 = 26$

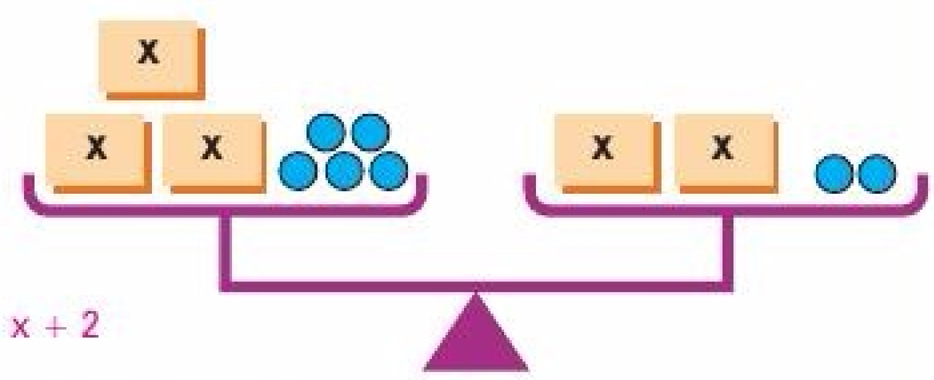
12. Observe o quadro a seguir e anote o valor que torna cada uma das equações uma sentença verdadeira.

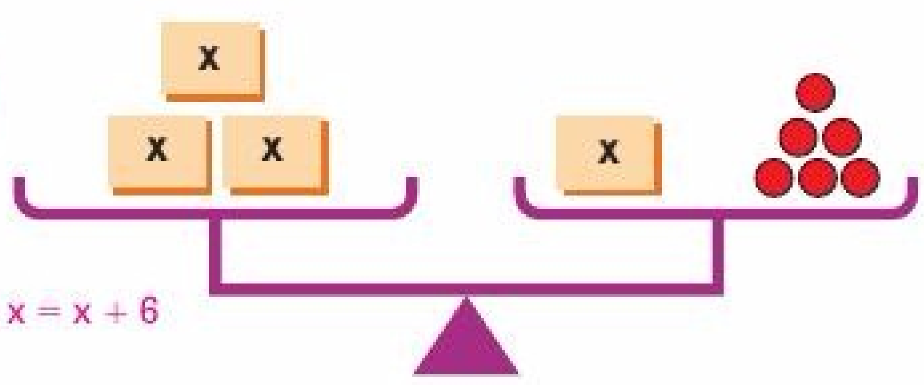
	Equação	Solução da equação					
a)	$5 \cdot y + 12 = 57$	−2	0	0,5	7	9	9
b)	$15 - 3z = -27$	−4	−1	1,5	14	20	14

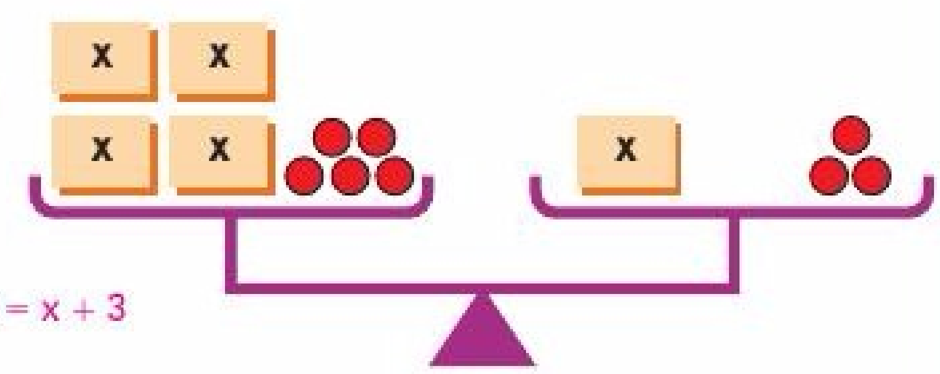
13. O número 0 é solução da equação $6 \cdot n + 3{,}5 = \frac{7}{2}$? Por quê? Sim, porque para n = 0, obtemos uma sentença verdadeira.

14. Escreva uma equação para cada desenho:

1

$2 \cdot x = 8$

3

$3 \cdot x + 5 = 2 \cdot x + 2$

2

$3 \cdot x = x + 6$

4

$4 \cdot x + 5 = x + 3$

a) Qual é o valor para x na situação 2? 3

b) Resolva as equações obtidas nas situações 1, 3 e 4.

Situação 1: $x = 4$
Situação 3: $x = -3$
Situação 4: $x = -\frac{2}{3}$.

15. As soluções das equações que estão nos quadros abaixo podem ser obtidas mentalmente. Quais são elas?

$x - 1{,}8 = 0$ 1,8 $-18 \cdot x = 36$ −2 $6 \cdot x + 21 = 21$ 0

16. Observe as duas tabelas ao lado: na **tabela A** figuram algumas equações; na **tabela B**, as raízes dessas equações. Forme pares, cada equação com sua raiz.
I-e; II-c; III-a; IV-f; V-b; VI-d

Tabela A	
I	$x - 2 = 45$
II	$12 \cdot x = -6$
III	$\frac{t}{7} = -3$
IV	$6 \cdot y - 1 = 11$
V	$\frac{y}{8} + \frac{13}{3} = \frac{5}{6}$
VI	$21 \cdot y + 18 = -3$

Tabela B	
a	−21
b	−28
c	$-\frac{1}{2}$
d	−1
e	47
f	2

Exercícios complementares

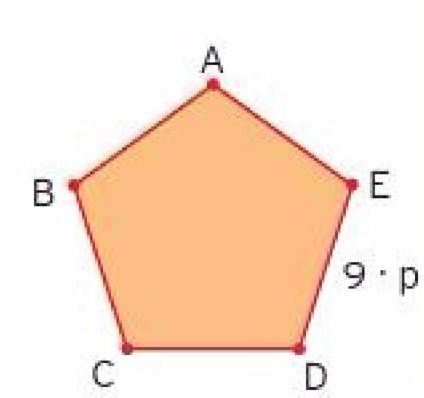
FAÇA NO CADERNO

17. Leia este problema: "A terça parte da idade de Zeca diminuída de 4 anos é 9".

a) Equacione o problema. Resposta possível: $\frac{n}{3} - 4 = 9$

b) Qual é a idade de Zeca? 39 anos.

18. Todos os lados deste pentágono têm medidas iguais. A letra p representa um número racional positivo, e a expressão algébrica $9 \cdot p$ representa a medida de um lado desse pentágono, em metros. O perímetro do pentágono é 216 m.



a) Escreva uma equação que permita encontrar a medida de um lado desse pentágono.
Resposta possível: $45 \cdot p = 216$.

b) Qual é a solução da equação obtida? 4,8

c) Quanto medem os lados desse pentágono? 43,2 m.

19. Para fazer um bolo, usa-se, entre outros ingredientes, ovos e farinha. Três dúzias de ovos custam quatro vezes o preço de um quilograma de farinha e um quilograma de farinha custa R$ 3,80. Qual é o preço de uma dúzia de ovos? b

Uma equação que pode representar esse problema é:

a) $4 \cdot x = 3 \cdot 3{,}80$ b) $3 \cdot x = 4 \cdot 3{,}80$ c) $3 \cdot 12 \cdot x = 4 \cdot 3{,}80$

20. Daniel guarda 30% de seu salário para pagar o aluguel de sua casa e fica com R$ 1 407,00 para outras despesas. Qual é o salário de Daniel? R$ 2010,00.

21. Forme pares: cada frase com a equação correspondente.

1. A diferença entre o quádruplo de um número e 0,6 é -130.
2. A quarta parte de um número, subtraída de 0,6, vale -130.
3. A soma de um número com 0,6 é o quádruplo de -130.
4. O quádruplo da soma de um número com 0,6 é -130.

A) $x + 0{,}6 = 4 \cdot (-130)$

B) $4 \cdot x - 0{,}6 = -130$

C) $0{,}6 - \frac{x}{4} = -130$

D) $4 \cdot (x + 0{,}6) = -130$

1-B; 2-C; 3-A; 4-D

Desafio

FAÇA NO CADERNO

A história do pote de azeite do emir Omar Ibn Sinan

Omar Ibn Sinan era um grande matemático que se divertia propondo quebra-cabeças para os viajantes que encontrava.

Eis um deles:

Um pote cheio de azeite pesa **5 quilogramas**. Com azeite pela metade, pesa **2,750 quilogramas**. Quanto pesa o pote vazio?


FRANCISCO VILACHA

BIS

- Pense em uma solução para o problema proposto pelo emir.
0,5 kg.

Fonte: Ernesto Rosa Neto. *As mil e uma equações*. São Paulo: Ática, 1997.

Troquem ideias e resolvam

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega, discutam e resolvam.

Uma companhia turística organizou uma excursão da qual participaram 38 pessoas, que pagaram, ao todo, R$ 840,00. O passeio saiu por R$ 28,00 para cada adulto, e as crianças tiveram um desconto de 50%.

Quantos adultos e quantas crianças participaram dessa excursão?
22 adultos e 16 crianças.

Como encontrar a raiz de uma equação?

Encontramos a raiz de uma equação resolvendo-a, ou seja, determinando o valor da incógnita que transforma a sentença em uma igualdade verdadeira.

Na resolução de uma equação podem ser aplicadas as propriedades da igualdade ou, também, as operações e suas inversas.

Em uma equação podemos:

- adicionar um mesmo número aos dois membros da equação;
- subtrair um mesmo número dos dois membros da equação;
- multiplicar os dois membros da equação por um mesmo número;
- dividir os dois membros da equação por um mesmo número diferente de zero.

Exemplos:

- $2 \cdot x + 3 = 9$

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

$$\mathbf{2 \cdot x + 3 = 9}$$
$$2 \cdot x + \cancel{3}_{0} - \cancel{3} = 9 - 3$$
$$2 \cdot x = 6$$
$$(2 \cdot x) : 2 = 6 : 2$$
ou
$$\frac{{}^{1}\cancel{2} \cdot x}{{}_{1}\cancel{2}} = \frac{{}^{3}\cancel{6}}{{}_{1}\cancel{2}}$$
$$\mathbf{x = 3}$$

Verificação:

$2 \cdot 3 + 3 = 9$

$6 + 3 = 9$

3 é a raiz da equação $2 \cdot x + 3 = 9$.

Verdadeira.

- $-5 \cdot x - 12 = 10 \cdot x$

$-5 \cdot x - 12 + 12 = 10 \cdot x + 12$ ← Adicionamos 12 aos dois membros.

$-5 \cdot x = 10 \cdot x + 12$

$-5 \cdot x - 10 \cdot x = 10 \cdot x + 12 - 10 \cdot x$ ← Subtraímos $10 \cdot x$ dos dois membros.

$-15 \cdot x = 12$

$\dfrac{-15 \cdot x}{-15} = \dfrac{12}{-15}$ ← Dividimos os dois membros por -15.

$x = -\dfrac{4}{5}$ → $-\dfrac{4}{5}$ é raiz da equação $-5 \cdot x - 12 = 10 \cdot x$.

- $y + (3 \cdot y - 17) = 39$ é uma equação de 1º grau com uma incógnita, que é **y**.
  Resolvemos essa equação eliminando primeiro os parênteses:

$$y + (3 \cdot y - 17) = 39$$

$$\underbrace{y + 3 \cdot y}_{(1+3) \cdot y} - 17 = 39$$

$$4 \cdot y - 17 = 39$$

Adicionamos 17 a cada membro. $\rightarrow$ $4 \cdot y \underbrace{- \cancel{17} + \cancel{17}}_{0} = 39 + 17$

$$4 \cdot y = 56$$

$$(4 \cdot y) : 4 = 56 : 4$$

Dividimos cada membro por 4. $\rightarrow$ $\dfrac{{}^{1}\cancel{4} \cdot y}{\cancel{4}_{1}} = \dfrac{\cancel{56}^{14}}{\cancel{4}_{1}}$

$$\mathbf{y = 14}$$

Ou de modo simplificado e escolhendo o 1º membro da equação para "isolar" x:

$$y + 3 \cdot y - 17 = 39$$

$$4 \cdot y - 17 = 39$$

$$4 \cdot y = 39 + 17$$

$$4 \cdot y = 56$$

$$y = \frac{56}{4}$$

$$\mathbf{y = 14}$$

Verificação:

$y + (3 \cdot y - 17) = 39$

$$14 + (3 \cdot 14 - 17) = 39$$

$$14 + (42 - 17) = 39$$

$$14 + 25 = 39$$

Verdadeira.

14 é a raiz ou solução da equação $y + (3 \cdot y - 17) = 39$.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

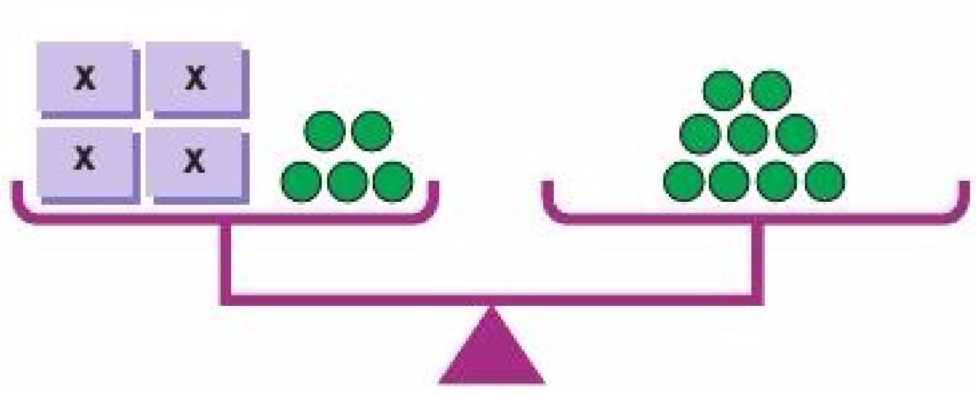
22. As equações a seguir têm a mesma solução, que é -3:

$4x = -12$ $\qquad$ $-5x - 100 = -85$

a) Como se verifica se essa afirmação é verdadeira? Resposta possível: Atribuindo a x o valor -3 e verificando se a igualdade resultante é verdadeira.

b) Escreva duas equações que também tenham raiz igual a -3. Respostas possíveis: $x + 3 = 0$; $-12x = 36$

23. Neste desenho, as caixas têm massas iguais e as bolas também. Cada bola pesa 1 quilograma e a balança está equilibrada.



a) Represente essa situação, utilizando uma equação. Resposta possível: $4x + 5 = 9$

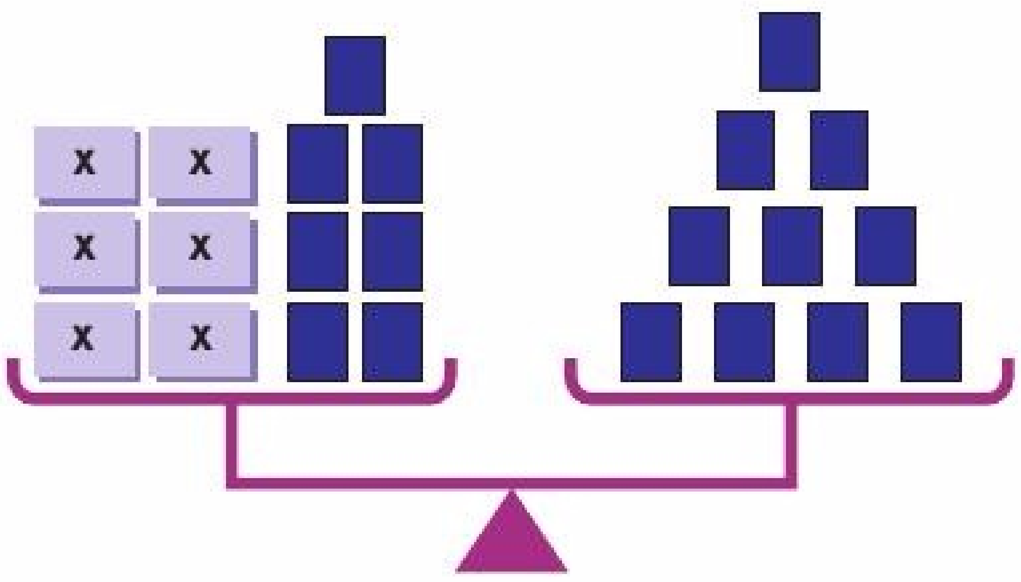
b) Quanto pesa cada caixa? 1 kg.

Exercícios complementares

FAÇA NO CADERNO

Procure organizar-se quanto à quantidade e à qualidade das atividades a serem feitas em classe ou como tarefa de casa. Os alunos poderiam escolher as atividades para cuja resolução teriam um prazo maior.

24. Neste desenho, as caixas marcadas com x têm massas iguais, e a balança está em equilíbrio.



a) Escreva duas equações que representem essa situação. Respostas possíveis: $6x + 7 = 10$; $6x = 10 - 7$.

b) Uma das equações que podem ser escritas, nessa situação, é $6x + 7 = 10$. Qual é a raiz dessa equação? $\frac{1}{2}$

25. Resolva estas equações:

a) $16 + 8 \cdot y = 3 \cdot y + 81$ 13

b) $5 \cdot x = 12 \cdot x + 49$ -7

c) $20 - 8 \cdot x = -19 - 21 \cdot x$ -3

d) $4 \cdot x - 31 = 34 \cdot x - 13$ $-\frac{3}{5}$

e) $15 - 9 \cdot x = 5 \cdot x + 64$ $-\frac{7}{2}$

f) $-18 + 2 \cdot x + 6 = 7 \cdot x - 12 - 8 \cdot x$ 0

26. Represente o problema seguinte, utilizando uma equação, e resolva-o.

Em um determinado dia, a temperatura no Ártico chegou a -48 °C. Essa temperatura correspondeu a $\frac{3}{4}$ da temperatura média da Groenlândia. Qual foi a temperatura média da Groenlândia nesse dia? -64 °C.

VAGNER DE FARIA

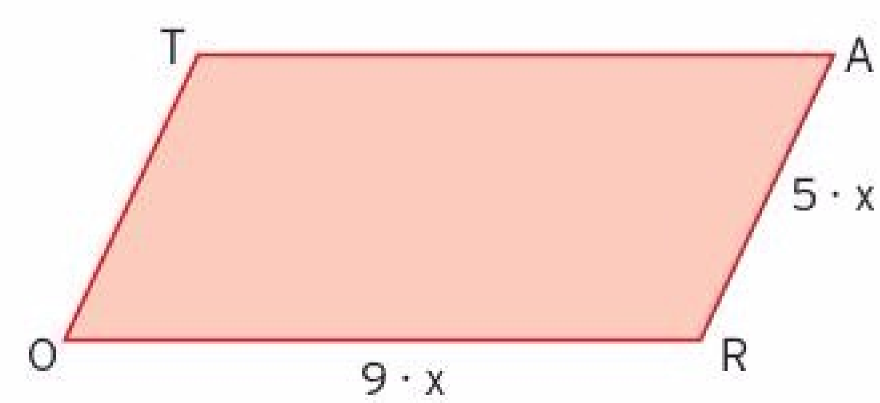
27. Zeca é o cestinha do time de basquete de sua escola. Nos Jogos da Primavera do ano passado, seu time foi campeão. O quádruplo do número de pontos que ele fez, na final, diminuído de 29 pontos, resultou em 127 pontos. Quantos pontos ele fez nesse jogo? 39 pontos.

28. O perímetro do paralelogramo representado abaixo é 175 cm.

a) Escreva uma equação de 1º grau com uma incógnita, envolvendo o perímetro e os dados assinalados na figura. Resposta possível: $28 \cdot x = 175$.

b) Qual é o valor de x? 6,25 cm.

c) Quais são as medidas dos lados de TORA?
med $\overline{OR}$ = med $\overline{TA}$ = 56,25 cm; med $\overline{TO}$ = med $\overline{RA}$ = 31,25 cm



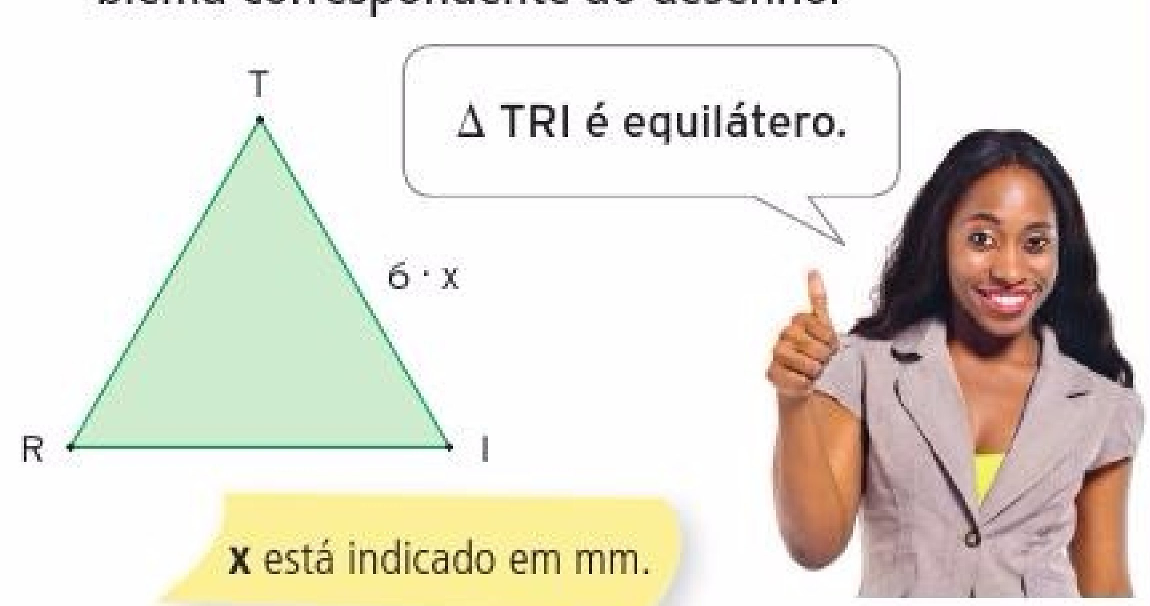
29. Algumas vezes, uma equação a ser resolvida tem parênteses.

Qual é a solução da equação apresentada neste quadro? 8

$$5 \cdot y - 6 = 2 \cdot (y + 9)$$

Pista: elimine os parênteses por meio da propriedade distributiva da multiplicação em relação à edição.

30. Utilize as informações dadas e escreva um problema correspondente ao desenho.



FOTOGRAFIAS: THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Desafie um colega a escrever uma equação que expresse o problema em linguagem algébrica.
Resposta pessoal.

31. Determine a raiz destas equações de 1º grau com uma incógnita:

a) $6 \cdot x - 17 = 13 \cdot (x - 1) - 4$ 0

b) $12 \cdot (t - 3) + 1 = 6 \cdot (t + 1) - 5$ 6

c) $6 \cdot (-3 \cdot n + 5) - 4 \cdot (2 \cdot n + 2) = -3 \cdot (6 + 8 \cdot n)$ 20

32. Qual é a raiz da equação?

$$2 \cdot t + 3 \cdot (t + 1) - 4 - 3 \cdot (t + 3) = -4$$ 3

Essa raiz é um número natural? Sim.

33. A solução desta equação é um número menor, igual ou maior que 3? Menor que 3.

$$2 \cdot y - [6 \cdot y - (8 - y) - 3] = -(5 - y)$$

Elimine os ( ) antes dos [ ].

Investigue e explique

Dependendo de cada calculadora, ao digitar a sequência proposta, os alunos podem obter resultados diferentes. Veja no **Manual do Professor** orientações para outros casos.

FAÇA NO CADERNO

Que tal investigar e descobrir algumas regularidades usando uma calculadora?

Ao digitar as teclas: $\boxed{2}\ \boxed{+}\ \boxed{=}\ \boxed{=}$, o resultado que aparece no visor depende do modo como sua calculadora foi projetada.

- Se o resultado for 4, continue a digitar estas sequências e descubra a regra de formação dos resultados encontrados:

$\boxed{2}\ \boxed{+}\ \boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{=}$ 6

$\boxed{2}\ \boxed{+}\ \boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{=}$ 8

$\boxed{2}\ \boxed{+}\ \boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{=}$ 10

$\boxed{2}\ \boxed{+}\ \boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{=}$ 12

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

- Sem digitar a sequência de teclas, escreva em seu caderno o resultado de:

$\boxed{2}\ \boxed{+}\ \boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{=}$ 20

$\boxed{2}\ \boxed{+}\ \underbrace{\boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{=} \dots \boxed{=}}_{\text{20 vezes}}$ 40

$\boxed{2}\ \boxed{+}\ \underbrace{\boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{=} \dots \boxed{=}}_{n \text{ vezes}}$ $2 \cdot n$ ou $2n$

3 Equações e resolução de problemas

Equações

Certifique-se de que os alunos compreendem o significado e a importância da Álgebra, mas não descarte outros recursos para a resolução de problemas, como os procedimentos da Aritmética.

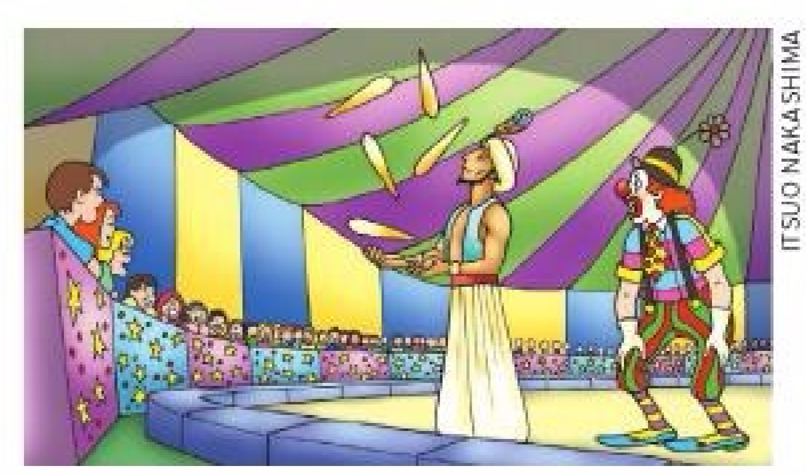
As equações são muito utilizadas para resolver problemas do dia a dia.

Por isso, vamos explorar um pouco mais a resolução de problemas por meio de equações.

Para refletir e responder

A última apresentação do Circo Mágico foi um sucesso!

Compareceram 1 784 pessoas, e havia 140 crianças a mais que o dobro da quantidade de adultos.



- Quantas crianças assistiram a essa apresentação? 1236 crianças.

Equacionamos o problema proposto indicando o número de adultos por **x**:

x	número de adultos
$2 \cdot x$	dobro do número de adultos
$2 \cdot x + 140$	número de crianças

O número de adultos adicionado ao número de crianças é igual a 1784 pessoas.

Equação: $x + (2 \cdot x + 140) = 1784$

Resolvendo a equação:

$x + (2 \cdot x + 140) = 1784$

$x + 2 \cdot x + 140 = 1784$ —— $x + 2 \cdot x = 1784 - 140$ Escolhendo o 1º membro para isolar **x**.

$3 \cdot x = 1644$ —— $x = \dfrac{1644}{3} = 548$ Número de adultos.

Número de crianças —— $2 \cdot x + 140 = 2 \cdot 548 + 140 = 1096 + 140 = 1236$

Logo, 1 236 crianças assistiram à última apresentação do Circo Mágico.

Veja outro exemplo: Um casal comprou um liquidificador, um fogão e uma geladeira por R$ 3762,00. O fogão custou R$ 510,00 a mais que cinco vezes o preço do liquidificador e a geladeira custou o dobro do preço do fogão. Qual era o preço de cada eletrodoméstico que o casal comprou?

ITSUO NAKASHIMA

x ——— preço do liquidificador

$5 \cdot x$ ——— cinco vezes o preço do liquidificador

$5 \cdot x + 510$ ——— o preço do fogão

$2 \cdot (5 \cdot x + 510)$ ——— o preço da geladeira

O casal comprou:

$$\underbrace{\text{um liquidificador,}}_{x}\quad \underbrace{\text{um fogão}}_{+\,5 \cdot x + 510}\quad \text{e}\quad \underbrace{\text{uma geladeira}}_{+\,2 \cdot (5 \cdot x + 510)}\quad \text{por}\quad \underbrace{\text{R\$ 3762,00}}_{=\,3762}.$$

Equação: $x + 5 \cdot x + 510 + 2 \cdot (5 \cdot x + 510) = 3762$

Resolvendo a equação:

$$x + 5 \cdot x + 510 + 2 \cdot (5 \cdot x + 510) = 3762$$

$$x + 5 \cdot x + 510 + 10 \cdot x + 1020 = 3762$$

$$16 \cdot x + 1530 = 3762$$

$$16 \cdot x = 3762 - 1530 \text{ ——— } 16 \cdot x = 2232$$

$$x = \frac{\cancel{2232}^{279}}{\cancel{16}_{2}} = \frac{279}{2}$$

$$\mathbf{x = \underbrace{139{,}50}_{\text{preço do liquidificador}}}$$

preço do fogão ——— $5 \cdot x + 510 = 5 \cdot 139{,}50 + 510 = 1207{,}50$

preço da geladeira ——— $2 \cdot (5 \cdot x + 510) = 2 \cdot 1207{,}50 = 2415{,}00$

O casal pagou R$ 139,50 pelo liquidificador, R$ 1207,50 pelo fogão e R$ 2415,00 pela geladeira.

Números e soluções de problemas

Uma situação-problema pode envolver números naturais, números inteiros positivos ou negativos, ou, ainda, números racionais positivos ou negativos.

Exemplos:

- Quantas pessoas há na fila desta fotografia?

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

MANOEL NOVAES/PULSAR IMAGENS

Se a resposta a essa pergunta for obtida por meio de uma equação, a **raiz** poderá ser a solução do problema proposto, desde que ela seja um **número natural** ou um **número inteiro positivo**.

- Na equação que está no quadro ao lado, a letra **x** representa a altura de uma pessoa em centímetros.

$$3 \cdot (x + 1) = x - 362$$

Resolvendo a equação obtém-se $x = -179{,}5$ que, apesar de ser solução da equação, não poderá ser a solução do problema porque uma medida é um número racional positivo.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

34. A casa de seu José fica em um terreno retangular com 84 metros de perímetro. O comprimento desse terreno é o triplo da largura. Quais são as medidas dos lados do terreno onde está a casa de seu José?
Comprimento: 31,5 m; largura: 10,5 m.

35. Em uma corrida, a velocidade média alcançada por um avestruz excede a de um cavalo em 2 quilômetros por hora. A diferença entre o triplo da velocidade média do avestruz e o dobro da do cavalo é de 76 quilômetros por hora. Qual é a velocidade média que cada um deles consegue atingir?

PETER TITMUSS/ALAMY/LATINSTOCK

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Cavalo: 70 quilômetros por hora; avestruz: 72 quilômetros por hora.

36. Eu tenho 18 anos e meu primo, 24. Daqui a quantos anos a soma das nossas idades será igual a um século? 29 anos.

Pista: x ———— tempo em anos
18 + x ———— minha idade daqui a x anos
24 + x ———— idade do meu primo daqui a x anos

37. Entre motos e carros, estão estacionados em uma garagem 50 veículos. A quantidade de motos é o triplo da quantidade de carros. Quantas motos estão nessa garagem? Problema sem solução.

38. A soma de três números naturais consecutivos é igual a 1 020. Quais são esses números? 339, 340, 341

Pista: **n** ———— número natural

n e n + 1 ———— são números consecutivos

39. Adivinhe se puder! "Pensei em um número. Somei 10 e multipliquei o resultado por 2. Subtraí 12 e o resultado foi 38. Em que número pensei?"

Taís resolveu assim:

$$\text{número} \xrightarrow{+\,10} \square \xrightarrow{\cdot\,2} \square \xrightarrow{-\,12} 38$$

$$15 \xleftarrow{-\,10} 25 \xleftarrow{:\,2} 50 \xleftarrow{+\,12} 38$$

Resposta: "Você pensou no número 15".

Milena resolveu de outro modo:

Frases	*"Pensei em um número"*	*"Somei 10"*	*"(...) multipliquei o resultado por 2"*	*"Subtraí 12"*	*Resultado*
Expressão algébrica	x	x + 10	(x + 10) · 2	(x + 10) · 2 − 12	38
Equação	(x + 10) · 2 − 12 = 38				

a) Resolva a equação que Milena escreveu. Verifique se as duas encontraram o mesmo resultado. $x = 15$

b) Os dois procedimentos estão corretos? Explique o que cada uma delas pensou.
Sim. Taís usou as operações inversas e Milena resolveu equacionando o problema.

Desafio

FAÇA NO CADERNO

Um problema que mais parece uma charada!

É o problema que vovô Antônio propôs aos seus netos.

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

• Junte-se a um colega e resolva este desafio. R$ 75,00.

Equação com denominadores

Ao explorar equações desse tipo, não há necessidade de enfatizar as muito extensas, com as quais os alunos podem ter eventuais dificuldades devido ao cálculo algébrico ainda precoce. Além disso, o tema será retomado em anos posteriores.

Frações aparecem também em equações e, quando isso ocorre, podemos aplicar tudo o que já sabemos sobre elas até este momento.

Exemplo:

A metade de um número adicionada a seus $\frac{3}{4}$ corresponde à diferença entre 10 e $\frac{5}{8}$ do mesmo número. Qual é esse número?

Representando por x o número que procuramos:

x	número a ser obtido
$\frac{x}{2} + \frac{3 \cdot x}{4}$	soma da metade do número com $\frac{3}{4}$ do número
$10 - \frac{5x}{8}$	diferença entre 10 e $\frac{5}{8}$ do número

Equação: $\frac{x}{2} + \frac{3 \cdot x}{4} = 10 - \frac{5 \cdot x}{8}$

Essa equação apresenta termos com denominadores.

Equações como essa podem ser resolvidas de várias maneiras. Uma possibilidade muito comum é reduzir todos os seus termos a um mesmo denominador e eliminá-lo, multiplicando ambos os membros da equação pelo denominador.

Resolução

$$\underbrace{\frac{x}{2} + \frac{3 \cdot x}{4} = 10 - \frac{5 \cdot x}{8}}_{\text{Equação inicial}} \xrightarrow{\text{m.m.c. }(2,\,4,\,8)\,=\,8} \frac{4 \cdot x + 2 \cdot 3 \cdot x}{8} = \frac{8 \cdot 10 - 1 \cdot 5 \cdot x}{8}$$

$$\cancel{8}^{1} \cdot \frac{4 \cdot x + 6 \cdot x}{\cancel{8}_{1}} = \frac{80 - 5 \cdot x}{\cancel{8}_{1}} \cdot \cancel{8}^{1}$$

Multiplicando os dois membros por 8.

$$4 \cdot x + 6 \cdot x = 80 - 5 \cdot x$$

Isolamos **x** no 1º membro da equação.

$$4 \cdot x + 6 \cdot x + 5 \cdot x = 80$$

$$15 \cdot x = 80$$

$$x = \frac{\cancel{80}^{16}}{\cancel{15}_{3}} = \frac{16}{3}$$

Portanto, o número é $\frac{16}{3}$.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

40. Resolva as equações deste exercício e responda: Quais delas têm como raiz um número inteiro negativo? Quais são essas raízes?

a) $\frac{13 - y}{8} = \frac{3 \cdot y}{4} - 1$

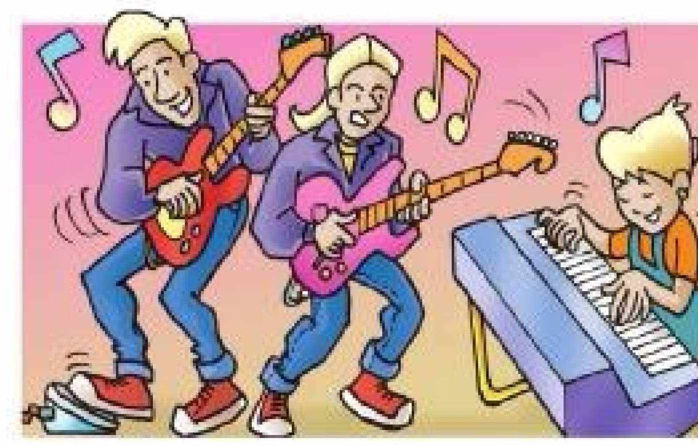
c) $\frac{x - 3}{4} = \frac{4 + 2 \cdot x}{6}$

b) $\frac{4 \cdot z - 3}{15} - 1 = \frac{2 \cdot z}{3}$

d) $\frac{1}{2} - \frac{3 \cdot (1 + t)}{4} = -\frac{t}{3}$

a) $y = 3$ Raízes com inteiros negativos: itens b e c
b) $z = -3$ Raízes negativas inteiras: $z = -3$ e $x = -17$
c) $x = -17$
d) $t = -\frac{3}{5}$

41. O J. J. R. Trio é uma banda e tanto! Ela é formada pelos irmãos João, Júlia e Renato, cujas idades somam 33 anos. Júlia tem metade da idade de Renato, e João, 3 anos a mais que o dobro da idade de Júlia. Quantos anos tem cada um deles? João: 15 anos; Júlia: 6 anos; Renato: 12 anos.



FRANCISCO VILACHÁ

42. Do salário que recebe, João poupa certa quantia, com metade desse valor ele paga o aluguel e esses dois valores compõem o seu salário. Se João ganha R$ 4 380,00 qual é a quantia que ele poupa? R$ 2 920,00.

43. Com a quantia que Alice possui, adicionada à terça parte dessa quantia, ela poderá comprar um aparelho de som que custa R$ 1 000,00. Quantos reais tem Alice? R$ 750,00.

Investigue e explique

FAÇA NO CADERNO

Em um parque de diversões, um palhaço disse que uma urna contém 108 bolas vermelhas, amarelas ou azuis e dá uma pista sobre a quantidades dessas bolas.

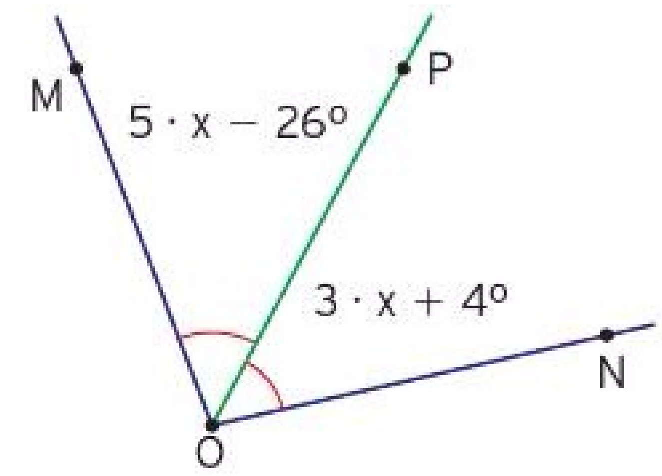
HAGAQUEZART ESTÚDIO

- A informação que o palhaço deu sobre o número de bolas de cada cor está correta? Explique sua resposta. Não. Resposta possível: Porque 10 + 20 + 60 é igual a 90, e não 108.
- Quantas bolas de cada cor há nessa urna? 12 vermelhas, 24 azuis, 72 amarelas.
- Se o palhaço retirar, sem olhar, uma bola dessa urna, ele terá mais chances de retirar uma bola vermelha ou azul? Explique por quê. Azul, porque há mais bolas azuis do que vermelhas.
- Qual a cor da bola que tem mais chances de ser retirada dessa urna, sem olhar? Explique por quê. Amarela, porque há mais bolas dessa cor do que de qualquer outra cor.

Equações, geometria e medidas

Muitas situações que envolvem figuras geométricas podem ser resolvidas por meio de equações.

Exemplo:



Na figura ao lado, a semirreta $\overrightarrow{OP}$ é bissetriz do ângulo **$M\hat{O}N$**.

Qual é o valor de x?

Qual é a medida de $M\hat{O}N$?

Como $\overrightarrow{OP}$ é bissetriz de $M\hat{O}N$, as medidas de $M\hat{O}P$ e $P\hat{O}N$ são iguais.

$$5 \cdot x - 26° = 3 \cdot x + 4°$$

Resolvendo essa equação de 1º grau, temos:

$$5 \cdot x - 3 \cdot x = 4° + 26° \text{ —— } 2 \cdot x = 30° \text{ —— } x = 15°$$

Substituindo **x** por 15° em $5 \cdot x - 26°$, temos a medida de $M\hat{O}P$:

$$5 \cdot x - 26° = 5 \cdot 15° - 26° = 75° - 26° = 49°$$

Logo, med $M\hat{O}N = 2 \cdot 49° = 98°$

A medida do ângulo $M\hat{O}N$ é 98°.

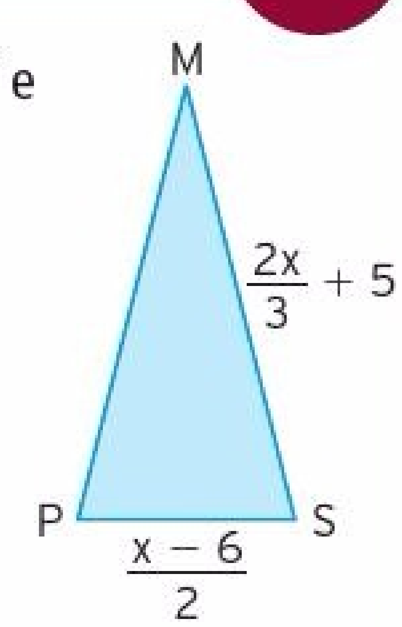
Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

44. O perímetro do triângulo representado pela figura ao lado mede 29 cm e os lados $\overline{MP}$ e $\overline{MS}$ têm medidas iguais.

a) Qual é o valor de x? 12 cm.

b) Qual é a medida de cada lado desse triângulo? 13 cm; 13 cm; 3 cm.

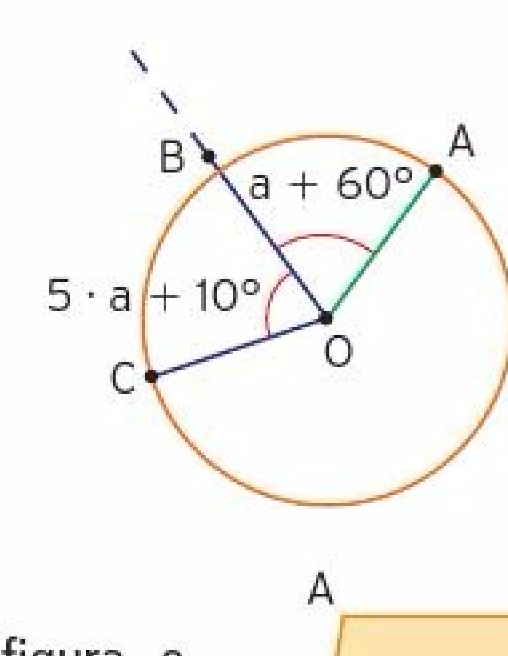


45. Nesta circunferência, considere que os ângulos centrais $B\hat{O}A$ e $C\hat{O}B$ são congruentes, e **a** representa uma medida em graus.

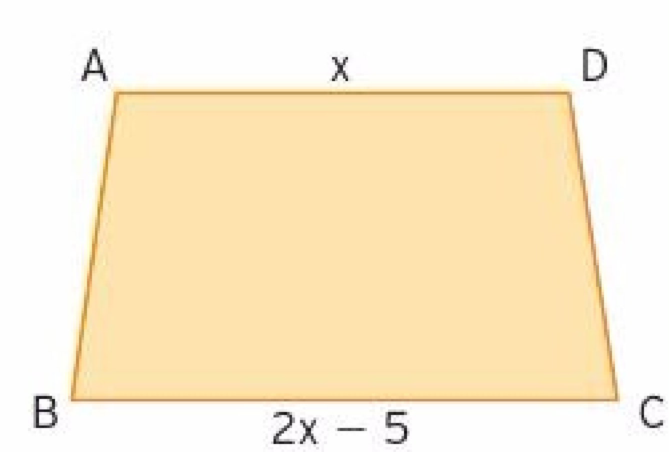
a) O que é a semirreta $\overrightarrow{OB}$ em relação a $C\hat{O}A$? Bissetriz.

b) O que ocorre com as medidas de $C\hat{O}B$ e $B\hat{O}A$? São iguais.

c) Qual é a medida de $C\hat{O}A$? 145°



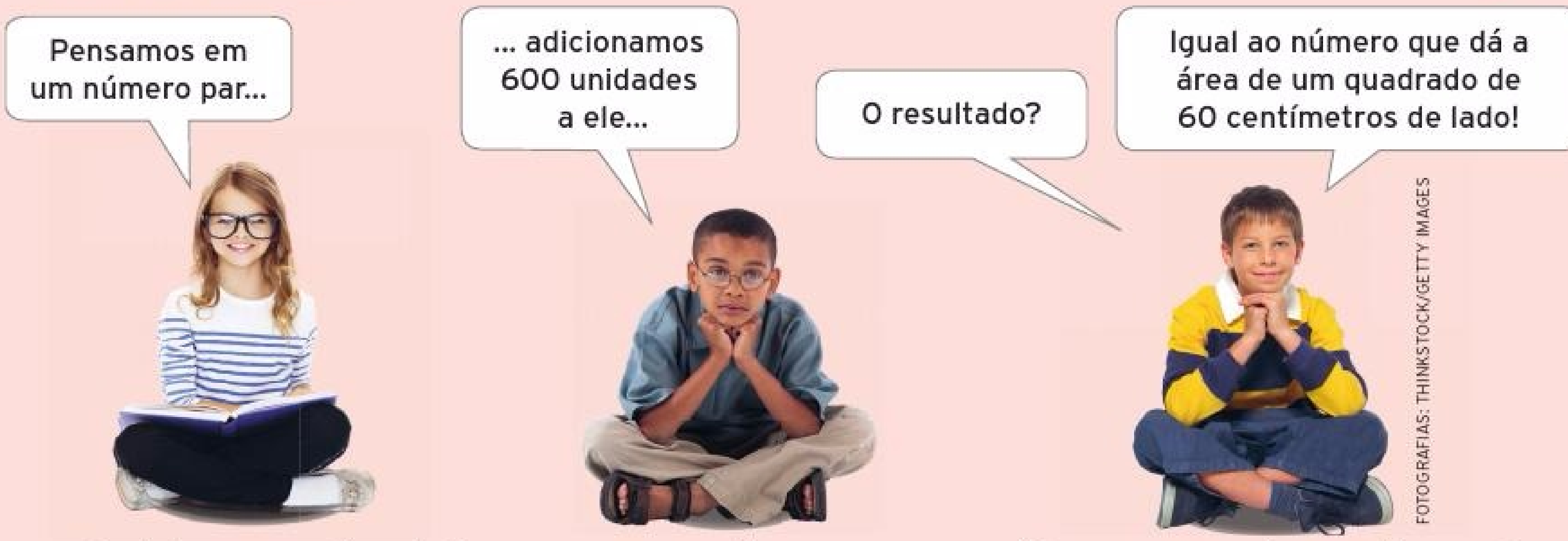
46. Neste trapézio, as medidas das bases estão indicadas na figura, e seu perímetro é 50 cm. Quanto medem seus lados, se $\overline{AB}$ e $\overline{DC}$ têm medidas iguais e cada um excede em 2 cm a medida da base menor?
10,2 cm; 12,2 cm; 12,2 cm e 15,4 cm.



Desafio

FAÇA NO CADERNO

Qual é o número?



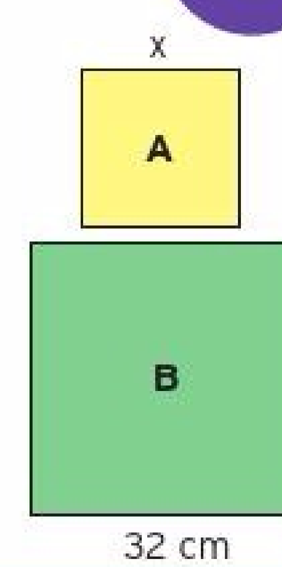
FOTOGRAFIAS: THINKSTOCK/GETTY IMAGES

- Qual das expressões abaixo representa, em linguagem matemática, o que as crianças disseram? a
  a) $2 \cdot n + 600 = 3600$
  b) $(2 \cdot n + 1) + 600 = 3600$
- Qual foi o número pensado pelas crianças? 1500

Exercícios complementares

FAÇA NO CADERNO

47. O perímetro do quadrado representado por **B** excede em 52 cm o perímetro do quadrado representado por **A**.



a) Qual é o perímetro do quadrado **A**? 76 cm.

b) Qual é a medida do lado do quadrado **A**? 19 cm.

c) Qual é a área do quadrado **A**? 361 cm².

48. O Rio Nilo, com seus cerca de 6 695 km, era considerado o maior rio do mundo. Pesquisas mais recentes mostram que o rio mais extenso do mundo é o Rio Amazonas, que nasce no lago Lauricocha, em meio ao planalto de La Raya. A maior bacia fluvial fica, também, no Brasil: é a bacia Amazônica.

MÁRIO YOSHIDA

Fonte: Leda Ísola; Vera Caldini. *Atlas geográfico Saraiva*. São Paulo: Saraiva, 2004.

a) A metade da diferença entre a extensão do Rio Amazonas e a do Nilo é 86,5 km. Qual é a extensão do Rio Amazonas? 6868 km.

b) O Amazonas é um rio de planície, pois é navegável desde sua foz, no oceano Atlântico, até a cidade de Iquitos, no Peru. O número de seus afluentes, mais de 7 mil, permite a navegação numa extensão impressionante. Aproximadamente o dobro dessa extensão excede em 6 000 km uma volta em torno da Terra pela linha do Equador. Sabendo-se que uma volta em torno da Terra pela linha do Equador equivale a cerca de 40 000 km, qual é a extensão navegável na bacia Amazônica? 23000 km, aproximadamente.

49. Resolva estas equações, em que x representa um número racional:

a) $-2 \cdot (3 - x) + 8 - 5 \cdot (2 \cdot x - 1) = -3 \cdot x$ $\frac{7}{5}$

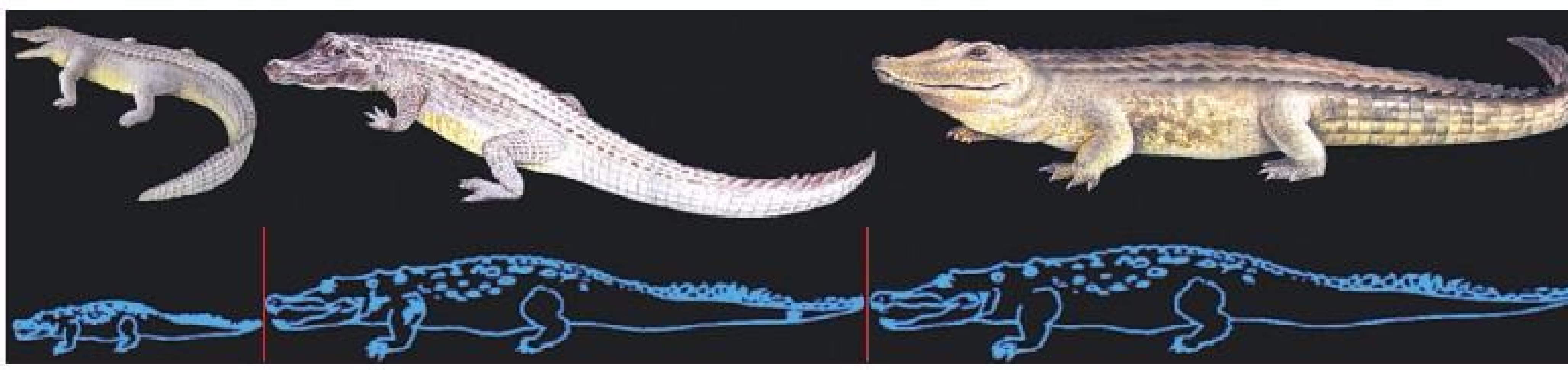
b) $\frac{3}{8} - \frac{x}{3} = -\frac{5 \cdot x}{6} + \frac{3}{4}$ $\frac{3}{4}$

c) $\frac{2 \cdot (1 - x)}{3} - \frac{1}{2} = \frac{x}{6}$ $\frac{1}{5}$

50. Leia o texto e responda à questão.

Diferenças entre répteis:

- jacaré do Pantanal;
- jacaré-açu da Amazônia;
- crocodilo da Ásia e da Austrália.



CONCEITOGRAF

O maior réptil do planeta, o crocodilo que vive na Ásia e na Austrália, mede até 1 metro a mais que o jacaré-açu da Amazônia. Este pode mudar de cor para se camuflar. O jacaré do Pantanal é quase inofensivo ao ser humano e atinge até 0,5 metro a mais que um terço do comprimento do jacaré-açu.

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Quantos metros atinge cada um desses répteis, aproximadamente?
Crocodilo: 7 m; jacaré-açu: 6 m; jacaré do Pantanal: 2,5 m.

Desafio

FAÇA NO CADERNO

Um caso de amor

Lilavati é o nome de um livro escrito pelo famoso matemático indiano Bhaskara. Essa obra trata de vários temas da Matemática e propõe diversas situações-problema.

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

FRANCISCO VILACHÃ

"Partiu-se um colar durante um jogo amoroso. Um terço das pérolas caiu no chão, um quinto ficou no leito, um sexto foi encontrado pela mulher e um sexto foi achado pelo homem; quatro pérolas ficaram no fio. Diga-me: de quantas pérolas se compunha o colar?" 30 pérolas.

Leitura

A evolução de alguns símbolos

Segundo a História, com o tempo, as palavras de uso frequente na Álgebra começaram a ser abreviadas. Posteriormente, as abreviaturas foram se desprendendo da ideia original e se transformando em símbolos, que deixaram de ter ligação com as operações que representavam.

Por exemplo, a adição, na Idade Média, era indicada pela palavra ***plus*** por extenso; mais tarde unicamente pela inicial ***p*** com um til em cima: $\tilde{p}$. Esse símbolo se transformou por fim em **+**.

A subtração era indicada pela palavra ***minus***, por extenso, e, mais tarde, apenas pela inicial ***m*** com um til em cima: $\tilde{m}$. Com o tempo, a letra desapareceu, ficando apenas o til, que se transformou em um traço: **–**.

O **símbolo de igualdade** apareceu pela primeira vez em 1557, em um livro editado na Inglaterra. Nele, o autor Robert Recorde explica que escolheu um **par de linhas paralelas** de mesmo comprimento para indicar **duas coisas iguais**, pois **duas coisas não podem ser mais iguais** do que duas retas paralelas.

1. *14.ze. + .15.Q = 71.Q.*
2. *20.ze. — .18.Q = .102.Q.*
3. *6.z + 10ze = 9.z — 10ze + 213.Q.*
4. *9.ze + 192.Q. = 10z + 108Q — 19ze*
5. *18.ze + 24.Q. = 8.z. + 2.ze.*
6. *34z — 12ze = 40ze + 480Q — 9.z*

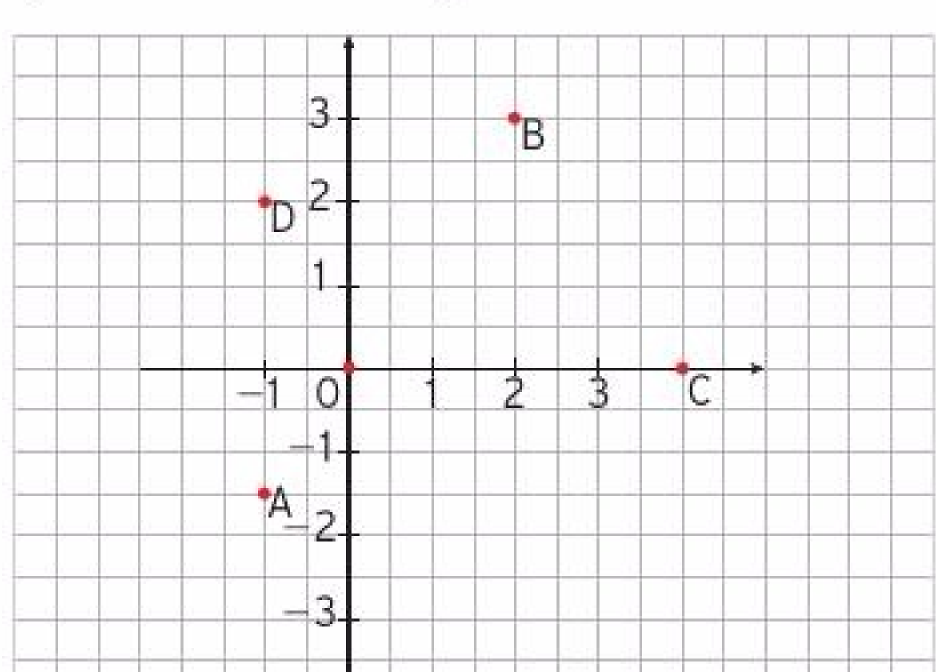
Disponível em: <https://sites.google.com/site/profwivianne/curiosidades/a-origem-dos-sinais-matematicos>. Acesso em: 20 out. 2014.

Revisão cumulativa e testes

FAÇA NO CADERNO

1. Em uma emissora de televisão, o jornal diário noturno começa às 19 h 45 min e termina às 20 h 20 min. Quanto tempo dura esse jornal? 35 minutos.

2. Copie em uma folha de papel quadriculado esta figura:



a) Qual é a localização dos pontos A, B, C, D e O? A (–1; –1,5); B (2; 3); C (4; 0); D (–1; 2); O (0; 0)

b) Desenhando o ângulo $D\hat{A}C$, qual será a sua medida? 70°

c) A semirreta $\overrightarrow{AB}$ é bissetriz de $D\hat{A}C$? Justifique sua resposta. Não, porque med $D\hat{A}B \neq$ med $B\hat{A}C$.

3. Responda a estas questões considerando a expressão $2 \cdot n$, em que n representa um número inteiro positivo.

a) As expressões $2 \cdot n$ e $2 \cdot n + 2$ representam números pares ou ímpares? Números pares.

b) Para $n = 11$, as expressões $2 \cdot n$ e $2 \cdot n + 2$ representam números pares consecutivos? Sim.

c) Represente três números pares consecutivos quaisquer dentre os quais um seja $2 \cdot n$. $2n$, $2n + 2$, $2n + 4$.

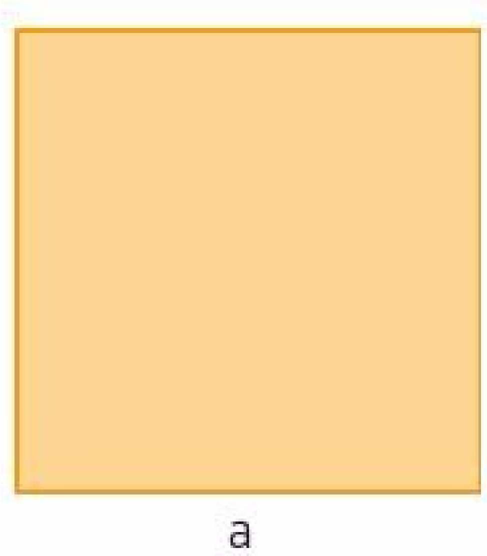
4. Qual é o número que, adicionado à sua sétima parte, é igual a 19? $\frac{133}{8}$

5. Desenhe:

- duas retas perpendiculares a e b;
- uma terceira reta c, perpendicular à reta b.

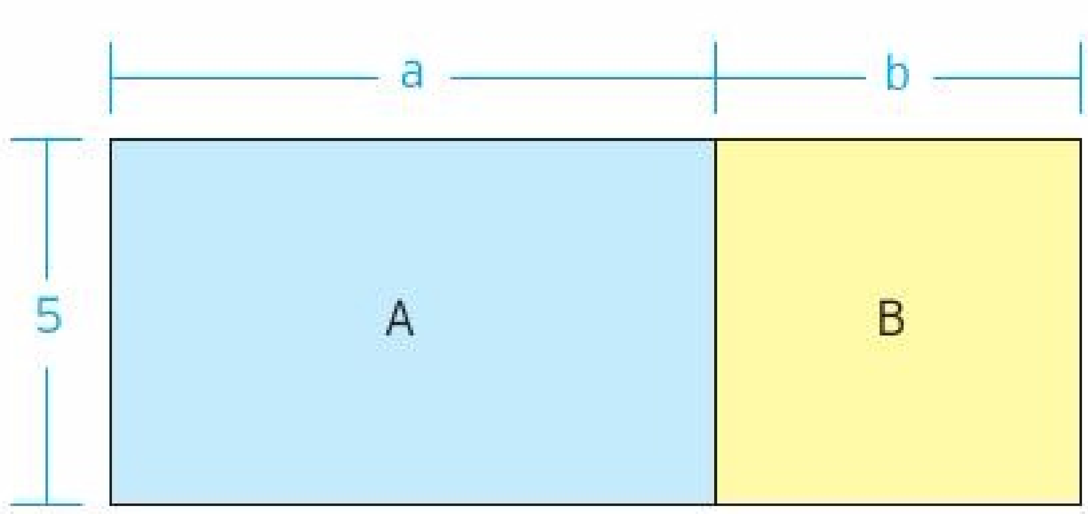
O que se pode concluir a respeito da posição da reta a em relação à reta c? **a** é paralela a **c**.

6. Neste quadrado, **a** representa uma medida em metros.



Para que valor de **a** o perímetro desse quadrado é igual a $\frac{1}{8}$ de 1 000 metros? 31,25 m.

7. Nesta figura, as letras **a** e **b** representam medidas em metros:



A região **A** tem área igual a 60 m² e a soma das áreas das regiões **A** e **B** é 81 m². Qual é o valor de b? 4,2 m.

8. A soma de três números consecutivos é 954. Quais são esses números? 317, 318 e 319

9. Associe as letras correspondentes aos cálculos da coluna **A** aos números que representam os resultados na coluna **B** e anote os pares formados. a e 4; b e 3; c e 2; d e 1

A	B
a) $-12 + (-29) - (-3)$	1) -27
b) $(-123) \times (-1) + 17$	2) 11
c) $(-125) : (+25) + (-256) : (-16)$	3) 140
d) $-27 + (-23 + 7 \cdot 3 + 2)$	4) -38

10. Uma empresa tem três sócias. Uma delas recebeu a metade do lucro anual, a outra recebeu um terço desse lucro mais R$ 24 000,00, e a terceira sócia recebeu R$ 76 000,00. Qual foi o lucro da empresa? R$ 600 000,00.

11. De seu saldo bancário, Gabriela retirou a metade do que tinha, depois um terço do restante e ainda ficou com R$ 200,00. Qual era o saldo inicial de Gabriela? R$ 600,00.

12. O valor de $|-100 + 25|$ é: b

a) -75

b) 75

c) 100

d) 125

13. A forma simplificada da expressão $3 \cdot (x + 5) - 2 \cdot x + 15$ é: c

a) $3x$

b) $3x + 15$

c) $x + 30$

d) $x + 10$

14. O diâmetro de uma circunferência de 3,5 cm de raio mede: a

a) 7 cm

b) 3,5 cm

c) 3 cm

d) 1,75 cm

15. Em certo restaurante, as pessoas pagam uma quantia fixa de R$ 3,00 mais R$ 20,00 por 1 quilograma de comida consumida em cada prato. Quantos gramas de comida consumiu um cliente que gastou R$ 18,20?

Uma equação que pode representar esse problema é: d

a) $3 + n \cdot 20{,}00 = 18{,}20$

b) $3 + n \cdot 2{,}00 = 18{,}20$

c) $3 + n \cdot 0{,}20 = 18{,}20$

d) $3 + n \cdot 0{,}02 = 18{,}20$

16. (Encceja) Em uma fábrica de parafusos, Carlos ficou encarregado de observar o funcionamento da máquina na produção. Ele organizou a seguinte tabela, em que t representa o tempo em minutos e p representa a quantidade de parafusos produzida nesse tempo:

t (min)	1	2	3	4	...
p	3	6	9	12	...

A produção p em um determinado tempo t pode ser expressa por: b

a) $p = 5 \cdot t$ c) $p = 5 + t$

b) $p = 3 \cdot t$ d) $p = 3 + t$

17. (Encceja) Considere a balança em equilíbrio representada na figura.

O número representado pela letra x é: d

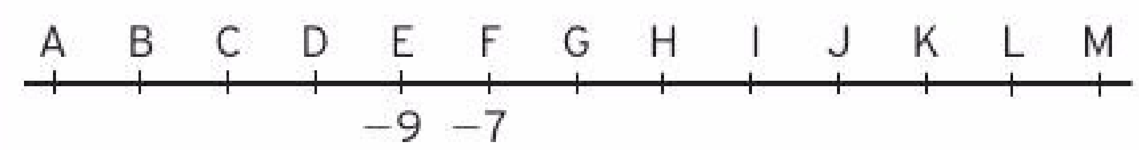
a) 7 b) 6 c) 5 d) 4

18. (Vunesp) Os alunos de uma determinada escola responderam a uma pesquisa sobre a preferência por tipos de uniforme que gostariam de usar. As opções foram: (I) camiseta branca de manga curta + calça jeans; (II) camiseta branca sem manga + calça jeans; (III) camiseta branca de manga curta + calça de moletom e (IV) sem preferência. Os resultados da pesquisa são apresentados no gráfico a seguir.

Sabendo-se que nessa pesquisa cada aluno pôde escolher somente uma opção, então o número total de alunos que escolheram as opções II e III corresponde a um percentual, sobre o total de alunos, de: e

a) 20% b) 25% c) 30% d) 40% e) 50%

19. (Prova Brasil) Na reta numérica da figura, o ponto **E** corresponde ao número inteiro -9 e o ponto **F**, ao inteiro -7.



Nessa reta, o ponto correspondente ao inteiro zero estará: c

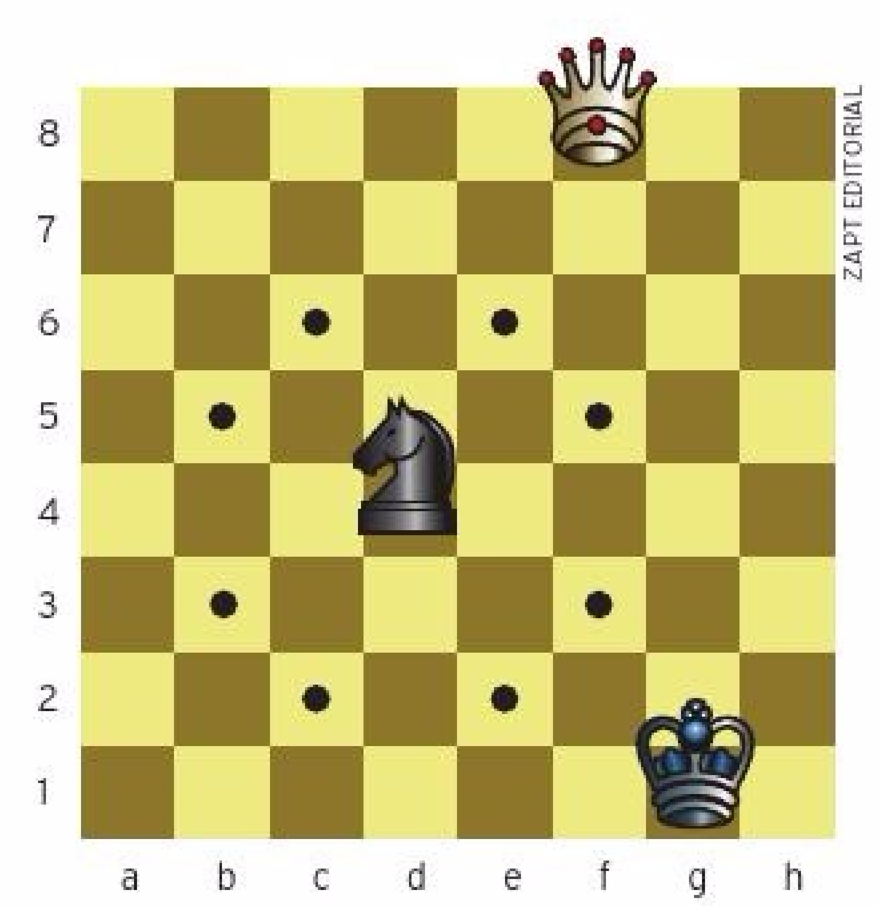
a) sobre o ponto M.

b) entre os pontos L e M.

c) entre os pontos I e J.

d) sobre o ponto J.

20. (Saeb) Num tabuleiro de xadrez, jogamos com várias peças que se movimentam de maneiras diferentes. O cavalo se move para qualquer casa que possa alcançar com movimento na forma de "L", de três casas. Na posição da figura, os pontos marcados representam as casas que o cavalo poderá alcançar, estando na casa d4. Dentre as casas que o cavalo poderá alcançar, partindo da casa f5 e fazendo uma única jogada, estão: a



a) g3 ou d6.

b) h5 ou f3.

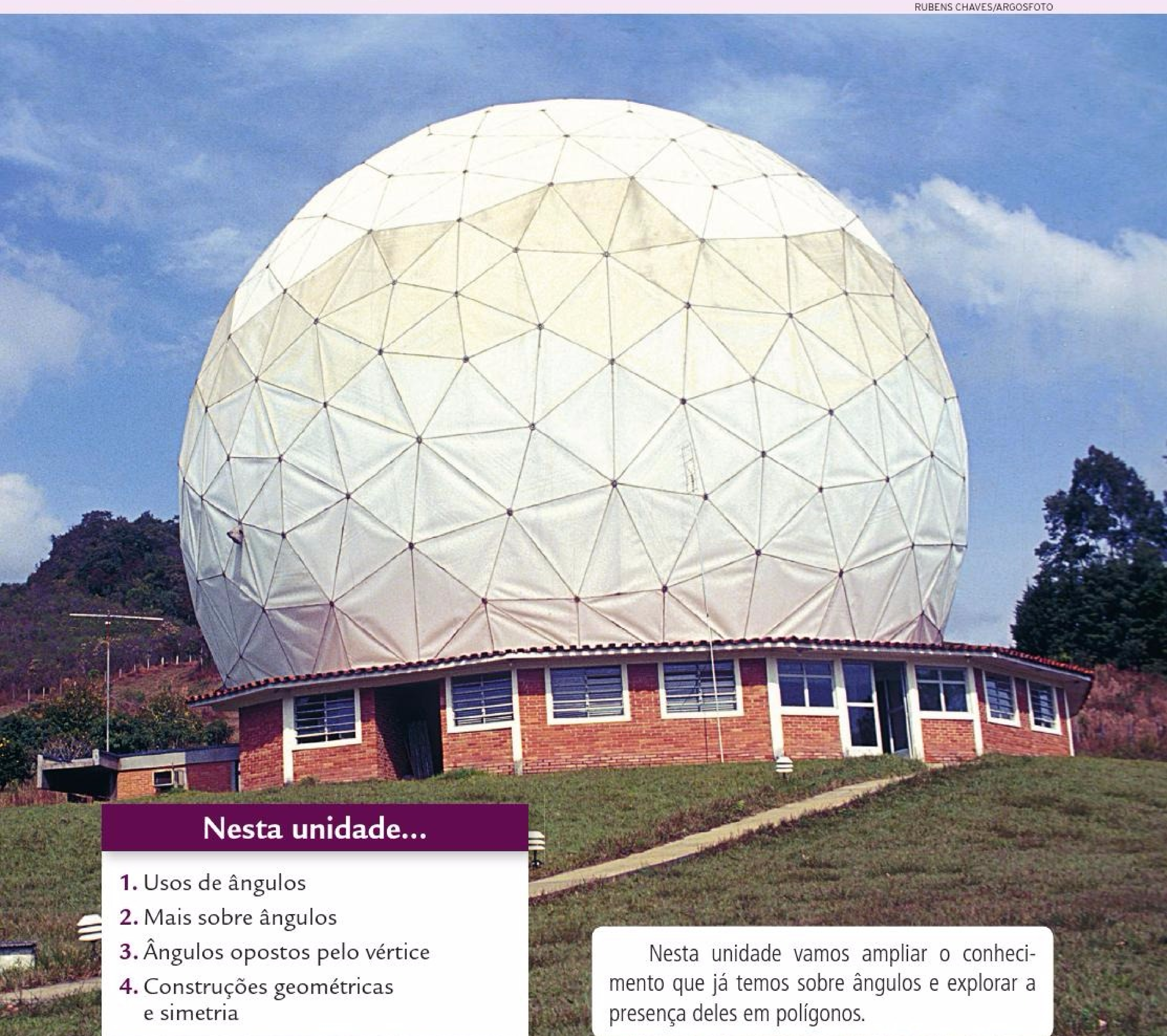
c) h7 ou d7.

d) d3 ou d7.

UNIDADE 7

Aprendendo mais sobre ângulos

RUBENS CHAVES/ARGOSFOTO



Nesta unidade...

1. Usos de ângulos
2. Mais sobre ângulos
3. Ângulos opostos pelo vértice
4. Construções geométricas e simetria

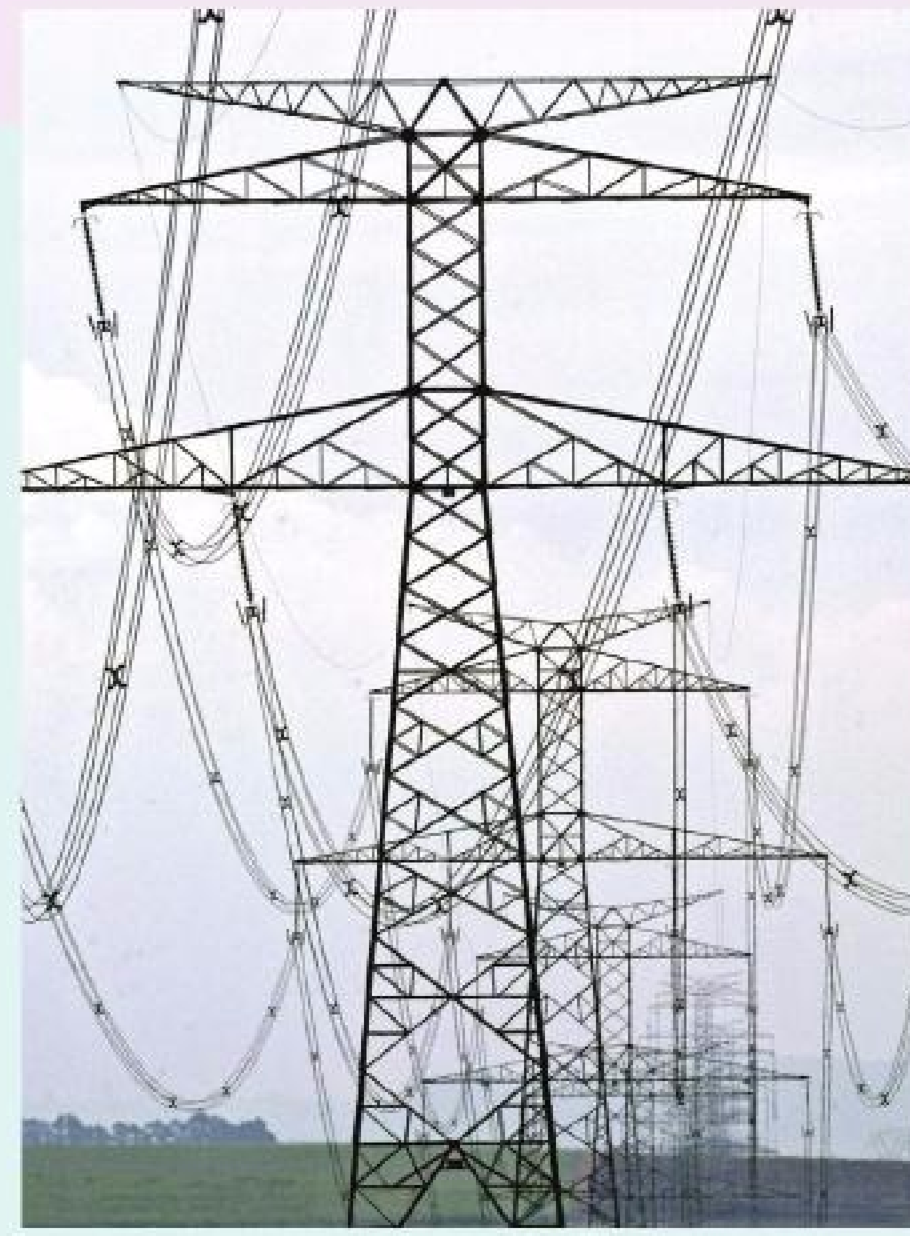
Nesta unidade vamos ampliar o conhecimento que já temos sobre ângulos e explorar a presença deles em polígonos.

Redoma do Rádio Observatório de Itapetinga, Atibaia (SP).

Quais são os usos que fazemos dos ângulos e dos polígonos?

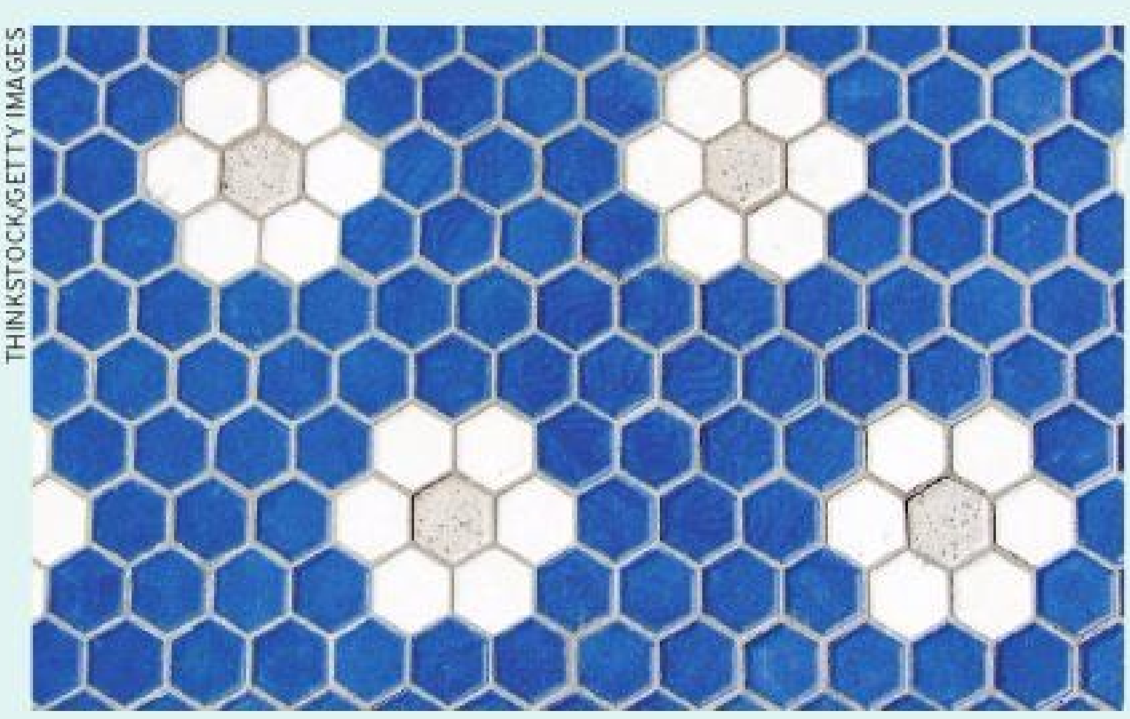
Na engenharia e na arquitetura, por exemplo, os ângulos e os polígonos estão presentes nas estruturas de sustentação das construções. Nas ciências físicas, encontramos aplicações no estudo da óptica, da acústica e da astronomia.

Ladrilhos, lajotas e azulejos combinados de diversas maneiras revestem os pisos e as paredes de casas e prédios. É possível que você já tenha reparado em algumas dessas combinações.

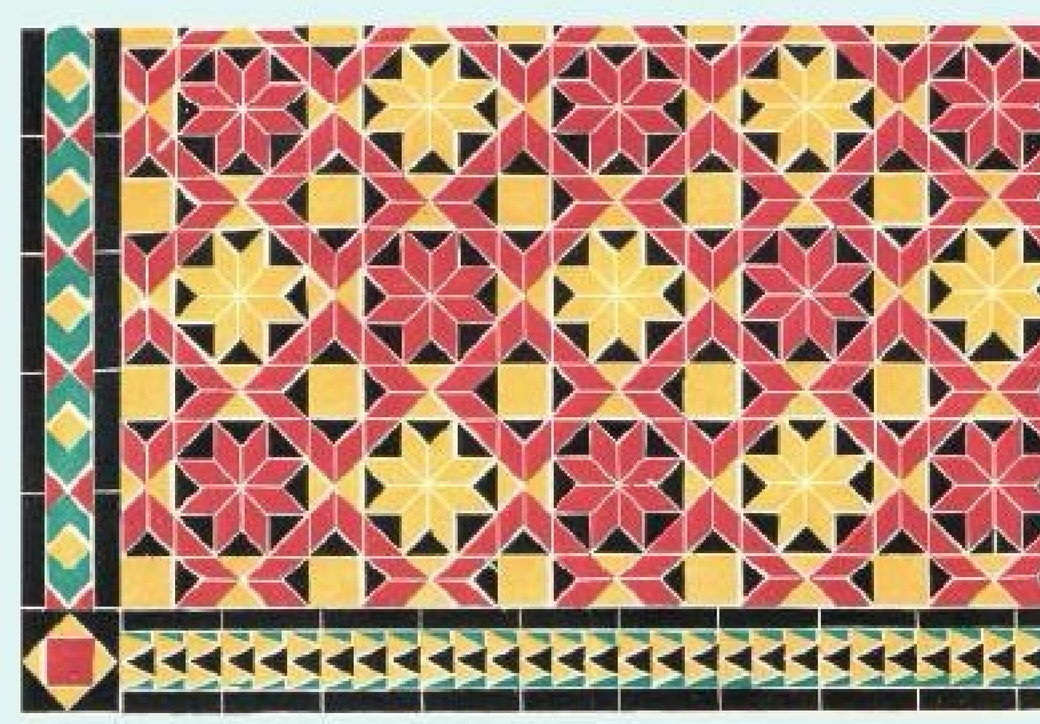


CAETANO BARREIRA/OLHAR IMAGEM

Torre de transmissão de energia elétrica, em Araras (SP).



THINKSTOCK/GETTY IMAGES



AMORET TANNER/ALAMY/LATINSTOCK

Ladrilhos compostos de polígonos.

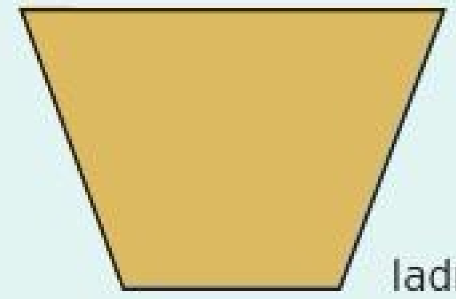
O que você já sabe?

Resposta possível: Ângulo agudo nos triângulos que aparecem nas formas triangulares da torre de transmissão; ângulo obtuso nos hexágonos que constituem o ladrilho à esquerda.

- Ângulos podem ser retos, agudos ou obtusos. Identifique, nas fotografias apresentadas, um ângulo agudo e mostre a um colega. Depois, faça o mesmo com um ângulo obtuso.
- Dê sua opinião: escolhendo apenas um dos ladrilhos abaixo é possível revestir uma parede retangular, juntando vários deles, sem deixar vãos. Qual desses ladrilhos deve ser escolhido?

Ladrilho 1.

ladrilho 1



ladrilho 2

1 Usos de ângulos

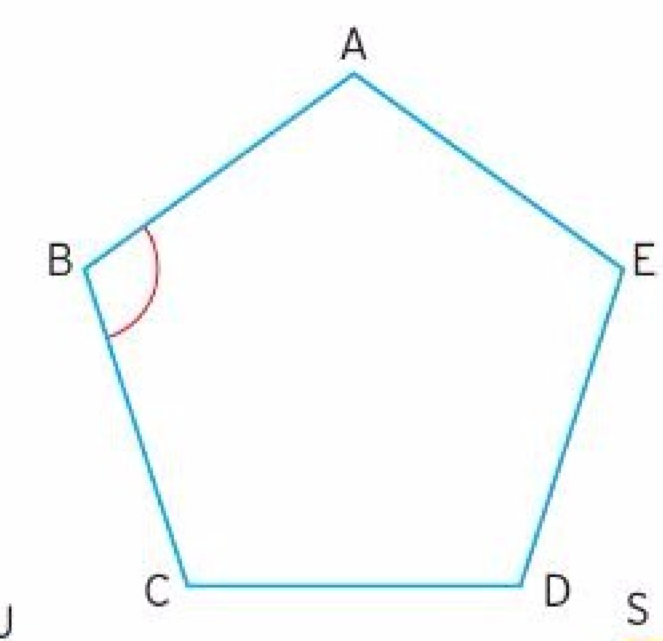
Ângulos de um polígono

Vamos começar pelos ângulos internos de um polígono:

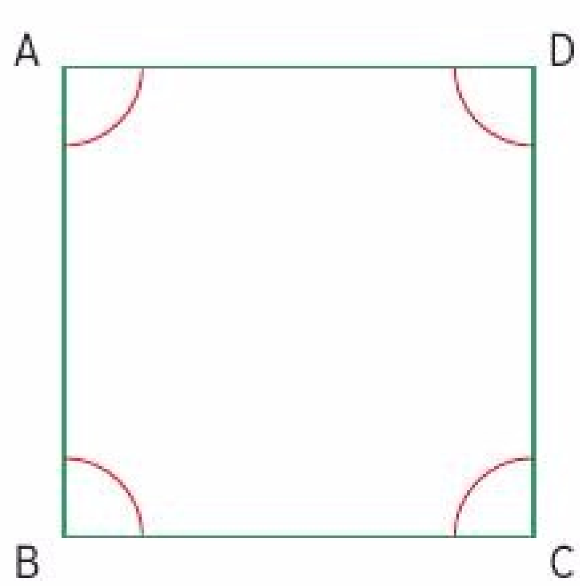
> **Ângulos internos** de um polígono são os ângulos formados por dois lados consecutivos, ou seja, dois lados com uma extremidade comum.

No pentágono ABCDE:

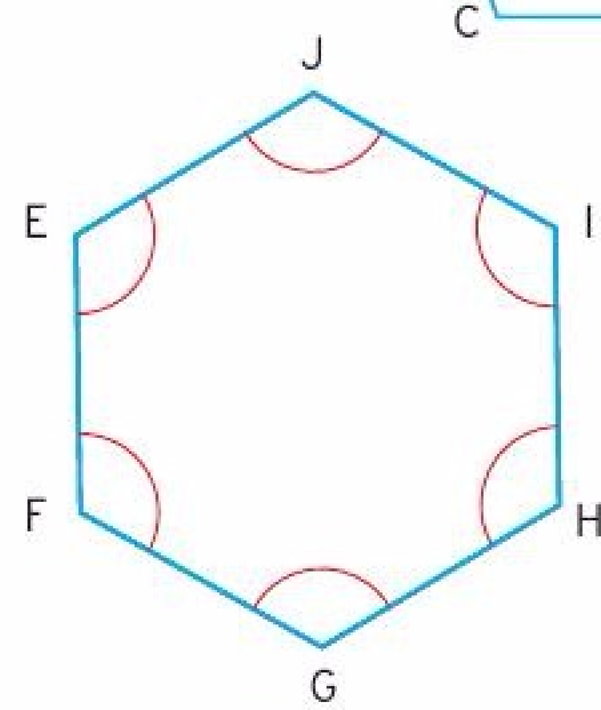
- $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são dois lados consecutivos.
- $A\hat{B}C$ ou $C\hat{B}A$ é um ângulo interno.



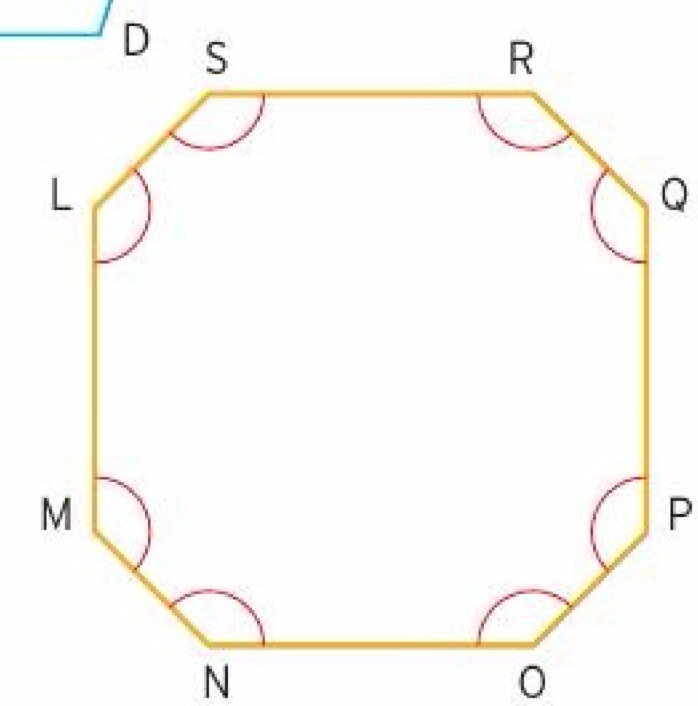
Exemplos:



Quadrilátero: possui 4 ângulos internos.



Hexágono: possui 6 ângulos internos.



Octógono: possui 8 ângulos internos.

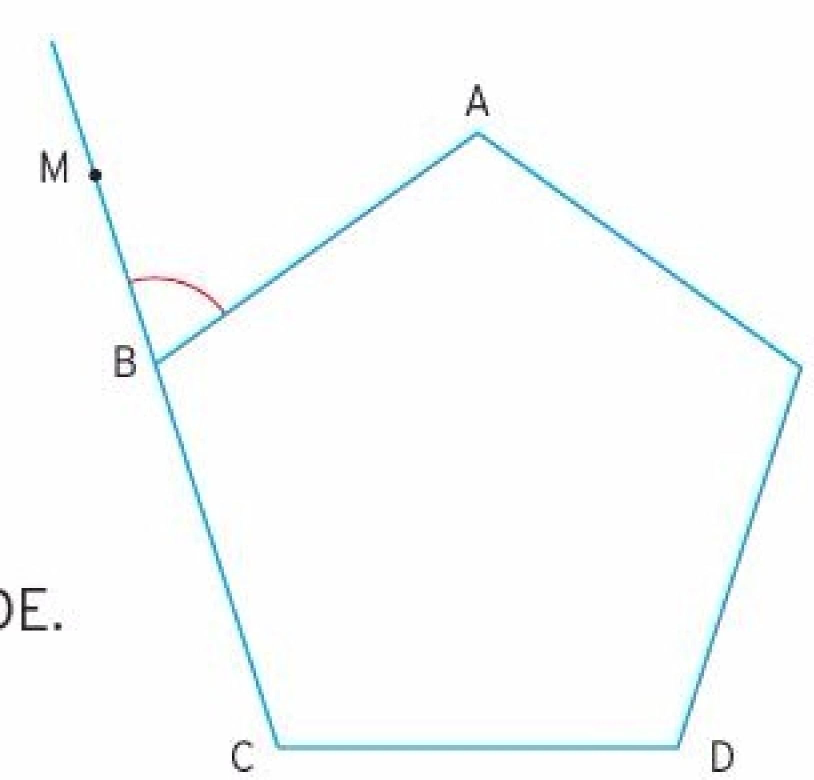
Agora, vamos tratar dos ângulos externos de um polígono:

> **Ângulos externos** de um polígono são os ângulos formados por um lado e o prolongamento do lado consecutivo a ele.

Neste texto vamos explorar apenas os polígonos convexos.

No pentágono ABCDE:

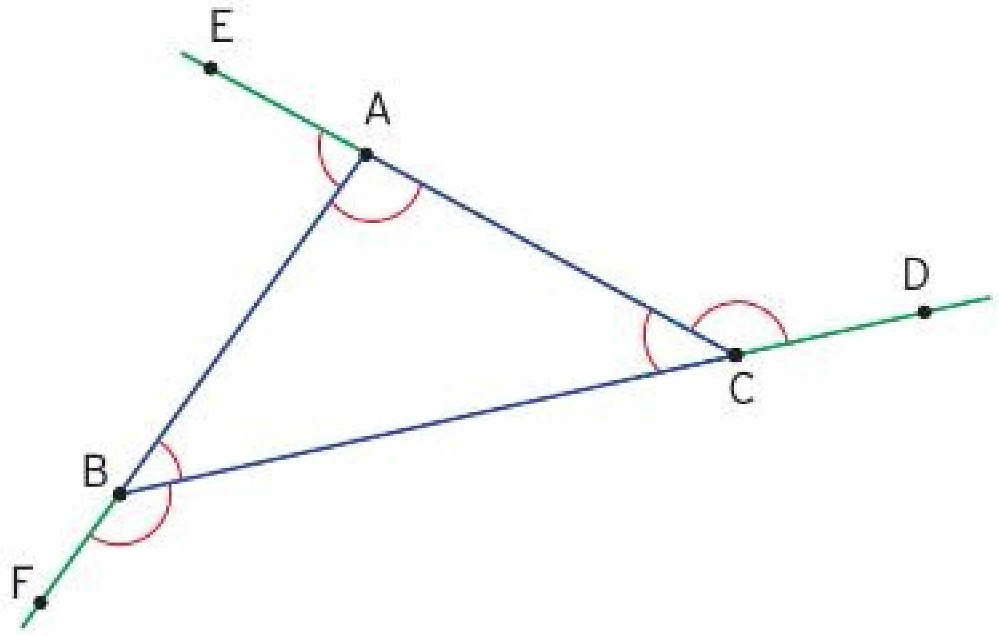
- $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são dois lados consecutivos.
- $\overrightarrow{CM}$ é o prolongamento do lado $\overline{BC}$.
- $A\hat{B}M$ ou $M\hat{B}A$ é um ângulo externo do pentágono ABCDE.



Ângulos de um triângulo

Um triângulo tem três ângulos internos e três ângulos externos.

Exemplo:



Ângulos internos:

$A\hat{B}C$, $B\hat{C}A$ e $C\hat{A}B$ ou $\hat{B}$, $\hat{C}$ e $\hat{A}$.

Ângulos externos:

$E\hat{A}F$, $F\hat{B}D$ e $D\hat{C}E$.

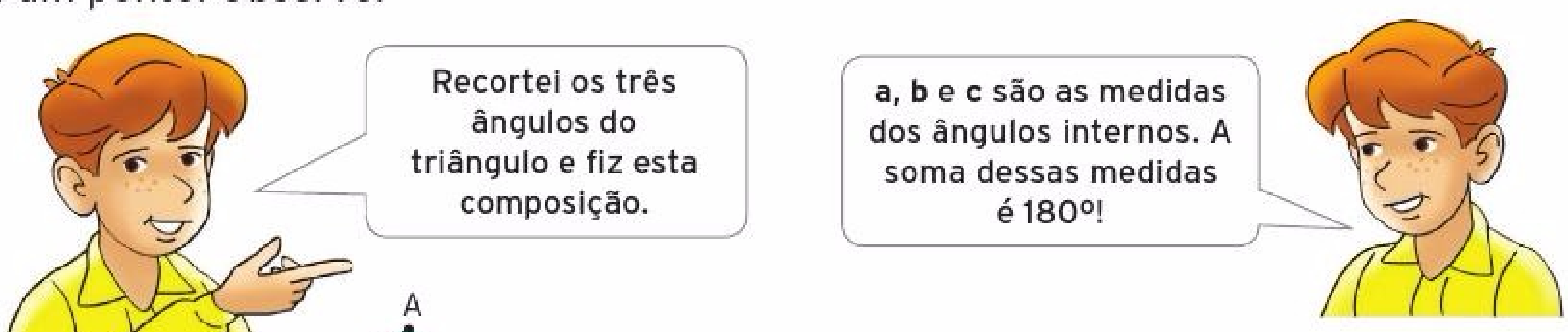
Soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo

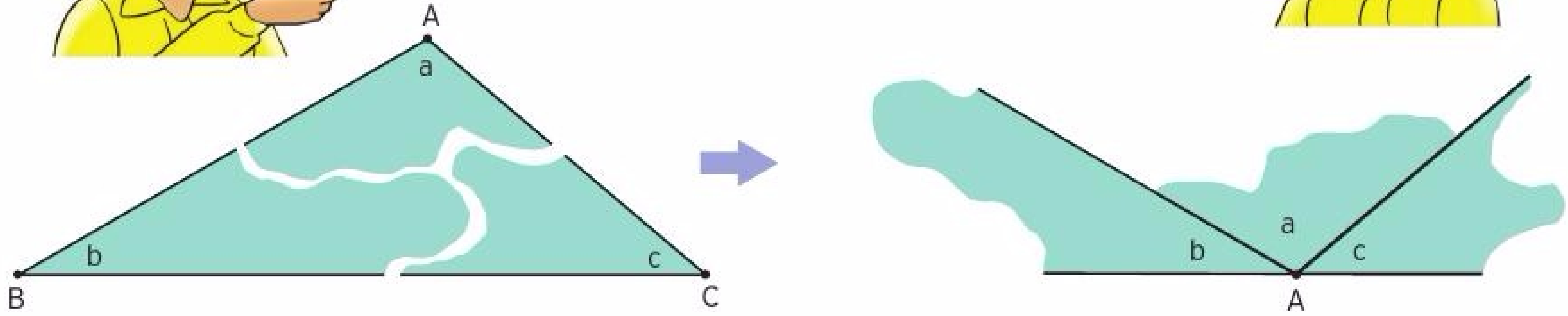
Proponha outras situações que envolvam dobraduras, nas quais os alunos possam trabalhar propriedades geométricas de maneira lúdica.

Leia a conversa entre Cida e Edu.

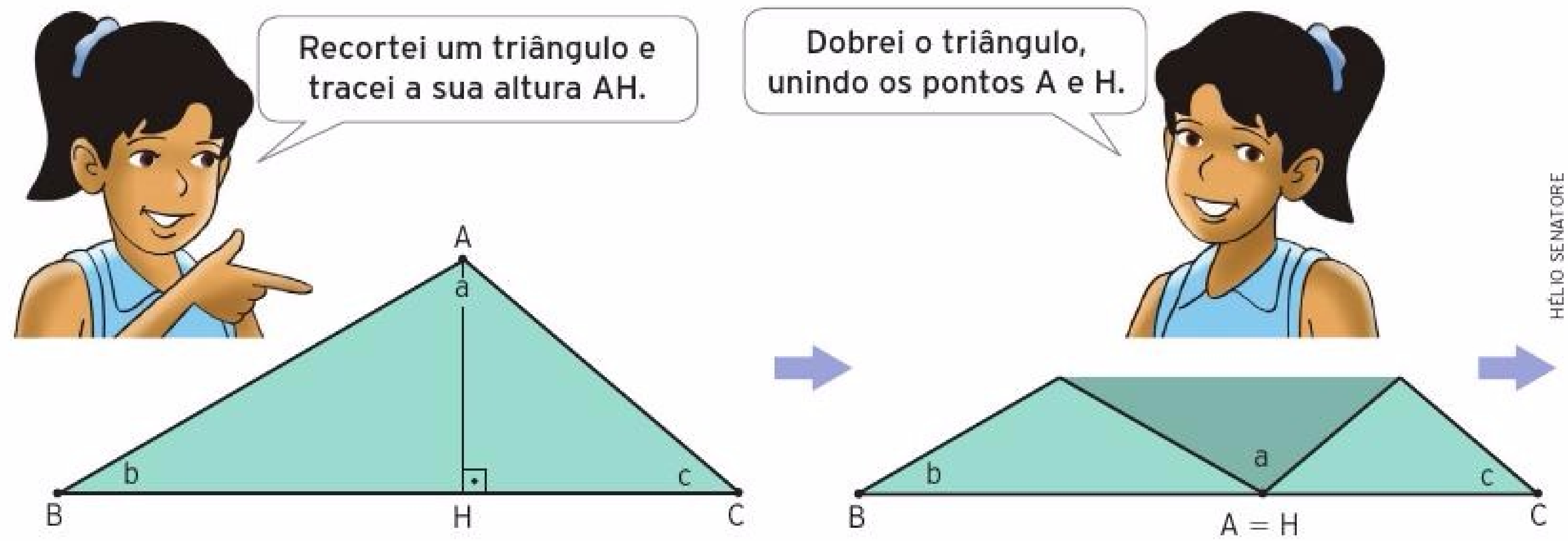
ILUSTRAÇÕES: HÉLIO SENATORE

Edu recortou um triângulo de papel, dividiu-o em três pedaços e reuniu os três vértices em um ponto. Observe:

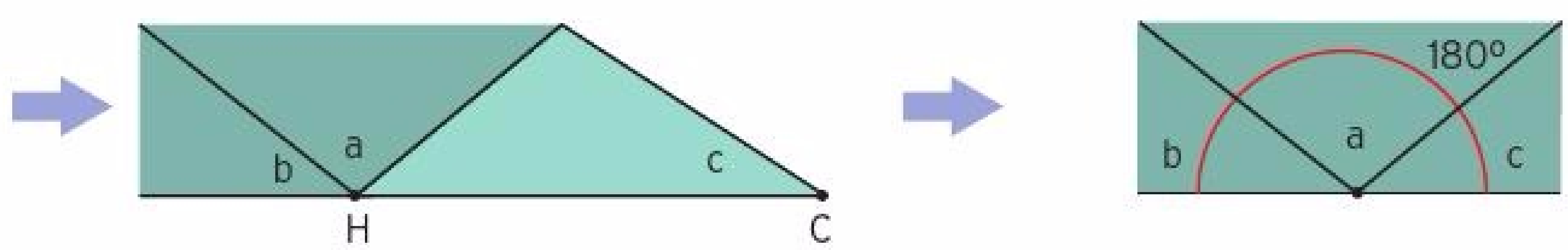




Cida chegou ao mesmo resultado por um caminho diferente:



Em seguida, Cida ajustou os vértices B e C ao ponto H.



Cida também obteve $\mathbf{a + b + c = 180º}$.

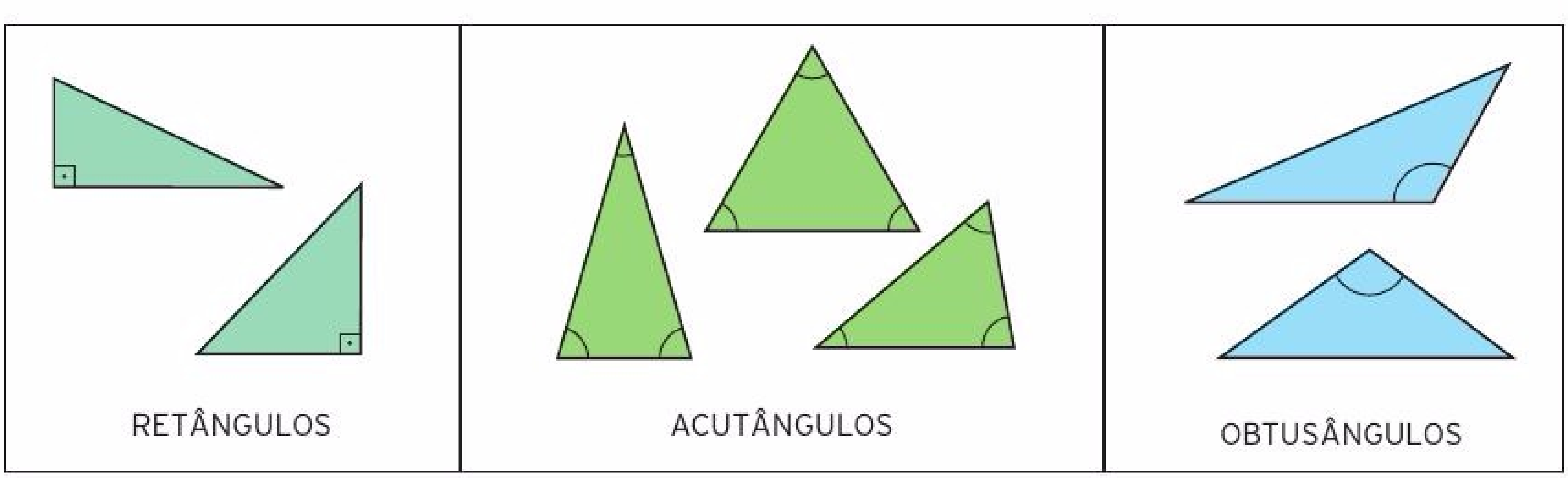
Os dois garotos encontraram 180º para a soma das medidas dos ângulos. Esse fato pode ser generalizado para todos os triângulos. A demonstração de tal propriedade será feita mais adiante.

Em qualquer triângulo, a soma das medidas dos ângulos internos é 180º.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

1. Os triângulos a seguir foram classificados de acordo com as medidas de seus ângulos.

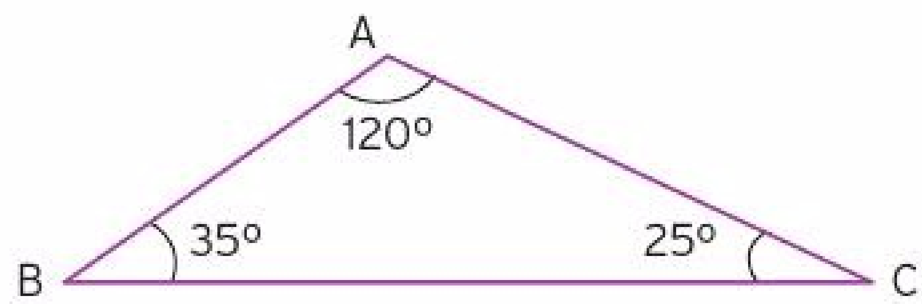


a) Que tipo de ângulo deve ter um triângulo para que ele seja um triângulo retângulo? Um ângulo reto.

b) Que tipo de ângulo deve ter um triângulo para que ele seja um triângulo obtusângulo? Um ângulo obtuso.

c) Desenhe em seu caderno três triângulos acutângulos e dois triângulos obtusângulos. Depois, mostre o seu trabalho para um colega. Resposta pessoal.

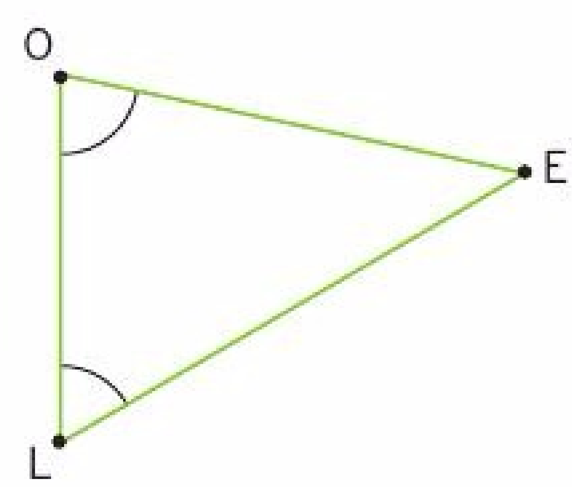
2. Copie o triângulo obtusângulo abaixo.



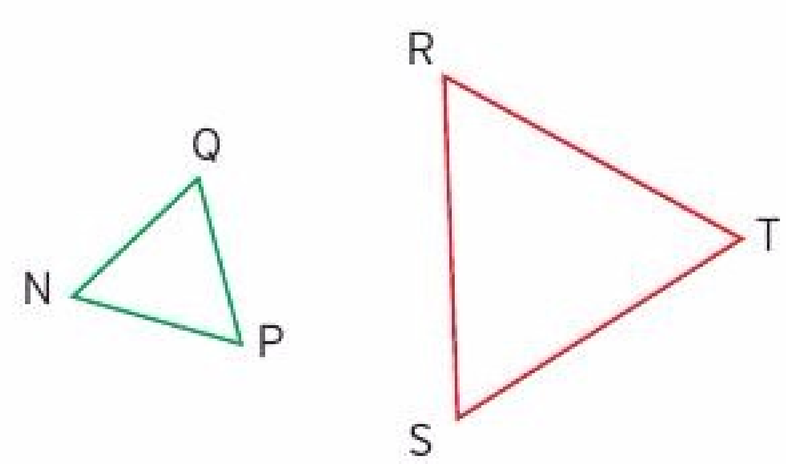
a) Trace a bissetriz do ângulo $B\hat{A}C$ e decomponha o triângulo em dois outros triângulos, $\triangle ABD$ e $\triangle ADC$, em que D é o ponto de cruzamento entre a bissetriz e $\overline{BC}$.
Veja resposta no final do livro.

b) Classifique os triângulos obtidos quanto às medidas dos ângulos. $\triangle ABD$: acutângulo, $\triangle ADC$: obtusângulo.

3. Neste triângulo, o ângulo $O\hat{L}E$ mede 60° e o ângulo $E\hat{O}L$, 78°. Qual é a medida do ângulo $L\hat{E}O$? 42°



4. Os triângulos NPQ e RST são equiláteros.



a) Quanto medem os ângulos internos de cada triângulo? 60°

b) Quanto mede cada ângulo interno de um triângulo equilátero qualquer? 60°

5. No triângulo ABC, o ângulo $\hat{B}$ mede o triplo do ângulo $\hat{C}$ e o ângulo $\hat{A}$ mede o dobro do ângulo $\hat{B}$. Quais as medidas dos ângulos do triângulo ABC?

a) Copie o quadro seguinte e complete-o escrevendo uma expressão algébrica para cada frase. A medida do ângulo $\hat{C}$ já está representada pela letra **m**.

Frase	Expressão algébrica
O ângulo $\hat{B}$ mede o triplo do ângulo $\hat{C}$.	$3 \cdot m$
O ângulo $\hat{A}$ mede o dobro do ângulo $\hat{B}$.	$6 \cdot m$
Medida do ângulo $\hat{C}$.	m

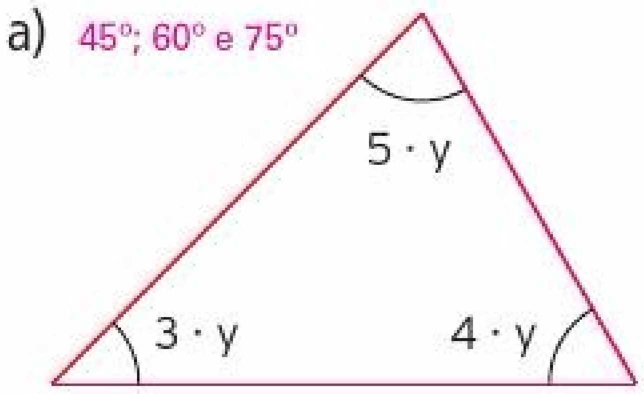
b) Escreva uma equação relacionando as medidas dos ângulos do triângulo ABC e resolva-a. $m \cdot 3 + m \cdot 6 + m = 180°$ ou $10 \cdot m = 180°$ e $m = 18°$

c) Agora, responda à questão proposta.
med $\hat{A}$ = 108° med $\hat{B}$ = 54° med $\hat{C}$ = 18°

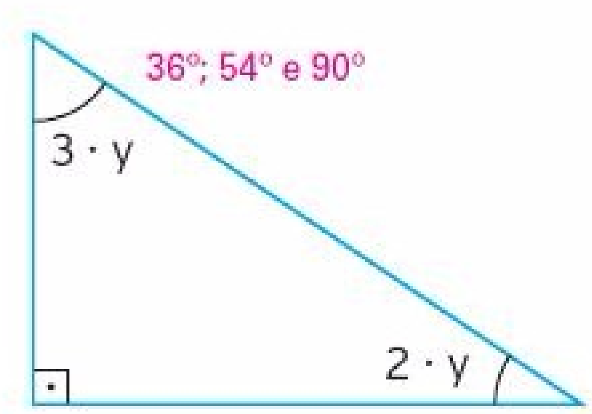
6. Nestes triângulos, a letra **y** representa uma medida em grau. Em cada triângulo, determine as medidas de seus ângulos.

Pista: escreva uma equação.

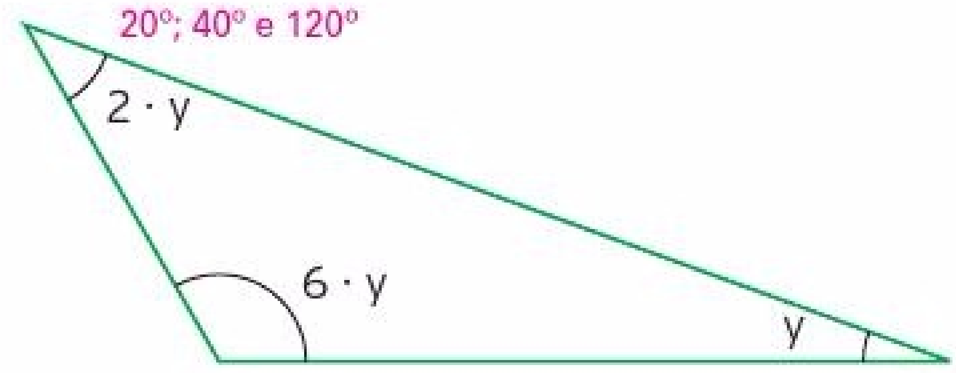
a) 45°; 60° e 75°



b) 36°; 54° e 90°

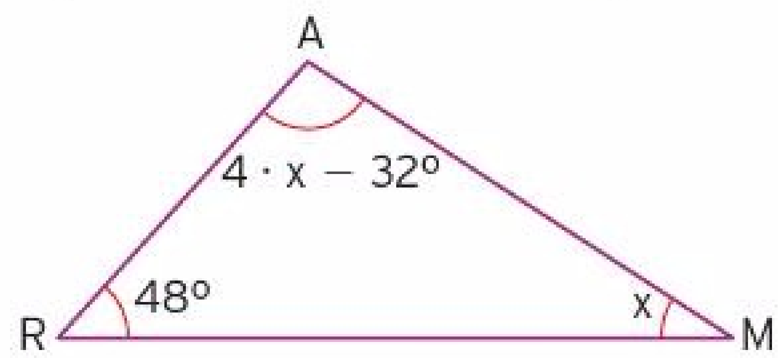


c) 20°; 40° e 120°



7. Um triângulo tem dois ângulos com medidas iguais. O ângulo com medida diferente tem 43° 18′. Qual é a medida dos ângulos congruentes desse triângulo? 68° 21′

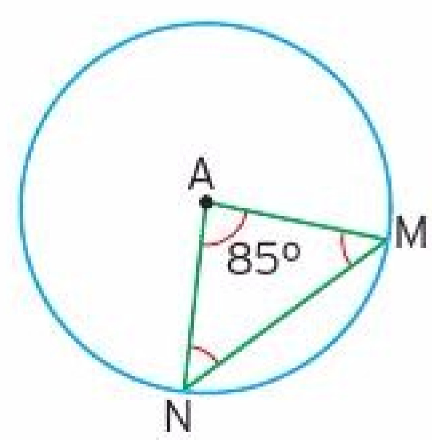
8. Observe os dados marcados no triângulo. A letra **x** representa uma medida em grau.



a) Qual é o valor de **x**? 32° 48′

b) Quais são as medidas de $A\hat{M}R$ e de $M\hat{A}R$? 32° 48′; 99° 12′

9. Nesta circunferência, o ponto **A** é o centro e $\overline{MN}$ é uma corda.



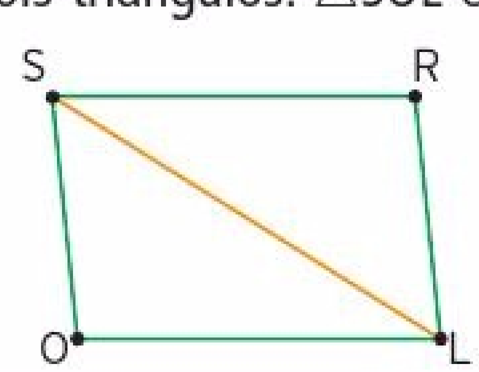
a) Os segmentos de reta $\overline{AM}$ e $\overline{AN}$ têm medidas iguais? Por quê?
Sim, porque são raios da circunferência.

b) Como o triângulo ANM pode ser classificado de acordo com as medidas de seus lados? Por quê?
Isósceles, porque $\overline{AM}$ e $\overline{AN}$ (raios) têm medidas iguais.

c) Quais são as medidas dos ângulos $A\hat{N}M$ e $N\hat{M}A$? med $A\hat{N}M$ = med $N\hat{M}A$ = 47° 30′

Pista: Os ângulos $A\hat{M}N$ e $M\hat{N}A$ são congruentes.

10. Nesta figura, traçando $\overline{SL}$, decompomos o paralelogramo SOLR em dois triângulos: $\triangle SOL$ e $\triangle SLR$. No triângulo SOL, a medida de $S\hat{O}L$ é o triplo da medida de $O\hat{L}S$, e $L\hat{S}O$ mede 20° a mais que $O\hat{L}S$.

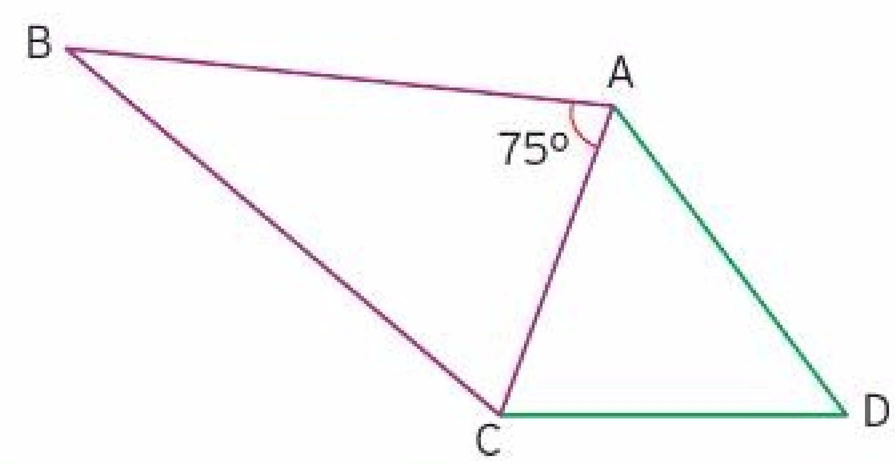


a) Quanto mede $O\hat{L}S$? 32°

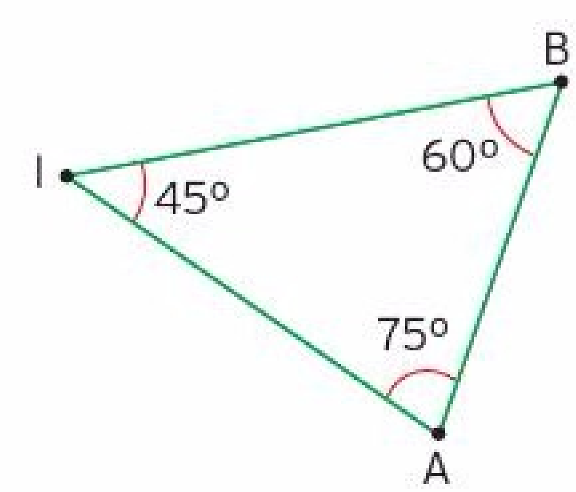
b) Qual é a medida do ângulo $S\hat{O}L$ do paralelogramo SOLR? 96°

11. Observe nesta figura dois triângulos: $\triangle ABC$ e $\triangle ACD$. A medida de $B\hat{C}A$ é o dobro da medida de $A\hat{B}C$. Os ângulos $A\hat{C}D$ e $B\hat{C}A$ são congruentes e $C\hat{D}A$ tem 17° a menos que $A\hat{C}D$. Quais são as medidas dos ângulos do triângulo ACD?

med $A\hat{C}D$ = 70°
med $C\hat{D}A$ = 53°
med $D\hat{A}C$ = 57°



12. Bia desenhou um triângulo como o da figura abaixo e Mauro resolveu desenhar um triângulo aumentando as medidas dos lados e mantendo as medidas dos ângulos.



a) Mauro conseguirá fazer esse desenho? Sim.

b) Se a resposta do item anterior for afirmativa, desenhe um triângulo como o de Mauro.
Resposta pessoal.

Troquem ideias e resolvam

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega, experimentem e discutam.

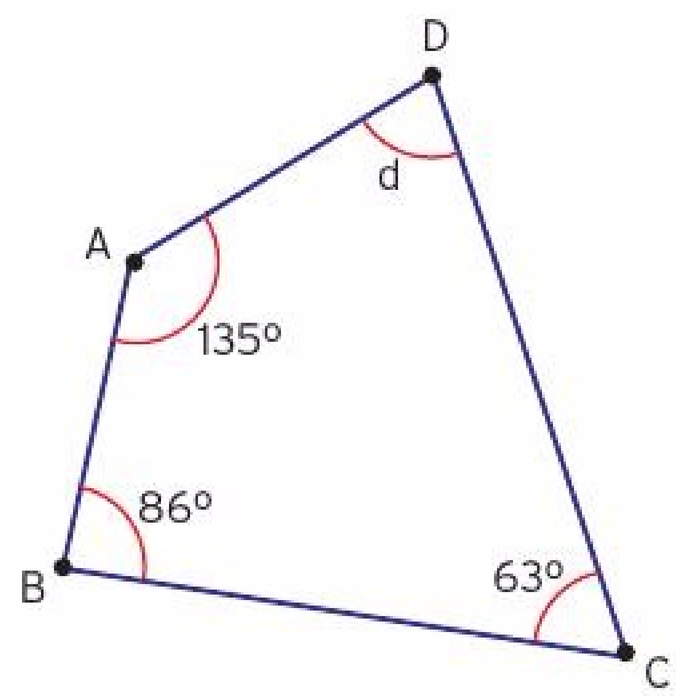
Verifiquem que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°, usando um dos métodos relatados no texto das páginas 171 e 172.

Desenhem dois triângulos quaisquer em uma folha de papel. Em um deles, recortem os três ângulos e façam uma composição, como fez Edu, e no outro dobrem as pontas do triângulo, como Cida.

Soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero

Explore outras formas de justificativas para determinar as medidas dos ângulos internos de um quadrilátero. Propicie também outras atividades que envolvam a decomposição de pentágonos e hexágonos em triângulos.

Para refletir e responder



Divida a figura em dois triângulos, pelo vértice D.

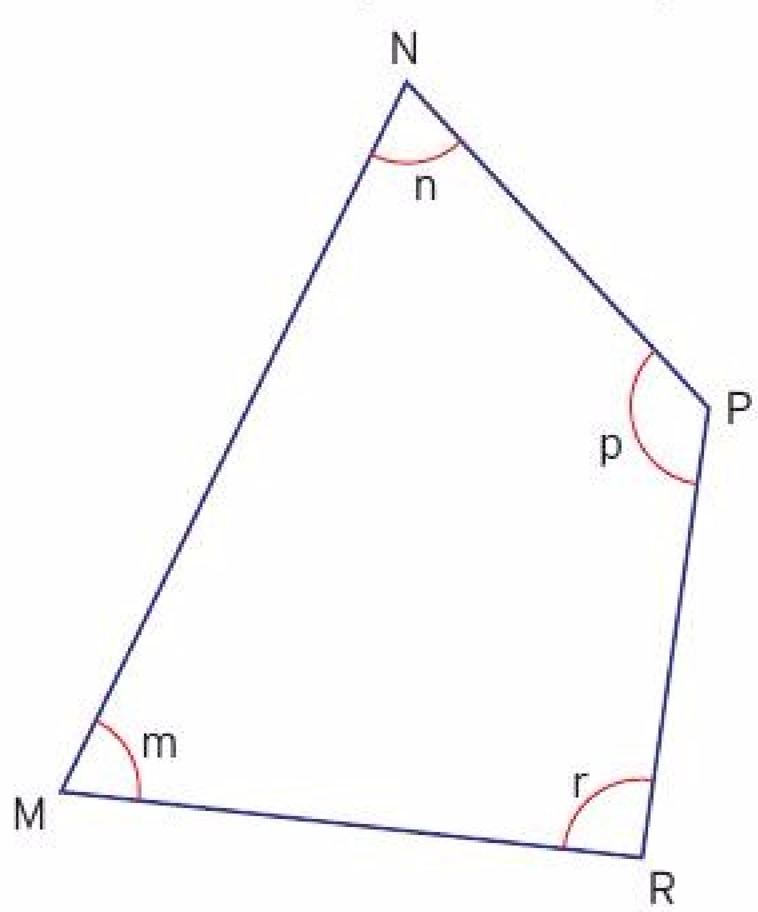
THINKSTOCK/GETTY IMAGES

- No quadrilátero acima, **d** é a medida em graus de $\hat{D}$. Seguindo a pista dada pela professora, é possível calcular o valor de **d**. Que tal tentar? 76°

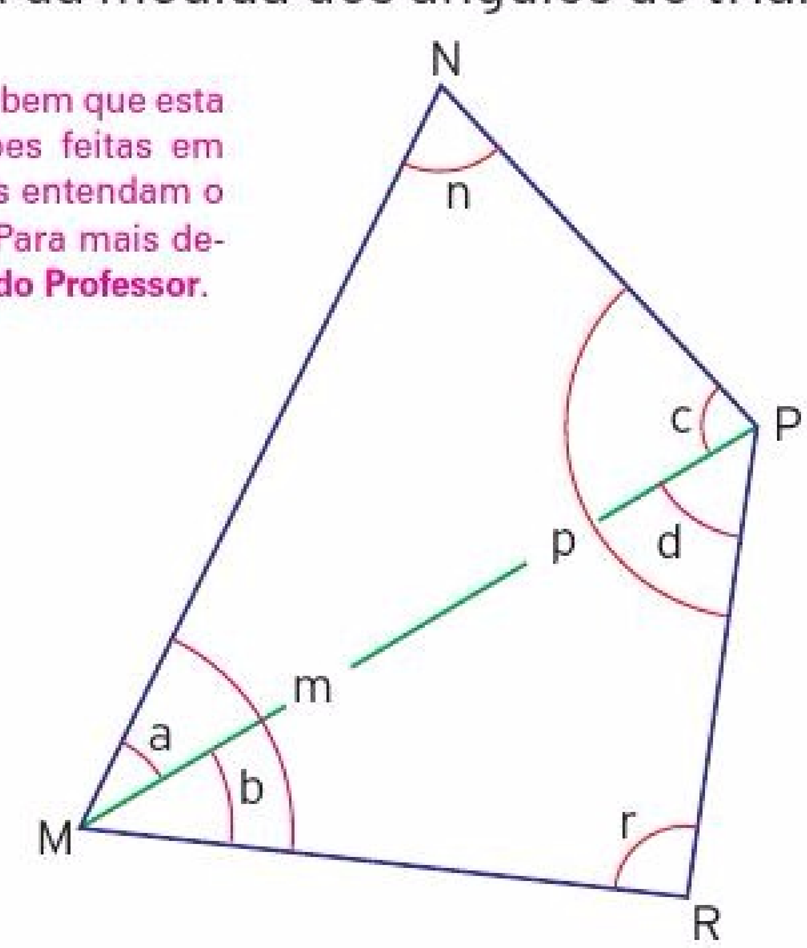
Oriente seus alunos durante o procedimento de cálculo da medida do ângulo $\hat{D}$ seguindo a pista dada.

Já sabemos que quadrilátero é um polígono com quatro lados e quatro ângulos internos.

Podemos calcular a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero. Para isso, seguimos a pista dada na situação acima e calculamos **m + n + p + r**, no quadrilátero MNPR abaixo, aplicando o que aprendemos sobre a soma da medida dos ângulos do triângulo.



Certifique-se de que os alunos percebem que esta é uma das primeiras demonstrações feitas em Geometria. É conveniente que todos entendam o significado de uma demonstração. Para mais detalhes, leia comentários no **Manual do Professor**.



O segmento de reta PM é uma **diagonal** de MNPR.

Note que: **a + b = m** e **c + d = p**

No triângulo MNP: $a + n + c = 180^\circ$

No triângulo MPR: $b + r + d = 180^\circ$

Então: $\underbrace{a + b}_{m} + n + r + \underbrace{c + d}_{p} = \underbrace{180^\circ + 180^\circ}_{360^\circ}$

$m + n + r + p = 360^\circ$

A soma das medidas dos ângulos internos de qualquer quadrilátero é 360º.

Usando essa propriedade, podemos resolver o problema proposto no início deste item.

$$135^\circ + 86^\circ + 63^\circ + \mathbf{d} = 360^\circ$$

$$284^\circ + \mathbf{d} = 360^\circ$$

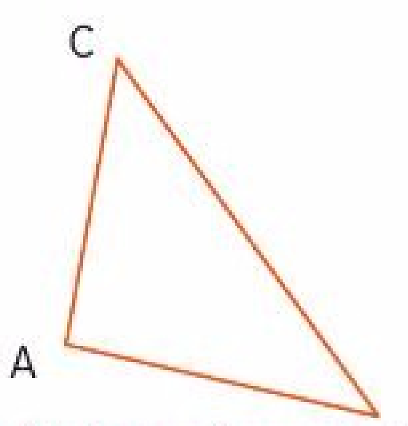
$$\mathbf{d} = 360^\circ - 284^\circ$$

$$\mathbf{d = 76^\circ}$$

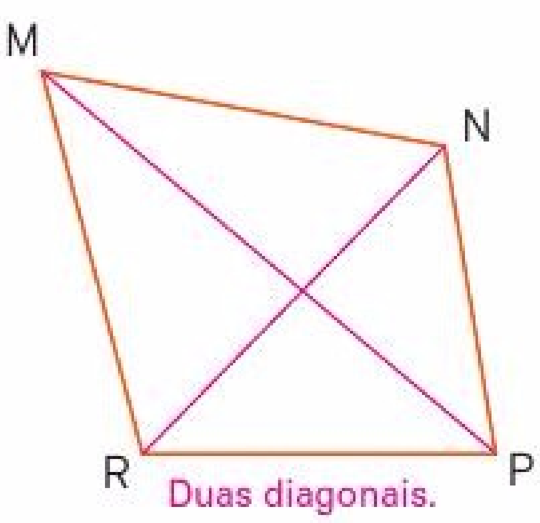
Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

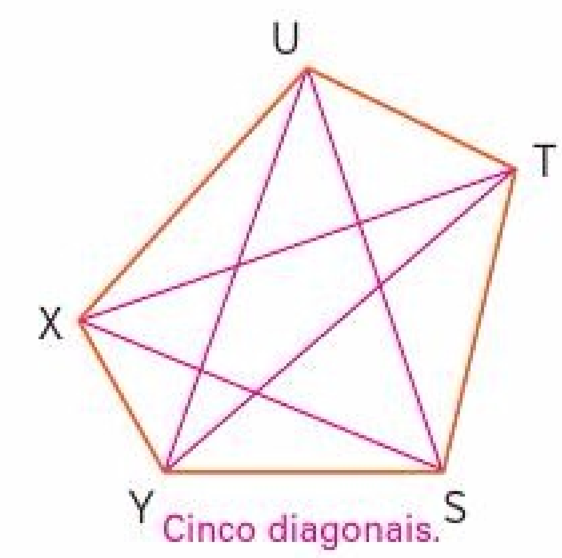
13. Desenhe em seu caderno polígonos como estes. Quantas diagonais tem cada um? Em cada polígono, trace as diagonais encontradas.



Nenhuma diagonal.

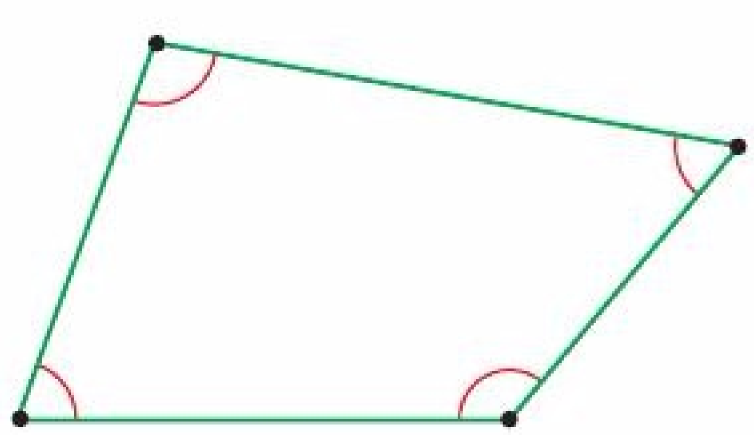


Duas diagonais.

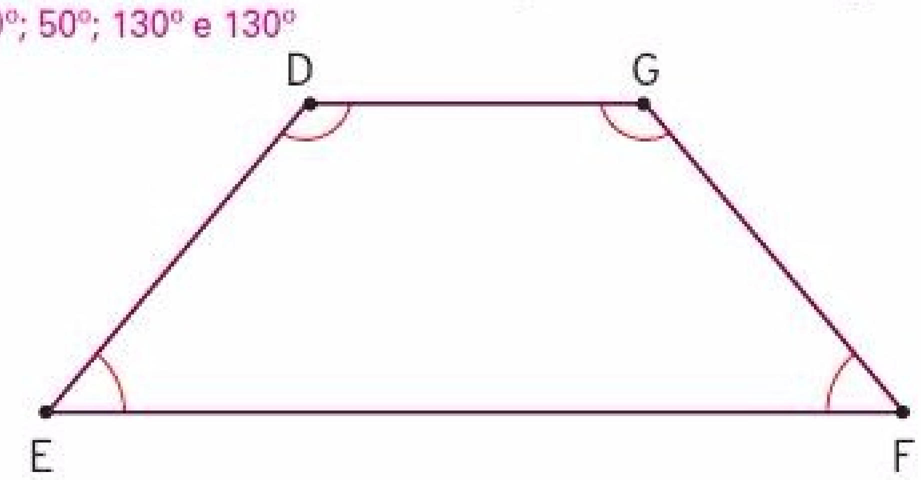


Cinco diagonais.

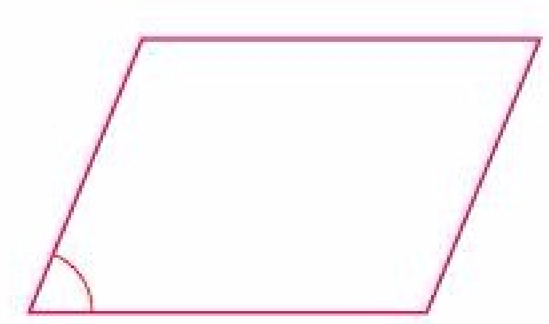
14. Neste quadrilátero, três dos ângulos medem 60°, 70° e 130°. Qual é a medida do quarto ângulo? 100°



15. No trapézio DEFG, os ângulos agudos são congruentes entre si, e os ângulos obtusos também são congruentes entre si. Sabendo que a medida de um ângulo obtuso é o triplo da medida de um ângulo agudo menos 20°, determine as medidas dos ângulos desse trapézio. 50°; 50°; 130° e 130°



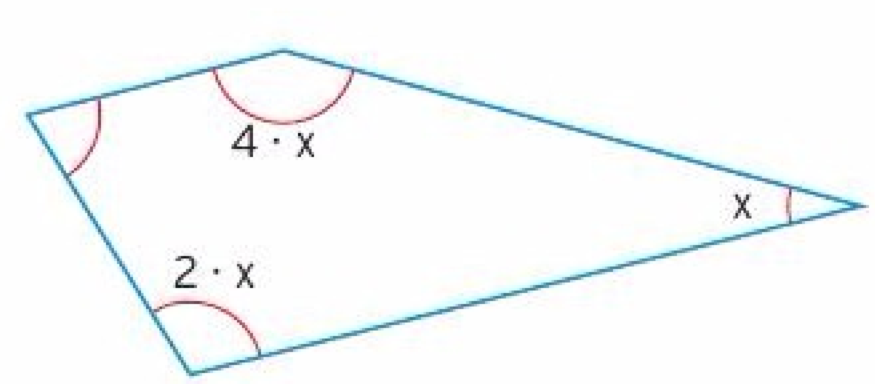
16. Em um paralelogramo, os ângulos agudos são congruentes entre si e os ângulos obtusos, também. A medida de um dos ângulos agudos é $\frac{1}{5}$ da medida de um dos ângulos obtusos.



Determine as medidas dos ângulos do paralelogramo. 30°; 30°; 150°; 150°

17. Neste quadrilátero, a letra **x** representa uma medida em grau.

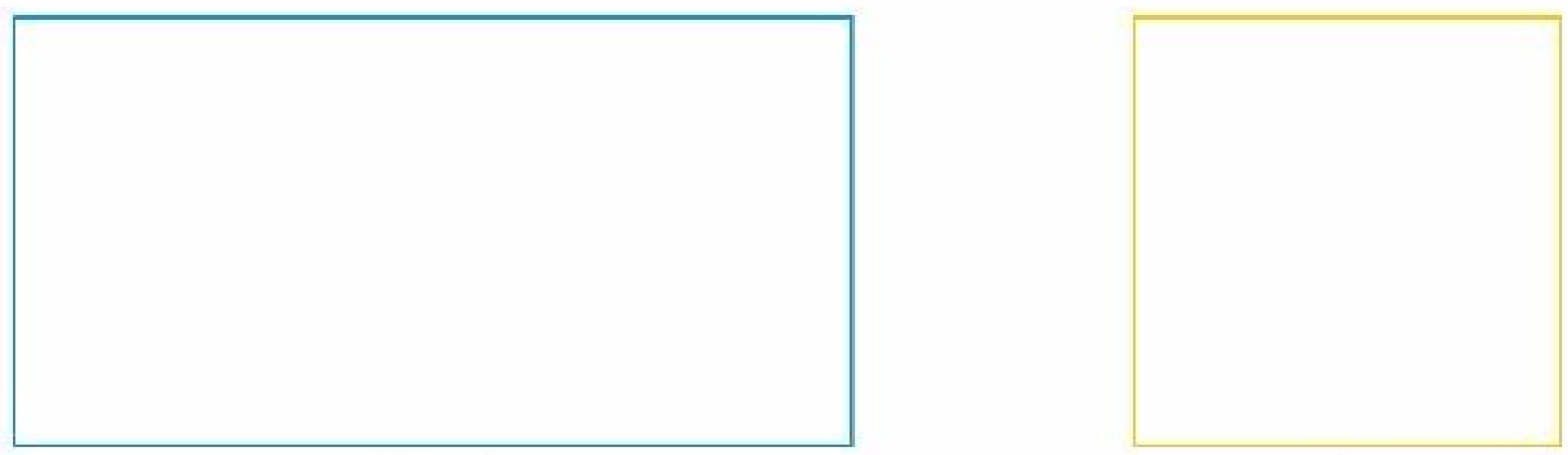
Invente um problema utilizando as informações dadas na figura. Depois, desafie um colega a resolver o problema. Resposta pessoal.



Polígonos regulares

Você já notou que o retângulo e o quadrado são polígonos muito parecidos? Ambos são paralelogramos e têm todos os ângulos com medidas iguais. Então, o que os diferencia?

O quadrado tem todos os lados com medidas iguais e o retângulo, não.

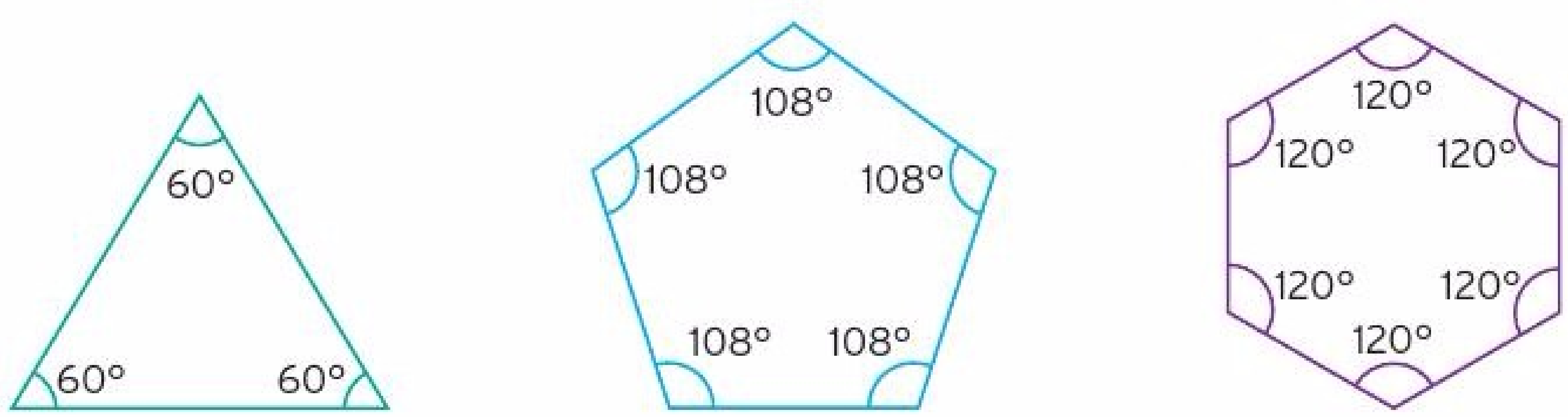


retângulo　　quadrado

Em Geometria, dizemos que o quadrado é um **polígono regular**.

Polígonos regulares são polígonos que têm todos os ângulos internos congruentes e todos os lados congruentes.

Exemplos:

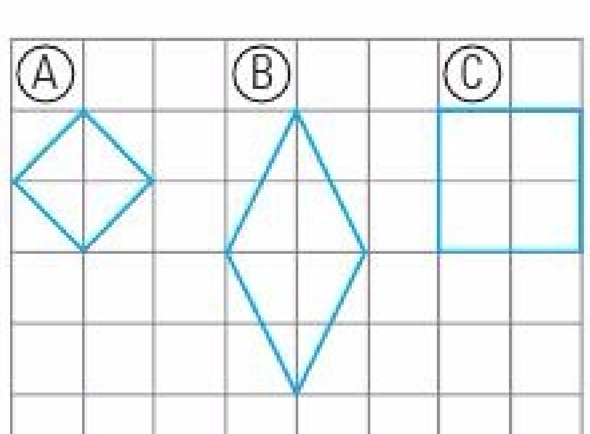


triângulo equilátero　　pentágono regular　　hexágono regular

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

18. Observe os quadriláteros desenhados na malha quadriculada e anote as letras que indicam quadriláteros regulares. Quadriláteros regulares: A e C.



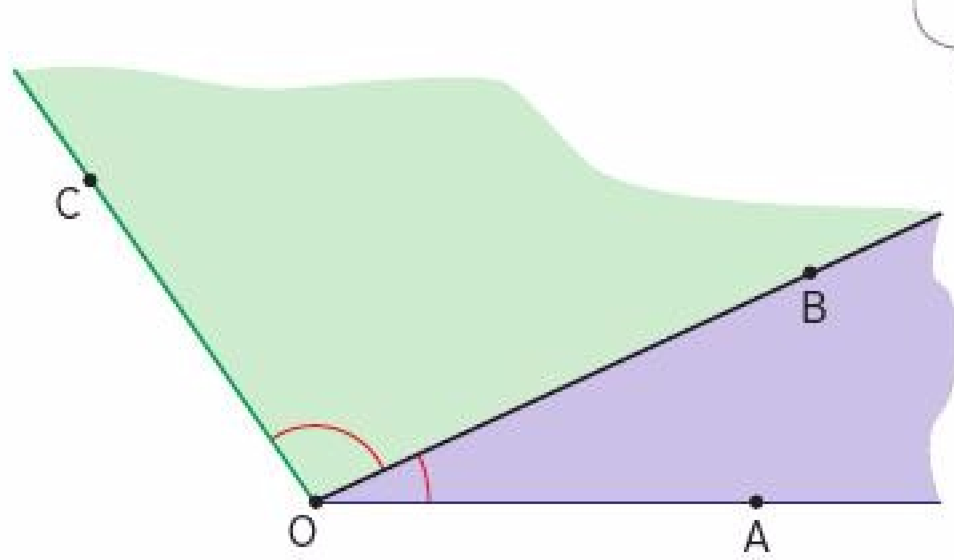
19. Explique por que o pentágono desenhado na malha quadriculada não é um polígono regular. Resposta possível: Porque não possui todos os lados com medidas iguais.

2 Mais sobre ângulos

Ângulos adjacentes

Para refletir e responder

Observe os ângulos CÔB e BÔA, que estão em um mesmo plano, e leia os questionamentos de Marcela.



THINKSTOCK/GETTY IMAGES

- Responda às questões de Marcela.

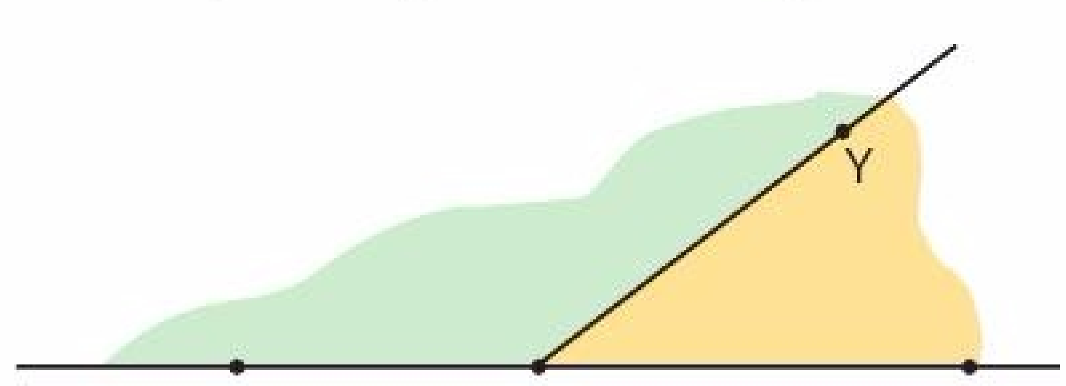
Sim, todos os pontos de $\overrightarrow{OB}$ são comuns aos dois ângulos;
As regiões angulares CÔB e BÔA não têm pontos comuns.

Os ângulos CÔB e BÔA são **ângulos adjacentes**.

> Dois ângulos com mesmo vértice são **adjacentes** quando estão no mesmo plano e têm em comum somente os pontos de um dos lados.

Exemplo:

Os ângulos ZÔY e YÔX são ângulos adjacentes. O ângulo ZÔX é um ângulo raso.

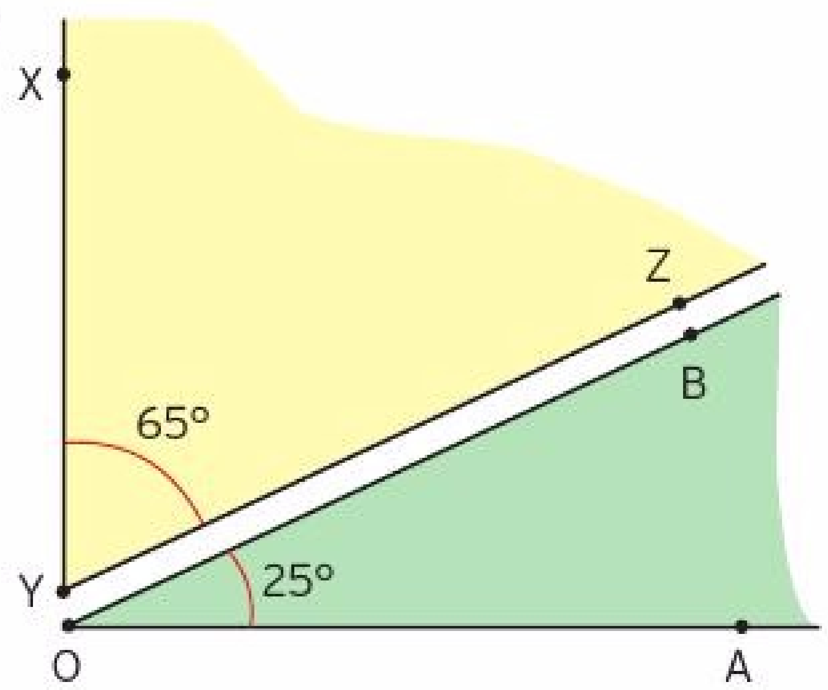


med ZÔY + med YÔX = 180°

Ângulos complementares

Dois ângulos são **complementares** quando a **soma** de suas medidas é **90°**.

Exemplo:



$$\underbrace{65^\circ}_{\text{med } X\hat{Y}Z} + \underbrace{25^\circ}_{\text{med } B\hat{O}A} = 90^\circ$$

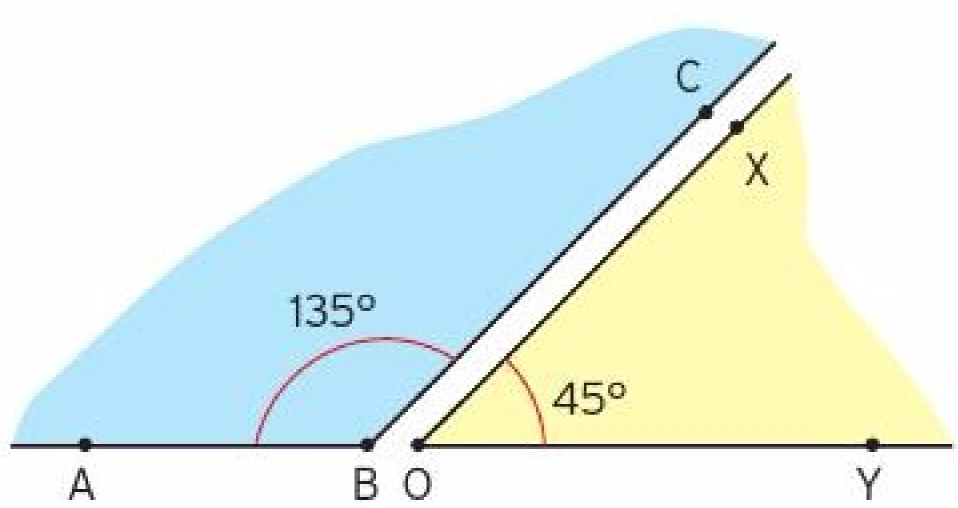
med $X\hat{Y}Z$ + med $B\hat{O}A$ = 90°

Os ângulos $X\hat{Y}Z$ e $B\hat{O}A$ são **ângulos complementares**. $\mathbf{X\hat{Y}Z}$ é o **complemento** de $\mathbf{B\hat{O}A}$, assim como $\mathbf{B\hat{O}A}$ é o **complemento** de $\mathbf{X\hat{Y}Z}$.

Ângulos suplementares

Dois ângulos são **suplementares** quando a **soma** de suas medidas é **180°**.

Exemplo:



$$\underbrace{135^\circ}_{\text{med } A\hat{B}C} + \underbrace{45^\circ}_{\text{med } X\hat{O}Y} = 180^\circ$$

med $A\hat{B}C$ + med $X\hat{O}Y$ = 180°

Os ângulos $A\hat{B}C$ e $X\hat{O}Y$ são **ângulos suplementares**. $\mathbf{A\hat{B}C}$ é o **suplemento** de $\mathbf{X\hat{O}Y}$, assim como $\mathbf{X\hat{O}Y}$ é o **suplemento** de $\mathbf{A\hat{B}C}$.

Vamos combinar:

- se a letra **x** é a medida de um ângulo, podemos representar a medida de seu **complemento** pela expressão algébrica (90° − x);
- se a letra **x** é a medida de um ângulo, podemos representar a medida de seu **suplemento** pela expressão algébrica (180° − x).

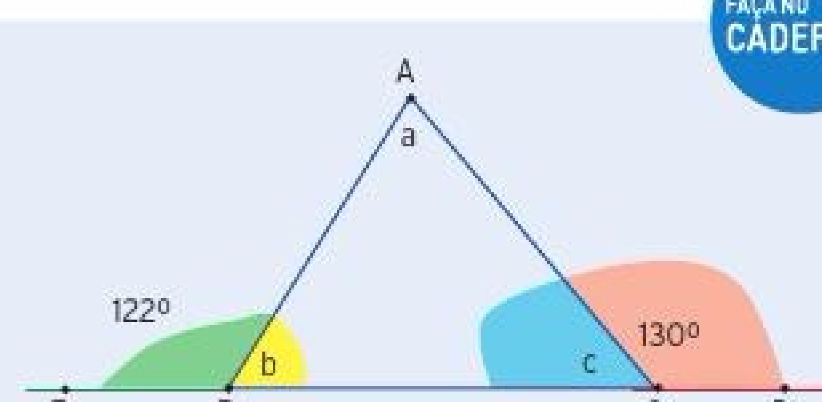
Troquem ideias e resolvam

FAÇA NO CADERNO

Neste triângulo ABC, são dadas as medidas de dois ângulos externos.

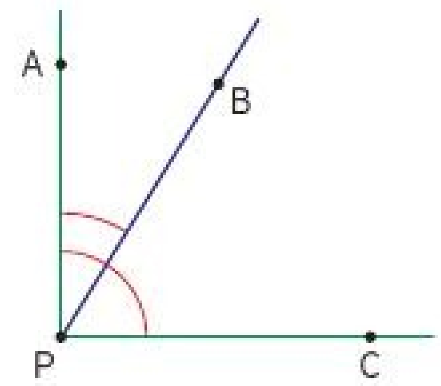
- Quais são as medidas dos ângulos internos?

a = 72°; b = 58° ; c = 50°



Fazer e aprender

20. Observe a figura e responda:

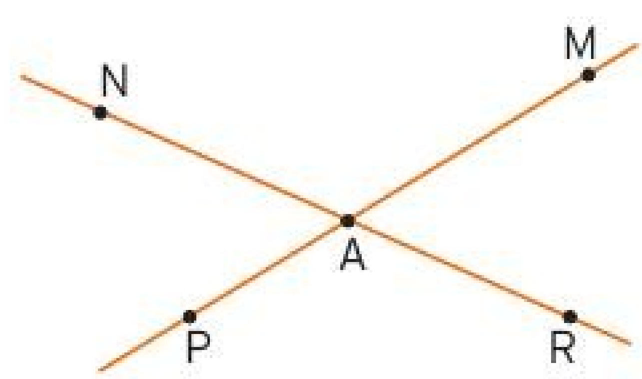


a) Os ângulos $A\hat{P}B$ e $A\hat{P}C$ são adjacentes? Não.

b) $B\hat{P}C$ e $A\hat{P}B$ são ângulos adjacentes? Sim.

c) As semirretas $\overrightarrow{PA}$ e $\overrightarrow{PC}$ são perpendiculares. $B\hat{P}C$ e $A\hat{P}B$ são ângulos complementares ou suplementares? Complementares.

21. Observe os ângulos que existem na figura abaixo.

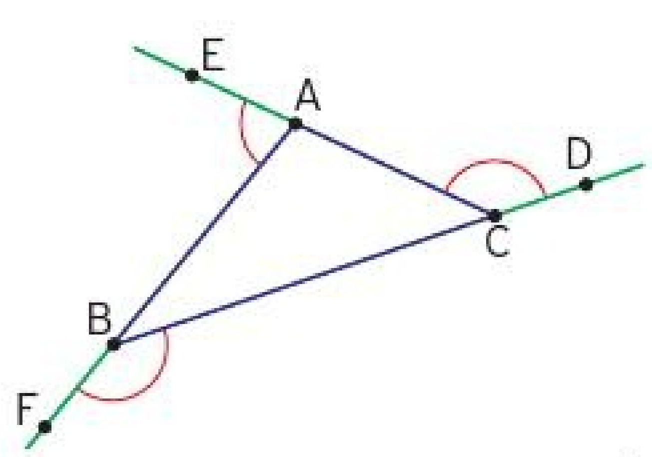


a) Quais ângulos são adjacentes ao ângulo $N\hat{A}M$? $M\hat{A}R$ e $N\hat{A}P$.

b) Existem ângulos adjacentes a $P\hat{A}R$? Quais? Sim, $N\hat{A}P$ e $M\hat{A}R$.

c) Identifique dois ângulos suplementares. Resposta possível: $M\hat{A}N$ e $N\hat{A}P$.

22. $E\hat{A}B$, $F\hat{B}C$ e $D\hat{C}A$ são ângulos externos do triângulo $A\hat{B}C$.



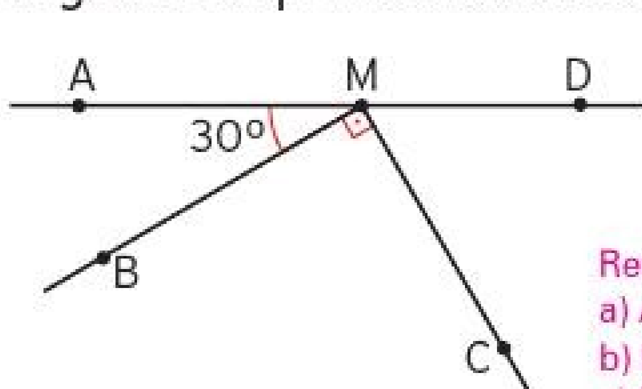
a) Qual desses ângulos é adjacente a $B\hat{C}A$? $D\hat{C}A$

b) Identifique o ângulo adjacente a $C\hat{A}B$. $E\hat{A}B$

c) Qual desses ângulos externos é adjacente a $A\hat{B}C$? $F\hat{B}C$

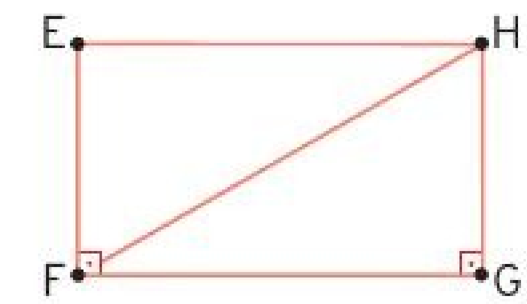
23. Identifique em cada uma destas figuras um par de ângulos complementares e anote-os.

a)

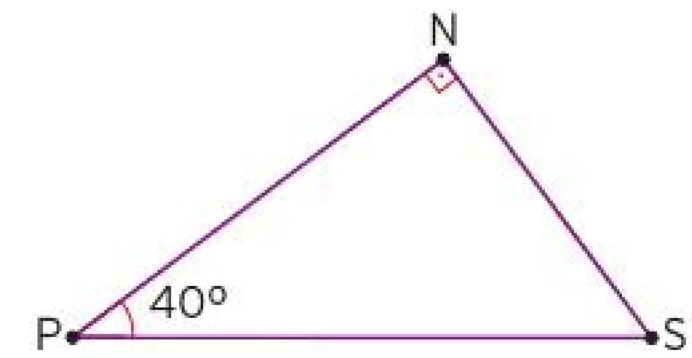


Respostas possíveis:
a) $A\hat{M}B$ e $C\hat{M}D$
b) $E\hat{F}H$ e $H\hat{F}G$
c) $N\hat{P}S$ e $P\hat{S}N$

b)



c)



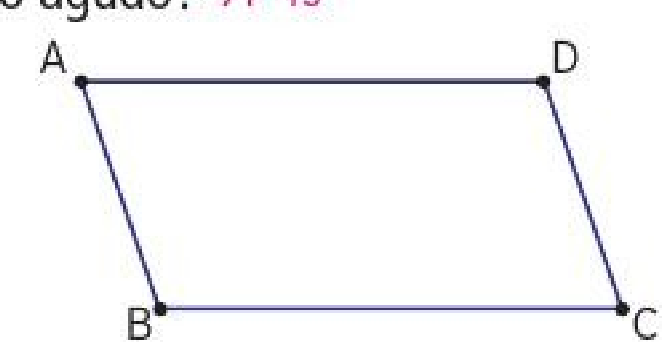
24. Analise cada uma das afirmações e anote as que estão corretas. Reescreva as afirmações incorretas, de modo que sejam verdadeiras.

a) O complemento de um ângulo é sempre um ângulo agudo. Correta.

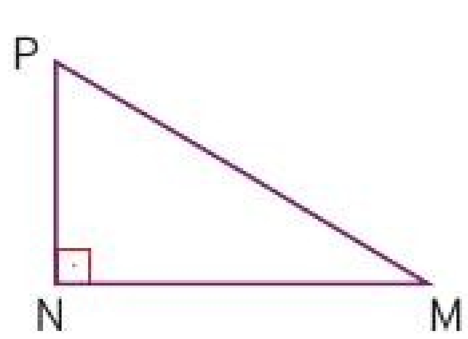
b) O suplemento de um ângulo agudo é um ângulo agudo. b) O suplemento de um ângulo agudo é um ângulo obtuso.

c) A medida do suplemento de um ângulo reto é 180°. c) A medida do suplemento de um ângulo reto é 90°.

25. No paralelogramo ABCD, um ângulo obtuso e um ângulo agudo são suplementares. Se o ângulo obtuso mede 108° 45′, qual é a medida do ângulo agudo? 71° 15′



26. Nesta figura, o triângulo MNP é um triângulo retângulo.



a) Os ângulos $\hat{M}$ e $\hat{P}$ são complementares? Por quê? Sim, porque a soma de suas medidas é 90°.

b) Se a medida do ângulo $\hat{P}$ é 57° 45′, então qual é a medida de $\hat{M}$? 32° 15′

27. A medida de um ângulo é **x**, e a de seu suplemento é (x − 30°).

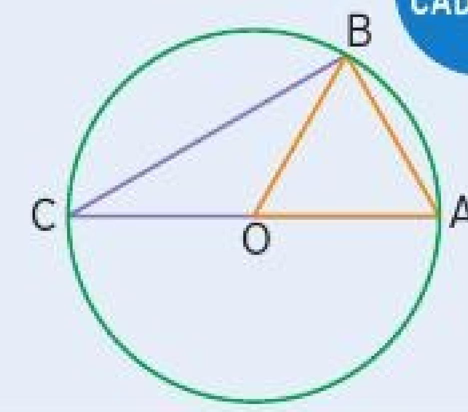
Quais são as medidas desses ângulos? 105°; 75°

Troquem ideias e resolvam

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega, discutam e resolvam.

Na figura, $\overline{AC}$ é um diâmetro da circunferência, **O** é seu centro e o triângulo **OAB** é equilátero. Quais são as medidas dos ângulos internos do $\triangle OBC$? 30°; 30° e 120°



Exercícios complementares

FAÇA NO CADERNO

28. A medida de um ângulo é $2 \cdot m$ e a de seu complemento é $3 \cdot m + 25°$. Qual é o valor de **m**?

a) Anote o procedimento adequado para resolver o problema: III

I. Calcular a soma de $2 \cdot m$ com $3 \cdot m + 25°$.

II. Subtrair $2 \cdot m$ de $3 \cdot m + 25°$.

III. Resolver a equação $2 \cdot m + (3 \cdot m + 25°) = 90°$.

IV. Resolver a equação $2 \cdot m + (3 \cdot m + 25°) = 180°$.

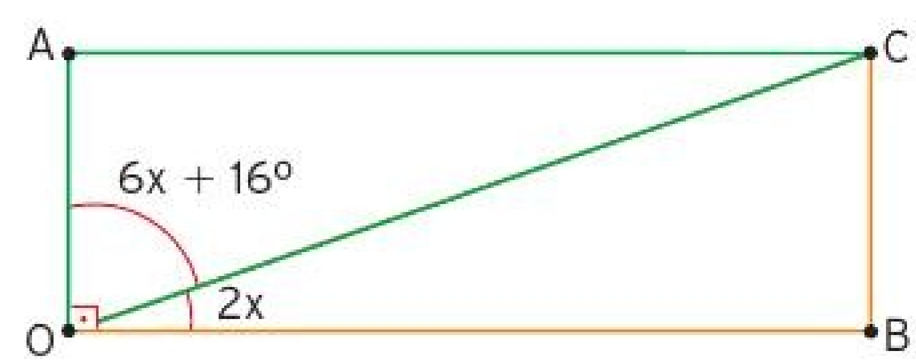
b) Quais são as medidas desses ângulos? 26° e 64°

29. Um quarto do suplemento de um ângulo corresponde a 27°. Qual é a medida desse ângulo? 72°

30. Na figura ao lado, AOBC é um retângulo.

a) Em relação às medidas, que tipo de par de ângulos são $A\hat{O}C$ e $C\hat{O}B$? Ângulos complementares.

b) Qual é a medida de $A\hat{O}C$ e a de seu complemento? 71° 30'; 18° 30'



31. A soma do triplo da medida de um ângulo com seu complemento é 167°. Qual é a medida desse ângulo? 38° 30' ou 38,5°

32. A medida de um ângulo é o quádruplo de seu complemento. Quanto mede esse ângulo? 72°

33. A medida de um ângulo é igual a $\frac{2}{3}$ do seu complemento. Qual é a medida desse ângulo? 36°

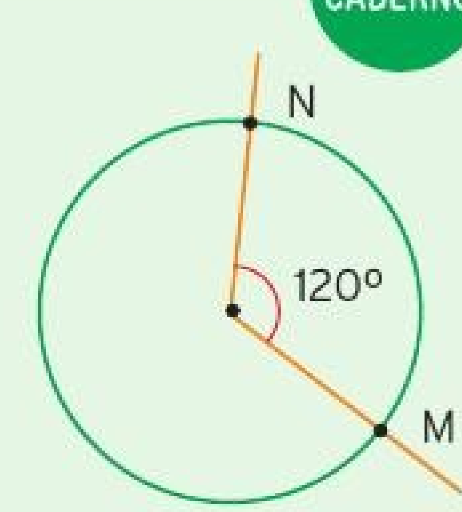
34. Dois ângulos são suplementares. A medida de um deles é a metade da medida do outro. Calcule a medida desses ângulos. 60° e 120°

Investigue e explique

FAÇA NO CADERNO

Nesta atividade, você utilizará régua, compasso e um transferidor.

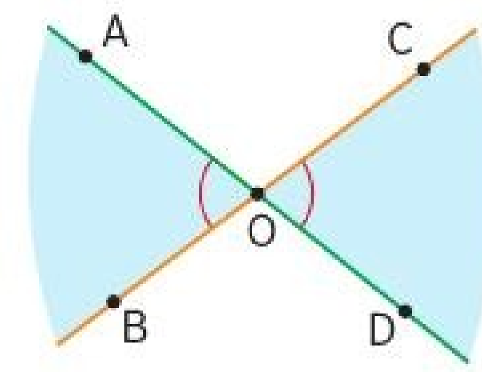
- Trace uma circunferência de raio qualquer. Em seguida, desenhe três ângulos centrais adjacentes medindo 120º cada um, ou seja, 360º : 3. Os lados desses ângulos determinam três pontos na circunferência. Chame-os de **M**, **N** e **P**. O triângulo MNP é um polígono regular? Sim.
- Faça o mesmo, mas dessa vez traçando ângulos centrais com 90º cada um, ou seja, 360º : 4. O polígono que se obtém é regular? Que polígono é esse? Sim; quadrado.
- Descreva em seu caderno um procedimento para traçar um pentágono regular.
Resposta possível: Começa-se traçando uma circunferência de raio qualquer e, em seguida, traçam-se 5 ângulos centrais adjacentes com 72º cada um, ou seja, 360º : 5, que determinam 5 pontos sobre a circunferência. Ligando esses pontos por meio de segmentos de reta, tem-se o pentágono regular.



Já traçamos um ângulo central de 120º.

3 Ângulos opostos pelo vértice

O que são ângulos opostos pelo vértice?



No desenho ao lado, as retas $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ têm em comum o ponto **O**, e os ângulos $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$ têm em comum o vértice **O**.

Observe que nos ângulos $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$ os lados de um são semirretas opostas aos lados do outro.

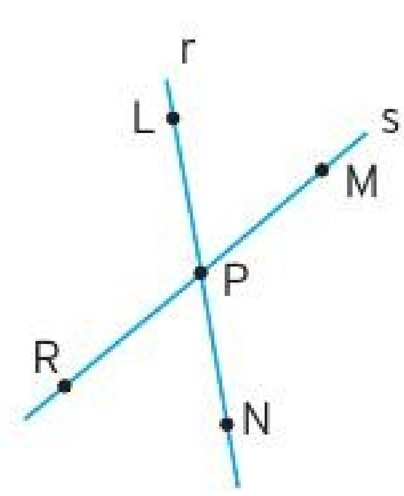
Os ângulos $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$ são ângulos **opostos pelo vértice**.

Nessa mesma figura, $A\hat{O}C$ e $B\hat{O}D$ também são ângulos opostos pelo vértice.

Ângulos opostos pelo vértice apresentam uma propriedade. Que tal descobri-la?

Para refletir e responder

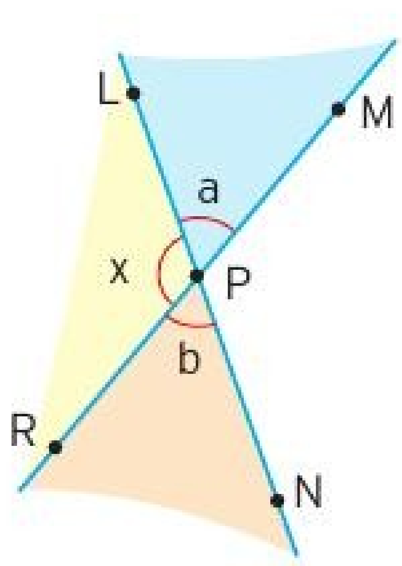
Escolha dois ângulos opostos pelo vértice nesta figura.



Utilize um transferidor e meça-os.

- O que ocorre com as medidas obtidas?
São iguais.

Vamos escolher os ângulos opostos pelo vértice $L\hat{P}M$ e $R\hat{P}N$ e mostrar que eles têm medidas iguais.



a é o suplemento de **x** —— $\mathbf{a = 180° - x}$

b é o suplemento de **x** —— $\mathbf{b = 180° - x}$

Logo, $\mathbf{a = b}$.

a é med $L\hat{P}M$;
b é med $R\hat{P}N$;
x é med $L\hat{P}R$.

FOTOGRAFIAS: THINKSTOCK/GETTY IMAGES

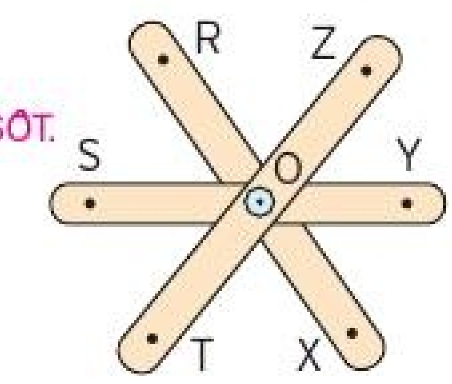
Os ângulos $\mathbf{L\hat{P}M}$ e $\mathbf{R\hat{P}N}$ têm medidas iguais e, portanto, são **ângulos congruentes**.

Dois **ângulos opostos pelo vértice** são **congruentes**.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

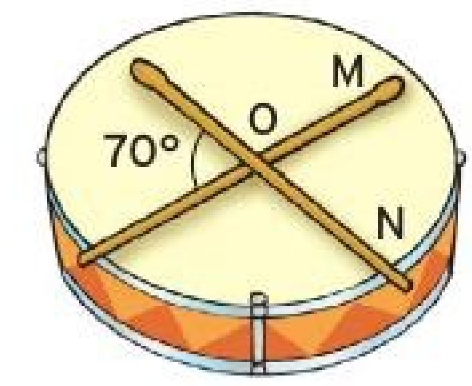
35. Observe a figura ao lado. Imagine que os palitos de sorvete sejam retas. Identifique dois pares de ângulos opostos pelo vértice. Respostas possíveis: $X\hat{O}Z$ e $R\hat{O}T$; $Y\hat{O}Z$ e $S\hat{O}T$.



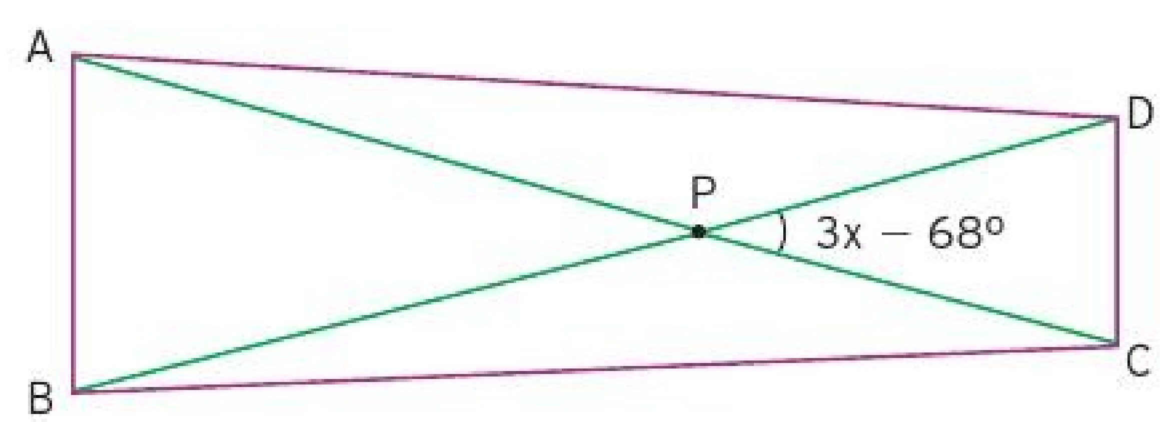
36. As medidas de dois ângulos opostos pelo vértice somam 72°. Quanto medem o complemento e o suplemento de cada um desses ângulos? 54°; 144°

BIS

37. As duas baquetas parecem formar ângulos opostos pelo vértice. Qual é a medida do suplemento de $M\hat{O}N$? 110°



38. No quadrilátero ABCD, o ângulo $A\hat{P}B$ mede 31°. Qual é o valor de x? 33°



39. Observe a figura: os raios de luz que saem das extremidades da vela passam pelo orifício **O** e formam ângulos opostos pelo vértice.

Se med $A\hat{O}B = (72° \, 30' - 5 \cdot z)$ e

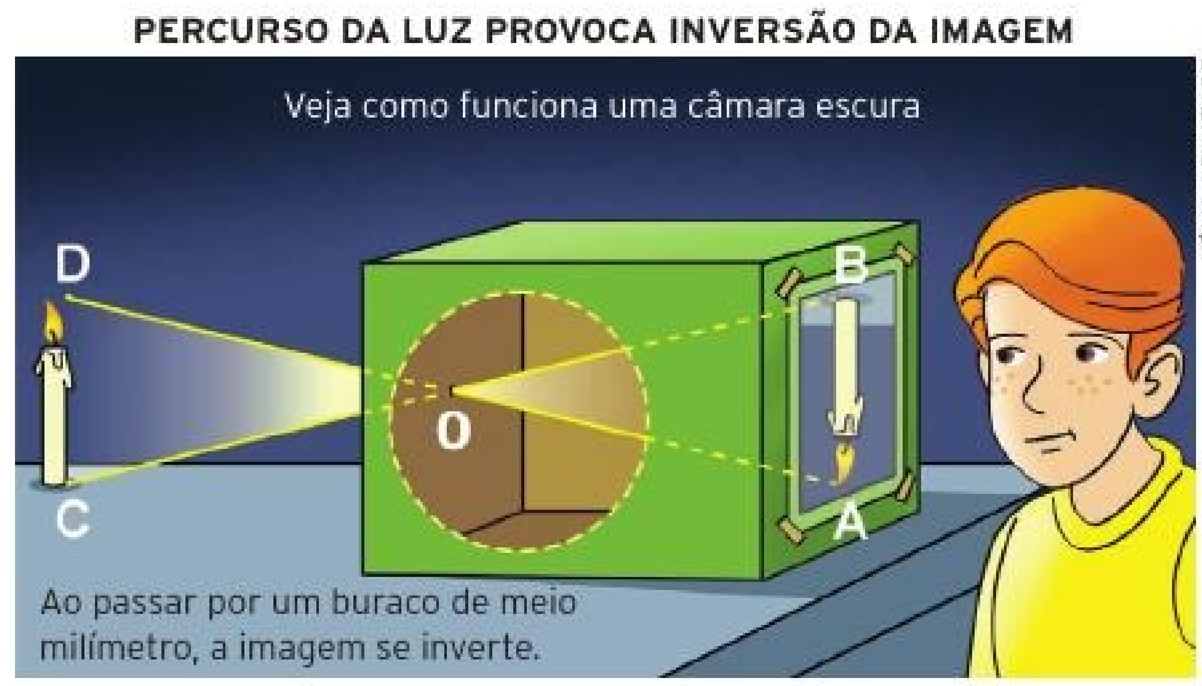
med $C\hat{O}D = (55° \, 30' - 3 \cdot z)$, então:

a) qual é o valor de z? 8° 30′

b) qual é a medida de $A\hat{O}B$? 30°

c) qual é a medida de $C\hat{O}D$? 30°

PERCURSO DA LUZ PROVOCA INVERSÃO DA IMAGEM



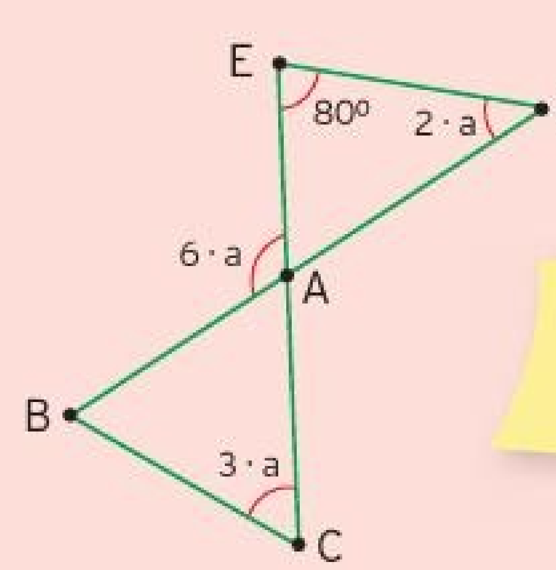
HÉLIO SENATORE

Desafio

FAÇA NO CADERNO

Triângulos e seus ângulos

Nesta figura, **a** representa uma medida em grau.



$A\hat{B}C$ e $B\hat{C}A$ têm medidas iguais.

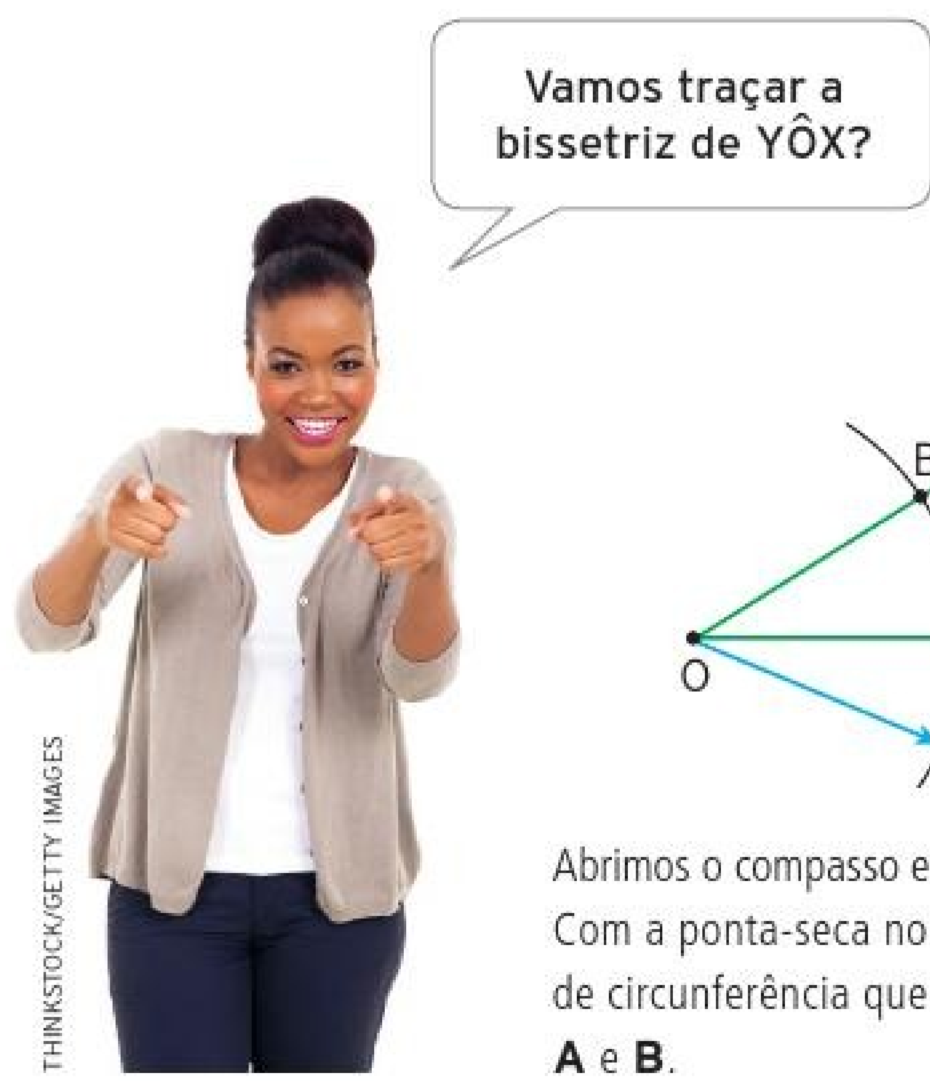
- Qual é o valor de **a**? 20°
- Qual é a medida do ângulo $E\hat{A}D$? 60°
- Quanto medem os ângulos do $\triangle EAD$? 40°; 60° e 80°
- Quais as medidas dos ângulos do $\triangle ABC$? São iguais a 60°.

4 Construções geométricas e simetria

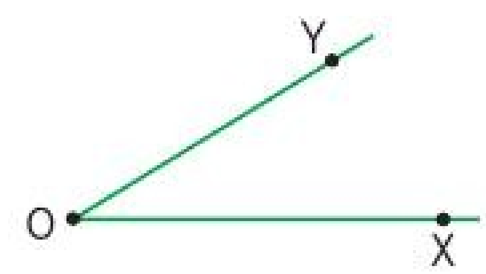
Propicie outras situações nas quais os alunos se envolvam com a construção geométrica da bissetriz de um ângulo. Veja as atividades 40, 41 e 42.

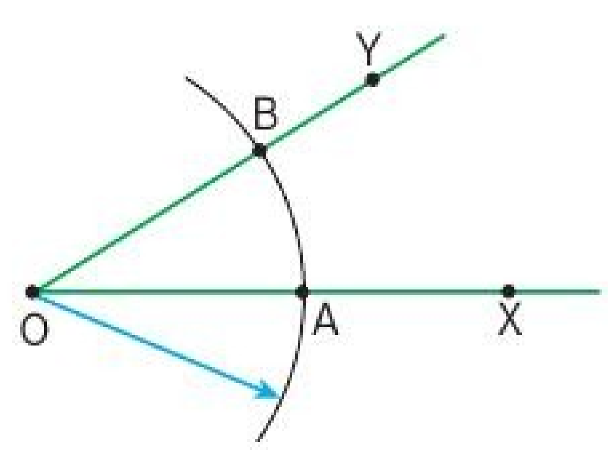
Construção da bissetriz de um ângulo

Podemos traçar algumas figuras geométricas com um compasso e uma régua ou esquadro. Fazemos isso aplicando algumas propriedades das figuras planas que serão justificadas mais adiante.

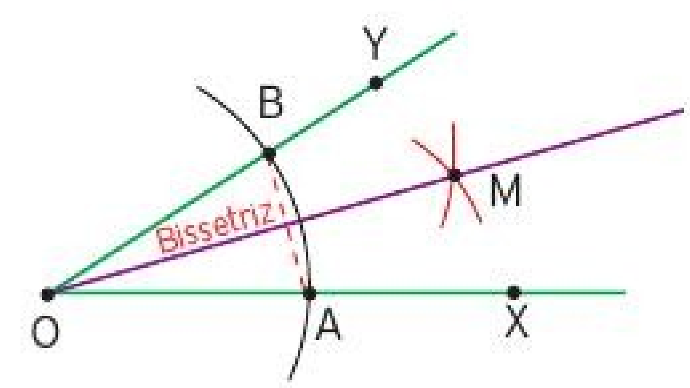


THINKSTOCK/GETTY IMAGES





Abrimos o compasso em uma abertura qualquer. Com a ponta-seca no vértice, traçamos um arco de circunferência que cruze os lados de YÔX em **A** e **B**.



Com a ponta-seca em **A**, traçamos um arco. Fazemos o mesmo com a ponta-seca em **B**. Esses arcos se cruzam em um ponto **M**. Em seguida, traçamos a semirreta $\overrightarrow{OM}$.

É possível mostrar que os triângulos YOM e MOX são iguais, ou seja, congruentes. Por essa razão, os ângulos YÔM e MÔX são congruentes.

med YÔM = med MÔX —— A semirreta $\overrightarrow{OM}$ é a bissetriz de YÔX.

Fazer e aprender

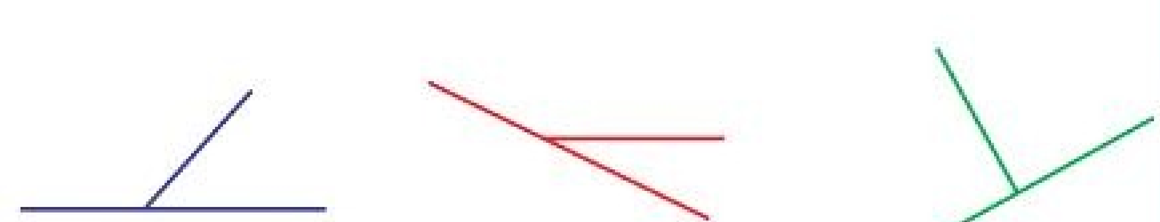
FAÇA NO CADERNO

40. Desenhe, em uma folha de papel, três ângulos: um agudo, um reto e outro obtuso. Trace a bissetriz de cada um deles. Resposta pessoal.

41. Desenhe um triângulo qualquer e depois trace as bissetrizes de seus três ângulos. O que ocorre com as três bissetrizes? As três bissetrizes se cruzam em um mesmo ponto.

42. Desenhe pares de ângulos adjacentes e suplementares parecidos com estes:

Trace as bissetrizes desses ângulos.



a) Quanto medem os ângulos formados pelas bissetrizes que você traçou? 90°

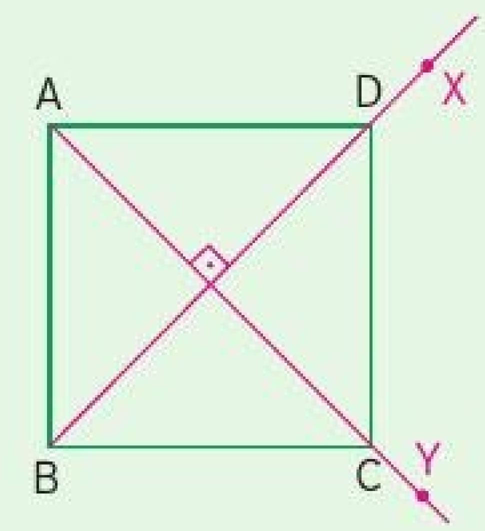
b) É possível chegar a alguma conclusão? Qual?
Sim; o ângulo formado pelas bissetrizes de dois ângulos adjacentes e suplementares é sempre um ângulo reto.

Investigue e explique

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega, discutam e expliquem.

- Desenhem um quadrado como este ao lado. Qual é a medida de cada ângulo de ABCD? 90°
- Tracem as bissetrizes dos ângulos $D\hat{A}B$ e $A\hat{B}C$. Qual é a conclusão sobre as bissetrizes traçadas? Resposta possível: $\overrightarrow{AY}$ e $\overrightarrow{BX}$ são perpendiculares e passam pelos outros vértices.
- $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são as **diagonais** do quadrado ABCD. O que ocorre com as diagonais de um quadrado? São perpendiculares e congruentes.



Simetria axial

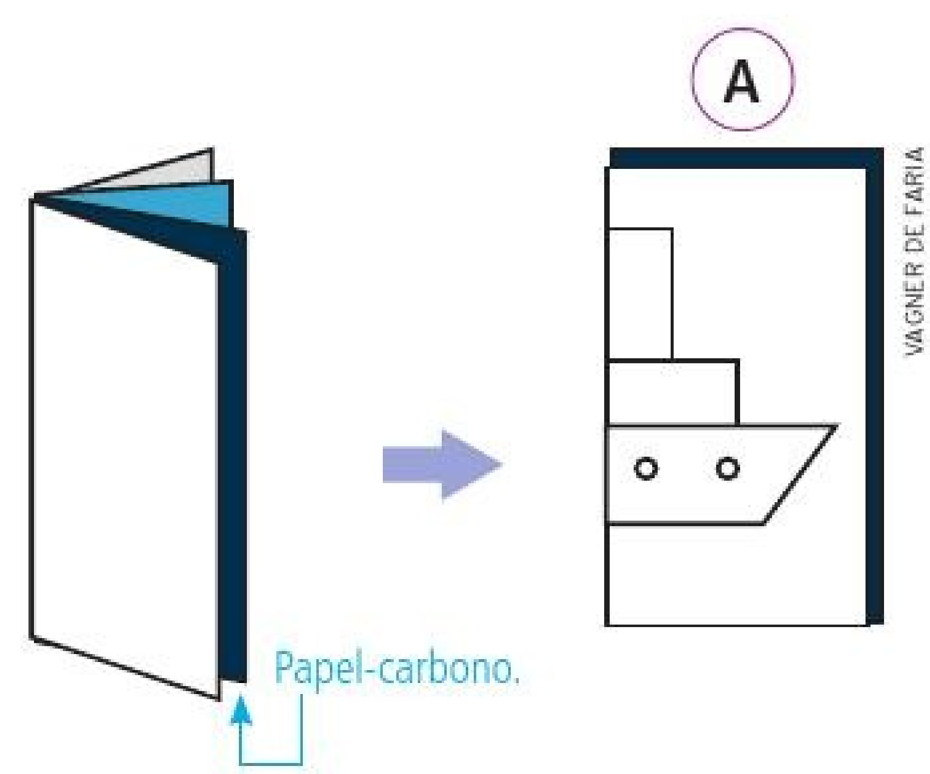
Caso tenha dificuldade em encontrar papel-carbono, sugira aos alunos que risquem o verso do desenho com um lápis preto.

Para refletir e responder

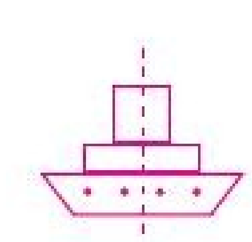
Mariana dobrou uma folha de papel sulfite.

Entre as partes da dobra colocou papel-carbono, também dobrado, com a parte recoberta de tinta junto à folha e fez um desenho, como mostra a figura.

Feito isso, ela abriu a folha.



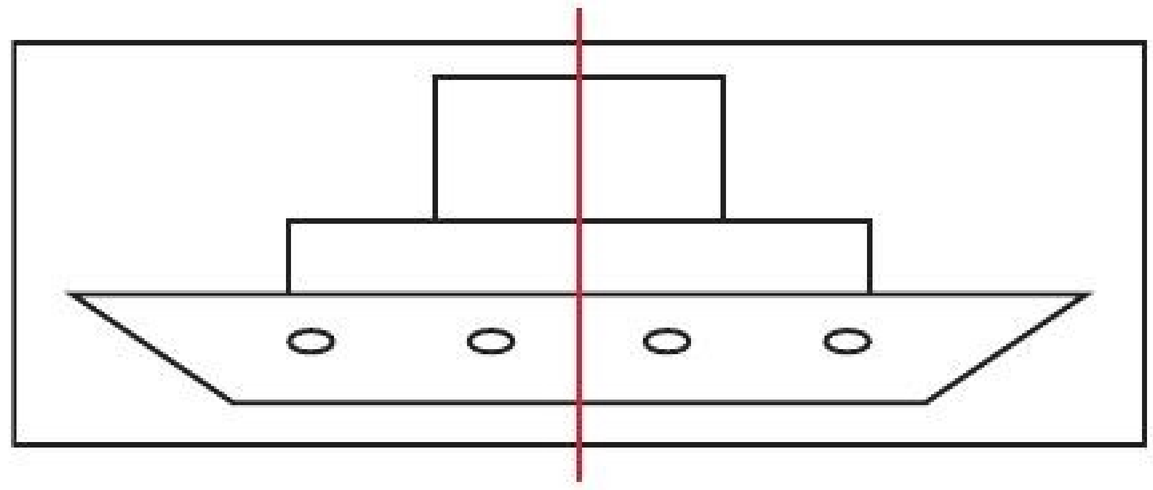
- Como ficou o desenho de Mariana? Faça um esboço em seu caderno. Providencie uma folha de papel-carbono e faça um desenho da mesma maneira. Depois, abra o desenho e trace uma linha vermelha sobre a dobra.



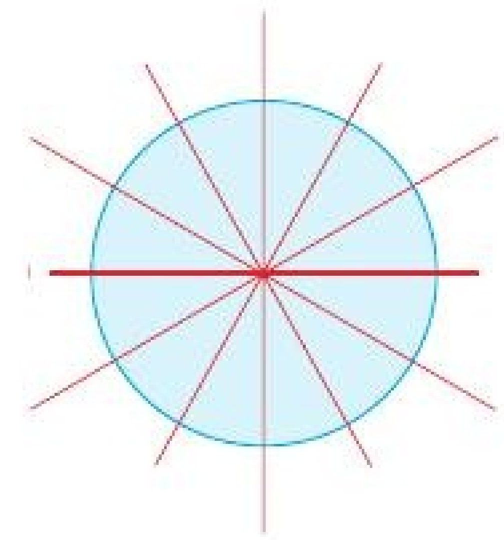
Nas figuras construídas dessa maneira há **simetria axial**, ou seja, há um eixo de simetria que pode ser traçado sobre a dobra. Na figura a seguir o eixo de simetria é a reta traçada em vermelho.

Axial é uma palavra relacionada a **eixo**.

Esse eixo divide a figura em duas partes de maneira que uma é a imagem espelhada da outra.



Essa é uma figura com simetria, ou seja, uma **figura simétrica** em relação ao eixo de simetria. Uma figura pode ter mais de um eixo de simetria.

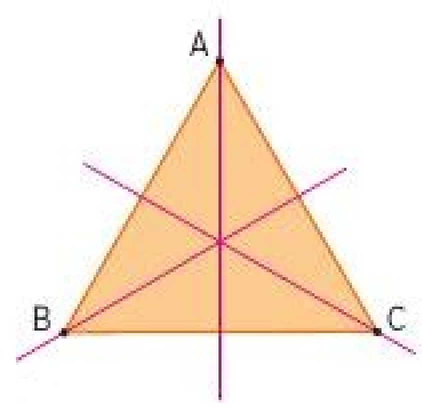


Por exemplo, um círculo tem infinitos eixos de simetria. Qualquer um deles contém um diâmetro. Observe alguns eixos de simetria na figura ao lado.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

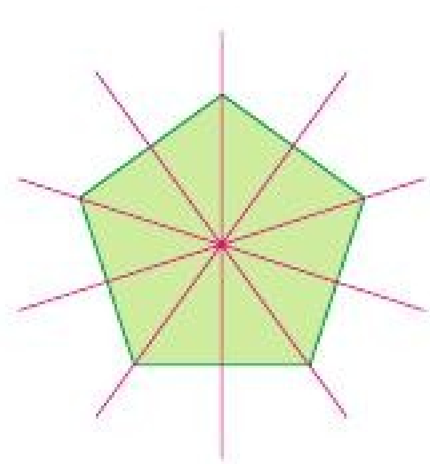
43. Na figura, ABC é um triângulo equilátero: ele é uma figura simétrica.



a) Quais são seus eixos de simetria? Desenhe-os em seu caderno.

b) Quantos eixos de simetria tem um triângulo equilátero? Três eixos de simetria.

44. Na figura ao lado, temos um pentágono regular. Esse pentágono é uma figura geométrica simétrica? Se a resposta for afirmativa, copie-o e desenhe todos os seus eixos de simetria. Sim.



45. Algumas letras de forma maiúsculas do nosso alfabeto são figuras simétricas. Observe as letras da palavra BRASILEIRO abaixo e responda às questões.

a) Quais delas são figuras simétricas? A, E, I, O, B

b) Copie-as e trace o eixo de simetria em cada uma.

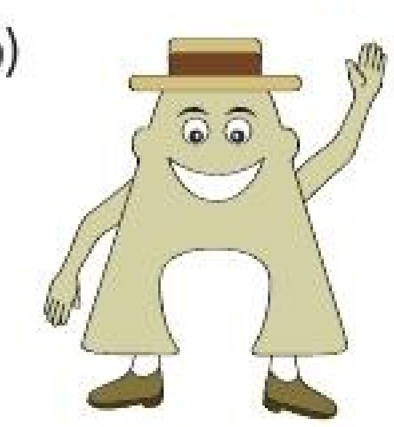
c) Alguma letra tem mais de um eixo de simetria? Qual? Sim; **I** e **O**.

46. Quais das figuras abaixo são simétricas? Quantos eixos de simetria elas têm?
a: um eixo de simetria, c: seis eixos de simetria.

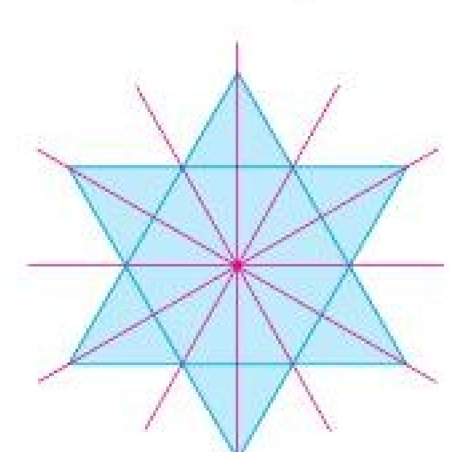
a)

FABIO COLOMBINI

b)

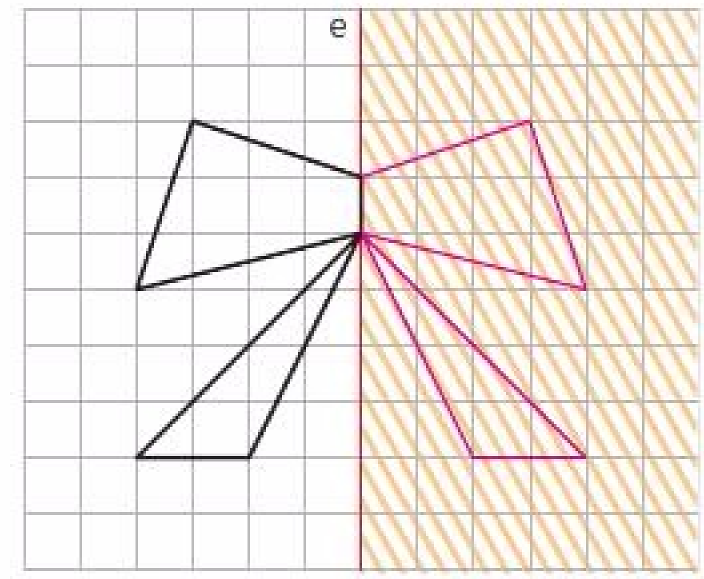


c)



47. Nesta malha está desenhada parte de uma figura simétrica em relação ao eixo **e**.

Copie em uma folha de papel quadriculado essa parte e, em seguida, complete-a.



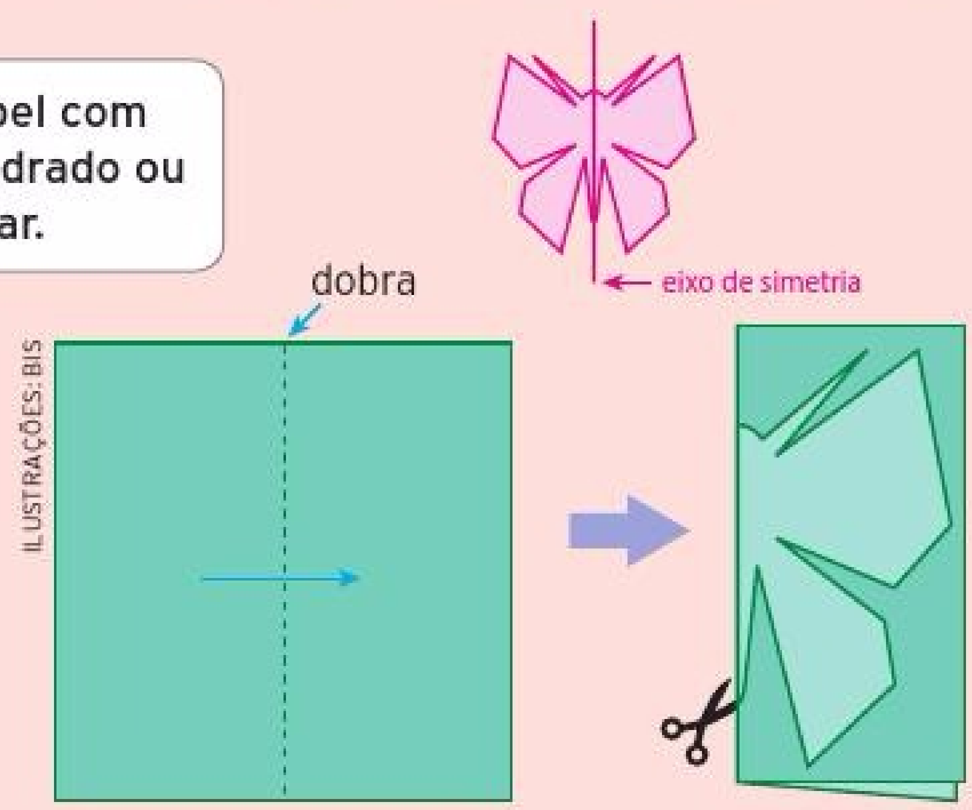
Desafio

FAÇA NO CADERNO

Kirigami, a arte de cortar papel

- *Kirigami* é uma palavra de origem japonesa que significa "cortar papel".

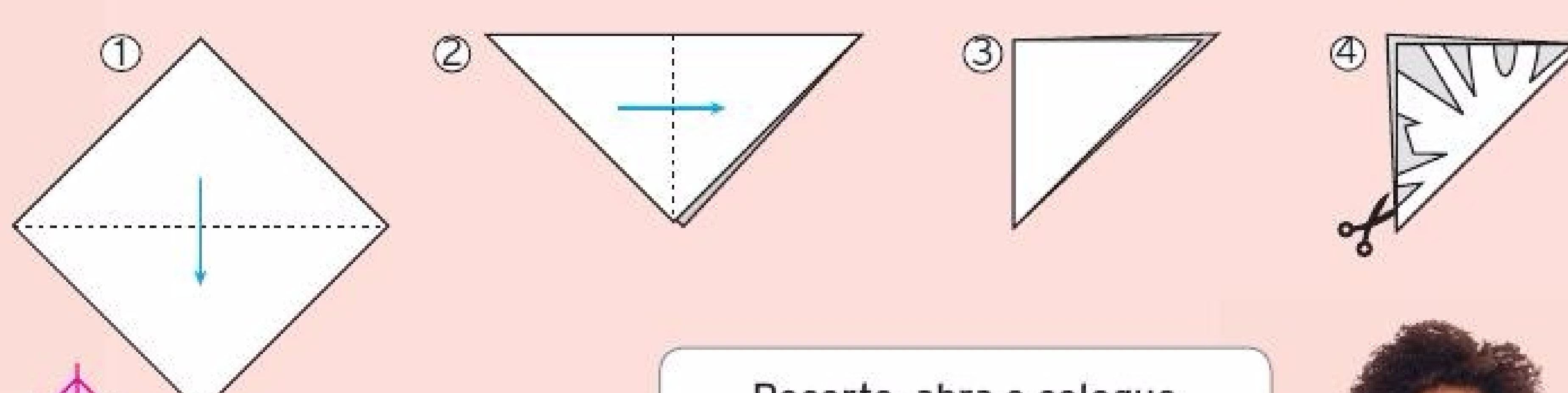
Dobre um papel com formato de quadrado ou retangular.



Faça um desenho parecido com este, recorte e abra. Você terá uma surpresa!

- A figura obtida tem um eixo de simetria. Destaque esse eixo.

Agora experimente fazer este *kirigami*.



Recorte, abra e coloque sobre um papel de outra cor. Destaque os eixos de simetria.

FOTOGRAFIAS: THINKSTOCK/GETTY IMAGES

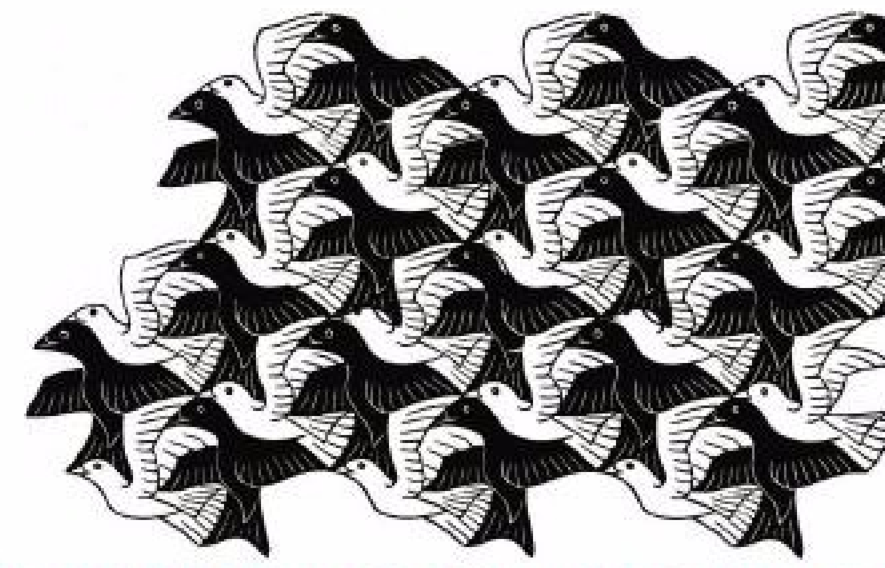
- Agora é a sua vez! Invente outras dobras e outros recortes e desafie um colega.
...E divirta-se com a simetria!

Leitura

Geometria e desenho geométrico

Já notou que artistas também usam Geometria? Alguns deles conhecem muitas propriedades das figuras planas e das figuras não planas.

Utilizando tais propriedades, é possível construir figuras geométricas com certa precisão, usando o compasso, como fez o pintor holandês M. C. Escher, autor do mosaico ao lado.



MAURITS CORNELIS ESCHER. DIVISÃO REGULAR DO PLANO COM PÁSSAROS, ABRIL 1949.

As atividades com dobraduras são lúdicas e motivam os alunos. Elas também envolvem figuras geométricas com simetria.

Origami

Origami é uma palavra da língua japonesa que significa "papel dobrado".

Tudo começa com um pedaço de papel em formato quadrado. Nele fazemos uma sequência de dobraduras e obtemos figuras tridimensionais, como sapos, macacos, máscaras, pessoas, pássaros e muitas outras. É um trabalho divertido que envolve figuras geométricas simétricas.

ELENA SCHWEITZER/STOCKXPERT/GLOW IMAGES

Revisão cumulativa e testes

FAÇA NO CADERNO

1. Rodrigo participa de um jogo em que as cartelas são marcadas com pontos positivos e negativos. Ele retirou, em duas rodadas, a cartela marcada -39 e, em três rodadas, a cartela marcada $+13$. Quantos pontos Rodrigo marcou ao todo com essas cartelas? -39

2. O salário de Denise é 70% do salário de Leninha, e o de Alice, 50% do salário de Leninha. Se a soma dos salários das três é R$ 5 403,20, qual é o salário de cada uma das moças?
Leninha: R$ 2 456,00; Denise: R$ 1 719,20; Alice: R$ 1 228,00

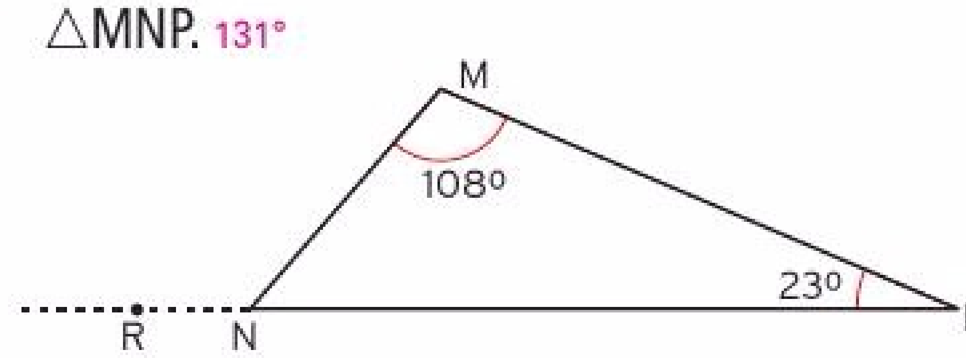
3. Escreva o número 0,0001 utilizando uma potência de base 10. Resposta possível: 10^{-4}

4. Qual é o valor numérico desta expressão para $n = -10$? 38

$$\frac{n}{5} - 4 \cdot n$$

5. Para ser aprovado em um concurso, um participante precisa fazer duas provas escritas e uma oral e obter média maior que ou igual a 5. Uma pessoa obteve nas provas escritas as notas 3,5 e 5,5. Qual é a nota mínima que ela precisa obter na prova oral para ser aprovada nesse concurso? 6,0

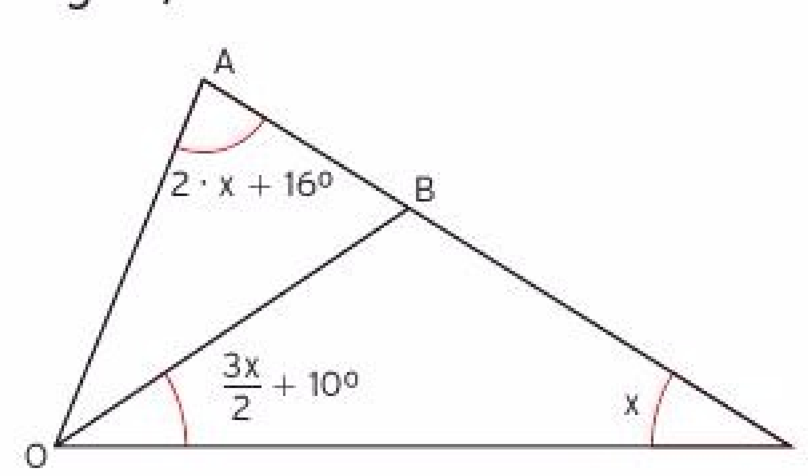
6. Calcule a medida do ângulo externo $R\hat{N}M$ ao $\triangle MNP$. 131°



7. Dentre os números $\left(-\frac{1}{3}\right)^2$, $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}$, $-\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{3}$, qual é o maior? $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}$

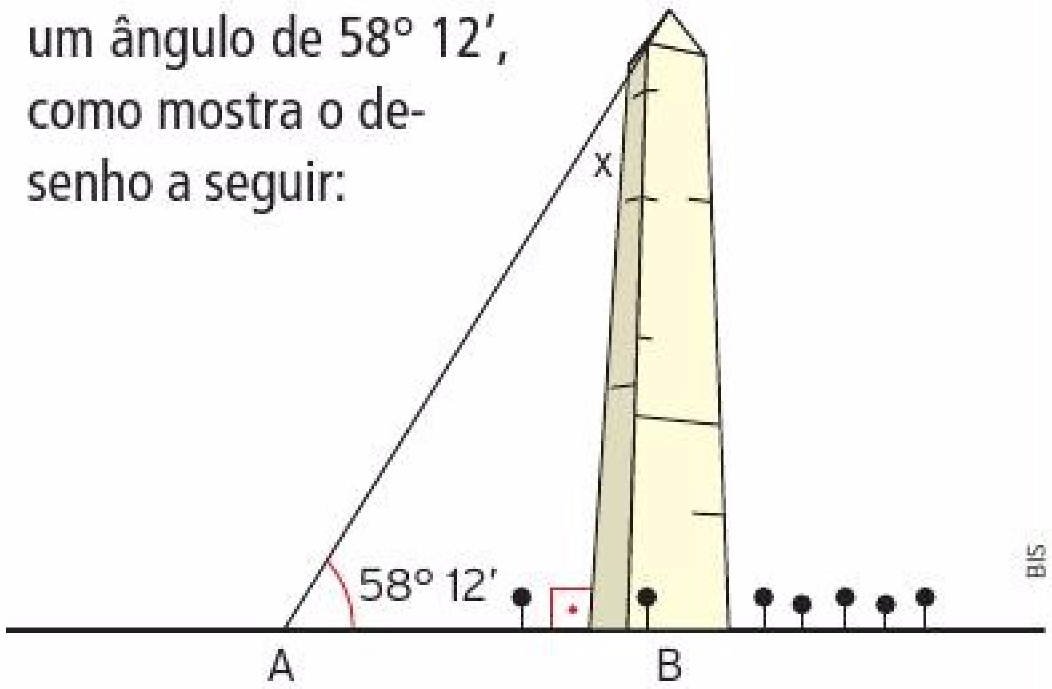
8. Dois ângulos adjacentes medem, respectivamente, 48° e 92°. Qual é a medida do ângulo formado pelas bissetrizes desses ângulos? 70°

9. Na figura, $\overline{OB}$ é a bissetriz de $\hat{O}$.



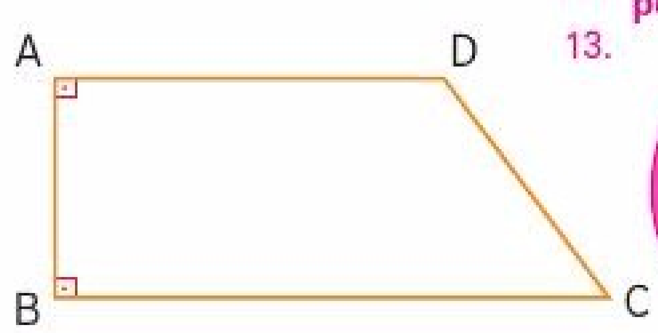
Quais são as medidas dos ângulos do triângulo AOC? med $\hat{A}$ = 64°; med $\hat{O}$ = 92° e med $\hat{C}$ = 24°.

10. De um ponto A, uma pessoa enxerga o topo de um obelisco, segundo um ângulo de 58° 12′, como mostra o desenho a seguir:



A letra **x** representa uma medida em grau. Qual é o seu valor? 31° 48′

11. No trapézio retângulo ABCD, o ângulo obtuso mede 127°.



Qual é a medida do ângulo agudo? 53°

13.

12. Seis caixas de lápis custam o mesmo que quatro caixas de canetas. Sabendo-se que uma caixa de canetas custa R$ 4,00 a mais que uma caixa de lápis, qual é o preço da caixa de lápis? R$ 8,00

13. Os tipos de transporte e o número de trabalhadores que usam cada um foram registrados nesta tabela.

Tipo de transporte	Número de trabalhadores
Carro	30
Moto	24
Ônibus	30
Outros	36
Total	120

Construa um gráfico de setores com esses dados.

14. A expressão $-n + 5n - 8n$ é equivalente a: a

a) $-4n$ b) $-3n$ c) $2n$ d) $4n$

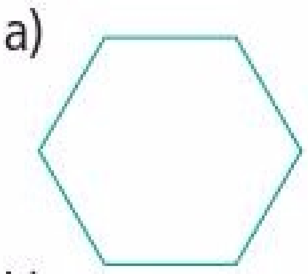
15. Simplificando a expressão d

$(-0{,}3 \cdot 3^{-1}) : \left(\frac{4}{5} - 0{,}9\right)$, obtém-se um número:

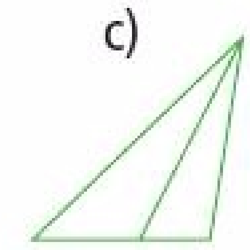
a) negativo.
b) primo.
c) divisível por 10.
d) racional.

16. Qual destas figuras tem eixos de simetria no plano do papel? a

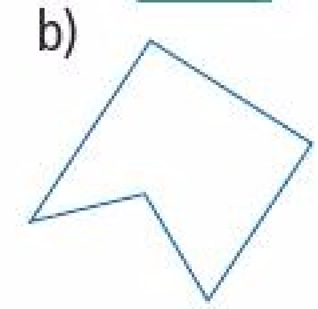
a)



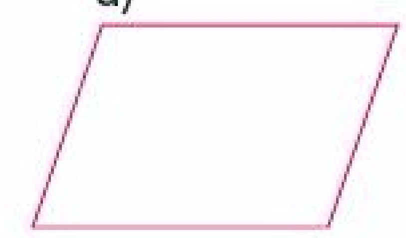
c)



b)



d)



17. Quantos eixos de simetria tem uma circunferência? d

a) 1. b) zero. c) 100. d) infinitos.

18. Destas sentenças, a afirmação verdadeira é: a

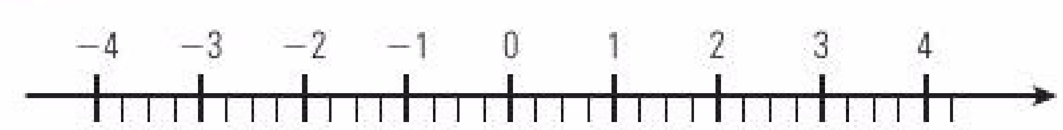
a) Um número racional negativo elevado a um expoente ímpar é negativo.

b) O quociente entre zero e um número negativo não existe.

c) O produto de um número racional pelo seu inverso é -1.

d) Todo número racional elevado a zero é igual a zero.

19. (Saeb) Observe o desenho:



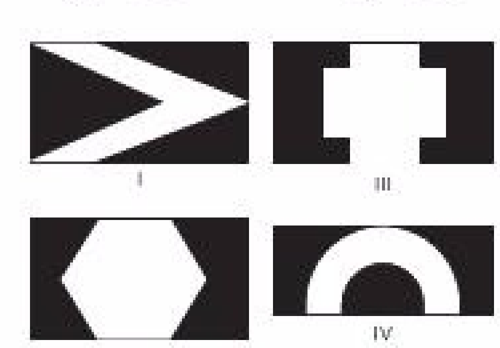
O número $\frac{11}{4}$, na reta numérica, está localizado entre: d

a) -4 e -3.
b) -2 e -1.
c) 3 e 4.
d) 2 e 3.

20. A medida de um ângulo é igual à metade da medida de seu suplemento. Esse ângulo mede: c

a) 15° b) 30° c) 60° d) 90°

21. (Encceja) Um arquiteto vai construir uma praça com áreas gramadas. Nos desenhos ao lado, feitos pelo arquiteto, a parte escura corresponde à área gramada. Indique o desenho que ele pode aproveitar de maneira que as pessoas que vão caminhar na praça possam passar de um ponto a outro, em linha reta, sem jamais pisar o gramado. b



a) I b) II c) III d) IV

UNIDADE 8

Sistema de equações

Recorte de um guia da cidade de Londrina, Paraná, que fornece a localização de determinados locais dessa cidade.

Nesta unidade...

1. Par ordenado
2. Equação com duas variáveis
3. Sistema de duas equações de 1º grau com duas variáveis
4. Estatística e probabilidade

De modo geral, situações de localização de um ponto em guias como esse envolvem **equações com duas incógnitas**. Esse assunto será desenvolvido nesta Unidade.

Nesta unidade você estudará também **pares ordenados**. Antes de começar, vamos retomar o que você já aprendeu sobre **par**.

A palavra **par** tem vários significados. Mas, quando ela é mencionada, **é comum** pensarmos em **dois** desses significados.

JOÃO PRUDENTE/PULSAR IMAGENS

Par pode significar casal: casal de pássaros.

RITA BARRETO

Os números dessas lojas são pares.

Em Matemática, números pares são números naturais que terminam em 0, 2, 4, 6 ou 8, ou seja, que são múltiplos de 2. Veja alguns exemplos:

10, 24, 58, 102

O que você já sabe?

- Em que situação do seu dia a dia você usa o termo "par"? Dê um exemplo. Resposta pessoal.
- Na sequência dos números naturais, qual é o número par que vem imediatamente antes de 100? 98
- Quais são os números pares maiores que 1000 e menores que 1010? 1002, 1004, 1006, 1008
- O número 10 003 é um número par? Explique sua resposta. Resposta possível: Não, porque não termina em 0, 2, 4, 6 ou 8.

1 Par ordenado

O que é par ordenado?

Para refletir e responder

Em um jogo de cartas, começa aquele que tira o número maior. Amélia, Pedro e Patrícia tiraram, respectivamente, 5, 8 e 9.

HÉLIO SENATORE

- Que pares de números podem ser formados com esses números, de modo que um deles seja maior que o outro?

Resposta possível: 8 e 5, 9 e 5, 9 e 8.

Em Matemática, os números 5, 8 e 9 podem ser relacionados dois a dois por meio da expressão "é maior que".

Os pares de números são indicados entre parênteses.

8 é maior que 5 — (8, 5).
9 é maior que 5 — (9, 5).
9 é maior que 8 — (9, 8).

É importante observar que (8, 5) é diferente de (5, 8), pois (8, 5) indica, na situação descrita, que 8 é maior que 5, e em (5, 8) 5 não é maior que 8.

Chamamos de **par ordenado** dois números, **a** e **b**, considerados em certa ordem e indicados entre parênteses. Se a ordem é primeiro o número **a** e depois o número **b**, indicamos o par ordenado por (**a**, **b**). Se a ordem é primeiro **b** e depois **a**, indicamos por (**b**, **a**).

Dois pares ordenados (a, b) e (c, d) são iguais somente se $\mathbf{a = c}$ e $\mathbf{b = d}$.

Exemplo:

$\left(\frac{4}{12}, 2\right) = \left(\frac{1}{3}, 2\right)$, pois $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ e $2 = 2$, mas $(3, 4) \neq (4, 3)$, pois $3 \neq 4$ e $4 \neq 3$.

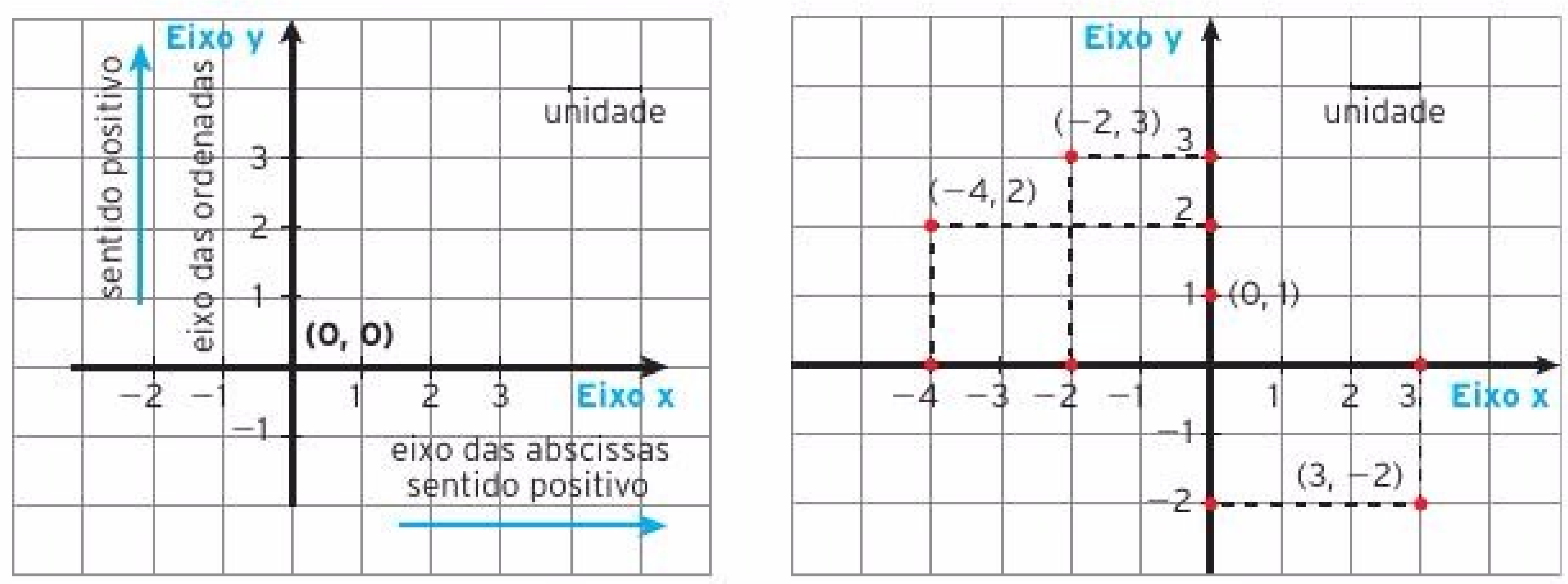
Representação geométrica

Uma representação geométrica de pares ordenados pode ser feita desenhando **duas retas numeradas perpendiculares**. O ponto comum a essas retas é chamado de **origem** e é identificado pelo par ordenado **(0, 0)**.

Chamamos as retas de eixos: **eixo das abscissas** e **eixo das ordenadas**. Em geral, eles são indicados, respectivamente, por **eixo x** e **eixo y**.

Os pares ordenados são as **coordenadas** dos pontos, e essa representação geométrica é denominada **sistema de coordenadas cartesianas**. A palavra **cartesiano** tem origem no nome de René Descartes, filósofo e matemático francês.

Observe:



Representação de pontos do plano e os pares ordenados que os identificam.

Note que usar papel quadriculado facilita a representação dos pares ordenados.

O par ordenado (−4, 2), por exemplo, é representado por um ponto que está no cruzamento de duas retas:

- uma, paralela ao eixo **y** e que passa por −4 no eixo **x**;
- outra, paralela ao eixo **x** e que passa por 2 no eixo **y**.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

1. Observe as seguintes fichas numeradas:

10 6 20 12

Relacione esses números de dois em dois usando a expressão:

"é menor que"

a) Escreva os pares ordenados obtidos. (6, 10); (6, 12); (6, 20); (10, 12); (10, 20); (12, 20)

b) O par (5, 10) apareceu na resposta do item anterior? Por quê? Não, porque não existe ficha numerada com 5.

2. Se $(-3, a) = \left(-\frac{12}{4}, 0\right)$, então qual é o valor de **a**? a = 0

3. Às letras **m** e **n** podem ser atribuídos os números:

−4, −3, −2, −1, 0.

a) Que pares ordenados (m, n) podem ser escritos segundo a relação
(−4, −3); (−3, −2); (−2, −1); (−1, 0)

"o primeiro número tem uma unidade a menos que o segundo"?

b) Podemos formar o par ordenado (0, −1)? Por quê? Não, porque 0 não tem uma unidade a menos que −1.

4. Use papel quadriculado e localize, em um sistema de coordenadas cartesianas, estes pontos: A (5, 4), B (21, 22), C (0, 3), D (23, 0) e E (4, 5).
Veja a resposta no final do livro.

2 Equação com duas variáveis

O que é equação de 1º grau com duas variáveis

Para refletir e responder

Lucas e Joana eram os candidatos a representante dos sétimos anos na escola em que estudam.

- Como você pode representar a situação descrita por meio de uma equação? Resposta possível: $3x + y = 480$.

Situações como a apresentada acima envolvem **duas variáveis**: uma que representa a quantidade de votos recebidos por Lucas, e outra, a quantidade de votos recebidos por Joana.

Veja uma **equação com duas variáveis** que pode ser escrita nessa situação:

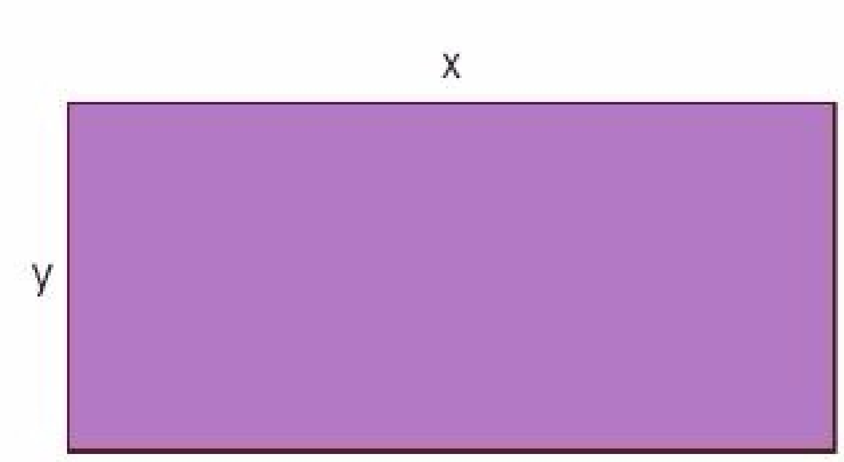
x — nº de votos de Lucas
y — nº de votos de Joana

Triplo dos votos de Lucas	mais	votos de Joana	são	480	votos.
$3 \cdot x$	$+$	y	$=$	480	

A equação $\mathbf{3 \cdot x + y = 480}$ ou $\mathbf{3x + y = 480}$ é uma **equação de 1º grau com duas variáveis**: **x** e **y**. Veja outros exemplos:

- O produto da medida do comprimento pela medida da altura de um retângulo é 60.

Podemos também representar essa situação por meio de uma equação.



x — medida do comprimento do retângulo
y — medida da altura do retângulo

$$\underbrace{\text{medida do comprimento}}_{x}\ \underbrace{\text{vezes}}_{\cdot}\ \underbrace{\text{a medida da altura}}_{y}\ \underbrace{\text{é}}_{=}\ \underbrace{60}_{60}.$$

A equação $\mathbf{x \cdot y = 60}$ é uma equação com duas variáveis, mas ela não é de 1º grau, pois nela há um produto das variáveis.

- A equação $3 \cdot (2m - 4) - n = 35$ é uma equação de 1º grau com duas variáveis.

Soluções de equações com duas variáveis

SHUTTERSTOCK

Laura é professora de Educação Física.

Ela está formando a equipe de esportes da escola que vai participar de um campeonato.

Observe a equação que podemos escrever para essa situação:

r — número de rapazes
m — número de moças

$$\underbrace{\text{O número de rapazes}}_{r}\ \underbrace{\text{mais}}_{+}\ \underbrace{\text{o número de moças}}_{m}\ \underbrace{\text{é}}_{=}\ \underbrace{91}_{91}.$$

Equação do problema: $r + m = 91$

Atribuindo valores a **r** e a **m** nessa equação e efetuando os cálculos, obtemos sentenças que poderão ser verdadeiras ou falsas.

r e **m** são as variáveis dessa equação.

Acompanhe alguns cálculos com os números que foram escolhidos e que estão na tabela:

r (rapazes)	**m** (moças)	**r + m = 91** (equação)	**Sentença**	**(r, m)** (par ordenado)
5	70	$5 + 70 = 91$	falsa	(5, 70)
5	86	$5 + 86 = 91$	**verdadeira**	(5, 86)
48	43	$48 + 43 = 91$	**verdadeira**	(48, 43)
60	31	$60 + 31 = 91$	**verdadeira**	(60, 31)
50	28	$50 + 28 = 91$	falsa	(50, 28)

(5, 86) é uma das soluções da equação $r + m = 91$.

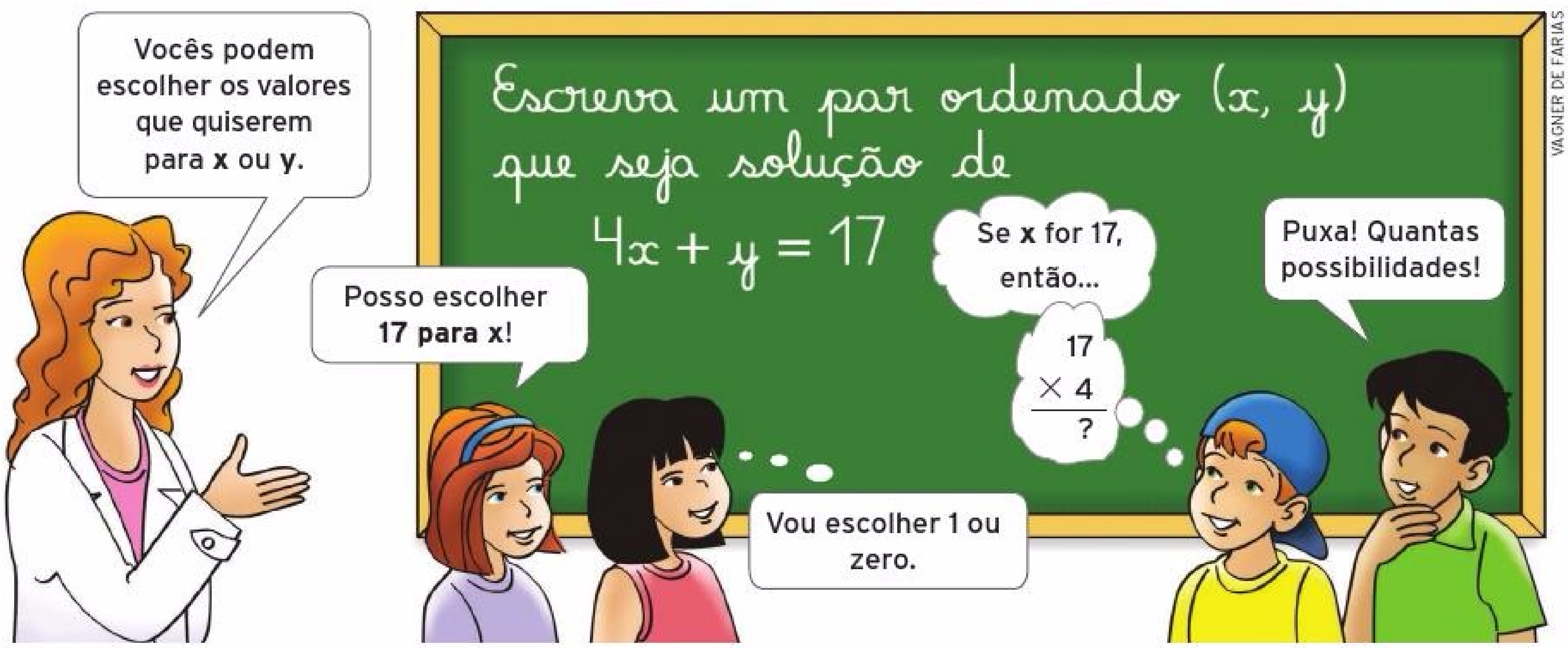
Em (5, 86), o primeiro número é o valor de **r** e o segundo, o de **m**.

Nessa tabela, além do par ordenado (5, 86), são também soluções da equação $\mathbf{r + m = 91}$ os pares ordenados **(48, 43)** e **(60, 31)**.

Solução de uma equação de 1º grau com duas variáveis

Vamos explorar esse assunto por meio de um exemplo.

Na equação apresentada a seguir, **x** e **y** representam números racionais.



Substituindo **x** por 1 na equação $4x + y = 17$, obtemos uma equação de 1º grau com a incógnita **y**. A raiz dessa equação é o valor de **y** que forma um par ordenado que é solução dessa equação.

$x = 1$ —— $4x + y = 17$ —— $4 \cdot 1 + y = 17$ —— $y = 17 - 4$ —— $\mathbf{y = 13}$

Verificação:

$x = 1$ e $y = 13$ —— $4x + y = 17$ —— $4 \cdot 1 + 13 = 17$

$4 + 13 = 17$ (sentença verdadeira)

O par ordenado **(1, 13)** é uma solução da equação $\mathbf{4x + y = 17}$.

Acompanhe outros cálculos nos quais atribuímos alguns valores a **x** e determinamos os valores correspondentes de **y** que compõem soluções da equação $4x + y = 17$.

equação —— $4x + y = 17$

Escolhendo $x = 0$

Substituindo **x** por **0** —— $4 \cdot 0 + y = 17$

$0 + y = 17$

$y = 17$

(0, 17) é solução

Escolhendo $x = \frac{1}{4}$

Substituindo **x** por $\mathbf{\frac{1}{4}}$ —— $4 \cdot \frac{1}{4} + y = 17$

$1 + y = 17$

$y = 16$

$\left(\frac{1}{4}, 16\right)$ é solução

Da mesma forma, podemos escolher valores para **y** e determinar os valores de **x** resolvendo uma equação.

Escolhendo $y = -\frac{1}{2}$

Substituindo **y** por $-\frac{1}{2}$ — $4x + \left(-\frac{1}{2}\right) = 17$

$$4x = 17 + \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{35}{8}$$

$\left(\frac{35}{8}; -\frac{1}{2}\right)$ é solução

Os pares ordenados (0, 17), $\left(\frac{1}{4}; 16\right)$ e $\left(\frac{35}{8}; -\frac{1}{2}\right)$ são algumas **soluções** da equação $\mathbf{4 \cdot x + y = 17}$. Como **x** e **y** representam números racionais quaisquer, existem infinitos valores que podemos escolher. Isso significa que a equação $4 \cdot x + y = 17$ tem **infinitas soluções**.

Chamamos **equação de 1º grau com duas variáveis** toda equação que pode ser escrita na forma $\mathbf{a \cdot x + b \cdot y = c}$, em que **a**, **b** e **c** representam números racionais conhecidos e **a** e **b** são **diferentes de zero**.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

5. Anote apenas as equações de 1º grau com duas variáveis: Ⓐ e Ⓑ

Ⓐ $5m - 3n = 4m$

Ⓑ $\frac{y}{4} - 2 \cdot (3z + 9) = 1$

Ⓒ $3a \cdot b - 15 = 0$

Ⓓ $\frac{x - 12}{5} - 6x = \frac{2}{15}$

6. O terreno da casa de Pedro é retangular. Se do dobro da medida da frente do terreno subtrairmos a medida de fundo, obteremos 48,6 metros.

ZAPT EDITORIAL

a) Escreva uma equação que represente essa situação. Resposta possível: $2x - y = 48,6$

b) Quanto terá de frente o terreno se de fundo tiver 67,8 m? 58,2 m

7. Considere a equação dada a seguir e observe os pares ordenados apresentados nos itens seguintes. Quais deles são soluções da equação? b, d

$$x - 3y = -6$$

a) (6, 0)

b) $\left(-2, \frac{4}{3}\right)$

c) (3,4; 2,6)

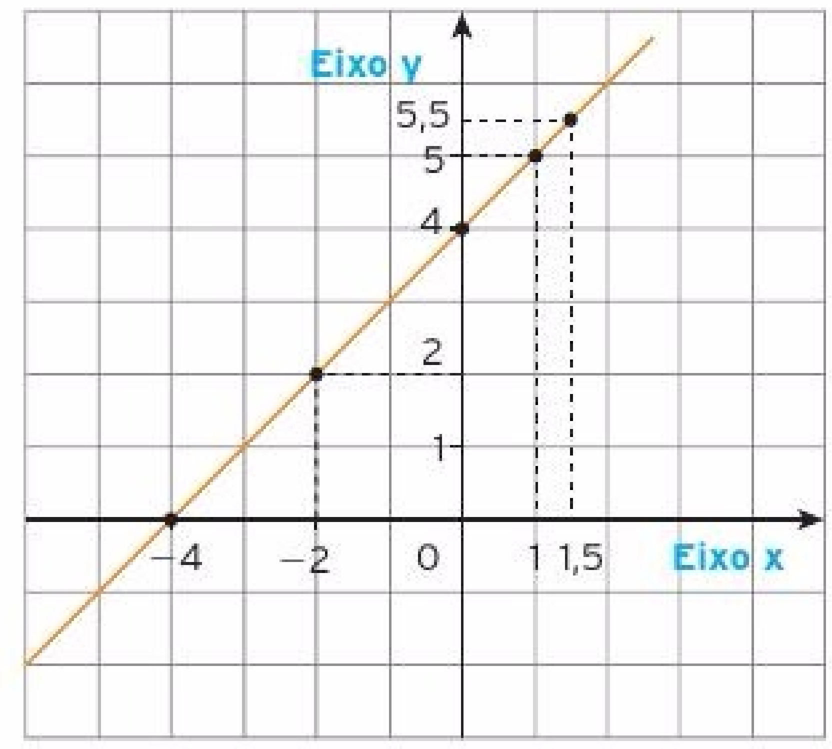
d) (−0,9; 1,7)

Representação geométrica

Já sabemos que uma equação do 1º grau com duas variáveis tem infinitas soluções. Agora, veja um exemplo de como essas soluções são representadas por meio de pontos de um plano.

- Representação geométrica da equação $x - y = -4$.

x	$x - y = -4$	y	Soluções
0	$0 - y = -4$	4	(0, 4)
-4	$-4 - y = -4$	0	$(-4, 0)$
-2	$-2 - y = -4$	2	$(-2, 2)$
1	$1 - y = -4$	5	(1, 5)
1,5	$1{,}5 - y = -4$	5,5	(1,5; 5,5)



É possível mostrar que:

Todos os possíveis pares ordenados que são soluções de uma equação de 1º grau com **duas variáveis**, representados em um sistema de coordenadas cartesianas, estão alinhados sobre uma reta.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

8. Nesta atividade considere a equação $2x + y = -1$ em que **x** e **y** representam números inteiros.

a) Copie e complete a tabela ao lado com cálculos de soluções dessa equação, seguindo o exemplo.

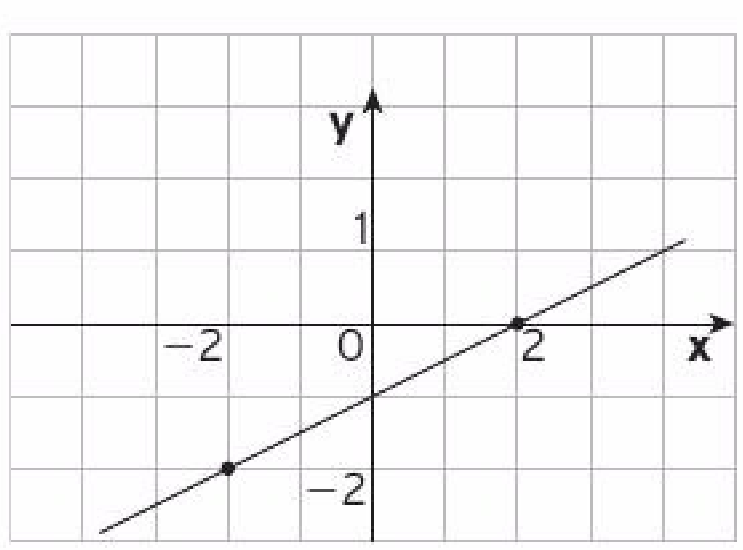
b) Utilize uma malha quadriculada e represente as soluções encontradas.

Veja resposta no final do livro.

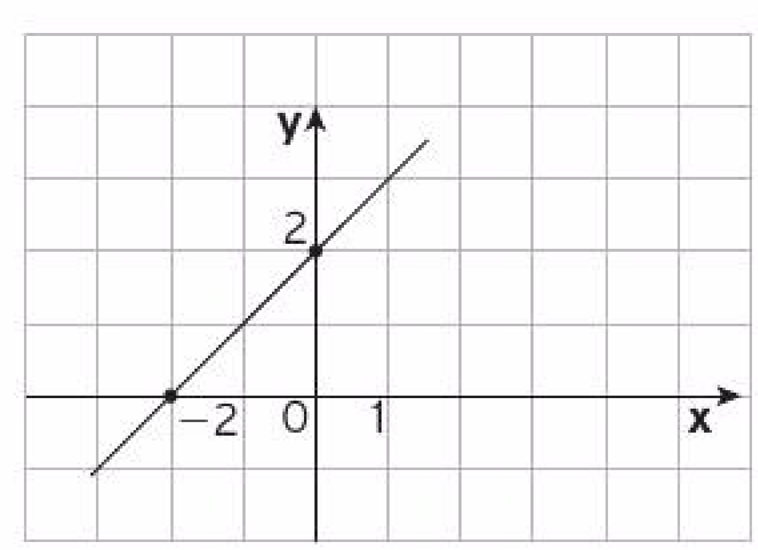
x	$2x + y = -1$	y	Solução
-2	$-4 + y = -1$	3	$(-2, 3)$
-1	$-2 + y = -1$	1	$(-1; 1)$
0	$0 + y = -1$	-1	$(0, -1)$
2	$4 + y = -1$	-5	$(2, -5)$

9. Anote a letra da figura com o gráfico que representa a equação $\frac{x}{2} - y = 1$. Ⓐ

Ⓐ



Ⓑ



10. Determine cinco soluções da equação $\frac{x-1}{4} = y$ e represente-as em um sistema de coordenadas cartesianas.

Respostas possíveis: (1, 0), (5, 1), $\left(3, \frac{1}{2}\right)$, $\left(0, -\frac{1}{4}\right)$, $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$.

Troquem ideias e resolvam

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega para realizar esta atividade. Respostas pessoais.

- Escolha alguns pares ordenados. Peça ao colega que desenhe a figura correspondente e calcule a área dessa figura.
- Faça o mesmo com os pares ordenados que você receber de seu colega.

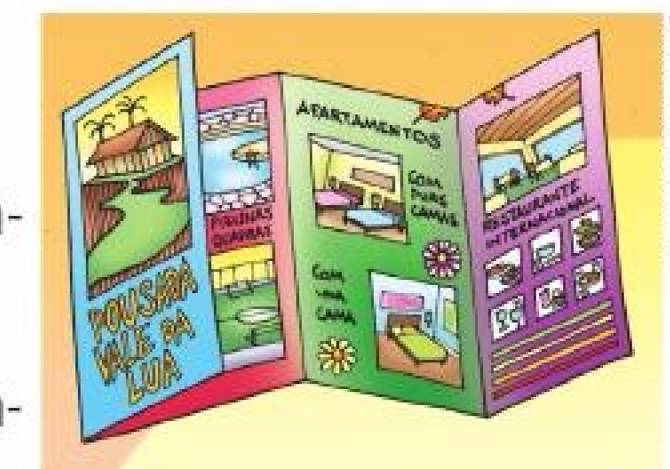
3 Sistema de duas equações de 1º grau com duas variáveis

Duas variáveis em uma única situação

Para refletir e responder

A Pousada Vale da Lua oferece dois tipos de acomodação.

Há apartamentos duplos (com duas camas) e apartamentos simples (com uma cama). No total são 64 apartamentos e 109 camas.



FRANCISCO VILACHÃ

- Quantos apartamentos de cada tipo existem na Pousada Vale da Lua?

45 apartamentos duplos e 19 apartamentos simples.

Já sabemos que um dos caminhos para resolver problemas é usar equações.

Existem problemas, como esse que foi apresentado, cujas informações podem ser relacionadas por meio de duas equações do 1º grau com duas variáveis.

Como equacionar o problema?

Já sabemos um pouco sobre esse assunto. Nessa situação os números desconhecidos são número de apartamentos duplos e número de apartamentos simples. Observe o equacionamento.

	Número de apartamentos	Número de camas
Duplos	**x**	$2 \cdot x$
Simples	**y**	y

Para o número de apartamentos, temos:

Número de apartamentos duplos e apartamentos simples, em um total de 64 apartamentos.

$$x + y = 64$$

Para o número de camas, temos:

Camas em apartamentos duplos e apartamentos simples, em um total de 109 camas.

$$2 \cdot x + y = 109$$

As equações $\mathbf{x + y = 64}$ e $\mathbf{2x + y = 109}$, consideradas simultaneamente, formam um sistema de equações de 1º grau com duas variáveis.

$$\begin{cases} x + y = 64 \\ 2x + y = 109 \end{cases}$$

Representamos um sistema de equações usando uma chave.

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

No caso desse sistema, o par ordenado **(45, 19)** é a solução das duas equações.

Dizemos que **(45, 19)** é a **solução** desse sistema de equações.

Lembre-se: nessas equações, **x** e **y** representam quantidade de apartamentos e são, portanto, números inteiros positivos.

Como resolver um sistema de equações?

Método da substituição

Neste ano, estudaremos dois métodos de resolução de sistemas: o da substituição e o da comparação. Levar os alunos a perceber que a utilização de um ou de outro método depende da forma como as equações do sistema são apresentadas.

Um dos métodos para resolver um sistema de duas equações de 1º grau com duas variáveis é o **método da substituição**. Nesse método, escolhemos uma das equações, por exemplo a primeira, e "isolamos" uma das variáveis, que é substituída na outra equação. Exemplo:

$$\begin{cases} x + y = 64 \\ 2x + y = 109 \end{cases} \qquad \begin{aligned} x + y &= 64 \\ y &= 64 - x \end{aligned}$$

A variável "isolada" foi **y**.

Substituímos **y** por $(64 - x)$ na equação $2x + y = 109$;

$$2x + 64 - x = 109$$ Equação de 1º grau com incógnita **x**

$$2x - x = 109 - 64$$

$$\mathbf{x = 45}$$

Substituindo **x** por 45 na primeira equação, calculamos o valor de **y**.

$$45 + y = 64$$

$$y = 64 - 45$$

$$\mathbf{y = 19}$$

O par ordenado **(45, 19)** é solução das duas equações do sistema e é, por isso, a solução do sistema de equações dado.

Verificação:

Substituindo **x** por 45 e **y** por 19 nas equações desse sistema, teremos sentenças verdadeiras.

1ª equação

$$\mathbf{x + y = 64}$$
$$45 + 19 = 64$$
$$64 = 64$$

2ª equação

$$\mathbf{2x + y = 109}$$
$$2 \cdot 45 + 19 = 109$$
$$109 = 109$$

Como 45 e 19 são números inteiros positivos, eles são a solução do problema proposto. Isso significa que a pousada oferece 45 apartamentos duplos e 19 apartamentos simples.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

11. Responda sim ou não e justifique sua resposta. O par ordenado $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, considerando o primeiro valor como sendo de **m**, é solução: a) Sim, pois $\frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$

b) Não, porque $2 \cdot \frac{1}{2} + 0 = 1 + 0 = 1 \neq -2$

a) da equação $m - n = \frac{1}{2}$? b) da equação $2 \cdot m + n = -2$? c) do sistema $\begin{cases} m - n = \frac{1}{2} \\ 2 \cdot m + n = -2 \end{cases}$?

c) Não, porque $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ não é solução da equação $2 \cdot m + n = -2$.

12. Que par ordenado é solução de cada sistema de equações a seguir? Apresente a solução na forma (x, y).

a) $\begin{cases} 3x + y = 10 \\ -x + 2y = 6 \end{cases}$ (2, 4) b) $\begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ -8x + 2y = 24 \end{cases}$ $\left(\frac{9}{2}, 6\right)$

13. O par ordenado (2, 4), considerando 2 o valor de **x**, é solução de quais dos sistemas abaixo? B, C

A $\begin{cases} -x + y = 2 \\ x + y = 0 \end{cases}$ B $\begin{cases} -x + y = 2 \\ y = 2x \end{cases}$ C $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 2 \\ x - y = -2 \end{cases}$

14. As letras **x** e **y** representam números racionais. Qual é a solução (x, y) de cada sistema apresentado a seguir?

a) $\begin{cases} 3x - y = 7 \\ 4x - 5y = 2 \end{cases}$ (3, 2) b) $\begin{cases} x - 5y = 0 \\ 3x + 10y = 50 \end{cases}$ (10, 2) c) $\begin{cases} 6x - 21y = -7 \\ 2x - 3y = -5 \end{cases}$ $\left(-\frac{7}{2}, -\frac{2}{3}\right)$

15. Uma cozinheira produz diariamente empadinhas e coxinhas num total de 50 salgadinhos. Cada empadinha é vendida a R$ 6,00 e cada coxinha a R$ 4,00. Se em certo dia ela faturou R$ 240,00, quantos salgadinhos de cada tipo ela vendeu nesse dia?

a) Indicando por **x** a quantidade de empadinhas e por **y** a quantidade de coxinhas, qual dos sistemas seguintes traduz o problema para a linguagem matemática? B

A $\begin{cases} x + y = 50 \\ 4x + y = 240 \end{cases}$ B $\begin{cases} x + y = 50 \\ 6x + 4y = 240 \end{cases}$ C $\begin{cases} x + 6y = 50 \\ 4x + y = 240 \end{cases}$

b) Resolva o problema. 20 empadinhas e 30 coxinhas.

16. As letras **x** e **y** representam números racionais. Resolva os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} 8x + 20y = -24 \\ 7x + 4y = 6 \end{cases}$ (2, −2) b) $\begin{cases} 8x + 20y = -24 \\ 7x + 4y = 6 \end{cases}$ (2, −2) c) $\begin{cases} 6x - 21y = -7 \\ 2x - 3y = -5 \end{cases}$ $\left(-\frac{7}{2}, -\frac{2}{3}\right)$

17. A soma das idades de Renato e Juliana é 30. A idade de Renato é o quíntuplo da idade de Juliana. Qual é a idade de cada um? Renato: 25 anos; Juliana: 5 anos.

18. Dois ângulos são suplementares. Um mede 30° a mais que o outro. Qual é a medida de cada ângulo? 75°; 105°

19. As idades de Gina e sua filha somam, hoje, 75 anos. Há 10 anos, a idade de Gina era o quádruplo da idade de sua filha. Quantos anos Gina tem hoje? E sua filha? 54 anos; 21 anos.

20. Em uma circunferência, a letra **d** representa a medida do diâmetro, em centímetros, e a letra **r**, a medida do raio, em centímetros. Se $7 \cdot r - d = 35$, qual é a medida do raio e do diâmetro dessa circunferência? 7 cm e 14 cm.

21. A festa de 15 anos de Lúcia foi um sucesso. Nessa festa, ela distribuiu 2 cravos para cada rapaz e 3 rosas para cada moça, num total de 146 flores. Na hora da valsa, formaram-se pares de rapazes com moças e todos dançaram, menos duas moças que não tinham par. Quantos rapazes e quantas moças estavam na festa de Lúcia? 28 rapazes; 30 moças.

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

22. Cláudia tinha na bolsa 21 cédulas, em um total de R$ 135,00. As cédulas eram de R$ 5,00 e de R$ 10,00. Quantas cédulas de cada valor havia na bolsa de Cláudia? 15 de R$ 5,00 e 6 de R$ 10,00.

23. No início do ano, Marcelo ficou em dúvida na hora de comprar o uniforme da escola. Não sabia se comprava 3 camisetas e 2 calças por R$ 198,00 ou 4 camisetas e 1 calça por R$ 189,00. Todas as camisetas têm o mesmo preço, assim como as calças. Quanto custa cada peça? Camiseta: R$ 36,00 e calça: R$ 45,00

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

24. Em uma prova de História com 20 questões, os alunos ganham 5 pontos por questão certa e perdem 3 pontos por questão errada. Quantas questões acertou um aluno que obteve 36 pontos? 12 questões.

25. Uma empresa fornece pneus para uma indústria que produz carros e motos. Em um certo período, foram pedidos 312 pneus para 120 veículos, sem contar os estepes. Em quantos carros e motos foram colocados esses pneus? 84 motos; 36 carros.

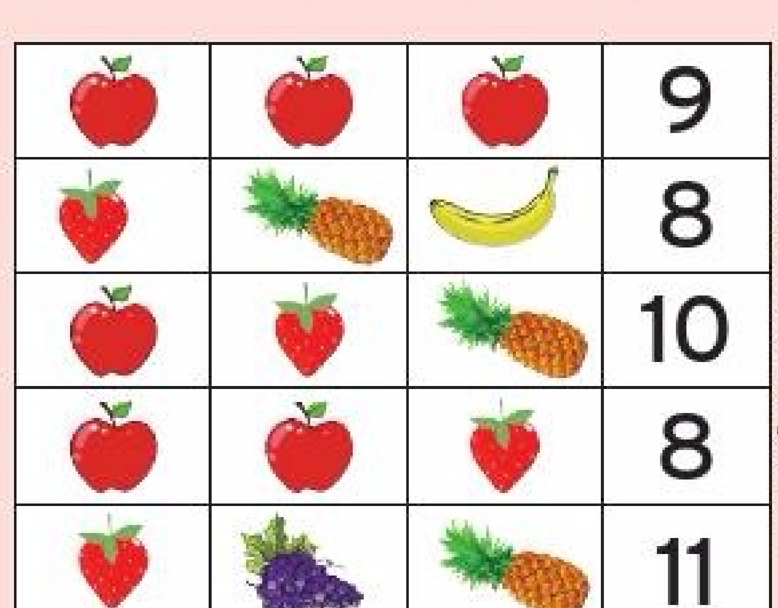
Desafio

FAÇA NO CADERNO

Salada de frutas

Cada uma das frutas desenhadas no quadro representa um número inteiro positivo de 1 a 5. A mesma fruta tem sempre o mesmo valor. Cada número da 4ª coluna é a soma dos números da linha correspondente.

- Descubra o valor de cada fruta. Banana: 1; morango: 2; maçã: 3; uva: 4; abacaxi: 5



ILUSTRAÇÕES: THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Método da comparação

Também podemos resolver um sistema de duas equações de 1º grau com duas variáveis usando o **método da comparação**, que estudaremos a seguir.

Exemplo:

Vamos equacionar e resolver o problema a seguir.

Um grupo de 10 pessoas, entre adultos e crianças, participou de um Passeio Ciclístico.

A diferença entre o quádruplo do número de adultos e o número de crianças é 25.

Quantos adultos e quantas crianças participaram do Passeio Ciclístico?

FOTOGRAFIAS: THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Vamos escolher a letra **x** para representar o número de adultos e **y**, o número de crianças. Portanto, **x** e **y** são números inteiros positivos.

A soma do número de adultos e do número de crianças é 10.

$$x + y = 10$$

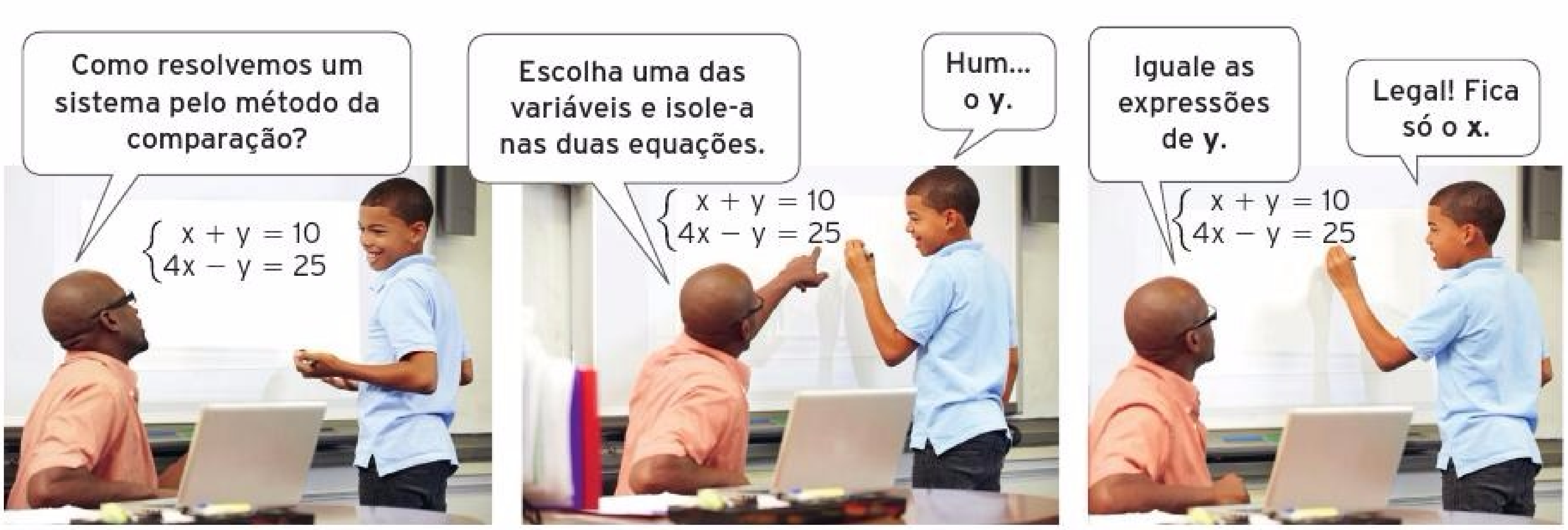
x —— número de adultos
y —— número de crianças

A diferença entre o quádruplo do número de adultos e o número de crianças é 25.

$$4x - y = 25$$

As equações abaixo formam o sistema de equações envolvido no problema apresentado.

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ 4x - y = 25 \end{cases}$$



Isolamos **y** nas duas equações.

$x + y = 10$ $\qquad\qquad$ $4x - y = 25$

$\mathbf{y} = 10 - x$ $\qquad\qquad$ $4x - 25 = \mathbf{y}$

Igualamos $(10 - x)$ e $(4x - 25)$ e calculamos o valor de **x**.

Equação de 1º grau na incógnita **x** —— $10 - x = 4x - 25$

$$10 + 25 = 4x + x$$

$$35 = 5x \text{ ou } 5x = 35$$

$$x = \frac{35}{5} \text{ —— } \mathbf{x = 7}$$

Substituímos **x** por 7 na equação $y = 10 - x$ e calculamos **y**: $y = 10 - 7$ —— $\mathbf{y = 3}$

O par ordenado (7, 3) é a solução do sistema.

Verificação:

Substituímos **x** por 7 e **y** por 3 nas equações desse sistema e verificamos se as sentenças são verdadeiras.

$\mathbf{x + y = 10}$ $\qquad\qquad$ $\mathbf{4x - y = 25}$

$7 + 3 = 10$ $\qquad\qquad$ $4 \cdot 7 - 3 = 25$

$28 - 3 = 25$

Como 7 e 3 são números inteiros positivos, eles são soluções do problema, ou seja, 7 adultos e 3 crianças participaram do Passeio Ciclístico.

Resolução geométrica de sistema de equações

A solução (7, 3) do sistema $\begin{cases} x + y = 10 \\ 4x - y = 25 \end{cases}$ pode ser obtida geometricamente. Para isso, representamos as duas equações por pontos alinhados sobre retas, no sistema de coordenadas cartesianas.

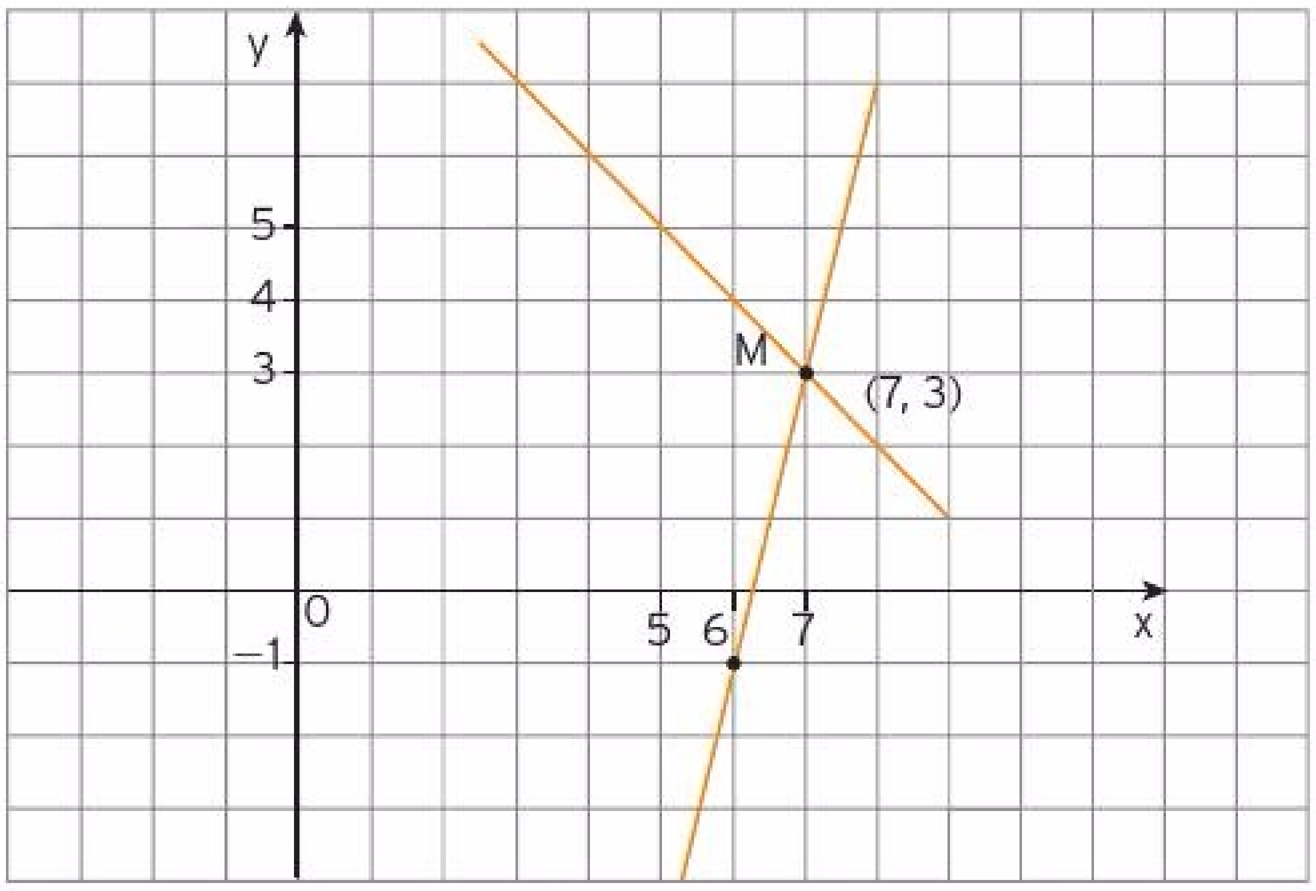
O ponto comum a elas representa a solução do sistema.

Equação: $x + y = 10$

Valores		Pares ordenados
x	y	(x, y)
5	5	(5, 5)
6	4	(6, 4)

Equação: $4x - y = 25$

Valores		Pares ordenados
x	y	(x, y)
6	–1	(6, –1)
7	3	(7, 3)



O ponto **M** tem coordenadas (7, 3) e representa a solução do sistema.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

26. Resolva cada sistema usando o método da comparação. Represente as soluções na forma (x, y):

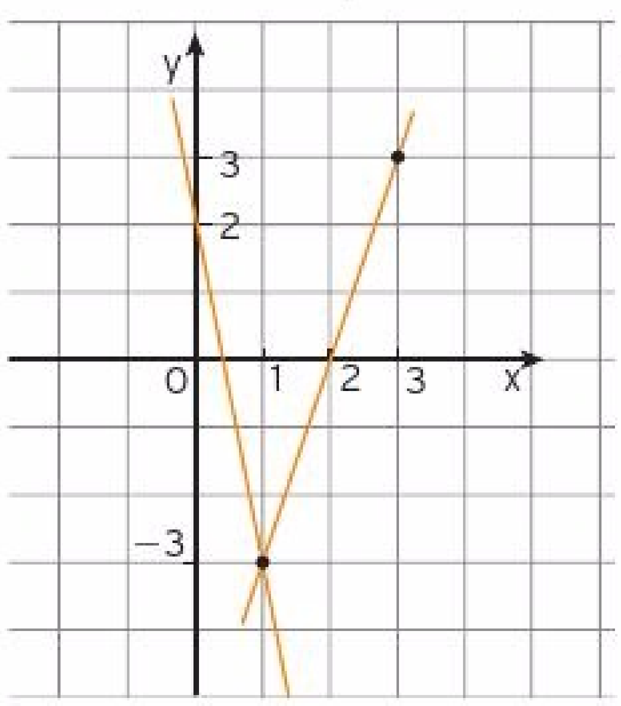
a) $\begin{cases} 5 \cdot x - 8 \cdot y = -9 \\ y = 6 - x \end{cases}$ (3, 3)

b) $\begin{cases} 4 \cdot x - 3 \cdot y = -2 \\ -2 \cdot x + 4 \cdot y = 1 \end{cases}$ $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

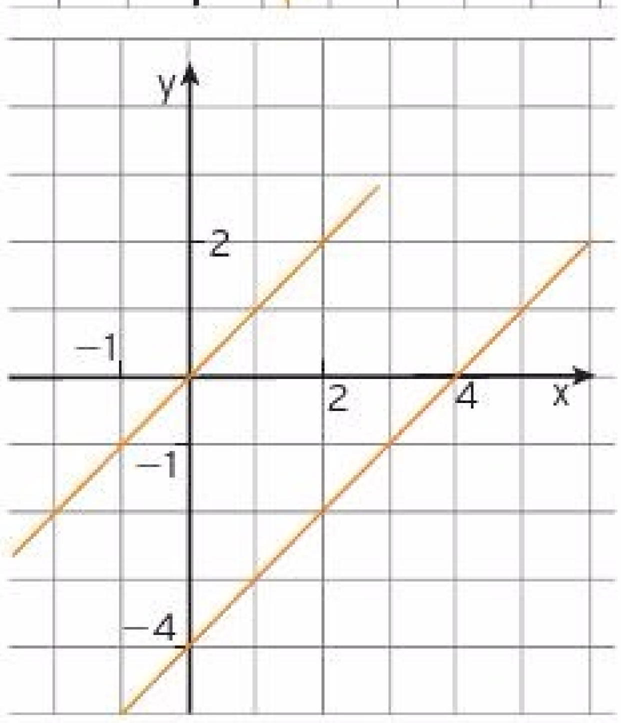
c) $\begin{cases} x - 2y = -21 \\ 3 \cdot x + y = 0 \end{cases}$ (−3, 9)

27. Uma professora do 7º ano propôs para seus estudantes que resolvessem geometricamente o sistema: $\begin{cases} 5 \cdot x + y = 2 \\ 3 \cdot x - y = 6 \end{cases}$

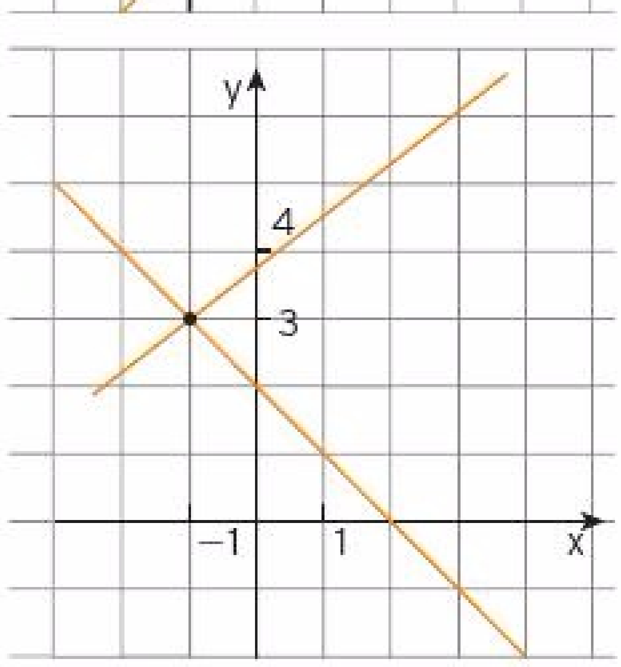
Três estudantes apresentaram respostas diferentes:



Antonio



Beatriz



Célia

a) Quem apresentou a resposta correta? Antonio.

b) Qual par ordenado é a solução do sistema? (1; −3)

28. Use papel quadriculado e represente geometricamente a solução dos sistemas:

a) $\begin{cases} y - x = 2 \\ 4 \cdot x + y = 7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = 4 \cdot x \\ 3 \cdot x + y = 21 \end{cases}$

Veja resposta no final do livro.

29. Em muitas situações as equações que compõem um sistema apresentam denominadores. Você já sabe o que fazer para resolver equações desse tipo, mas vamos relembrar.

$$5x + y = -4 \quad (1)$$

$$\frac{x + y}{2} = -\frac{16}{5} \quad (2)$$

Eliminamos os denominadores da equação (2) multiplicando os dois membros da equação pelo m.m.c (2,5), que é 10.

$\frac{x + y}{2} = -\frac{16}{5}$ —— $\frac{5 \cdot (x + y)}{10} = -\frac{2 \cdot 16}{10}$

$5 \cdot (x + y) = -32$ —— $5x + 5y = -32$

a) É a sua vez! Substitua a equação (2) do sistema inicial por $5x + 5y = -32$ e resolva o sistema apresentado no exemplo. $\left(\frac{3}{5}; -7\right)$

b) Resolva os sistemas de equações abaixo:

Ⓐ $\begin{cases} \frac{x}{5} - \frac{2y}{3} = -1 \\ 2x + 10y = -5 \end{cases}$ $\left(-4; \frac{3}{10}\right)$

Ⓑ $\begin{cases} -x + 2y = -20 \\ \frac{3x}{2} - \frac{y}{3} = -10 \end{cases}$ (−10; −15)

30. A área da sala de jogos de um hotel excede a área da sala de televisão em 130 m². A soma do triplo da área da sala de jogos com a área da sala de televisão é 590 m². Qual é a área da sala de jogos e a área da sala de televisão desse hotel? Sala de jogos: 180 m²; sala de televisão: 50 m².

31. Pedro e Anita estavam jogando cartas. No final da partida, os pontos de Anita eram o dobro dos pontos de Pedro, e a diferença entre os pontos de Anita e o sêxtuplo dos pontos de Pedro era −56. Quantos pontos obteve cada um? Anita: 28 pontos; Pedro: 14 pontos

Investigue e explique

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega. Reflitam sobre a situação apresentada, investiguem e resolvam-na.

Roberta e Henrique vão se casar. Consultando anúncios, encontraram em oferta o televisor e o fogão que gostariam de ter.

Analisem as informações dadas por eles:

THINKSTOCK/ GETTY IMAGES

Quais serão os salários de Roberta e de Henrique?

- Procurem, em anúncios de jornais ou folhetos de propaganda, preços de fogões e de televisores para resolver o problema.
- Comparem os resultados com os dos outros colegas. Resposta pessoal.

Exercícios complementares

FAÇA NO CADERNO

32. Resolva estes sistemas pelo método que você quiser:

a) $\begin{cases} 3x - y = 15 \\ x + 4y = -21 \end{cases}$ $(3, -6)$

b) $\begin{cases} 2 \cdot (x - 3y) + 5y = 6 \\ 4x - y = 5 \end{cases}$ $\left(-\frac{1}{2}, -7\right)$

c) $\begin{cases} -x + 3y = 2 \\ \dfrac{x + 4}{3} - 2y = 1 \end{cases}$ $\left(-3, -\frac{1}{3}\right)$

33. Em um triângulo, a soma das medidas de uma base e da altura relativa a essa base é 147 cm e a diferença entre elas é de 17 cm. Qual é a área desse triângulo? $2\,665$ cm²

34. Manuel tem duas caixas cilíndricas. A capacidade das duas juntas é 14 dm³. O dobro da capacidade da maior menos a capacidade da menor é igual a 22 dm³. Qual é a diferença entre as capacidades das duas caixas? 10 dm³

35. A diferença entre as medidas da base maior e da base menor de um trapézio é 3,2 cm. A medida da base maior é o dobro da medida da base menor mais 0,4 cm. Qual é a área desse trapézio, se a altura é 1,5 cm? 6,6 cm²

36. César tem 58 moedas. Algumas são de R$ 0,10 e outras de R$ 0,50, em um total de R$ 16,20. Quantas moedas de cada tipo César possui? 32 moedas de R$ 0,10 e 26 moedas de R$ 0,50.

37. Nas balanças, as caixas contêm a mesma quantidade de creme e as latas, a mesma quantidade de milho cozido. Qual é a massa de cada caixa? E de cada lata?

Caixa de creme: 180 g; lata de milho: 230 g.

HÉLIO SENATORE

4 Estatística e probabilidade

Pares ordenados e possibilidades

No lançamento de uma moeda não viciada, ou seja, uma moeda equilibrada, podemos obter **coroa**, se a face com o valor estampado estiver voltada para cima, ou **cara**, caso ocorra o contrário.

Exemplo:

Pedro lançou uma moeda não viciada duas vezes.

Ele anotou os resultados marcando cara com a letra **k** e coroa com a letra **c** e registrou, em um "diagrama-árvore", todas as possibilidades que podem ocorrer nos dois lançamentos.

1º lançamento	2º lançamento	resultados
K	K	(k, k)
	C	(k, c)
C	K	(c, k)
	C	(c, c)

Nesse diagrama, temos os resultados possíveis, que são os pares ordenados: (k, k), (k, c), (c, k) e (c, c). Ou seja, há quatro possibilidades para o resultado.

Sistema de coordenadas, gráfico de colunas e gráfico de barras

Veja como construir gráficos de colunas e gráficos de barras.

Os dados da tabela abaixo referem-se às áreas das superfícies dos três maiores continentes.

Áreas dos continentes

Continente	Área (milhões de km²)
América	42,07
África	30,21
Ásia	44,66

Fonte: Calendario Atlante de Agostini. Novara: Istituto Geografico De Agostini, 2003.

Vamos representá-los em um **gráfico de colunas**.

Nesse tipo de gráfico, os dados são representados por retângulos de bases iguais e alturas que podem ser diferentes.

No eixo **x**, figuram as bases dos três retângulos que correspondem ao nome dos continentes. Pode-se escolher qualquer medida para as bases dos retângulos. No gráfico a seguir, elas medem 7 mm.

No eixo **y**, estão representadas as áreas dos continentes, em milhões de km^2. Nesse eixo, a partir da origem **O**, cada 7 mm correspondem a 10 milhões de km^2.

Para construir um **gráfico de barras**, indicamos no eixo **x** a área de cada continente e, no eixo **y**, o nome dos continentes.

Área dos três maiores continentes

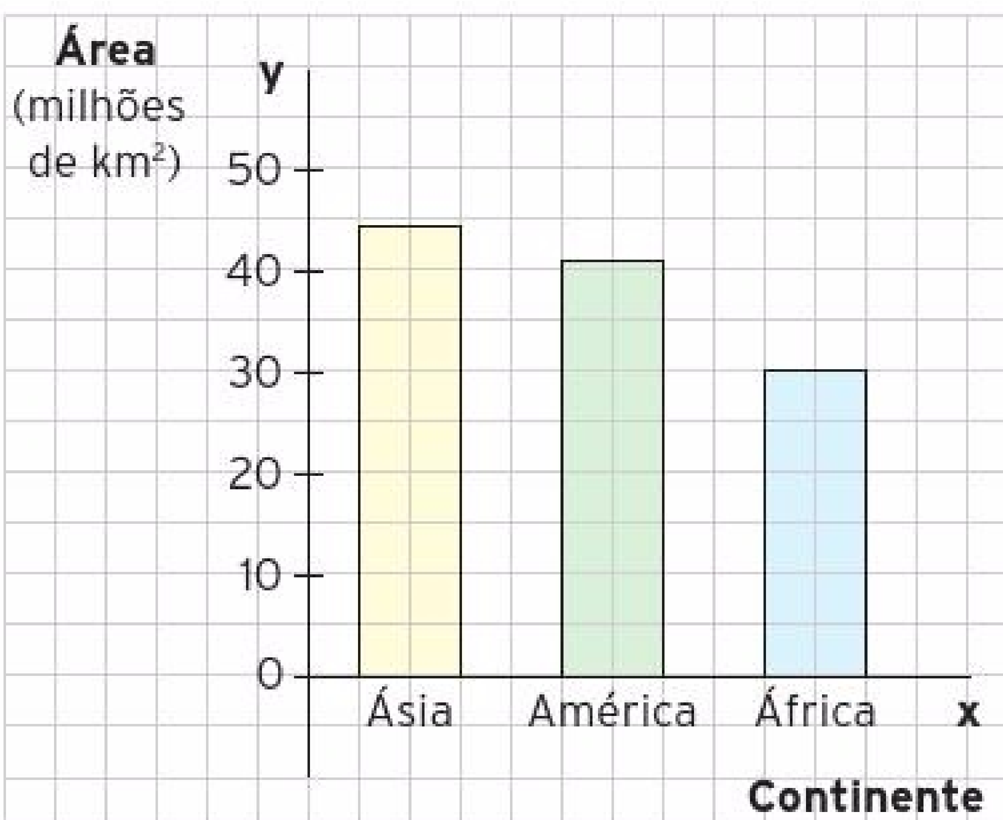


Gráfico de colunas.

Área dos três maiores continentes

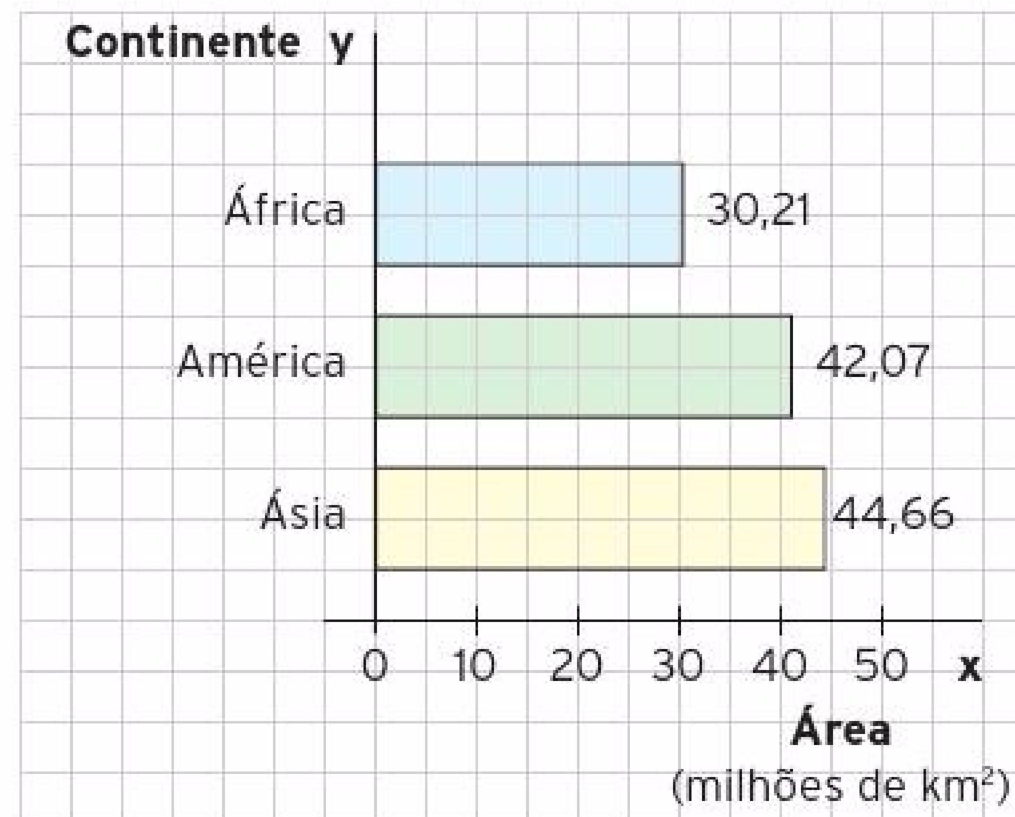


Gráfico de barras.

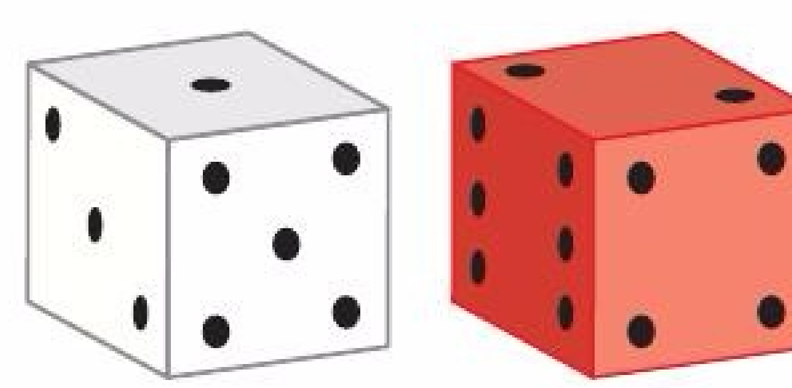
Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

38. João colocou, em um saco não transparente, três bolas com mesmo tamanho nas cores vermelha, azul e preta. Ele vai retirar duas bolas, uma de cada vez, observar as cores e devolvê-las ao saco. Quais são os resultados possíveis considerando a ordem retirada? (v, v); (v, a); (v, p); (a, a); (a, v); (a, p); (p, p); (p, v); (p, a)

39. No lançamento de um dado há seis resultados que podem aparecer na face de cima: 1, 2, 3, 4, 5 ou 6.

Laura lançou dois dados: um branco e um vermelho.



BIS

a) Ela jogou o dado branco e saiu resultado 1 na face de cima. Ao jogar o dado vermelho, se sair o número 2, esses dois resultados podem ser indicados pelo par (1, 2). Escreva todos os pares ordenados que podem ser obtidos nesse caso.
(1, 1); (1, 2); (1, 3); (1, 4); (1, 5); (1, 6)

b) Faça o mesmo que no item **a**, imaginando que no lançamento do dado branco tenha saído resultado 2.
(2, 1); (2, 2); (2, 3); (2, 4); (2, 5); (2, 6)

Troquem ideias e resolvam

Explorar outras atividades que envolvam Álgebra, Geometria e Medidas, em que as letras são utilizadas como variáveis para expressar relações entre grandezas, ou seja, como fórmulas. Ver **Leitura**.

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega, experimentem e discutam.

No jogo do par ou ímpar, um jogador escolhe par e o outro, ímpar. Cada um esconde uma das mãos e os dois mostram ao mesmo tempo certo número de dedos (ou nenhum).

Se o total de dedos for par, ganha quem escolheu par; se for ímpar, ganha quem escolheu ímpar.

- Qual é a menor soma que pode ocorrer nesse jogo? E a maior? 0 e 10.
- Escrevam em seus cadernos todos os pares ordenados possíveis em que a soma é par. Quantas são as possibilidades? (0, 0), (0, 2), (0, 4), (1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 0), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (4, 0), (4, 2), (4, 4), (5, 1), (5, 3), (5, 5); 18 possibilidades.
- Façam o mesmo para todos os pares em que a soma é ímpar.
(0, 1), (0, 3), (0, 5), (1, 0), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 5), (3, 0), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 3), (4, 5), (5, 0), (5, 2), (5, 4).

Leitura

As fórmulas e o cálculo

Você sabia?

Peso e **massa** são grandezas diferentes. A massa de um corpo é sempre a mesma, não depende do local onde o corpo está. O mesmo não acontece com o peso de um corpo, que poderá ser diferente em locais diversos.

O peso de um corpo depende da **aceleração** que um outro corpo exerce sobre ele.

Essa aceleração é o que chamamos de **aceleração da gravidade**.

Saiba que:

Representando: peso por **p**, massa por **m** e aceleração por **g**.

$$\underbrace{\text{peso}}_{p} = \underbrace{(\text{massa do corpo})}_{m} \times \underbrace{(\text{aceleração da gravidade})}_{g}$$

$$p = m \cdot g$$

Uma unidade de medida de peso é newton.

Nessa fórmula, **p** pode ser a variável que depende dos valores das outras variáveis, **m** e **g**. Se conhecermos esses valores, poderemos calcular o peso usando essa fórmula.

A aceleração da gravidade na Lua é de, aproximamente, 1,66 metro por segundo ao quadrado, e a aceleração da gravidade na Terra é de, aproximadamente, 9,81 metros por segundo ao quadrado. Se a massa do Garfield é de 8 kg, então seu peso na Lua é $p = 8 \cdot 1{,}66 = 13{,}28$ newtons e, na Terra, $p = 8 \cdot 9{,}81 = 74{,}48$ newtons.

Logo, uma "saída" para Garfield é ir para a Lua!!!

Revisão cumulativa e testes

1. Copie estas sentenças substituindo o ■ por $=$ ou $\neq$:

a) -7^3 ■ $(-7)^3$ $=$

b) $(-0,3)^2$ ■ $-0,3^2$ $\neq$

c) $\sqrt{+9}$ ■ $+\sqrt{9}$ $=$

d) $-\sqrt{64}$ ■ $\sqrt{-64}$ $\neq$

e) $(-3 + 4)^5$ ■ -1^5 $\neq$

f) $(-0,4)^3$ ■ $-0,4^3$ $=$

2. Escreva estes números utilizando potências de base 10: Respostas possíveis.

a) 12 bilhões e trezentos milhões $123 \cdot 10^8$

b) 3 970 000 000 000 $39,7 \cdot 10^{11}$

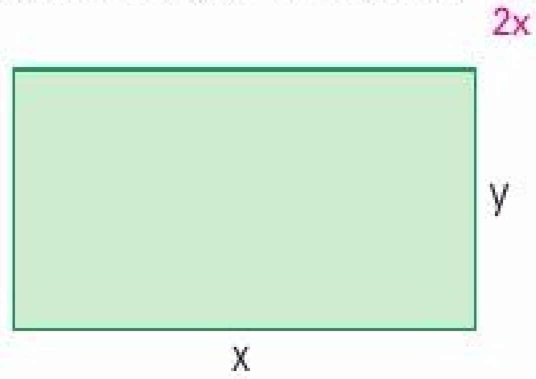
c) 0,000000045 $45 \cdot 10^{-9}$

3. Na equação $6 \cdot x + 9 \cdot y = -12$, **x** e **y** representam números racionais.

a) Se $x = 0$, qual é o valor de **y** para que o par ordenado $(0, y)$ seja solução dessa equação? $-\frac{4}{3}$

b) Se $y = -\frac{1}{3}$, qual é o valor de **x** para que o par ordenado $\left(x, -\frac{1}{3}\right)$ seja solução da equação dada? $-\frac{3}{2}$

4. O perímetro do retângulo abaixo é 64,5 cm. Represente esse perímetro utilizando uma equação de 1º grau com duas variáveis. Resposta possível: $2x + 2y = 64,5$.



5. Copie esta tabela e complete-a com valores de **b** e com pares ordenados (a, b) que sejam soluções da equação $b = 2a + 7$. Respostas pessoais.

a	-4	$-0,2$	0	$\frac{3}{4}$	2	2,5
b	-1	$-6,6$	7	$\frac{17}{2}$	11	12
(a, b)	$(-4, -1)$	$(-0,2; -6,6)$	0,7	$\left(\frac{3}{4}, \frac{17}{2}\right)$	(2, 11)	(2,5; 12)

O par ordenado $\left(-\frac{1}{2}; 7\right)$ é solução da equação $b = 2a + 7$? Por quê? Não; $7 \neq 6$

6. Renato pensou em três números inteiros consecutivos, em que $\frac{5}{6}$ do menor é igual à metade do maior acrescido de 5 unidades. Em que números ele pensou? 18, 19 e 20

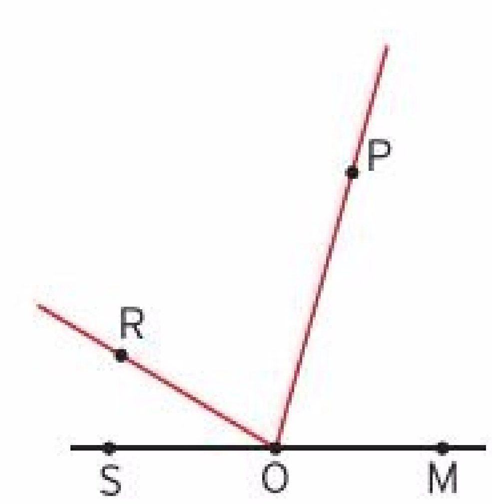
7. No Cine Estrela há dois tipos de ingresso: meia-entrada e entrada inteira. A meia-entrada custa R$ 12,00 e a inteira, R$ 24,00. No final de uma sessão, o caixa registrou R$ 1680,00 para um total de 100 pagantes. Quantas pessoas pagaram meia-entrada e quantas pagaram ingresso inteiro nessa sessão?
Meia-entrada: 60 pessoas; inteira: 40 pessoas.

8. Cida foi ao armazém com uma cédula de R$ 50,00. Chegando lá, descobriu que, se quisesse comprar 3 kg de arroz e 5 kg de feijão, faltariam R$ 4,00. Ela resolveu comprar 5 kg de arroz e 3 kg de feijão, mas ainda assim faltaram R$ 8,00.

a) Qual é o preço do quilograma de arroz e do quilograma de feijão? Arroz: R$ 4,50; feijão: R$ 6,50.

b) Cida decidiu então comprar 3 kg de arroz e 3 kg de feijão. Quanto ela recebeu de troco? R$ 17,00

9. Nesta figura, a medida de $M\hat{O}R$ excede em 25° o quádruplo da medida de $R\hat{O}S$. A semirreta $\overrightarrow{OP}$ é bissetriz de $M\hat{O}R$.



Responda:

a) Qual é a medida de $R\hat{O}S$? 31°

b) Qual é a medida de $M\hat{O}P$? 74° 30′

10. Resolva estes sistemas escolhendo um dos métodos estudados:

a) $\begin{cases} -2x + y = -9 \\ 6x + 2y = -3 \end{cases}$ $\left(\frac{3}{2}, -6\right)$

b) $\begin{cases} x = 16y - x \\ 6x - y = \frac{47}{4} \end{cases}$ $\left(2, \frac{1}{4}\right)$

11. A diferença entre dois números é 13. A quarta parte do maior menos a terça parte do menor é 2. Quais são esses números? 28 e 15

12. Em um jogo de adivinhação, um participante ganha 3 pontos para cada resposta certa e perde 2 pontos para cada resposta errada. Representando por **x** o número de acertos e por **y** o número de erros, escreva uma equação para cada uma destas situações:

a) Anita respondeu a 100 perguntas. $x + y = 100$

b) Anita fez 70 pontos. $3 \cdot x - 2 \cdot y = 70$

c) Considerando os itens **a** e **b**, quantas questões Anita acertou? 54 questões.

13. (Saresp) A nota que Tonico recebeu em Ciências é o dobro da nota de Laís mais 3 pontos. Já a nota de Raul é o triplo da de Laís e a mesma recebida por Tonico. A expressão que representa a relação entre as notas desses alunos é: b

a) $2x = 3x + 3$ e $x = 2$.

b) $2x + 3 = 3x$ e $x = 3$.

c) $2x + 3x = 3$ e $x = 2$.

d) $3x + 3 = 2x$ e $x = 2$.

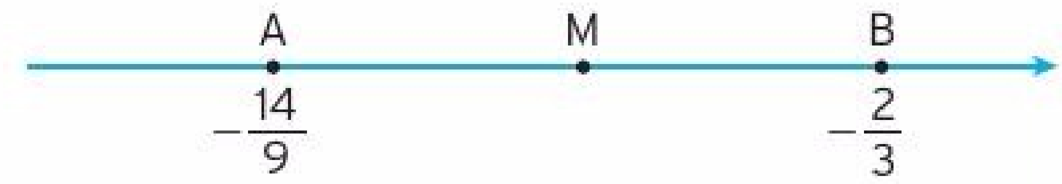
14. Tiago e Márcio são salva-vidas. Certo dia, fizeram uma aposta para ver quem mergulharia mais fundo em relação ao nível do mar. Sabe-se que a diferença entre a profundidade que Tiago desceu e o quádruplo da distância que Márcio atingiu foi 100 m. Esse valor diminui para 70 m se envolver a diferença entre o que Tiago desceu e o triplo da profundidade que Márcio alcançou.

a) Quem ganhou a aposta? Márcio.

b) Quantos metros, em relação ao nível do mar, cada mergulhador desceu?

Márcio: -30 m; Tiago: -20 m.

15. Na reta numerada abaixo, **M** é o ponto médio de $\overline{AB}$. A abscissa de **M** é: a



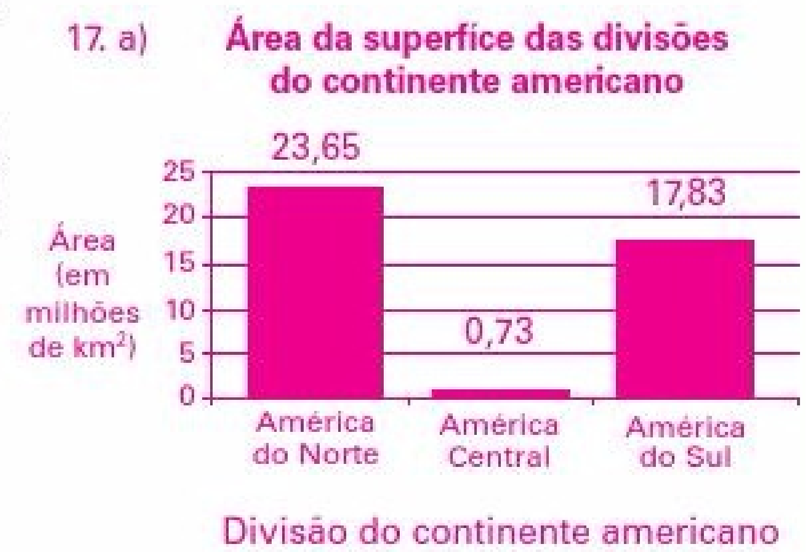
a) $-\frac{10}{9}$

b) $-\frac{10}{18}$

c) $\frac{10}{9}$

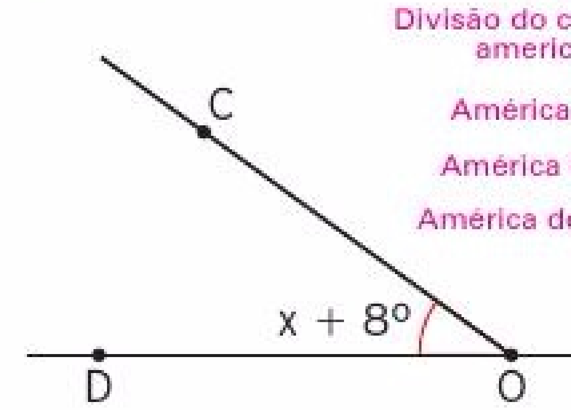
d) $\frac{10}{18}$

17. a)



16. Nesta figura, a medida de AÔC é o triplo da medida de CÔD.

17. b)



O valor de **x** é: c

a) 28°

b) 56°

c) 37°

d) 54°

17. Esta tabela apresenta dados sobre a área da superfície das divisões do continente americano.

América	Área (milhões de km²)
do Norte	23,65
Central	0,73
do Sul	17,83

Disponível em: <http://www.mundoeducacao.com/geografia/os-continentes.htm>. Acesso em: 15 nov. 2014.

a) Construa um gráfico de colunas, representando as áreas da América do Norte, América Central e América do Sul.

b) Em seguida, coloque esses dados em um gráfico de barras.

UNIDADE 9

Razões e proporções

MIKE KEMP/RUBBERBALL/LATINSTOCK

Fotografias de dimensões proporcionais.

Achou que essas fotografias são parecidas?

Elas são mais que parecidas: existe uma relação de **proporcionalidade** entre suas dimensões.

Esse é o tema que será explorado nesta unidade.

Nesta unidade...

Muitas vezes, apenas números não fornecem informações significativas sobre duas quantidades. Entretanto, quando eles vêm escritos na forma de razão, é possível obter melhores informações por comparação entre as grandezas envolvidas na situação. Observe o exemplo a seguir.

João costuma ser o cestinha da equipe de basquete de sua escola. Veja o que aconteceu em um dos jogos:

Qual deles teve um aproveitamento melhor nesse jogo?

Apenas pelo número de acertos, não se pode dizer quem teve o melhor aproveitamento, pois tanto João quanto Pedro acertaram 12 arremessos e marcaram pontos. Para saber qual deles teve melhor aproveitamento, relacionamos o número total de acertos com o total de arremessos de cada um.

João

$$\frac{\text{nº de acertos}}{\text{nº de arremessos}} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

Em cada 4 arremessos, 3 acertos.

Pedro

$$\frac{\text{nº de acertos}}{\text{nº de arremessos}} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2} = 0{,}50$$

Em cada 2 arremessos, 1 acerto.

$0{,}75 > 0{,}50$ —— $\frac{3}{4} > \frac{1}{2}$ —— João teve um aproveitamento melhor que Pedro.

O quociente $\mathbf{\frac{12}{16}} = \mathbf{\frac{3}{4}}$ ou **0,75** é a **razão** entre os números 12 e 16, nessa ordem.

O que você já sabe?

- Qual é a razão entre o número total de acertos e o número total de arremessos de João? E de Pedro? $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{2}$
- Pedro e João acertaram o mesmo número de arremessos. Por que o aproveitamento de João foi melhor? Porque a razão entre o número total de acertos e o número total de arremessos de João é maior que a de Pedro.
- Em um jogo de futebol, Alice e Bianca chutaram 10 vezes ao gol. Alice fez 3 gols e Bianca, 4 gols. Ambas tiveram o mesmo aproveitamento nesse jogo? Explique sua resposta. Não, Bianca teve aproveitamento melhor que Alice, porque $\frac{4}{10}$ é maior que $\frac{3}{10}$.
- O que significa dizer que "o número de gols de Alice foi de 3 em 10"? Resposta possível: Significa que de cada 10 chutes a gol, Alice converteu 3 em gols.

1 Razões

O que significa razão?

Vamos explorar o significado de razão examinando três exemplos.

- Eu tenho R$ 80,00 em minha carteira e meu irmão tem R$ 30,00.

Podemos comparar essas quantias dividindo 80 por 30.

$$80 : 30 = \frac{80}{30} = \frac{8}{3}$$

O resultado é $\frac{8}{3}$ e indica que para cada R$ 8,00 que tenho, meu irmão tem R$ 3,00.

Nessa situação, a razão entre 80 e 30 é $\frac{80}{30}$, ou $\frac{8}{3}$, ou, também, de **8 para 3**.

Note que comparamos grandezas de mesma natureza, ou seja, duas quantias em dinheiro.

- Em uma escola havia 500 candidatos concorrendo a uma vaga; havia uma vaga para cada 10 candidatos.

Veja como calcular a quantidade de vagas oferecidas nessa escola.

x ——— total de vagas

$$\frac{\text{nº de candidatos}}{\text{nº de vagas}} = \frac{10}{1} \longrightarrow \frac{500}{x} = \frac{10}{1} \longrightarrow x = 50$$

Nessa situação, foram relacionados número de candidatos com número total de vagas.

- Em um mesmo intervalo de tempo, sempre que João caminha 50 m, Alice percorre 2 km de carro.

Nessa situação, lembramos que 2 km correspondem a 2 000 m e, em seguida, comparamos 50 m e 2 000 m.

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Para relacionar duas grandezas de mesma natureza, as medidas devem estar na mesma unidade.

$$\frac{\text{distância percorrida por João}}{\text{distância percorrida por Alice}} = \frac{50 \text{ m}}{2000 \text{ m}} = \frac{1}{40}$$

A razão entre as distâncias percorridas por João e por Alice é $\frac{50}{2000}$ ou $\frac{1}{40}$. Indicamos também 50 : 2000 ou 1 : 40.

A razão obtida indica que, no mesmo intervalo de tempo, enquanto João caminha **1 m**, Alice percorre **40 m** de carro.

Se **a** e **b** são dois números racionais, e **b** é diferente de zero, dizemos que **a** : **b** ou $\frac{a}{b}$ é a razão entre **a** e **b**, nessa ordem. Lemos: "razão de **a** para **b**" ou "**a** está para **b**".

A razão entre grandezas de mesma natureza é a razão entre os números que expressam as medidas dessas grandezas, na mesma unidade.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

1. Mariana e Cecília se destacaram em um campeonato de futebol interclasses da escola. De 50 chutes a gol, Mariana acertou 20 e, de 60 chutes a gol, Cecília acertou 40.

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Qual delas teve o melhor aproveitamento nesse campeonato? Por quê? Cecília, porque $\frac{2}{3} > \frac{2}{5}$.

2. Em um jogo de vôlei, de cada 12 saques que Fernando deu, ele acertou 8.

a) Qual é a razão entre o número de acertos e o número de saques? $\frac{8}{12}$ ou $\frac{2}{3}$.

b) Se ele tivesse dado apenas 3 saques com o mesmo aproveitamento, quantos deles teria acertado? 2 saques.

3. Copie a tabela e complete-a, calculando as razões $\frac{m}{n}$.

m	n	$\frac{m}{n}$
2	7	$\frac{2}{7}$
7	2	$\frac{7}{2}$
90	100	$\frac{9}{10}$
$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{15}{4}$
1,2	3,6	$\frac{1}{3}$

4. Em uma empresa, 12 pessoas concorrem a uma vaga de secretário. A razão entre o número de candidatos e o total de vagas é $\frac{3}{2}$. Quantas vagas estão sendo oferecidas?

Pista: Indique por x o número de vagas oferecidas e lembre-se de que: $\frac{\text{nº de candidatos}}{\text{nº de vagas}} = \frac{3}{2}$

8 vagas.

5. Durante um treino para a corrida de São Silvestre, Paulo percorreu 48 km e Renato, 60 000 m, em um mesmo intervalo de tempo. Qual é a razão entre as distâncias percorridas por Paulo e Renato nesse tempo? $\frac{48}{60}$ ou $\frac{4}{5}$.

6. Um vasilhame tem capacidade de 15,6 L de um líquido, e outro de 1 300 mL. Qual é a razão entre a capacidade do primeiro vasilhame e a do segundo? 12

7. A razão entre as medidas dos lados de dois triângulos equiláteros é $\frac{5}{3}$. Qual é a razão entre seus perímetros? $\frac{5}{3}$

8. Soro caseiro — uma receita simples que pode ajudar a tratar a desidratação.

CRISTINA XAVIER/FINEPHOTO

Ingredientes

1 litro de água potável

1 colher rasa (sopa) de açúcar

1 colher rasa (café) de sal

a) Descreva uma receita para obter 5 litros de soro caseiro. 5 litros de água, 5 colheres rasas (sopa) de açúcar, 5 colheres rasas (café) de sal.

b) Como se pode obter $\frac{1}{2}$ litro de soro caseiro?

Resposta possível: Reduzindo todas as medidas à metade.

Desafio

Este tema propicia formulação de questões relevantes sobre saúde pública. Incentive reflexão e discussão em torno dele e avalie a possibilidade de desenvolver um projeto interdisciplinar sobre o assunto.

Cigarro × vida

Consulte as informações do quadro a seguir, que incluem alguns dados da Organização Mundial da Saúde (OMS), e depois responda às questões:

SHUTTERSTOCK

Fonte: *Organização Mundial de Saúde*. Relatório sobre a Epidemia Global do Tabaco 2013. *Disponível em: ‹www.who.int/tabacco/global_report/2013/report.pdf›. Acesso em: 1º fev. 2015.*

- De acordo com o texto, qual é a razão entre a quantidade de jovens que podem morrer em decorrência do fumo de cigarro e a quantidade de jovens que começam a fumar aos 15 anos? $\frac{1}{4}$
- No Brasil, qual era a razão, em 2013, entre a quantidade de jovens fumantes e a população brasileira nesse ano? $\frac{25}{300}$ ou $\frac{1}{12}$
- Em 2013, a população brasileira era de aproximadamente 200 milhões de habitantes. Qual era a razão entre o número de fumantes e o de não fumantes no Brasil em 2013? $\frac{30}{200}$ ou $\frac{3}{20}$
- Em sua opinião, quais os benefícios que um fumante poderá ter ao parar de fumar?
  Respostas possíveis: Diminuir os riscos de infarto e de câncer de pulmão; melhorar a respiração e o paladar.

2 Razões especiais e porcentagem

Este tema contribui para estabelecer articulações entre a Matemática e outras disciplinas escolares, em especial Geografia e Ciências.

Velocidade média

Para refletir e responder

João percorreu 4 200 km de avião.

ILUSTRAÇÕES: HÉLIO SENATORE

- Em média, quantos quilômetros o avião percorreu em 1 hora? 700 km/h.

Há razões que aparecem com frequência em nosso cotidiano.

A razão entre a distância percorrida pelo avião e o tempo gasto em percorrê-la nos dá a ideia da **velocidade média** desenvolvida pelo avião durante esse percurso.

$$\text{velocidade média} = \frac{\text{distância percorrida}}{\text{tempo para percorrer essa distância}}$$

$$\text{velocidade média} = \frac{\text{distância percorrida}}{\text{tempo}} = \frac{4200}{6} = 700 \text{ km/h}$$

Velocidade média de 700 quilômetros por hora, ou 700 km/h, significa que se o avião tivesse mantido uma velocidade constante, ele percorreria 700 km em cada hora de viagem.

A **velocidade média** de um objeto é a razão entre a distância percorrida pelo objeto e o tempo gasto para percorrê-la.

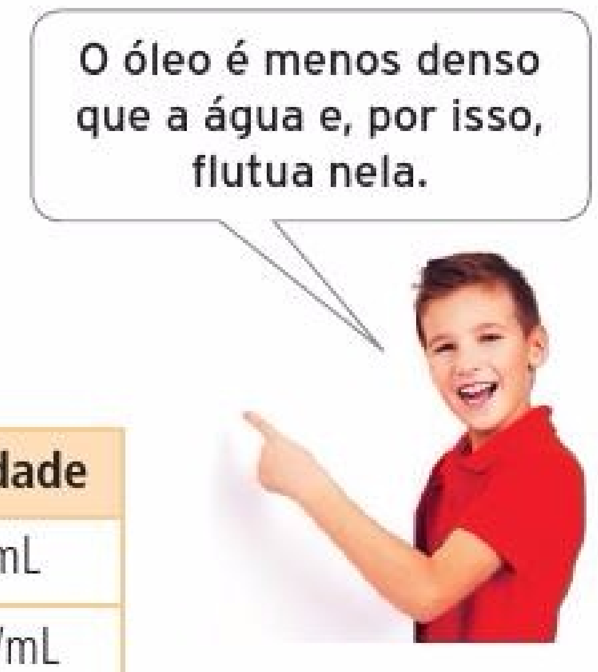
Densidade de um material

Para refletir e responder

Uma gota de óleo de cozinha foi colocada em uma vasilha com água.

- Essa gota de óleo afunda ou flutua? Que tal experimentar? Resposta possível: Flutua.

Realizando o experimento, é possível constatar que a gota de óleo flutua. Isso ocorre porque o óleo é menos denso que a água. Observe que volumes iguais de materiais diferentes podem ter massas diferentes. A razão entre a massa de um material e o volume ocupado por ela nos dá a ideia de **densidade** desse material.



THINKSTOCK/GETTY IMAGES

$$\text{densidade} = \frac{\text{massa}}{\text{volume}}$$

Material	Volume	Massa	Densidade
água	1 mL	1 g	1 g/mL
óleo	1 mL	0,8 g	0,8 g/mL

A **densidade** de um material é a razão entre a massa desse material e seu volume.

Densidade demográfica

O conceito de densidade demográfica é muito utilizado em Geografia.

Observe, por exemplo, este trecho de um artigo do IBGE, publicado em 2013, sobre a população brasileira:

> 29/08/2013 [...]
>
> O IBGE estima que a população atual é de 201 032 714 habitantes, vai aumentar para 212,1 milhões em 2020, até alcançar o máximo de 228,4 em 2042, quando começará a decrescer, atingindo o valor de 218,2 em 2060, nível equivalente ao projetado para 2025.
>
> *Disponível em: <www.g1.globo.com.br/brasil>.* Acesso em: *25 abr. 2015.*

Considerando essa informação, em 2013 o Brasil tinha aproximadamente 201 milhões de habitantes, distribuídos em uma área de 8 515 767,049 km², ou seja, cerca de 8 500 000 km².

Dividindo o número de habitantes pela área obtemos a densidade demográfica brasileira no ano de 2013:

$$\text{densidade demográfica} = \frac{\text{nº de habitantes}}{\text{área}} = \frac{201\,000\,000}{8\,500\,000} = \frac{402}{17} \sim 23{,}7$$

Ou seja, se a população brasileira estivesse uniformemente distribuída em toda a extensão do país, haveria, em média, cerca de 24 habitantes por quilômetro quadrado.

A **densidade demográfica** de uma região é a razão entre o número de habitantes e a área dessa região.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

9. Em 2014, Brasília, a capital brasileira, que ocupa uma área aproximada de 5 800 km², tinha uma população estimada em 2 900 000 habitantes. Qual era a densidade demográfica de Brasília, naquele ano? 500 habitantes/km².

Disponível em: <www.ibge.gov.br/estadosat/perfil.php?sigla=df>. Acesso em: *25 abr. 2015.*

10. Em 2014, a população de Belém, capital do Pará, era de aproximadamente 1 433 000 habitantes, distribuídos em uma área de 1 065 km². Já João Pessoa, capital da Paraíba, tinha 780 000 habitantes, aproximadamente, em uma área de 210 km². Qual era a densidade demográfica de Belém em 2014? E a de João Pessoa?

Disponível em: <http://cidades.ibge.gov.br/>. Acesso em: *14 nov. 2014.*

Aproximadamente: 1345,54 hab/km²; 3714,29 hab/km².

11. Uma placa de chumbo com volume de 0,001 dm^3 tem massa de 11,3 g. Qual é a densidade do chumbo? 11 300 g/dm^3.

12. A distância entre Campo Grande e Dourados é de 224 km, aproximadamente. Qual a velocidade média desenvolvida por:

a) uma moto que fez esse percurso em 4 horas? 56 km/h.

b) um automóvel que fez esse percurso em 5 horas? 44,8 km/h.

c) uma bicicleta que fez esse percurso em 12 horas e 30 minutos? 17,92 km/h.

13. A densidade do ferro é de 7,6 g/cm^3. Qual é o volume de uma barra de ferro cuja massa é de 1 520 g? 200 cm^3.

14. O volume de uma placa de ouro é 5 dm^3. Calcule a massa dessa placa, sabendo que a densidade do ouro é de 19,32 kg/dm^3. 96,6 kg.

15. Dois pilotos, A e B, iniciaram ao mesmo tempo uma prova de automobilismo em uma pista cuja extensão total é de 2,5 km. O piloto A completou a primeira volta em 1,2 minuto e o piloto B em 74 segundos. Qual foi a velocidade média aproximada de cada piloto, em metros por segundo? 34,72 m/s e 33,78 m/s.

16. Copie esta tabela e complete-a.

Material	Densidade (g/cm^3)	Massa (g)	Volume (cm^3)
Cobre	8,9	1780	200
Álcool	0,8	264	330
Mercúrio	13,6	40,8	3

17. No ar, o som percorre aproximadamente 3 672 000 m em 3 horas.

a) No ar, qual é a velocidade média do som por hora? 1 224 000 m/h.

b) No ar, qual é a velocidade média do som por segundo? 340 m/s.

c) Sabe-se que a velocidade média da luz é $3 \cdot 10^8$ m/s. Se durante uma tempestade você vê um relâmpago e ouve um trovão, os dois fatos acontecem ao mesmo tempo? Por quê?


JIM REED/CORBIS/LATINSTOCK

Não, ouve-se a trovoada depois do relâmpago porque a velocidade da luz é maior do que a velocidade do som.

Exercícios complementares

FAÇA NO CADERNO

18. João desenhou um quadrado cujos lados medem 6 cm cada um.

a) Qual é o perímetro desse quadrado? E qual é a sua área? 24 cm; 36 cm^2.

b) A razão entre as dimensões de outro quadrado em relação ao desenhado por João é de 2 para 1. Qual é o perímetro do segundo quadrado? E qual é a sua área? 48 cm; 144 cm^2.

c) Calcule a razão entre o perímetro do quadrado desenhado por João e o perímetro do segundo quadrado e calcule a razão entre as medidas dos lados desses quadrados. O que se pode concluir sobre essas razões? As razões são iguais.

d) A razão entre as áreas dos dois quadrados é igual à razão entre as medidas dos lados? Não.

19. Um pedaço de cortiça com volume de 18 cm^3 tem massa igual a 4,32 g. Qual é a densidade da cortiça? 0,24 g/cm^3.

20. a) Se a velocidade média de um avião a jato é 850 km/h, quantos quilômetros ele percorreria em 2 horas? E em 3 horas? 1700 km; 2550 km.

b) Se esse jato tivesse percorrido 4200 km em 5 horas, qual teria sido sua velocidade média? 840 km/h.

Troquem ideias e resolvam

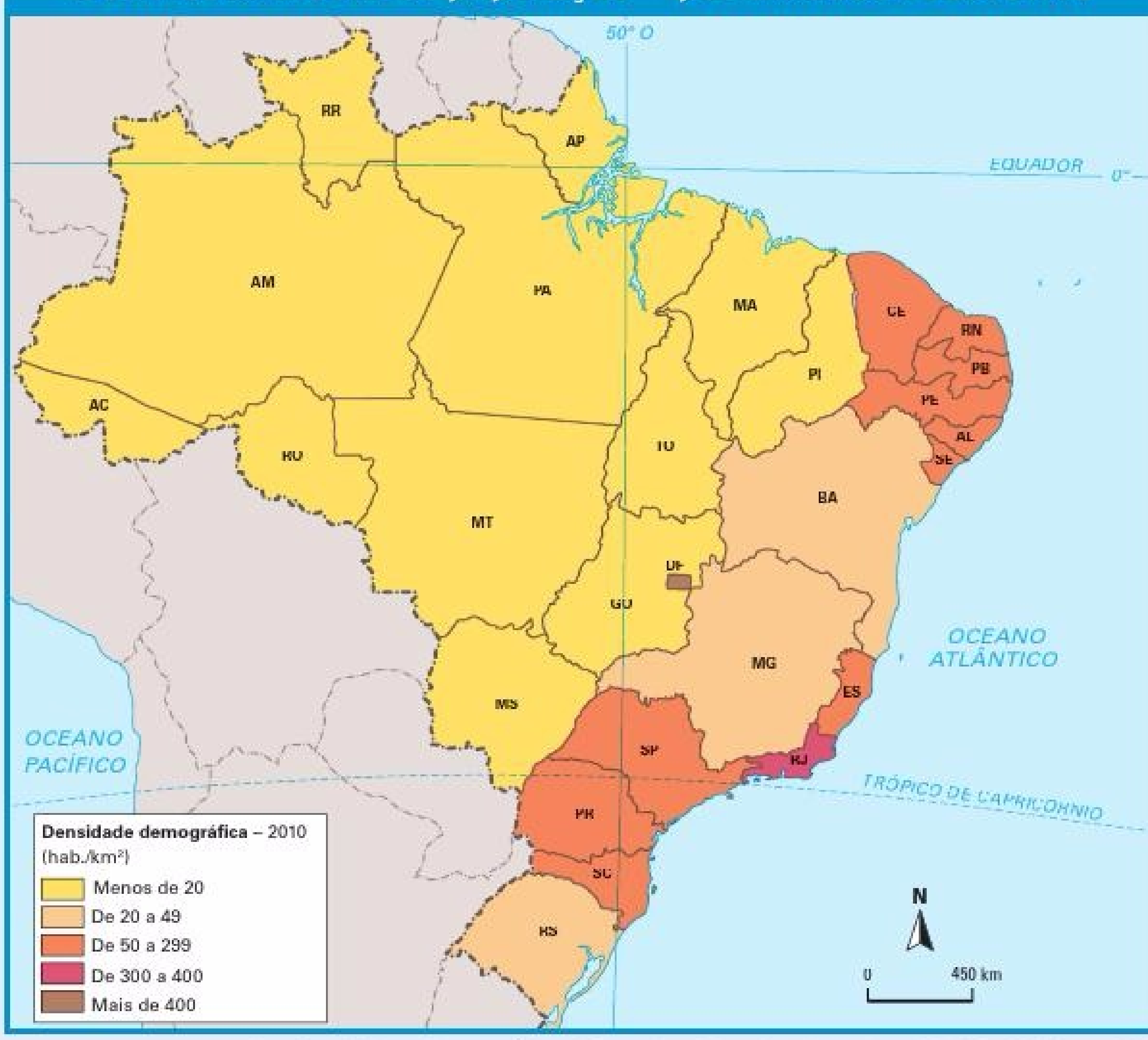
FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega, discutam e resolvam.

Há muita gente no lugar onde você mora?

Neste mapa do Brasil, vocês observam a distribuição da população brasileira em 2010. A legenda traz uma gradação de cores mostrando o número de habitantes por área colorida no mapa.

Densidade Média de população — por unidade Federativa



DACOSTA MAPAS

Fonte: *Atlas Geográfico Escolar*. Rio de Janeiro: IBGE, 2012. p. 113.

Procurem informações em bibliotecas, escolas, na prefeitura e respondam:

- Quais são os dados sobre a população e a área de sua cidade? E do estado em que está localizada a sua cidade?
- Com os dados pesquisados, verifiquem qual é a densidade demográfica de sua cidade e de seu estado. Respostas pessoais.

Usando a calculadora

Na tabela, temos a área e a população aproximada das regiões brasileiras, segundo dados do Censo 2010. Norte: 4,12 hab/km²; Nordeste: 34,13 hab/km²; Sudeste: 86,87 hab/km²; Sul: 47,63 hab/km²; Centro-Oeste: 8,75 hab/km².

- Qual era a densidade demográfica de cada região?
- Qual era a região de maior densidade demográfica? Sudeste.
- Qual era a região de menor densidade demográfica? Norte.

Áreas e populações

Região	Área (km²)	População
Norte	3850000	15865678
Nordeste	1555000	53078137
Sudeste	925000	80353724
Sul	575000	27384815
Centro-Oeste	1605000	14050340

Fonte: Censo 2010. IBGE 2010.

Razões e porcentagem

Explorar o conceito de porcentagem, pedindo aos alunos que tragam revistas, jornais, notícias da televisão e temas locais de seu interesse. Discussões e trabalhos sobre esse tema motivarão os alunos a compreender e aprender mais sobre porcentagem, que é um dos conteúdos matemáticos mais aplicados em outras áreas, permitindo a abordagem de diversos temas transversais.

Para refletir e responder

O Brasil está localizado na América do Sul e ocupa 47% desse continente. A população brasileira corresponde a cerca de 50% da população da América do Sul.

Por sua extensão, a Argentina é o segundo maior país da América do Sul e ocupa $\frac{7}{45}$ desse continente.

DACOSTA MAPAS

Fonte: *Atlas Geográfico Escolar*. Rio de Janeiro: IBGE, 2012. p. 41.

- Que porcentual das terras sul-americanas não são brasileiras? Qual é o valor aproximado, em forma porcentual, da razão $\frac{7}{45}$ que representa a extensão da Argentina em relação à América do Sul? 53%; 15,6%

Além das formas fracionária e decimal, podemos escrever uma razão na **forma porcentual**, ou seja, usando o símbolo **%**.

Vamos analisar as informações apresentadas na situação acima.

Estes dados indicam que:

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

De cada 100 m² do território sul-americano, 47 m² são terras brasileiras.

$47\% = \frac{47}{100} = 0{,}47$ — **47%** é a razão entre 47 e 100.

47% é $\frac{47}{100}$ ou 0,47 escrito na forma **porcentual**.

- O porcentual de terras sul-americanas que não são brasileiras é obtido calculando a diferença entre 100% e 47%.

$$100\% - 47\% = 53\%$$

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

21. Em um teste de Português havia 50 questões. Marcos acertou 15 delas.

a) Qual é a razão entre o número de questões que Marcos acertou e o total? $\frac{15}{50}$ ou $\frac{3}{10}$

b) Qual é o porcentual de acertos de Marcos? $\frac{30}{100}$ ou 30%

c) Renata também fez esse teste. A razão entre o número de questões que ela acertou e o total de questões é de $\frac{7}{10}$. Quem obteve melhor aproveitamento: Marcos ou Renata? Renata.

22. Copie esta tabela e complete-a.

Razão	$\frac{14}{25}$	$\frac{31}{50}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{36}{64}$	0,08	0,725	0,136	0,9				
Forma porcentual									5%	10%	100%	37,5%

56%; 62%; 87,5%; 56,25%; 8%; 72,5%; 13,6%; 90%; $\frac{1}{20}$ ou 0,05; $\frac{1}{10}$ ou 0,1; $\frac{100}{100}$ ou 1; $\frac{3}{8}$ ou 0,375

Investigue e explique

FAÇA NO CADERNO

Você sabia?

Cerca de dois bilhões e meio de pessoas vivem em áreas de risco de transmissão de dengue, e a doença é endêmica em mais de 100 países de todos os Continentes, com exceção da Europa. A Organização Mundial da Saúde estima que, no mundo, ocorram entre 50 e 100 milhões de casos, resultando em cerca de 500 mil internações e 20 mil óbitos por ano.

Fonte: Martins, F.S.V., Castiñeras, T.M.P.P. Dengue. Disponível em: <http://www.cives.ufrj.br/>. Acesso em: 27 abr. 2015.

A dengue é transmitida pelo mosquito *Aedes aegypti*. A principal maneira de evitar a doença é não deixar o mosquito nascer.

Leia uma receita caseira de combate ao mosquito da dengue.

Misture 2 mL de água sanitária com 1 litro de água e borrife nas plantas de sua casa. A mistura não faz mal às plantas e mata o mosquito da dengue.

- Helena misturou meio litro de água sanitária em 1 litro de água. Essa é a mistura recomendada para borrifar plantas e evitar dengue? Não.
- Se Helena usar 5 litros de água, que quantidade de água sanitária deverá usar para compor uma mistutra correta? 10 mL.
- Qual é o porcentual de água sanitária nessa mistura? 0,2%
- Escreva outras formas de evitar a dengue.

ROLAND KRIEG/LIVING4MEDIA/LATINSTOCK

Resposta possível: Acabar com os "criadouros" (lugares de nascimento e desenvolvimento do mosquito), não deixar a água, mesmo limpa, parada em recipientes abertos.

Exercícios complementares

FAÇA NO CADERNO

23. Qual é o valor desta expressão na forma decimal? 2

$$\frac{30\% + 20\%}{25\%}$$

24. Calcule o valor da expressão $\frac{200\% - 185\%}{50\%}$ e escreva a resposta na forma de razão e na escrita decimal. $\frac{3}{10}$; 0,3

25. Em um teste, 25% das questões são sobre Conhecimentos Gerais. Se o teste tem 18 questões sobre esse assunto, quantas questões há em todo o teste? 72 questões.

Pista: Indique o total por **t** e equacione o problema.

26. Em um grupo de 96 pessoas, 36 usam óculos. Que porcentual de pessoas desse grupo usa óculos? 37,5%

27. Em uma classe de 40 alunos, 12 sabem nadar.

a) Quantos por cento dos alunos dessa classe sabem nadar? 30%

b) Quantos por cento dos alunos dessa classe não sabem nadar? 70%

28. Um sitiante plantou 80 mudas de goiabeiras. Dessas, 52 eram de goiabas vermelhas e as restantes eram de goiabas brancas.

a) Quantos por cento dessas mudas eram de goiabas vermelhas? 65%

b) Quantos por cento dessas mudas eram de goiabas brancas? 35%

Troquem ideias e resolvam

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega, discutam e resolvam.

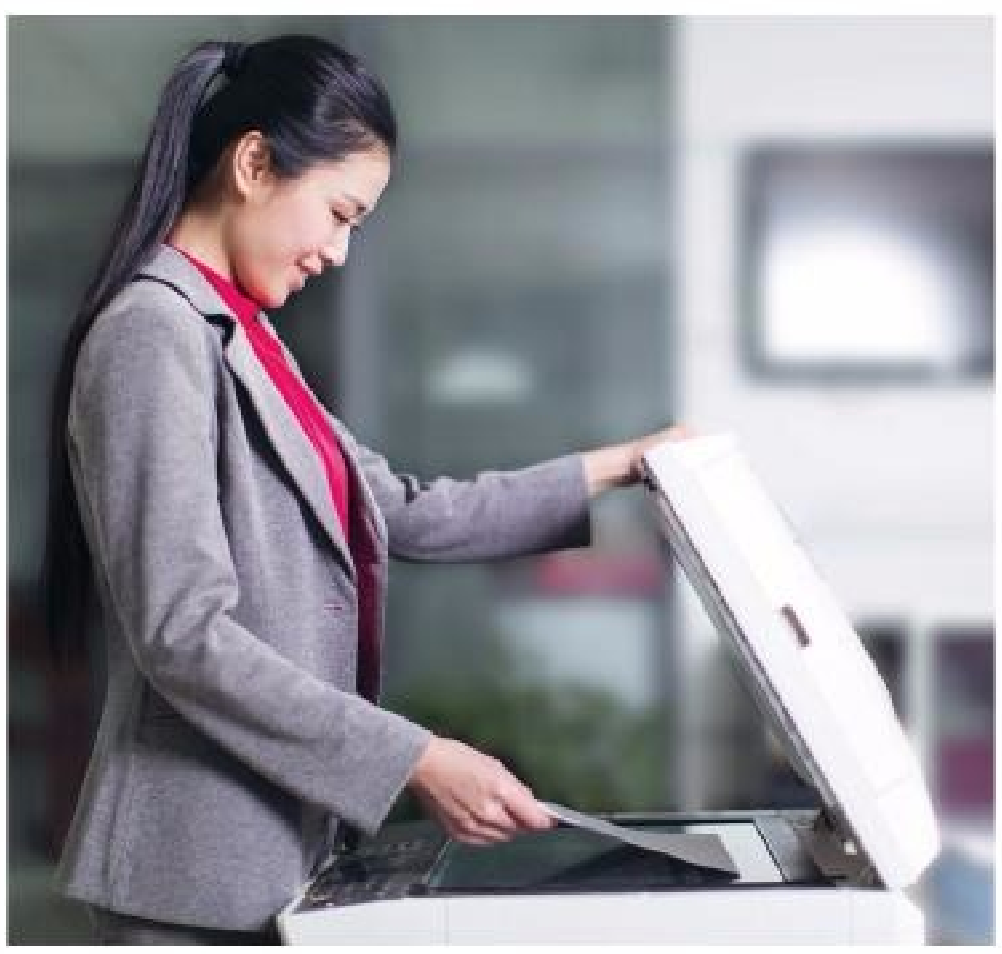
- Qual é a razão $\frac{\text{preço promoção } \mathbf{1}}{\text{preço promoção } \mathbf{2}}$ para seis pacotes de macarrão? $\frac{46}{63}$.
- Pensem no preço de seis pacotes de macarrão nas duas promoções. O preço na promoção 1 corresponde a quantos por cento do preço na promoção 2? Aproximadamente 73%.
- Qual das duas ofertas é mais vantajosa? Explique por quê. Resposta possível: Depende da quantidade de pacotes que uma pessoa comprar: se forem 6 pacotes, ou múltiplos de 6, a promoção 1 é mais vantajosa.

3 Proporções

Usos da ideia de proporcionalidade

Muitas pessoas fazem uso da ideia de proporcionalidade em seu cotidiano. Ela está presente quando:

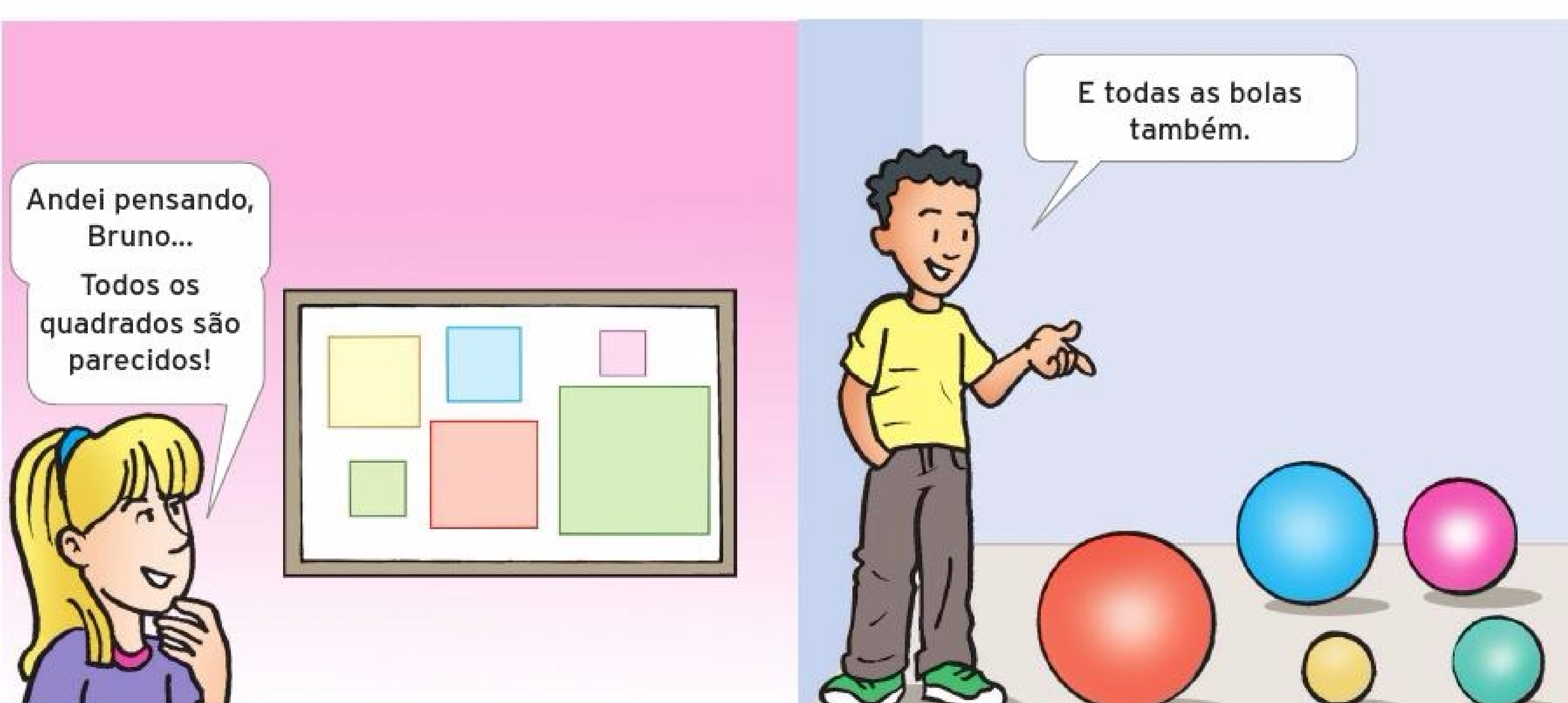
- alguém amplia ou reduz uma figura por meio de uma copiadora.
- um enfermeiro prepara a dosagem de um remédio.



THINKSTOCK/GETTY IMAGES

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Algumas vezes se emprega a palavra "parecidos" quando se compara objetos, querendo dizer com isso que eles têm a mesma forma, apesar de apresentarem tamanhos diferentes.



FRANCISCO VILACHÃ

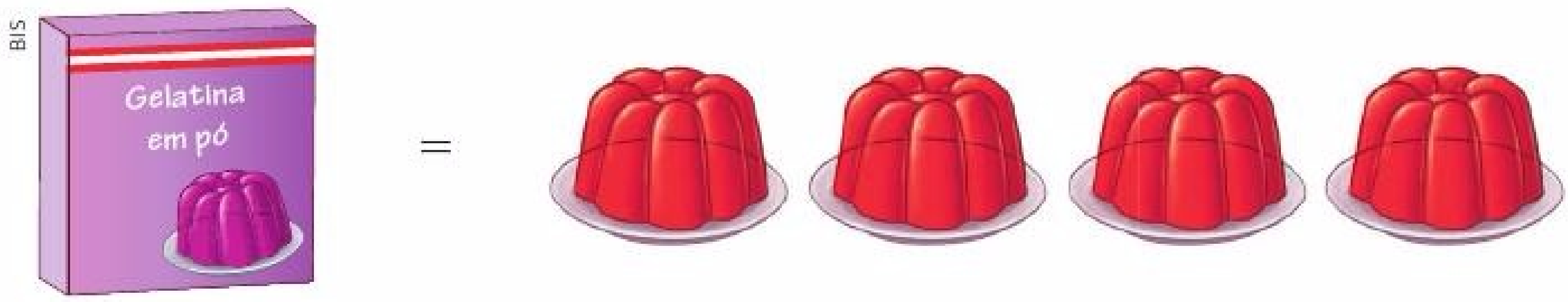
Como se pode observar, os quadrados são mais que parecidos: existe uma relação de proporcionalidade entre suas dimensões. O mesmo ocorre com as bolas.

A noção de razão é fundamental para os cálculos em situações que envolvem a ideia de proporcionalidade.

Veja um exemplo:

Ana vai fazer uma sobremesa.

Para isso, ela usa uma caixa de gelatina em pó e obtém 4 porções iguais.



Em situações como essa, a quantidade de caixas de gelatina e a de porções obtidas são **proporcionais**. Veja os cálculos na tabela a seguir e os resultados apresentados por meio de pontos em um gráfico.

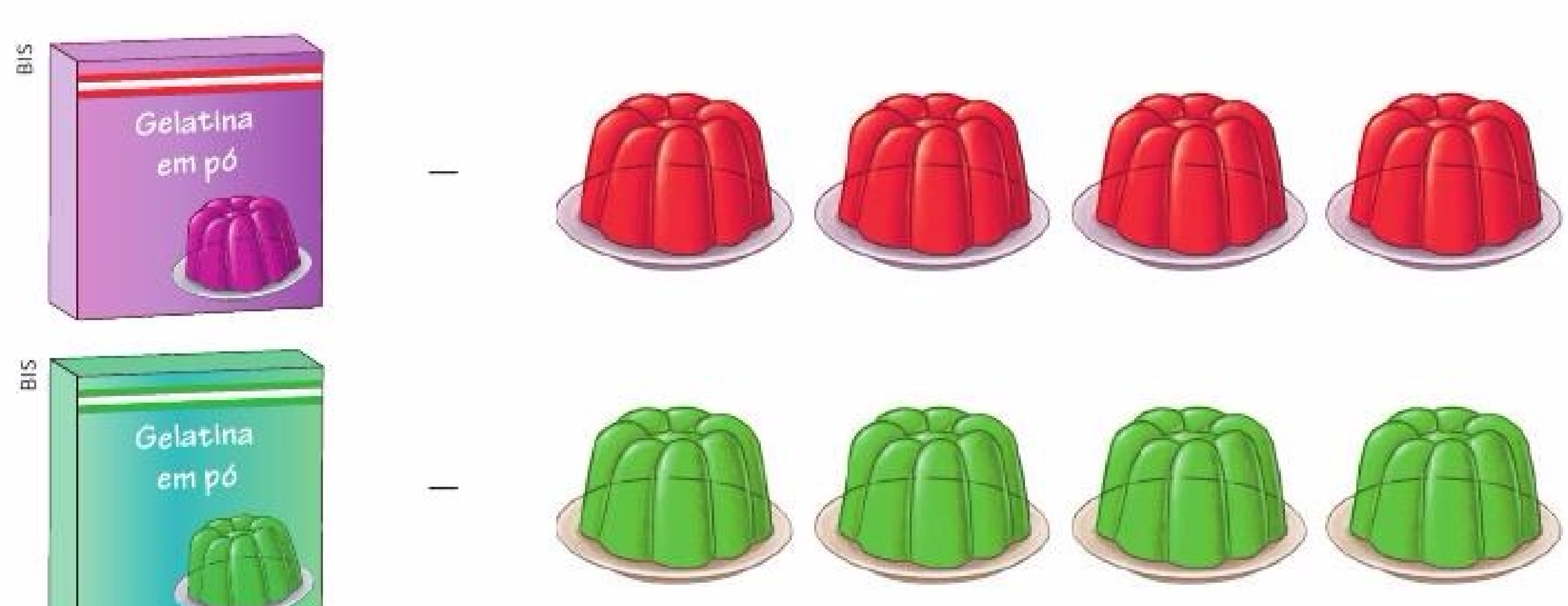
Número de caixas	Número de porções
1	4
2	8
5	20
7	28

Quantidade de porções de gelatina por número de caixas

Nessa tabela observamos que, se o número de caixas for multiplicado por:

- **2**, o número de porções também será multiplicado por **2**;
- **5**, o número de porções também será multiplicado por **5**;
- **7**, o número de porções também será multiplicado por **7**.

Observe que a razão $\dfrac{\text{número de caixas}}{\text{número de porções}}$ resulta em frações equivalentes: $\dfrac{1}{4} = \dfrac{2}{8} = \dfrac{5}{20} = \dfrac{7}{28}$.



$2 : 8$ ou $\dfrac{2}{8}$

Dizemos, nesse caso, que há **proporcionalidade** entre o número de caixas e os correspondentes números de porções obtidas ou, ainda, que os números 1, 2, 5 e 7 são **proporcionais** aos números 4, 8, 20 e 28, nessa ordem, na razão $\frac{1}{4}$.

Como $\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{5}{20} = \frac{7}{28}$, o número de caixas de gelatina e o número de porções **variam na mesma razão**. Dizemos, então, que elas são **grandezas proporcionais**.

O que é proporção?

Na situação apresentada na página anterior, podemos escrever várias igualdades entre duas das razões apresentadas, ou seja, podemos escrever várias proporções.

$\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$ $\qquad$ $\frac{1}{4} = \frac{5}{20}$ $\qquad$ $\frac{2}{8} = \frac{7}{28}$

Proporção é uma igualdade entre duas razões.

Observe esta outra situação:

Nessa situação, como $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$ é uma **proporção** entre os números 2, 3, 10 e 15, nessa ordem, os dois tons de rosa serão iguais.

Essa proporção é lida da seguinte maneira: "2 está para 3, assim como 10 está para 15".

$\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$ ou $2 : 3 = 10 : 15$

2, 3, 10 e 15 são os termos.
2 e 15 são os extremos.
3 e 10 são os meios.

$2 : \underbrace{3 = 10}_{\text{meios}} : 15$
extremos

Uma proporção envolve quatro termos: **a**, **b**, **c** e **d**. Nessa ordem, temos:

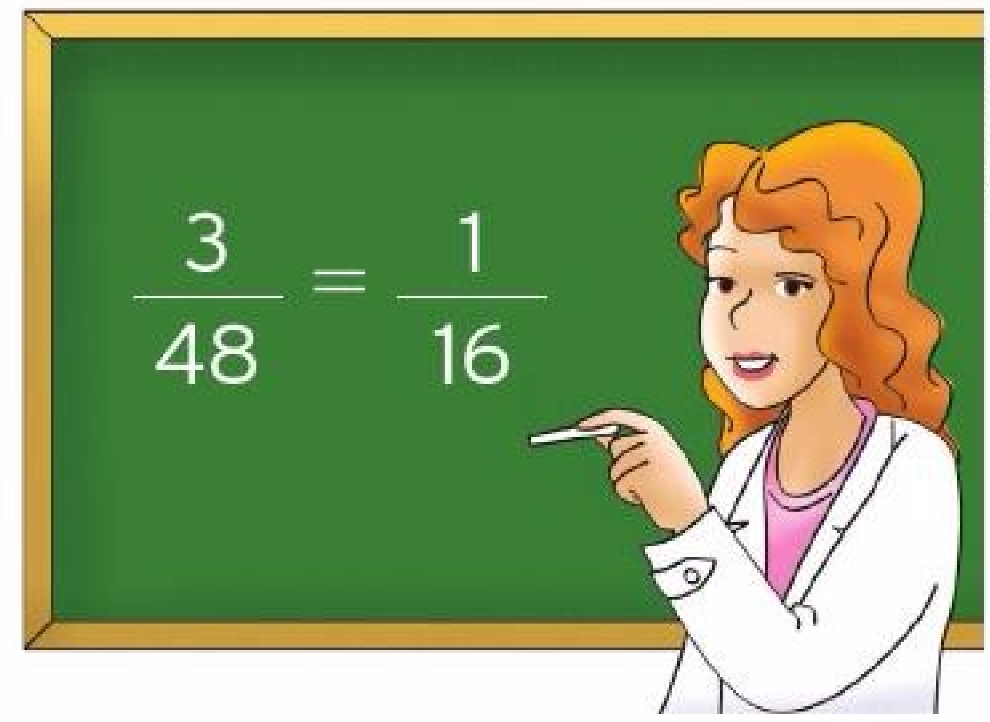
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ ou } a : b = c : d \text{ (b e d são diferentes de zero.)}$$

Lê-se: "**a** está para **b**, assim como **c** está para **d**".

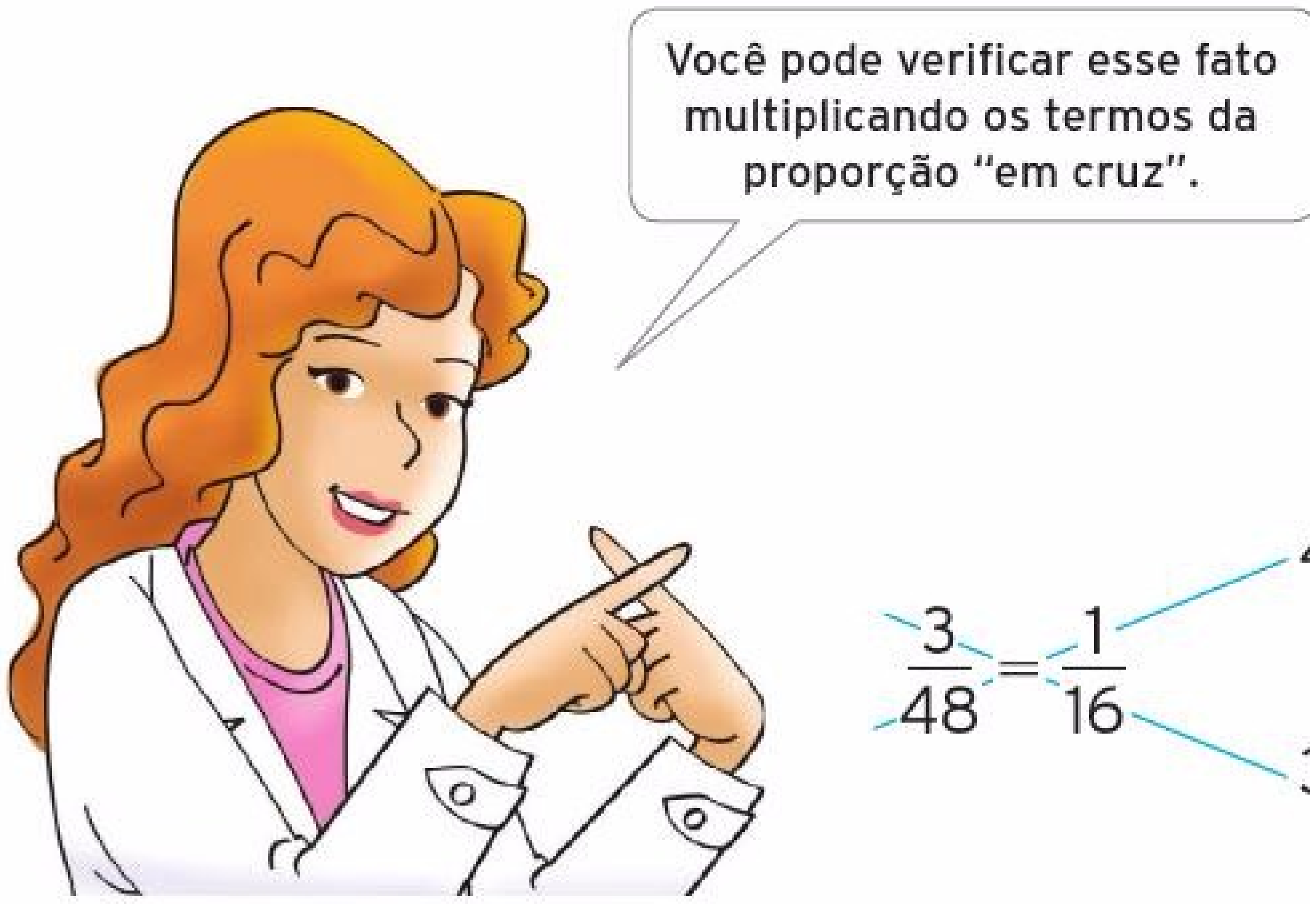
Propriedade fundamental das proporções

Na proporção representada no quadro ao lado, 3 e 16 são os extremos, 48 e 1 são os meios.

Note que 3×16 e 48×1 são iguais.



HÉLIO SENATORE



$$\frac{3}{48} = \frac{1}{16} \qquad 48 \times 1 = 48 \qquad 3 \times 16 = 48 \qquad \boxed{3 \times 16 = 48 \times 1}$$

Outro exemplo:

Note que, como $5 \times 18 = 6 \times 15$, podemos escrever outras proporções envolvendo esses números, como, por exemplo, $\frac{5}{15} = \frac{6}{18}$ ou $\frac{18}{15} = \frac{6}{5}$.

$$\frac{5}{6} = \frac{15}{18} \qquad 6 \times 15 = 90 \qquad 5 \times 18 = 90$$

$$\mathbf{5 \times 18 = 6 \times 15}$$

Podemos generalizar afirmando que:

Em qualquer proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{———} \quad \mathbf{a \cdot d = b \cdot c}$$

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

29. Neste desenho, há 6 clipes iguais enfileirados e 4 moedas do mesmo tamanho, colocadas uma ao lado da outra.

FRANCISCO VILACHÁ

a) Qual é a razão entre a quantidade de moedas e a quantidade de clipes? O que significa essa razão? $\frac{4}{6}$ ou $\frac{2}{3}$.

b) Se colocarmos 8 moedas como essas, da mesma maneira, quantos clipes deverão ser enfileirados? 12 clipes.

a) A soma das medidas dos diâmetros de duas moedas é igual à soma das medidas do comprimento de 3 clipes.

c) Um lápis tem o comprimento de 6 dessas moedas. Qual é a medida desse lápis, em clipes? 9 clipes.

d) Uma caneta tem o comprimento de 18 clipes. Qual é a medida dessa caneta, em moedas? 12 moedas.

30. Para fazer uma omelete, Bete sempre usa 3 ovos para cada 2 pessoas.

a) Nessa situação, qual é a razão entre o número de ovos usados e o número de pessoas? $\frac{3}{2}$

b) Bete fez omelete para seis pessoas. Quantos ovos ela usou? 9 ovos.

c) Nesse dia, qual foi a razão entre o número de ovos e o número de pessoas? $\frac{9}{6}$ ou $\frac{3}{2}$

d) O número de ovos usados e o número de pessoas são grandezas proporcionais? Por quê?

Sim, porque $\frac{3}{2}$ e $\frac{9}{6}$ são razões iguais.

31. Os números 12, 32, 6 e 16 formam, nessa ordem, uma proporção.

a) Quais são os extremos e os meios nessa proporção? 12 e 16; 32 e 6

b) É possível escrever outra proporção com esses números? Em caso afirmativo, dê um exemplo.

Resposta possível: Sim; $\frac{6}{16} = \frac{12}{32}$.

32. A igualdade $\frac{7}{8} = \frac{21}{24}$ é uma proporção? Por quê? Sim; simplificando $\frac{21}{24}$, temos $\frac{7}{8}$.

33. Observe a questão proposta pela professora e analise as respostas de alguns alunos.

Escrevam uma proporção em que 5 e 36 são os extremos e 9 e 20 são os meios.


HÉLIO SENATORE

Augusto: $\frac{5}{36} = \frac{9}{20}$ Berenice: $\frac{5}{9} = \frac{20}{36}$

Mário: $\frac{20}{36} = \frac{5}{9}$ Jandira: $\frac{36}{9} = \frac{20}{5}$

- Anote o nome daqueles que acertaram e explique por que os outros erraram.

Acertaram: Berenice e Jandira. Augusto errou porque as duas razões não são iguais. Mário errou porque, na proporção que escreveu, 5 e 36 são os meios e 9 e 20 são os extremos.

34. Quais das igualdades abaixo formam uma proporção? A, C

A $\frac{2}{17} = \frac{8}{68}$ B $\frac{28}{20} = \frac{8}{14}$ C $\frac{20}{24} = \frac{40}{48}$

Exercícios complementares

FAÇA NO CADERNO

35. Mantendo determinada velocidade constante, um automóvel consome, em média, sempre 1 L de gasolina para percorrer 5 km.

a) Copie esta tabela e complete-a com a quantidade de combustível e a distância percorrida por esse carro.

Gasolina (L)	1	10	15	31,4	40,5	50
Distância (km)	5	50	75	157	202,5	250

b) Relacione a quantidade de gasolina consumida com a distância percorrida por meio de uma razão.

Resposta possível: $\frac{1}{5}$

c) Represente graficamente os dados da tabela, em um sistema de coordenadas.

Veja resposta no final do livro.

36. Verifique se vale a propriedade fundamental das proporções nestes casos:

a) $\frac{2}{17} = \frac{8}{68}$ Sim. b) $\frac{28}{20} = \frac{8}{14}$ Não. c) $\frac{20}{24} = \frac{40}{48}$ Sim.

37. Copie estes quadros e relacione as razões que estão no quadro **A** com as que estão no quadro **B**, de modo a formar proporções: $\frac{3}{8} = \frac{9}{24}$; $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$; $\frac{7}{2} = \frac{14}{4}$; $\frac{10}{25} = \frac{2}{5}$; $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$; $\frac{10}{16} = \frac{5}{8}$

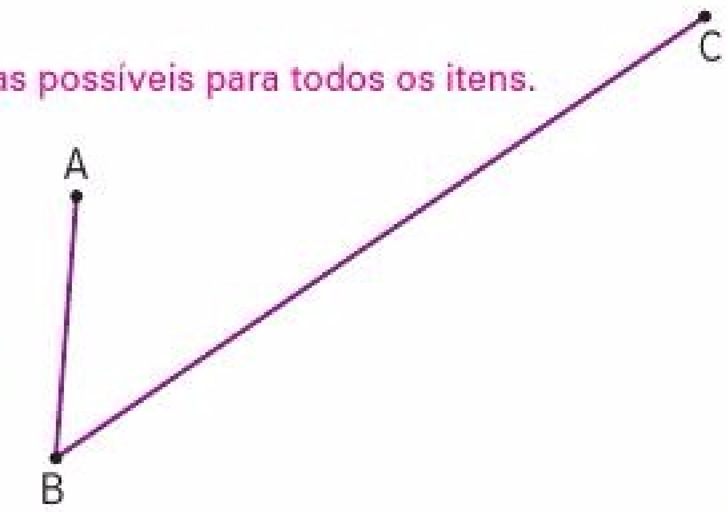
A	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{10}{25}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{10}{16}$	$\frac{2}{12}$

B	$\frac{2}{5}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{14}{4}$	$\frac{9}{24}$

38. As medidas dos segmentos de reta $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ estão na razão $\frac{1}{3}$. Respostas possíveis para todos os itens.

a) Desenhe dois outros segmentos de reta, de modo que a razão entre suas medidas também seja $\frac{1}{3}$.
med $\overline{MN}$ = 4 cm, med $\overline{PQ}$ = 12 cm

b) Escreva a proporção entre as medidas desses segmentos de reta e as dos segmentos de reta desenhados. $\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$

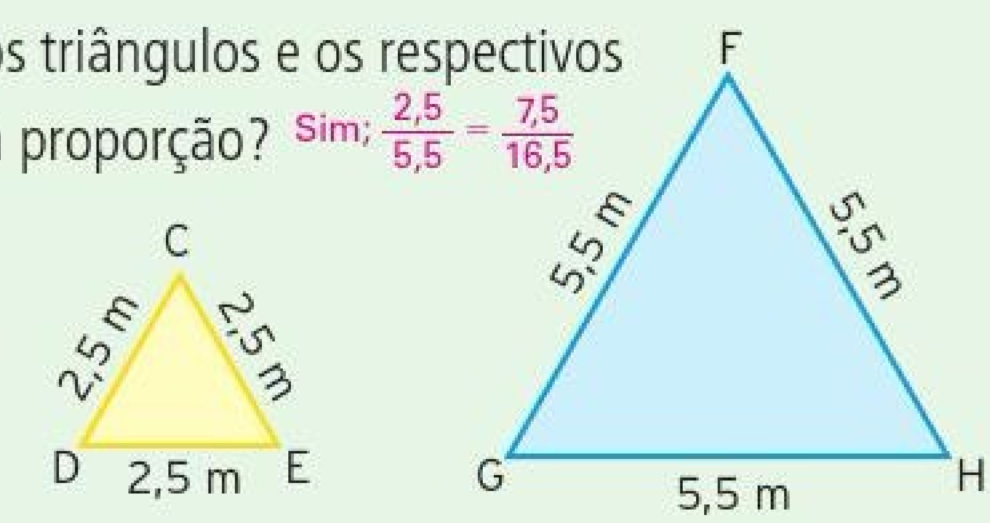


Investigue e explique

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega, investiguem, reflitam e respondam às questões propostas.
As medidas dos lados destes triângulos estão indicadas em metros.

- Quais são os perímetros dos triângulos CDE e FGH? 7,5 m; 16,5 m.
- Existe uma proporção entre as medidas dos lados dos triângulos e os respectivos perímetros? Se a resposta for afirmativa, qual é essa proporção? Sim; $\frac{2,5}{5,5} = \frac{7,5}{16,5}$
- Desenhem outro triângulo equilátero cujas medidas dos lados e o perímetro formem uma proporção com as medidas dos lados e os perímetros do $\triangle CDE$ e do $\triangle FGH$. Resposta possível: 3 m de lado.



Resolvendo problemas

Para refletir e responder

Em uma lanchonete, para cada 45 coxinhas vendidas, são vendidas 16 empadas. Em um certo dia, foram vendidas 48 empadas.

- Mantida essa razão, quantas coxinhas foram vendidas nesse dia? 135 coxinhas.

$$\frac{45}{16} = \frac{x}{48}$$

Representando por **x** o número de coxinhas, podemos escrever a proporção: $\frac{45}{16} = \frac{x}{48}$.

O problema pode ser resolvido aplicando a propriedade fundamental das proporções e a resolução de uma equação de 1º grau:

$$\frac{45}{16} = \frac{x}{48} \quad \begin{matrix} 16 \cdot x \\ 45 \cdot 48 \end{matrix} \quad \rightarrow 16 \cdot x = 45 \cdot 48$$

$$x = \frac{45 \cdot \cancel{48}^{\,3}}{\cancel{16}_{\,1}} \text{ — } \mathbf{x = 135}$$

Portanto, foram vendidas 135 coxinhas nesse dia.

Quando encontramos um valor que transforma $\frac{45}{16} = \frac{x}{48}$ em uma proporção, podemos dizer que resolvemos essa proporção.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

39. A letra x representa um número racional. Os números 12, 15, 4 e x formam uma proporção, nessa ordem. Qual é o valor de x? 5

Pista: 12 e x são extremos de uma proporção.

40. Na prova de Matemática, uma professora propôs questões envolvendo o cálculo do termo desconhecido das proporções abaixo:

$\frac{16}{x} = \frac{8}{49}$ $\qquad$ $\frac{50}{7a} = \frac{25}{49}$ $\qquad$ $\frac{17}{n} = \frac{34}{9}$

Verônica apresentou a seguinte resposta:

$x = 98$ $\qquad$ $a = 14$ $\qquad$ $n = \frac{9}{2}$

Quantas questões Verônica acertou? Três questões.

41. Na festa de aniversário de Maira, a razão entre o número de meninos e o número de meninas era 6 para 5. Se havia 45 meninas, quantos eram os meninos? 54 meninos.

42. Uma distribuidora de combustível mistura gasolina e álcool em volumes proporcionais a 8 e 5 respectivamente. Em uma encomenda de um posto de combustível foram usados 4 800 L de gasolina. Quantos litros de álcool foram misturados a esse volume de gasolina? 3 000 L de álcool.

43. Nos jogos escolares do ano passado, a razão entre o número de moças e o de rapazes que participaram foi $\frac{2}{3}$ e o número de rapazes foi 168. Qual o total de jovens (moças e rapazes) que participaram desses jogos? 280 jovens, entre moças e rapazes.

44. Gabriela está com más notas em Português. A última prova do ano terá 56 questões. Para ser aprovada para o ano seguinte, de cada 8 questões ela deverá acertar, no mínimo, 5. Qual é o menor número de questões que ela deverá acertar nessa prova? 35 questões.

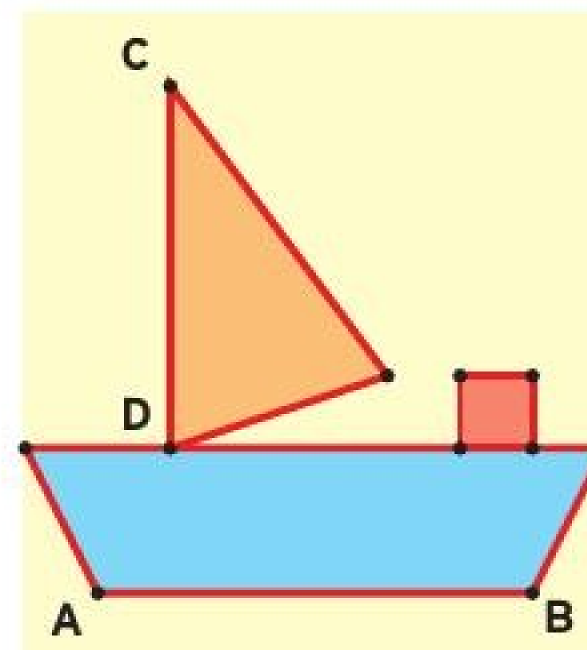
4 Aplicações das proporções

Propor situações nas quais os alunos façam ampliações e reduções, utilizando malha quadriculada ou geoplano. Explorar também o conceito de escala, usando situações do cotidiano dos alunos de forma integrada com as disciplinas Geografia e Desenho.

Ampliação e redução

Para refletir e responder

Daniela viu o desenho ao lado em um livro e quer fazer um, em seu caderno, parecido com ele, mas de tamanho maior.



ILUSTRAÇÕES: BIS

- Que sugestão você daria a Daniela para que ela tenha o desenho como quer? Resposta pessoal.

O que Daniela deseja fazer é uma **ampliação** da figura que ela encontrou, ou seja, obter um desenho maior, mas com a mesma forma. Isso poderá ser feito ampliando as medidas de comprimento, conservando a razão entre as dimensões. Em outras palavras, mantendo a **proporcionalidade** entre as **dimensões** do **desenho encontrado** e as da **ampliação**.

Uma das maneiras de obter tal ampliação é desenhar uma malha quadriculada sobre a figura encontrada e desenhar a figura desejada sobre outra malha com quadrados de dimensões maiores.

Exemplo:

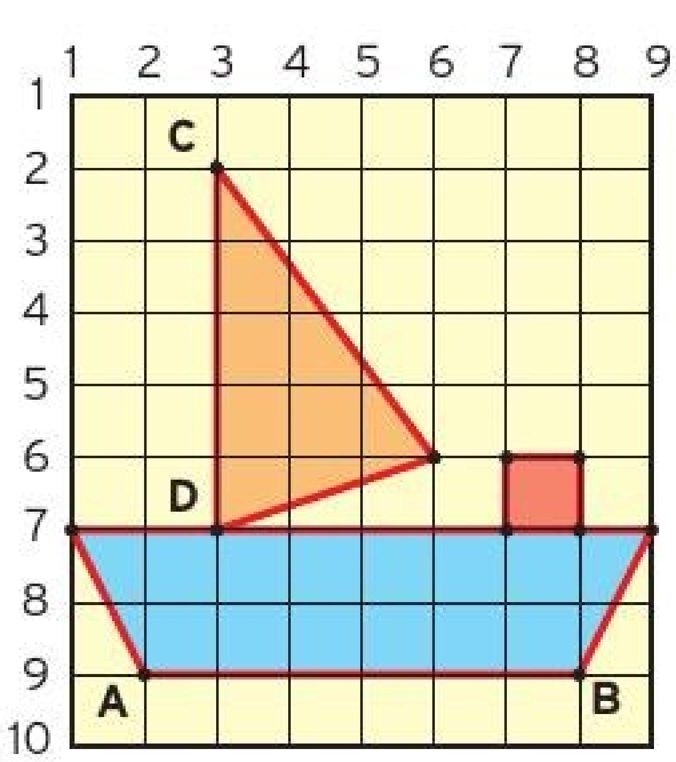


figura 1

Quadrados de 0,5 cm de lado.

Aqui os quadrados têm 1 cm de lado.

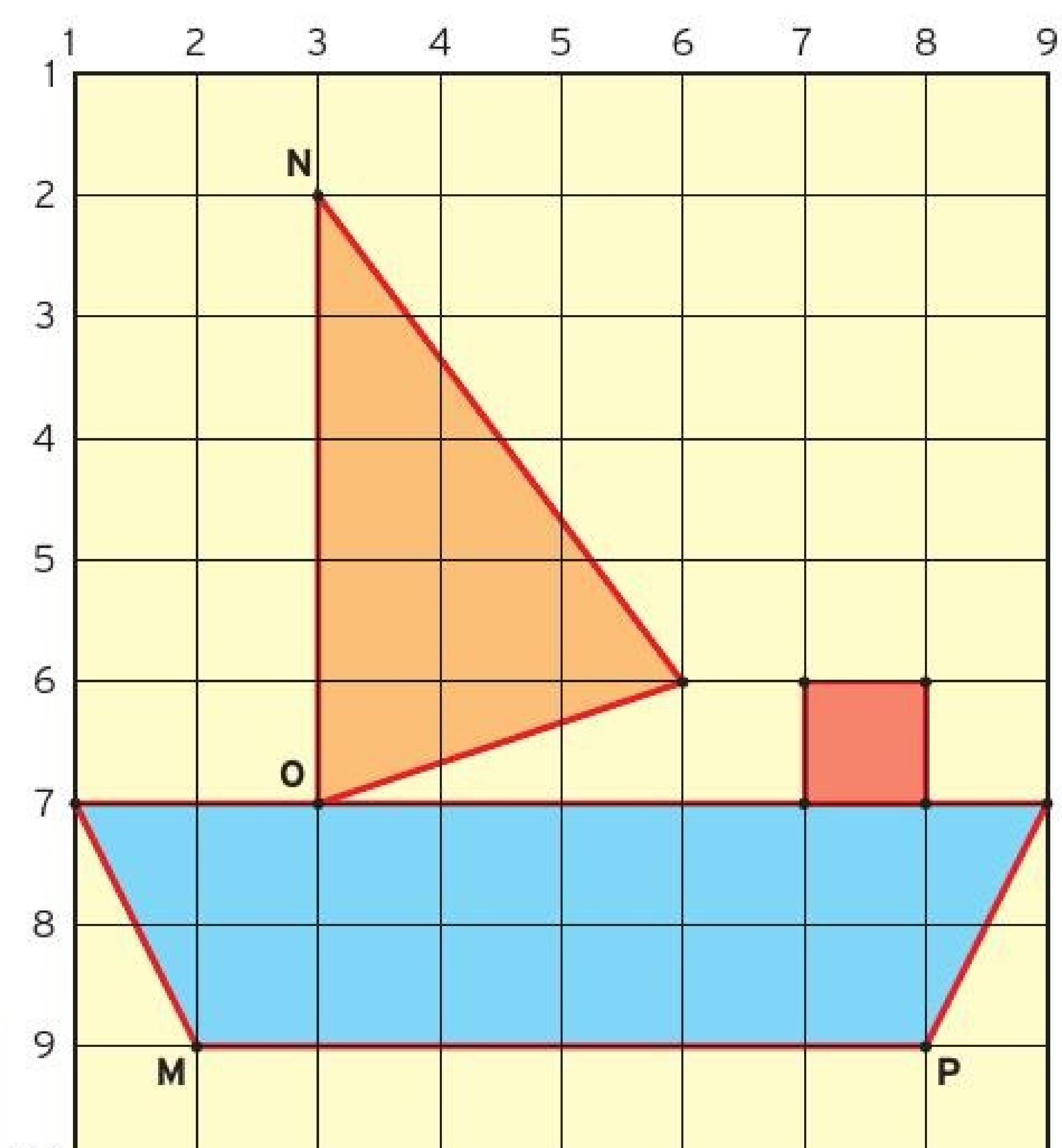


figura 2

Dizemos que a figura 2 é uma **ampliação** da figura 1 ou, também, que a figura 1 é uma **redução** da figura 2.

Nas figuras dos barcos, cada medida no desenho ampliado (figura 2) é o dobro da medida correspondente no desenho menor (figura 1), ou seja, $\frac{2}{1}$ (2 para 1) é **a razão dessa ampliação**.

Essa razão indica que cada 2 cm da figura 2 correspondem a 1 cm da figura 1.

Escala

Quando desenhamos um objeto, a planta de uma casa, mapas ou fazemos uma maquete, utilizamos uma escala de redução ou, simplesmente, **escala**. Ela é a razão entre a medida de comprimento considerada no desenho e a medida real correspondente a esse comprimento. Essas medidas devem estar na mesma unidade.

$$\text{escala} = \frac{\text{comprimento no desenho}}{\text{comprimento real}}$$

Na mesma unidade de medida.

Exemplo:

A escala do projeto (1 : 100), abaixo, indica a razão entre as medidas do desenho e as medidas reais do apartamento e significa que **1 cm do desenho** corresponde a **100 cm**, ou **1 m**, **no real**. Nessa planta, o quarto de casal é representado com 4 cm de comprimento e 3 cm de largura.

Escala: 1 : 100

Acompanhe o cálculo das dimensões reais do quarto de casal.

Vamos usar a letra **x** para representar a medida do comprimento real do quarto e a letra **y** para representar a medida real da largura.

escala: 1 : 100

$$\frac{1}{100} = \frac{\text{desenho}}{\text{real}}, \text{ em cm.}$$

$$\frac{1}{100} = \frac{4}{x} \text{ —— } x = 400 \text{ cm ou } x = 4 \text{ m}$$

$$\frac{1}{100} = \frac{3}{y} \text{ —— } y = 300 \text{ cm ou } y = 3 \text{ m}$$

O quarto de casal tem 4 m de comprimento e 3 m de largura.

Fazer e aprender

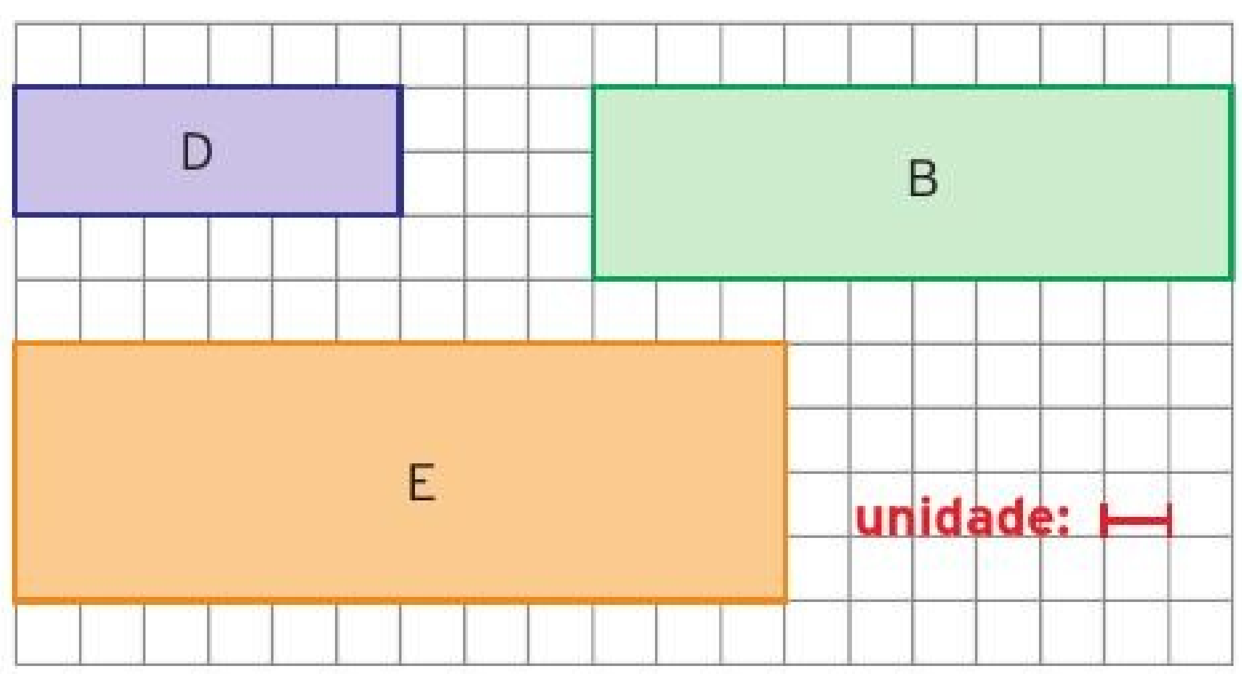
FAÇA NO CADERNO

45. Nestes retângulos, utilize como unidade de medida o comprimento do lado de um quadradinho e responda às questões.

a) O retângulo D é uma redução do retângulo E. Qual é a razão de redução? 1 : 2

b) O retângulo B é uma ampliação do retângulo D? Explique sua resposta.
b) Resposta possível: Não, porque os lados do retângulo B não são proporcionais ao do retângulo D.

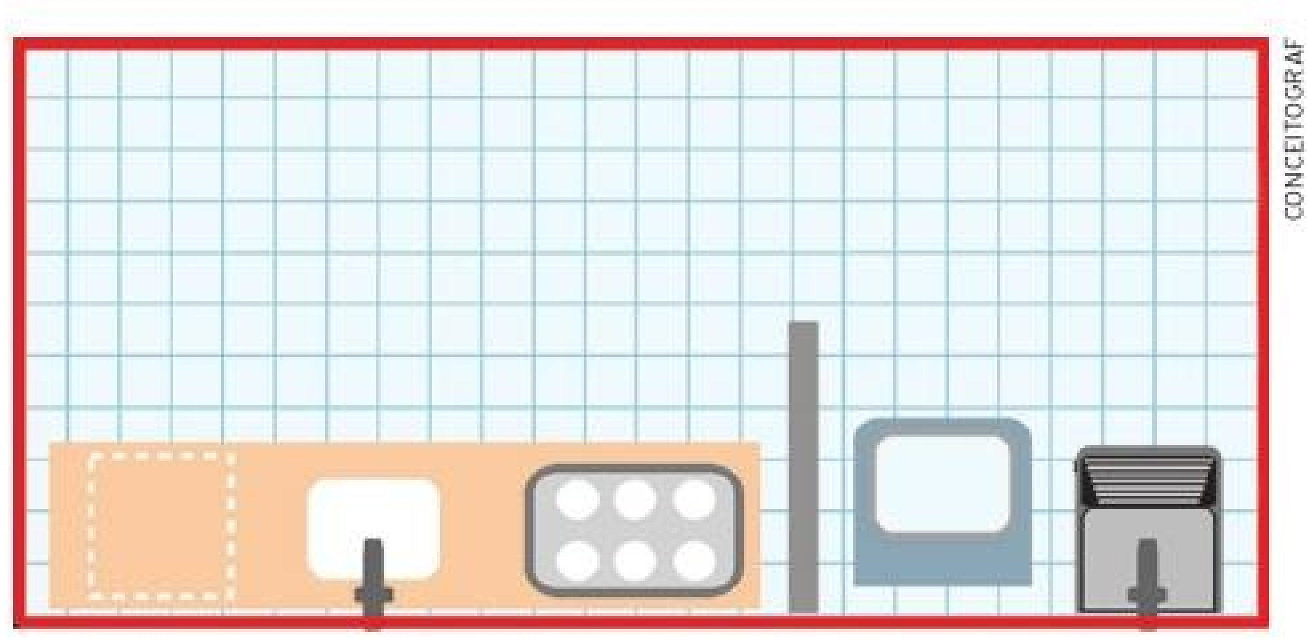
c) A razão de redução é um número menor ou maior que 1? A razão de redução é menor que 1.



46. Na planta de uma casa, o comprimento da cozinha, que é de 5 m, está representado por um segmento de reta de 2,5 cm. Qual foi a escala utilizada para o desenho? 1 : 200

47. Mauro está consultando um mapa em que a escala é 1 : 50 000 000. Nesse mapa, a distância de São Paulo a Brasília, em linha reta, é de 2,3 cm, aproximadamente. Qual é a distância real, aproximada, entre São Paulo e Brasília? Apresente sua resposta em quilômetros. 1 150 km.

48. Nesta planta, a cozinha e a lavanderia juntas têm 7,5 cm de comprimento e 3,5 cm de largura.



Escala: 1 : 100

a) Qual é a área real dessa superfície? 26,25 m².

b) Se nesta planta você representasse um quarto do seu gosto, quais seriam as dimensões dele na realidade e na planta? Resposta pessoal.

Desafio

FAÇA NO CADERNO

Bancando o arquiteto

Que tal brincar de arquiteto? Gosta da ideia?

Então, fita métrica na mão, papel e lápis e mãos à obra.

Desenhe em uma folha de papel a planta de sua sala de aula, como se ela fosse vista de cima. Resposta pessoal.

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Exercícios complementares

FAÇA NO CADERNO

49. A letra **a** representa um número racional. Os números 7, 9, **a** e 54 formam uma proporção, nessa ordem.

a) Qual é o valor de **a**? 42

b) Que outra proporção poderá ser escrita com esses mesmos números? Resposta possível: $\frac{54}{9} = \frac{42}{7}$

c) Os números 7, 9, $\frac{a}{2}$ e 27 formam, nessa ordem, uma proporção? Sim.

d) Em caso afirmativo, qual é a proporção do item anterior? $\frac{7}{9} = \frac{21}{27}$

50. Determine o valor de x nas proporções:

a) $\frac{x - 8}{x + 4} = \frac{3}{4}$ 44

b) $\frac{2x}{x + 9} = \frac{5}{4}$ 15

c) $\frac{3x}{2x - 10} = 4$ 8

51. Na proporção $\frac{4a}{15a - 39} = \frac{1}{7}$,

a) qual é o valor de **a**? −3

b) qual é o valor de **8a**? −24

52. A letra **n** representa um número racional. Os números 1, 6, (n − 3) e (n + 2) formam uma proporção, nessa ordem. Qual é o valor de **n**? 4

53. A razão entre as idades de Cláudio e de Alice é de 8 para 5. A soma de suas idades é 52. Quantos anos tem cada um?
Pista: Indique a idade de Cláudio por **c** e a de Alice por **a** e utilize um sistema de equações.
Cláudio: 32 anos; Alice: 20 anos.

54. Renato e Paulo têm uma conta conjunta em uma caderneta de poupança que está hoje com R$ 20300,00. As quantias que Renato e Paulo investiram estão na razão 2 para 5, nessa ordem. Qual é a quantia que cabe a cada um nessa caderneta, hoje? Renato: R$ 5800,00; Paulo: R$ 14500,00.

55. Juca é sete anos mais velho que seu irmão. A razão entre a idade de Juca e a de seu irmão é $\frac{6}{5}$. Qual é a idade de cada um?
Juca: 42 anos; irmão: 35 anos.

56. O perímetro de um terreno retangular é 220 m. A razão entre o comprimento e a largura é $\frac{5}{6}$. Quais são as dimensões desse terreno?
Comprimento: 50 m; largura: 60 m.

57. Duas famílias dividem as despesas do mês proporcionalmente ao número de componentes de cada uma. Uma delas é formada por 3 pessoas e a outra, por 5. A despesa, em um certo mês, foi de R$ 4140,00. De quanto foi a despesa de cada família nesse mês? R$ 1552,50; R$ 2587,50.

5 Estatística e probabilidade

Razões e probabilidade

Criar outros experimentos que envolvam possibilidades, contagem e razão, usando moedas, dados, bolas, cartões, baralhos.

Algumas coisas na vida são uma questão de **chance** ou **risco**.

Quando falamos sobre acontecimentos ou fatos, é comum lermos ou ouvirmos frases do tipo:

ILUSTRAÇÕES: HÉLIO SENATORE

Palavras como **chance**, **provável** e **risco** são usadas nessas situações para descrever as possibilidades de ocorrência de um acontecimento.

Como verificar quais acontecimentos apresentam maior ou menor chance de ocorrer? Uma maneira de avaliar isso é realizando experimentos.

Quando jogamos uma moeda, por exemplo, poderá sair **coroa**, se a face com a quantia estampada estiver voltada para cima, ou **cara**, caso saia a outra face. Estamos eliminando a possibilidade de a moeda cair em pé. Se coroa e cara têm a mesma chance de sair, então dizemos que a moeda é equilibrada ou não viciada.

Para refletir e responder

Anita e Ricardo fizeram quatro experimentos. Jogaram uma moeda equilibrada 25 vezes, 50 vezes, 75 vezes e 100 vezes.

- Em sua opinião, quantas vezes saiu cara em 50 lançamentos? E em 100 lançamentos? Respostas pessoais.

Veja o registro das ocorrências nos experimentos de Anita e Ricardo, nesta tabela:

Experimento	Nº de lançamentos	Nº de vezes em que saiu cara	$\dfrac{\text{Nº de vezes em que saiu cara}}{\text{Nº de lançamentos}}$	Percentual
1	25	12	$\dfrac{12}{25} = 0{,}48$	48%
2	50	29	$\dfrac{29}{50} = 0{,}58$	58%
3	75	42	$\dfrac{42}{75} = 0{,}56$	56%
4	100	53	$\dfrac{53}{100} = 0{,}53$	53%

Quando jogamos uma moeda equilibrada um grande número de vezes, verificamos que as razões $\frac{\text{nº de vezes em que saiu cara}}{\text{nº de lançamentos}}$ são números próximos de $\frac{1}{2} = 0{,}5$, ou seja, podemos esperar que em quase metade das jogadas saia cara e nas restantes, coroa.

É tão provável sair cara quanto coroa.

Como temos apenas cara e coroa em uma moeda, a **probabilidade** de sair cara é **uma em duas**. Indicamos essa probabilidade com a razão $\frac{1}{2} = 0{,}5$.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

58. Se em 200 lançamentos de uma moeda equilibrada sair 98 vezes cara, qual será a razão entre o número de vezes em que sai cara e o número de lançamentos da moeda? $\frac{98}{200}$ ou $\frac{49}{100}$

59. Uma urna continha duas bolas do mesmo tipo: uma vermelha e uma azul. Foram feitos 4 experimentos em que se retirava uma bola da urna, observava-se a cor e recolocava-se a bola na urna. A tabela a seguir mostra quantas vezes saiu a bola vermelha.

Experimento	Nº de retiradas	Nº de vezes que saiu bola vermelha
1	24	10
2	38	17
3	40	21
4	96	42

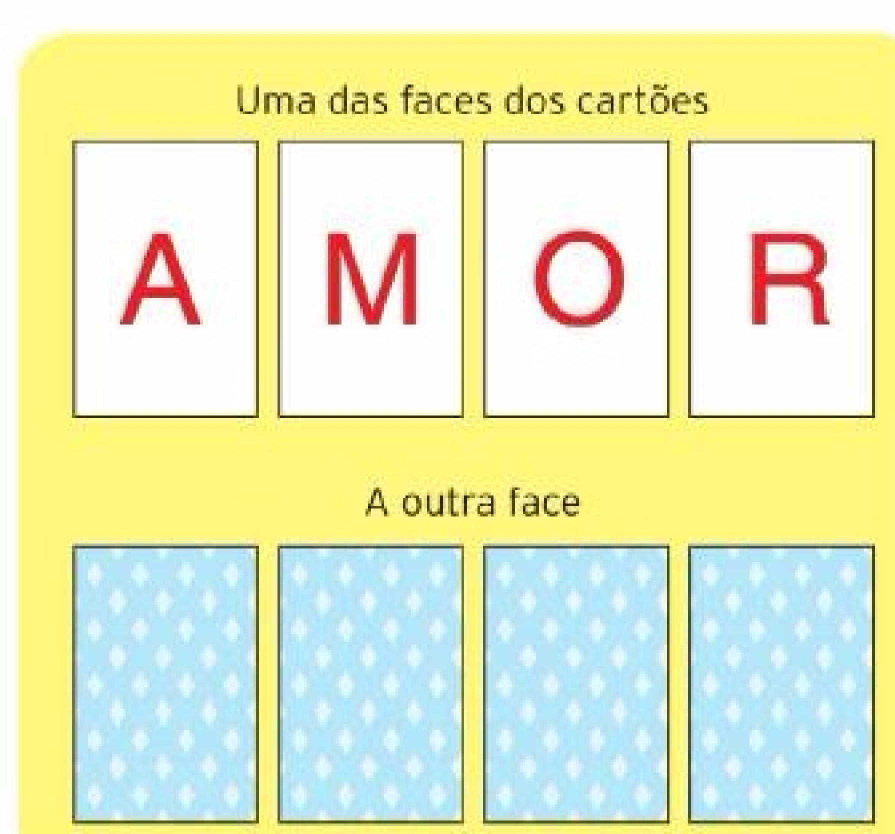
a) Calcule as razões entre o número de vezes em que saiu a bola vermelha e o número de retiradas. Essas razões são iguais? $\frac{10}{24}, \frac{17}{38}, \frac{21}{40}, \frac{42}{96}$; não.

b) No experimento 3, em quantos por cento das vezes saiu bola vermelha? 52,5%

c) No experimento 4, em quantos por cento das vezes saiu bola vermelha? 43,75%

d) Calcule a probabilidade de se retirar a bola vermelha nesse experimento. $\frac{1}{2}$

60. Tatiana tem 4 cartões de mesma forma e tamanho, marcados com as letras: A, M, O e R. Os cartões são embaralhados e arrumados sobre a mesa com a letra virada para baixo. Um dos cartões é virado e observa-se a letra estampada.



a) Quais são os possíveis resultados? A, M, O ou R.

b) Quantos são os possíveis resultados? 4 resultados.

c) Quantas possibilidades existem de sair o cartão com a letra M? 1 possibilidade.

d) Calcule a probabilidade de sair a letra M na virada do cartão. $\frac{1}{4}$

Desafio

FAÇA NO CADERNO

Preto, vermelho ou azul?

Três bolas pretas, uma bola vermelha e uma bola azul, do mesmo tipo, foram colocadas em uma caixa.

A cada vez:

– escolhe-se uma cor;

– retira-se uma bola da caixa, observa-se a cor e recoloca-se a bola na caixa.

A cada acerto ganha-se 1 ponto, e a cada erro perde-se 1 ponto.

Acerte a cor e marque pontos!

- Se você tivesse de apostar em uma cor, em qual delas apostaria? Por quê?

Preto; $\frac{3 \text{ bolas pretas}}{5 \text{ bolas}} = \frac{3}{5}$; a probabilidade de sair a bola preta é maior do que a de saírem as das outras cores.

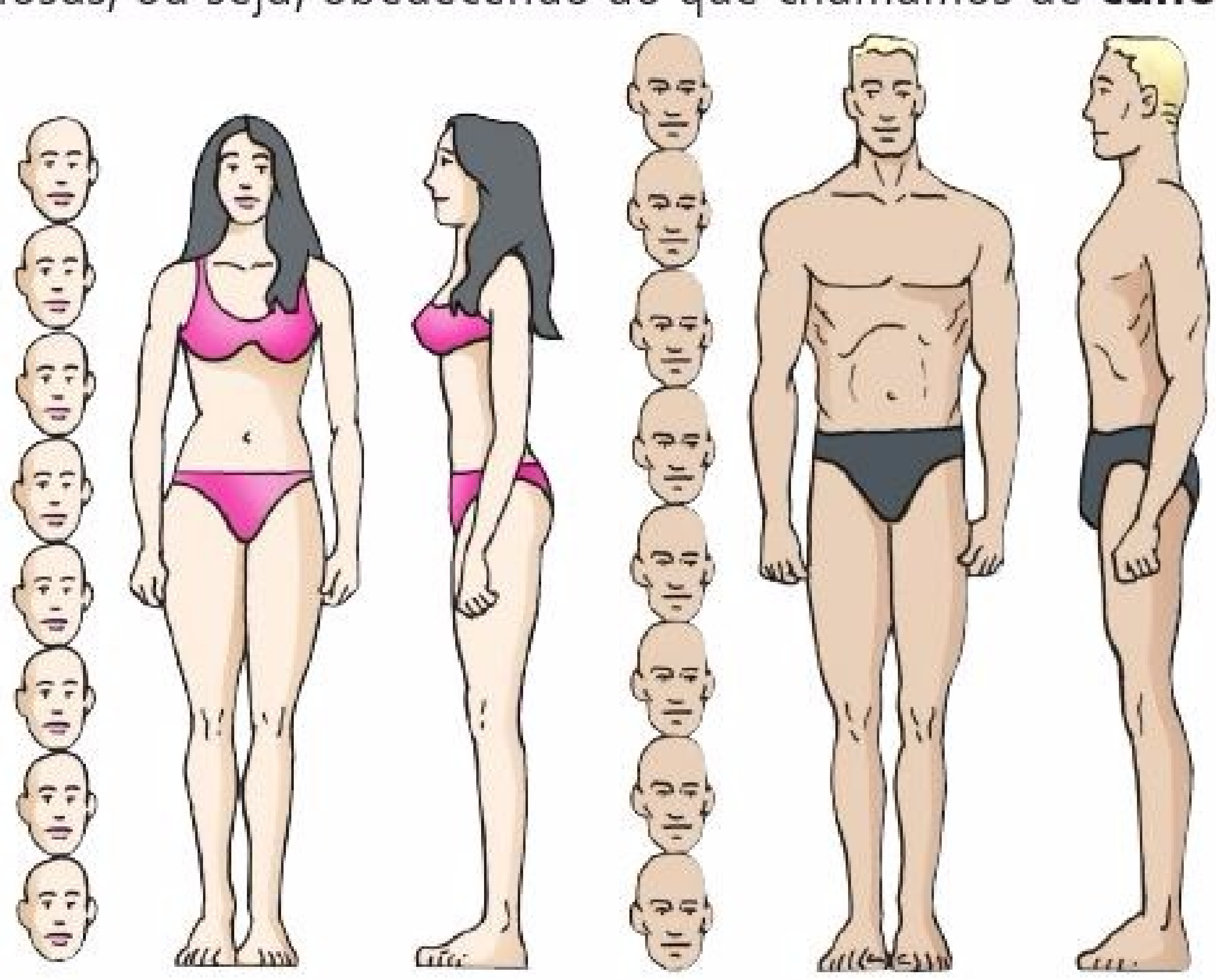
Leitura

"Um bicho de oito cabeças"

É bem provável que você conheça o termo *bicho de sete cabeças*. Mas será que já ouviu falar em um de "oito cabeças"?

Saiba que um dos primeiros desafios de um desenhista é fazer um esboço de uma figura humana com proporções harmoniosas, ou seja, obedecendo ao que chamamos de **cânones**.

Cânone: norma, princípio geral do qual se inferem regras particulares.



FRANCISCO VILACHÃ

A **Leitura** é opcional, mas esta em particular está presente no cotidiano dos alunos e também em desenhos e pinturas. Verifique se há interesse deles pelo tema e explore-o.

Os **cânones** estabelecem as **proporções** ideais do corpo humano. O cânone da ilustração é grego. Nele, o corpo é subdividido em "oito cabeças".

De acordo com os cânones gregos, haverá harmonia em uma figura humana se a **razão** entre o comprimento das pernas e o do tronco for de $\frac{4}{3}$, tanto no homem quanto na mulher.

Essa harmonia não tem como parâmetro a altura, mas, sim, o **tamanho da cabeça**!

Revisão cumulativa e testes

FAÇA NO CADERNO

1. Em uma prova de Matemática, uma professora propôs estas questões envolvendo cálculos com números racionais:

1ª) $-25{,}3 + 11{,}2 \cdot 2$

2ª) $45{,}6 - (-3{,}4 + 0{,}1)$

3ª) $-\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} + 5 : \left(-\frac{1}{2}\right)$

4ª) $\left(-\frac{3}{7}\right)^2 \cdot \frac{49}{6}$

O critério de pontuação da professora era: 1 ponto por resposta certa e – 0,5 ponto por resposta errada. Arnaldo apresentou estas respostas:

1ª questão: $-2{,}9$ 3ª questão: 0

2ª questão: 48,9 4ª questão: $-\frac{3}{2}$

Qual foi a pontuação de Arnaldo? 1 ponto.

2. A letra **a** representa um número inteiro e $a = (-3^3)^2$. Qual é o valor de $-3 \cdot \sqrt{a}$? -81

3. Qual é a solução da equação $\frac{4t + 5}{3} - 3 = 2t$? Essa solução é um número inteiro? -2; sim.

4. Joga-se um dado comum equilibrado e observam-se os pontos marcados na face de cima.

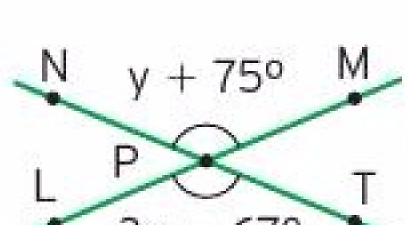
a) Quais são todos os possíveis resultados? 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

b) Quantas possibilidades existem de sair o número 2? 1

c) Qual é a probabilidade de sair o número 2 nesse experimento? $\frac{1}{6}$

5. Dois ângulos são complementares e um deles excede o outro em 23°. Qual é a medida de cada ângulo? 33° 30′ e 56° 30′

6. Nesta figura, a letra y representa uma medida em graus.



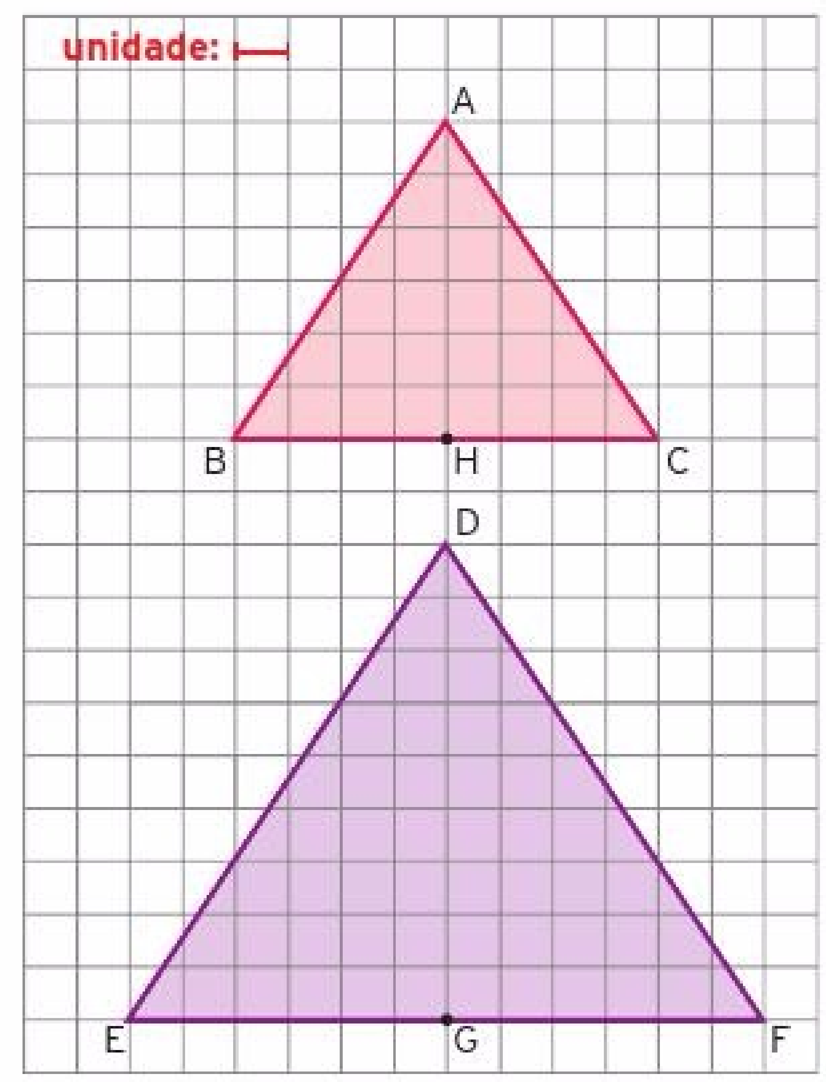
34° e 34°

- Quais são as medidas dos ângulos $N\hat{P}L$ e $M\hat{P}T$?

7. Um pai dividiu R$ 45 000,00 entre suas 3 filhas da seguinte forma: a primeira recebeu $\frac{2}{3}$ do que a segunda recebeu, e a terceira recebeu tanto quanto a primeira e a segunda juntas. Quanto recebeu a terceira filha? R$ 22 500,00.

8. A razão entre o comprimento e a largura de um retângulo é $\frac{5}{3}$. Se a largura é 12 cm, qual é a área desse retângulo em centímetros quadrados? 240 cm^2.

9. Observe estes triângulos:



$\frac{8}{12} = \frac{6}{9}$

a) Compare as razões $\frac{\text{med } \overline{BC}}{\text{med } \overline{EF}}$ e $\frac{\text{med } \overline{AH}}{\text{med } \overline{DG}}$.

b) O triângulo ABC é uma redução do triângulo DEF? Em caso afirmativo, qual é a razão de redução? Sim; $\frac{2}{3}$.

10. Do total de pacotes embalados em uma distribuidora, sabe-se que a quarta parte foi conferida por Ana, $\frac{2}{3}$ por Carlos e o restante por Cláudio. Nessas condições, a que fração do total de pacotes corresponde aos conferidos por Cláudio? a

a) $\frac{1}{12}$ b) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{5}{12}$

11. Se 3 maçãs custam R$ 2,00, uma dúzia custa: c

a) R$ 6,00. b) R$ 7,90. c) R$ 8,00. d) R$ 12,00.

12. Na planta de uma casa, um comprimento de 6 m está representado por um segmento de reta de 2,5 cm. A escala dessa planta é: a

a) 1 para 240. c) 1 para 2 400.

b) 1 para 250. d) 1 para 2 500.

13. Leia as indicações do mapa a seguir e responda às questões:

Fonte: *Atlas Geográfico Escolar*. Rio de Janeiro: IBGE, 2012. p. 90.

a) Qual escala está indicada nesse mapa? 1 : 10 000 000

b) Qual é a distância entre a cidade de São Paulo e a de Araçatuba, no mapa? 4,6 cm.

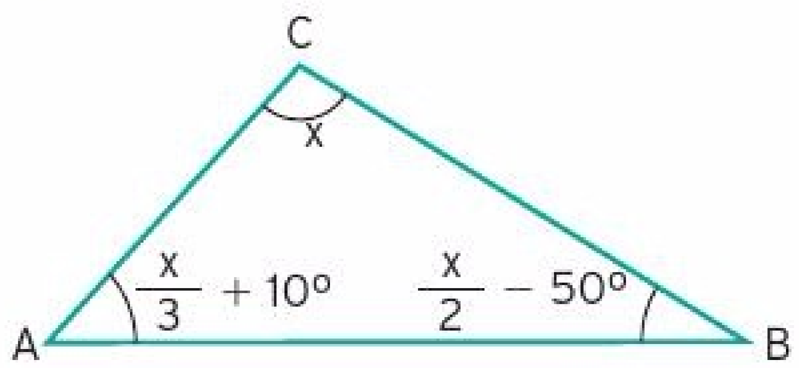
c) Qual é a distância real aproximada, em linha reta, entre São Paulo e Araçatuba? 460 km.

14. Quanto é 0,38% de R$ 100,00? c

a) R$ 38,00 c) R$ 0,38

b) R$ 3,80 d) R$ 0,038

15. Na figura, **x** é uma medida em graus.

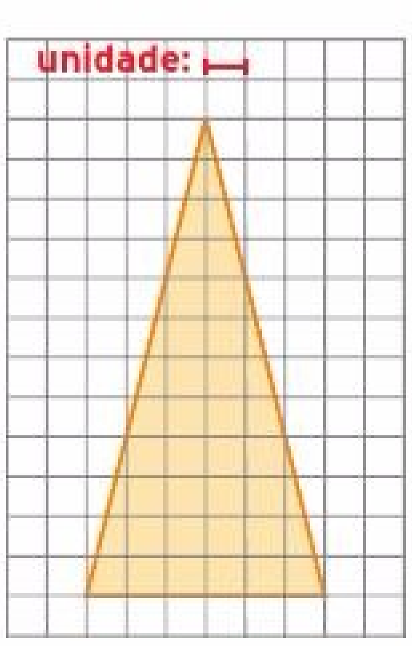


As medidas dos ângulos do triângulo ABC são: d

a) 60°, 20° e 100°. c) 40°, 20° e 120°.

b) 55°, 25° e 100°. d) 50°, 10° e 120°.

16. (Prova Brasil) Uma torre de comunicação está representada na figura.



Para construir uma miniatura dessa torre que tenha dimensões 8 vezes menores que a original, deve-se: b

a) multiplicar as dimensões da original por 8.

b) dividir as dimensões da original por 8.

c) multiplicar as dimensões da original por 4.

d) dividir as dimensões da original por 4.

17. (Encceja) Os moradores de uma região, para minimizar o problema do racionamento, estão dispostos a economizar água. A associação de moradores divulgou alguns cuidados que devem ser tomados:

- regar jardins com menos frequência, pois em geral se gastam, em média, 186 litros a cada 10 minutos;
- não lavar carros, pois o gasto médio é de 560 litros em 15 minutos;
- gastar menos tempo com os banhos, pois, em geral, são gastos 243 litros em 15 minutos;
- fechar a torneira ao escovar os dentes, pois muitas pessoas gastam 12 litros em 2 minutos de escovação.

Dentre essas recomendações, mantendo os outros hábitos, a mudança que representa maior economia de água é: b

a) Não regar o jardim.

b) Não lavar os carros.

c) Gastar menos tempo com o banho.

d) Fechar a torneira ao escovar os dentes.

UNIDADE 10

Grandezas proporcionais

GODONG/ALAMY/LATINSTOCK

Muitas pessoas colecionam miniaturas de automóveis como passatempo. Para que a miniatura seja fiel ao original, as dimensões das respectivas partes dos veículos devem ser proporcionais. Nesta unidade, você vai explorar situações que envolvem aplicações da ideia de proporcionalidade.

Nesta unidade...

1. Proporcionalidade entre grandezas
2. Regra de três simples
3. Regra de três composta
4. Divisão proporcional

Situações como as seguintes estão associadas à ideia de proporcionalidade, que é de grande utilidade na vida de qualquer pessoa.

Ricardo e sua namorada viajam pelo litoral.

ILUSTRAÇÕES: HÉLIO SENATORE

Mariana é corredora e está sempre cronometrando o tempo em seus treinos.

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

O que você já sabe?

- Se a viagem, citada acima, fosse de 280 km, quantos litros de gasolina o carro de Ricardo consumiria? 20 litros.
- Quantos quilômetros o carro de Ricardo percorre, aproximadamente, com 1 litro de gasolina? 14 km. E quantos quilômetros o carro poderá percorrer com 35 litros de gasolina? Aproximadamente 490 km.
- Se Mariana fizer o mesmo percurso a uma velocidade média de 10 km por hora, o tempo para percorrê-lo vai diminuir ou aumentar? Diminuir.
- Se outra corredora percorrer a mesma distância a uma velocidade média de 10 km por hora, em quanto tempo fará o percurso? 1 hora.

1 Proporcionalidade entre grandezas

Grandezas diretamente proporcionais

Para refletir e responder

- Calcule as razões entre as distâncias percorridas e entre os correspondentes volumes de combustível consumidos para percorrer essas distâncias. O que se pode concluir?

$\frac{90}{270}$, $\frac{10}{30}$. As razões são iguais.

Muitas vezes, a variação de uma grandeza provoca a variação de outra, na mesma razão. Dizemos, então, que essas grandezas são **proporcionais** e que essa variação pode se dar em uma **proporcionalidade direta**.

Para a situação acima, vamos relacionar as distâncias percorridas e os correspondentes volumes de combustível consumidos para percorrê-las.

	Distância percorrida (km)	**Volume (L)**	
triplica	90	10	triplica
	270	30	

$$\frac{90}{270} = \frac{10}{30}$$ ← variam proporcionalmente

É comum os alunos acharem que a proporcionalidade direta entre grandezas significa que o comportamento dessas grandezas é igual, ou seja, quando uma aumenta, a outra aumenta também, e quando uma diminui, a outra diminui também. Alerte-os para o fato de que essa variação deve ser proporcional.

Observe que, se a distância percorrida triplicar em relação à anterior, por exemplo, o volume de combustível consumido também triplicará em relação ao anterior. Se a distância percorrida for a metade da anterior, o volume de combustível consumido também será a metade do anterior.

As grandezas **distância percorrida** e **volume**, nessa situação, são **grandezas diretamente proporcionais**.

> Duas grandezas são **diretamente proporcionais** quando as **razões** entre os valores de uma delas e os valores correspondentes da outra são **iguais**.

Veja outros exemplos:

- Dois bolos são feitos com 600 g de farinha e 5 bolos, com 1,5 kg. A quantidade de farinha e o número de bolos são grandezas diretamente proporcionais?

A quantidade de farinha aumenta na razão $\frac{600}{1500}$ e o número de bolos aumenta na razão $\frac{2}{5}$. As razões $\frac{600}{1500}$ e $\frac{2}{5}$ são iguais. Portanto, as grandezas envolvidas nessa situação são diretamente proporcionais.

- Pedro está repondo o estoque de calças jeans de sua loja e consulta um amigo:

Essa situação envolve proporcionalidade: se 5 calças custaram R$ 400,00, cada calça custou R$ 80,00. Então, para saber quanto custam 18 calças, basta multiplicar 18 por R$ 80,00.

Calças	Preço (R$)
5	$\xrightarrow{\times 80}$ 400
18	$\xrightarrow{\times 80}$ 1 440

Ou: $$\frac{5}{18} \underset{\times 80}{\overset{\times 80}{=}} \frac{400}{1440}$$

Note que, em lugar de observar como varia a grandeza **quantidade de calças**, relacionamos essa grandeza com o preço. O preço de certa quantidade de calças é sempre igual ao número de calças multiplicado por 80. Ou seja, as grandezas **quantidade de calças** e **preço** são **diretamente proporcionais** e o fator de proporcionalidade é 80.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

1. Esta tabela relaciona o número de livros, todos iguais, e o número de caixas em que eles estão embalados.

Livros	Caixas
180	12
720	48

a) Para 180 livros, qual é a razão entre o número de livros e o número de caixas? $\frac{180}{12} = 15.$

b) Quando o número de livros aumenta de 180 para 720, qual é a razão entre o número de livros e o número de caixas? $\frac{720}{48} = 15.$

c) As grandezas quantidade de livros e quantidade de caixas são grandezas diretamente proporcionais. Qual é o fator de proporcionalidade? 15.

2. Na tabela abaixo, a primeira linha indica volumes de etanol e a segunda, preços correspondentes a cada um desses volumes.

Volume (L)	2,5	6,1	9,2	10
Preço (R$)	5,00	12,20	16,40	20,00

- Copie essa tabela em seu caderno e complete-a de modo que os volumes de etanol e os preços correspondentes a cada volume sejam grandezas diretamente proporcionais.

3. Uma fábrica de roupas gasta 5 m de tecido para confeccionar 2 uniformes iguais e 15 m de tecido para confeccionar 6 uniformes iguais.

a) Quando a quantidade de tecido triplica, o que ocorre com o número de uniformes? Triplica.

b) A quantidade de tecido aumenta na razão $\frac{5}{15}$ e o número de uniformes aumenta em que razão? $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

c) Nessa situação, a quantidade de tecido e a quantidade de uniformes confeccionados são grandezas diretamente proporcionais? Explique por quê. Sim, porque a quantidade de tecido e a quantidade de uniformes aumenta na mesma razão: $\frac{5}{15} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

4. Em um passeio ciclístico, Fernando percorreu 36 km em 3 horas. Mantendo a mesma velocidade média, ele percorreu 6 km em meia hora. Responda às questões a seguir.

a) Que tipo de proporcionalidade existe entre o espaço percorrido e o tempo? Proporcionalidade direta.

b) Qual é o fator de proporcionalidade? 12

Grandezas inversamente proporcionais

Para refletir e responder

Um avião a jato voa de São Paulo a Recife em 3 horas. Ele se desloca a uma velocidade média de 880 quilômetros por hora. Outro avião, a uma velocidade média de 440 quilômetros por hora, leva 6 horas.

As grandezas de velocidade e tempo estão envolvidas nessa situação.

- A velocidade de 440 quilômetros por hora é a metade da velocidade de 880 quilômetros por hora. O que ocorreu com os tempos correspondentes? Dobraram: de 3 horas para 6 horas.

Vamos relacionar as velocidades médias desenvolvidas e os correspondentes tempos gastos para ir de São Paulo a Recife:

Razões inversas, proporcionalidade inversa.

Velocidade (km/h)	Tempo (h)
880	3
440	6

Diminui. É a metade.

Aumenta. É o dobro.

$$\frac{880}{440} = \frac{6}{3} \text{ ou } 880 \times 3 = 440 \times 6 = 2640.$$

2640 é o fator de proporcionalidade.

Isso significa que, se em certo tempo percorrermos determinada distância com certa velocidade média, e essa velocidade média for reduzida à metade, então o tempo dobrará em relação ao anterior.

Dizemos que as grandezas **velocidade** e **tempo**, envolvidas na situação apresentada, são **grandezas inversamente proporcionais**.

Duas grandezas são **inversamente proporcionais** quando os **produtos** dos valores de uma delas pelos valores correspondentes da outra são **iguais**.

Veja um exemplo a seguir.

Lúcia fez uma tabela de suas leituras e verificou que, quanto mais páginas lia por dia, no mesmo ritmo, menos dias levava para ler um livro. Veja como ficou a tabela que ela fez:

Nº de páginas lidas (por dia)	5	10	16	20	160
Tempo (dias)	32	16	10	8	1

A quantidade de páginas lidas por dia e o tempo gasto para ler essas páginas são grandezas inversamente proporcionais.

$5 \cdot 32 = 160$ ——— fator de proporcionalidade

$\boxed{10} \xrightarrow{\times \text{ tempo}} \boxed{160}$, $\boxed{160} \xrightarrow{:} \boxed{10}$ ——— tempo: $160 : 10 = 16$ ——— 16 dias

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

5. O gerente de uma fábrica de sucos fez uma tabela como esta, relacionando o número de liquidificadores iguais utilizados para fazer suco de abacaxi e o tempo gasto para preparar a mesma quantidade desse suco. Observe a tabela e responda:

Liquidificadores (número)	Tempo (minutos)
8	12
24	4

a) Quando o número de liquidificadores triplica de 8 para 24, o que acontece com o tempo?
Divide-se por 3 e passa de 12 para 4.

b) A quantidade de liquidificadores e o tempo gasto para preparar o suco são grandezas direta ou inversamente proporcionais?
Inversamente proporcionais.

c) Se forem utilizados 30 liquidificadores, quanto tempo será gasto para preparar a mesma quantidade de suco? 3,2 minutos ou 3 min 12 s.

6. Em uma empresa, um prêmio em dinheiro será dividido entre os funcionários que tiverem melhor desempenho durante o ano.

Faça uma tabela como esta e complete-a de modo que o número de funcionários com melhor desempenho e a quantia que cada um receberá sejam grandezas inversamente proporcionais.

Funcionários (número)	Quantia recebida por funcionário (em R$)
2	5 000,00
4	2 500,00
8	1 250,00
10	1 000,00
16	625,00

7. Uma casa lotérica vai dividir igualmente R$ 81 000,00 entre todos os acertadores de um sorteio. Copie uma tabela como esta em seu caderno complete-a de modo que a quantidade de acertadores e a quantia que cada um receberá sejam grandezas inversamente proporcionais.

Nº de acertadores	1	2	3	4	5	10
Quantia (R$)	81 000	40 500	27 000	20 250	16 200	8 100

2 Regra de três simples

Na resolução de problemas envolvendo regra de três simples, procure explorá-los, inicialmente, sem regras preestabelecidas. Certifique-se primeiro de que os alunos aplicam os conceitos de proporcionalidade direta ou inversa para resolvê-los.

Aplicação da regra de três simples

Para refletir e responder

Mantendo aberta uma torneira, ela despeja, em 3 minutos, **4** L de água em um tanque. Mantendo a vazão constante, o tanque ficará cheio em 5 horas.


ITSUO NAKASHIMA

- Qual é a capacidade desse tanque?

400 litros.

Podemos resolver problemas que envolvem proporcionalidade entre duas grandezas de várias maneiras e uma delas é uma regra prática, que chamamos **regra de três simples**.

Veja dois modos de responder à questão proposta acima.

- **1º modo:** As grandezas envolvidas são diretamente proporcionais.

Mais tempo, mais volume de água despejada...

Tempo	Capacidade (L)
3 min	4
5 h	?

$\times 100$

Tempo (min)	Capacidade (L)
3	4
300	400

1 h = 60 min
5 h = 5 × 60 min = 300 min

A capacidade do tanque é de 400 litros.

- **2º modo:** Usando a **regra de três simples**, utilizamos um esquema em que o valor procurado é indicado por uma letra, por exemplo, **x**.

	Tempo (min)		Capacidade (L)	
Aumenta	3	———	4	Aumenta
	300	———	x	

Mais tempo: mais litros para a mesma vazão.

Tempo e **capacidade**, nessa situação, são **grandezas diretamente proporcionais**.

$\frac{3}{4}$ e $\frac{300}{x}$ são razões iguais —— $\frac{3}{4} = \frac{300}{x}$ —— É uma proporção.

$3 \cdot x = 4 \cdot 300$ ——— $x = \frac{1200}{3}$ ——— $x = 400$ L

Resolvemos a proporção.

Veja outro exemplo:


THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Um motociclista levou 3 horas para ir de Tamarindo a Dourada, viajando a uma velocidade média de 80 km/h.

Se ele quiser fazer o mesmo percurso em 4 horas, que velocidade média deverá desenvolver?

Vamos também resolver o problema proposto de dois modos:

1º modo:

Mais tempo, menor velocidade média para a mesma distância.

	Tempo (h)	Velocidade média (km/h)	
	3	80	
: 3	3 : 3 = 1	80 · 3 = 240	× 3
× 4	4 · 1 = 4	240 : 4 = 60	: 4

O mesmo percurso poderá ser realizado em 4 horas, a uma velocidade média de 60 km/h.

2º modo: Usando a **regra de três simples** e representando a velocidade média a ser calculada por **v**.

	Tempo (h)		**Velocidade média (km/h)**	
Aumenta	3	———	80	Diminui
	4	———	**v**	

Mais tempo; **menor** velocidade média para percorrer o mesmo espaço.

Tempo e **velocidade média**, nessa situação, são **grandezas inversamente proporcionais**.

$3 \cdot 80$ e $4 \cdot v$ são iguais ——— $3 \cdot 80 = 4 \cdot v$ ——— $v = \dfrac{240}{4}$ ——— $v = 60$ km/h

A velocidade média deverá ser de 60 km/h.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

8. Um chuveiro aberto por 36 segundos despeja cerca de 25 litros de água. Mantendo a mesma vazão, em quanto tempo esse chuveiro encheria uma banheira com capacidade de 2 400 litros? 57 min 36 s

9. Um quintal pode ser revestido com 500 ladrilhos de 225 cm² de área cada um. Quantos ladrilhos, caso não haja quebras, de 900 cm², cada um, seriam necessários para recobrir esse quintal? 125 ladrilhos.

10. Um tanque com capacidade para 15 000 litros de combustível está sendo abastecido por um caminhão-tanque com duas mangueiras iguais e com a mesma vazão. O tanque ficou cheio em 2 horas e 28 min. Se fossem 5 mangueiras, com a mesma vazão que essa, em quanto tempo o tanque ficaria cheio? 59 min 12 s

11. Um avião vai do Rio de Janeiro a Recife em 2 horas e 40 minutos, em um voo sem escalas. Em uma das viagens, ocorreu um pequeno defeito em um motor e ele fez a viagem em 3 horas e 20 minutos, à velocidade média de 540 quilômetros por hora. Qual é a velocidade média com que ele realiza essa viagem em condições normais? 675 km/h

3 Regra de três composta

Procure explorar diferentes estratégias de resolução de problemas envolvendo regra de três composta, para que os alunos possam optar pela estratégia que lhes seja mais conveniente.

Aplicação da regra de três composta

Para refletir e responder

Uma viagem de navio oferece dois roteiros.

Escolhendo o roteiro mais curto, um grupo de 5 pessoas pagou R$ 10 500,00 por 6 dias de viagem.

- Quanto pagou um grupo de 8 pessoas que escolheu o roteiro de 11 dias, sabendo que o preço da viagem por dia é o mesmo para os dois roteiros? R$ 30 800,00

Algumas situações relacionam a variação entre três ou mais grandezas. A análise e a resolução de problemas dessa natureza podem ser feitas também de várias maneiras e uma delas é por meio de uma regra, que chamamos **regra de três composta**.

Observe dois modos de resolver a situação proposta, em que estão envolvidas três grandezas: quantidade de pessoas, tempo de viagem e preço.

- **1º modo:** Aritmeticamente.

  Primeiro, procuramos saber quanto pagará 1 pessoa por 1 dia de viagem.

  O grupo de 8 pessoas pagou R$ 30 800,00 por 11 dias de viagem.

5 pessoas, por 6 dias, pagaram	10 500
1 pessoa, por 6 dias, pagou	10 500 : 5 = 2100
1 pessoa, por 1 dia, pagou	2100 : 6 = 350
8 pessoas, por 1 dia, pagaram	350 · 8 = 2800
8 pessoas, por 11 dias, pagaram	2800 · 11 = 30 800

- **2º modo:** Algebricamente.

Pessoas (número)	**Tempo (dias)**	**Preço (reais)**
5	6	10 500
8	11	**x**

Supondo que o número de dias não varie:

	Pessoas (número)	**Tempo (dias)**	**Preço (reais)**	
Aumenta	5	6	10 500	Aumenta
	8	11	**x**	

Grandezas diretamente proporcionais

Mais pessoas, mais reais.

Supondo que o número de pessoas não varie:

Pessoas (número)		**Tempo (dias)**	**Preço (reais)**	
5	Aumenta	6	10 500	Aumenta
8		11	**x**	

Grandezas diretamente proporcionais

Mais dias, mais reais.

Nessa situação, o preço é diretamente proporcional à quantidade de pessoas e diretamente proporcional ao tempo de viagem. Portanto, a razão $\frac{10\,500}{x}$ é igual ao produto da razão $\frac{5}{8}$ pela razão $\frac{6}{11}$.

$$\frac{10\,500}{x} = \frac{5}{8} \cdot \frac{6}{11} \longrightarrow x = \frac{10\,500 \cdot 8 \cdot 11}{5 \cdot 6} \longrightarrow \mathbf{x = R\$\ 30\,800{,}00}$$

Na resolução algébrica, utilizamos o que chamamos de **regra de três composta**.

Acompanhe a resolução de mais dois exemplos:

- Estima-se que 20 pintores, trabalhando 6 horas por dia, pintem um edifício em 4 dias. Nas mesmas condições, quantos dias seriam necessários para que 6 pintores, trabalhando 8 horas por dia, pintassem o mesmo edifício?

Este problema envolve as grandezas: **quantidade** de pintores, **tempo** de trabalho por dia e **tempo de duração** da obra. A variação de uma dessas grandezas provoca a variação das demais. Vamos resolver este problema de dois modos.

- **1º modo:** Aritmeticamente.

Primeiro procuramos saber em quantos dias 1 pintor, trabalhando 1 hora por dia, faria o trabalho.

20 pintores	trabalhando	**6** h/dia	pintam em	**4** dias
1 pintor	trabalhando	6 h/dia	pinta em	$4 \cdot 20 = 80$ dias
1 pintor	trabalhando	1 h/dia	pinta em	$80 \cdot 6 =$ **480 dias**
6 pintores	trabalhando	1 h/dia	pintam em	$480 : 6 = 80$ dias
6 pintores	trabalhando	8 h/dia	pintam em	$80 : 8 =$ **10 dias**

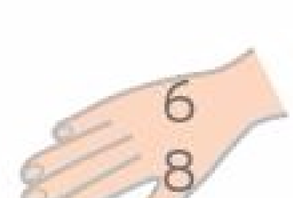
Para 6 pintores pintarem o mesmo edifício, trabalhando 8 horas por dia, serão necessários 10 dias.

- **2º modo:** Utilizando a regra de três composta.

Pintores (número)	Tempo (horas por dia)	Tempo de duração da obra (dias)
20	6	4
6	8	**x**

Supondo que o número de horas por dia não varie:

Pintores (número)	Tempo (horas por dia)	Tempo de duração da obra (dias)
20	6	4
6	8	**x**



Diminui

Aumenta

Grandezas inversamente proporcionais

Menos pintores, **mais** tempo.

Supondo que a quantidade de pintores não varie:

Pintores (número)	Tempo (horas por dia)	Tempo de duração da obra (dias)
20	6	4
6	8	**x**

Aumenta — Diminui

Grandezas inversamente proporcionais

Mais tempo, **menos** dias.

Nessa situação, o tempo de duração da obra é inversamente proporcional ao número de pintores e ao tempo de trabalho por dia.

O produto $20 \cdot 6 \cdot 4$ é igual ao produto $6 \cdot 8 \cdot x$.

Portanto, $20 \cdot 6 \cdot 4 = 6 \cdot 8 \cdot x$ ——— $x = \dfrac{20 \cdot 6 \cdot 4}{6 \cdot 8}$ ——— $\mathbf{x = 10}$

- Paulo é representante de uma loja de utilidades domésticas. Ele costuma percorrer 1260 km em 5 dias, viajando 6 horas por dia. Em quantos dias ele percorrerá 2 520 km, viajando 4 horas por dia?


THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Vamos também resolver o problema de dois modos:

- **1º modo:** Aritmeticamente.

Vamos primeiro descobrir quanto tempo (fração do dia) Paulo gasta para percorrer 1 km, viajando 1 h/dia.

Distância (km)	Tempo (horas por dia)	Tempo (dias)
1 260	6	5
1	6	$5 : 1260 = \dfrac{1}{252}$ do dia
1	1	$\dfrac{1}{252} \cdot 6 = \dfrac{1}{42}$ do dia ← Tempo que Paulo gasta para percorrer 1 km, viajando 1 h/dia.
2 520	1	$\dfrac{1}{42} \cdot 2520 = 60$ dias
2 520	4	$60 : 4 =$ **15** dias

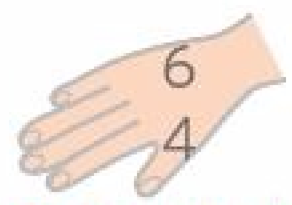
Paulo levará 15 dias para percorrer 2 520 km, viajando 4 horas por dia.

- **2º modo:** Utilizando a regra de três composta.

Distância (km)	Tempo (horas por dia)	Tempo (dias)
1260	6	5
2520	4	**x**

Supondo que o número de horas por dia não varie:

	Distância (km)	Tempo (horas por dia)	Tempo (dias)	
Aumenta	1260	6	5	Aumenta
	2520	4	**x**	



Grandezas diretamente proporcionais

Mais quilômetros, **mais** tempo.

Supondo que a distância não varie:

Distância (km)		Tempo (horas por dia)	Tempo (dias)	
1260	Diminui	6	5	Aumenta
2520		4	**x**	

Grandezas inversamente proporcionais

Menos horas por dia, **mais** dias.

Nessa situação, o tempo em dias é diretamente proporcional à distância e inversamente proporcional ao tempo de horas por dia; portanto, a razão $\frac{5}{x}$ é igual ao produto da razão $\frac{1260}{2520}$ pelo inverso da razão $\frac{6}{4}$, que é $\frac{4}{6}$.

Portanto, $\frac{5}{x} = \frac{1260}{2520} \cdot \frac{4}{6}$ ——— $x = \frac{5 \cdot 2520 \cdot 6}{1260 \cdot 4}$ ——— $\mathbf{x = 15}$ **dias**

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

12. Quatro trabalhadores colhem, em média, 200 caixas de laranjas em 5 dias, trabalhando em um certo ritmo. Quantas caixas de laranjas iguais a essas serão colhidas em 3 dias, por 6 trabalhadores, no mesmo ritmo de colheita? 180 caixas.

13. Uma viagem entre duas cidades foi feita de carro, em 4 dias, a uma velocidade média de 75 quilômetros por hora, viajando-se 9 horas por dia. Viajando a 90 quilômetros por hora, durante 5 horas por dia, em quantos dias seria feita a viagem entre essas duas cidades? 6 dias.

14. Cláudia tem em uma confecção 36 funcionárias que produzem em média 5400 camisetas por dia, trabalhando 6 horas. O verão trouxe novidades e muitas encomendas, e a fábrica passou a ter 96 funcionárias, produzindo 21600 camisetas por dia. Quantas horas por dia elas passaram a trabalhar? 9 h por dia.

15. A Pousada Primavera cobra R$ 2400,00 para hospedar 4 pessoas por 5 dias. Quanto cobrará de 3 pessoas para hospedá-las por uma semana? R$ 2520,00.

16. Três torneiras com vazões iguais enchem um tanque de 5000 L de capacidade em 10 horas. Fechando uma das torneiras, em quanto tempo as outras despejarão 3000 L nesse tanque? 9 horas.

17. Uma fábrica produz 5400 m de tecido de 90 cm de largura em 50 minutos, usando certa quantidade de fio. Quantos metros de tecido de 1 metro e 20 centímetros de largura seriam produzidos em 25 minutos com o mesmo tipo de fio? 2025 m.

Investigue e explique

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega e observem a ilustração ao lado.

- Qual será a altura do garoto que está parado diante da porta? Façam uma estimativa.
- Agora, tentem chegar a um resultado mais próximo:
  a) Pesquisem a altura de várias casas de dois andares. Escolham uma delas.
  b) Meçam a altura da casa de dois andares da figura dada.
  c) Que escala foi obtida?
  d) Meçam a altura do garoto da figura e calculem sua altura real, de acordo com a escala obtida.

Respostas pessoais.

Exercícios complementares

FAÇA NO CADERNO

18. Um dos pneus do carro de Paulo está com problema de vazamento. Ele perde 2,7 p.s.i. (no Brasil falamos "libras") de pressão de ar a cada 36 horas. Quantas p.s.i. de pressão de ar ele perderá em 5 dias? 9 p.s.i.

19. Para asfaltar 345 km de estrada, estima-se que uma equipe de 16 operários leve 18 dias, trabalhando em um certo ritmo. Se forem contratados mais 8 operários que trabalhem nesse mesmo ritmo, em quantos dias a nova equipe asfaltará o mesmo trecho de estrada? 12 dias.

20. Mariana costuma digitar 24 linhas em 4 minutos. Ela digitou um relatório em 1 hora e 15 minutos e imprimiu o texto em páginas de 18 linhas cada um. Quantas páginas tem o relatório? 25 páginas.

21. Duas torneiras abertas, com a mesma vazão, enchem um barril de vinho em 2 horas e 15 minutos. Em quanto tempo esse barril de vinho ficará cheio se forem abertas 3 torneiras com a mesma vazão das anteriores? 1 h 30 min.

22. Rita tem um canil com 25 cães que consomem, em média, 50 quilogramas de ração durante 16 dias. Depois de algum tempo, havia 80 cães e 120 quilogramas de ração em seu canil. Mantendo o consumo médio de ração, quanto tempo ela poderá alimentar esses cães com a ração que tem? 12 dias.

23. Em uma montadora de carros, 48 metalúrgicos trabalham 6 horas por dia e montam 24 carros. Certa época, as vendas de carro recuaram, e o pátio da montadora ficou lotado.

a) Mostre uma opção para reduzir a quantidade de carros produzida por dia.
Resposta possível: 15 metalúrgicos, trabalhando 4 horas por dia.

b) Quantos carros serão produzidos na opção escolhida? Resposta possível: Serão produzidos 5 carros.

24. A Terra realiza sua órbita, ao redor do Sol, em 365 dias e 6 horas, o que corresponde a cerca de 1 ano. A esse movimento damos o nome de translação.

a) A Terra realiza sua órbita a uma velocidade média de 30 quilômetros por segundo no seu movimento de translação. Quantos quilômetros tem, aproximadamente, a órbita terrestre? 946 728 000 km.

b) Se em certo dia, por alguma razão, ela passasse a uma velocidade média de 45 quilômetros por segundo, qual seria a duração do ano terrestre? (Observação: Suponha que 1 dia, que corresponde ao movimento de rotação, continue com 24 horas.) 243 dias e 12 horas.

4 Divisão proporcional

Divisão em partes diretamente proporcionais

Para refletir e responder

Rubens e Sônia investiram R$ 240 000,00 na montagem de uma lanchonete.

FOTOGRAFIAS: THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Eles decidiram que o investimento seria diretamente proporcional aos números 3 e 5, nessa ordem, para Rubens e Sônia.

Rubens investiu R$ 90 000,00 e Sônia, R$ 150 000,00. Proponha aplicações de divisão proporcional a situações do cotidiano. Esse tipo de divisão é novo para os alunos, pois até esse momento eles só aprenderam divisão em partes iguais.

- Que quantia cada um investiu nessa sociedade?

Fazer uma **divisão proporcional**, como o próprio nome indica, é repartir algo mantendo uma proporcionalidade direta ou inversa entre as partes. O tipo de proporcionalidade é definido pela situação-problema que foi proposta.

Na situação acima, por exemplo, as grandezas envolvidas são diretamente proporcionais.

Para resolvê-la, vamos indicar a quantia que cada um deles investiu por uma letra e utilizar um sistema de equações.

r ——— quantia investida por Rubens

s ——— quantia investida por Sônia

A soma é 240 000.

$$r + s = 240\,000$$

As quantias **r** e **s** são diretamente proporcionais a 3 e 5: $\frac{r}{3} = \frac{s}{5}$

$$\begin{cases} \frac{r}{3} = \frac{s}{5} \\ r + s = 240\,000 \end{cases}$$

Sistema de duas equações e duas variáveis.

Vamos resolver o sistema pelo método da comparação.

$\frac{r}{3} = \frac{s}{5}$ ——— $5 \cdot r = 3 \cdot s$ ——— $r = \frac{3 \cdot s}{5}$

$r + s = 240\,000$ ——— $r = 240\,000 - s$

Igualando as duas expressões obtidas para **r**, temos:

$$\frac{3\cdot s}{5} = 240\,000 - s \;\text{———}\; \frac{3\cdot s}{5} = \frac{5\cdot 240\,000}{5} - \frac{5\cdot s}{5}$$

$$3\cdot s = 1\,200\,000 - 5\cdot s$$

$$3\cdot s + 5\cdot s = 1\,200\,000 \;\text{———}\; 8\cdot s = 1\,200\,000 \;\text{———}\; s = 150\,000$$

Substituindo **s** por 150 000...

$$r + s = 240\,000 \;\text{———}\; r + 150\,000 = 240\,000 \;\text{———}\; r = 90\,000$$

Rubens investiu R$ 90 000,00 e Sônia, R$ 150 000,00.

Outro exemplo:

Vovô Carlos distribuiu R$ 720,00 aos três netos.

As quantias eram diretamente proporcionais às idades de cada um.

Qual foi a quantia que cada um recebeu?

VAGNER DE FARIAS

Podemos resolver o problema indicando a quantia que cada um recebeu com uma letra e usando um sistema de equações. Observe:

x — quantia do neto mais velho **y** — quantia da neta **z** — quantia do neto mais novo

x, **y** e **z** são diretamente proporcionais a **10**, **8** e **6**.

$$\begin{cases} \dfrac{x}{10} = \dfrac{y}{8} = \dfrac{z}{6} \\ x + y + z = 720 \end{cases}$$

Vamos escrever expressões para **y** e **z** em função de **x**:

$$\frac{x}{10} = \frac{y}{8} \quad 10\cdot y, \; 8\cdot x \quad 10\cdot y = 8\cdot x \;\text{——}\; y = \frac{8\cdot x}{10} \;\text{——}\; y = \frac{4\cdot x}{5}$$

$$\frac{x}{10} = \frac{z}{6} \quad 10\cdot z, \; 6\cdot x \quad 10\cdot z = 6\cdot x \;\text{——}\; z = \frac{6\cdot x}{10} \;\text{——}\; z = \frac{3\cdot x}{5}$$

Substituímos **y** e **z** pelas expressões acima na equação **x + y + z = 720**:

$$x + y + z = 720 \;\text{———}\; x + \frac{4\cdot x}{5} + \frac{3\cdot x}{5} = 720 \;\text{———}\; \frac{5\cdot x}{5} + \frac{4\cdot x}{5} + \frac{3\cdot x}{5} = \frac{5\cdot 720}{5}$$

$$5\cdot x + 4\cdot x + 3\cdot x = 3\,600 \;\text{———}\; 12\cdot x = 3\,600 \;\text{———}\; x = \frac{3\,600}{12} \;\text{———}\; \mathbf{x = 300}$$

Calculamos os valores de **y** e **z** para x = 300:

$$y = \frac{4\cdot x}{5} = \frac{4\cdot {}^{60}\cancel{300}}{\cancel{5}_1} = 4\cdot 60 \;\text{——}\; \mathbf{y = 240}$$

$$z = \frac{3\cdot x}{5} = \frac{3\cdot {}^{60}\cancel{300}}{\cancel{5}_1} = 3\cdot 60 \;\text{——}\; \mathbf{z = 180}$$

Portanto, o neto mais velho recebeu R$ 300,00; o mais novo, R$ 180,00; e a neta, R$ 240,00.

Divisão em partes inversamente proporcionais

Para refletir e responder

Em uma escolinha de futebol, o técnico distribuiu 28 camisetas aos três alunos que menos faltaram às aulas.

Elas foram distribuídas em quantidades inversamente proporcionais ao número de faltas de cada aluno. Pedro, com 5 faltas, Juca, com 6, e Beto, com 10, foram os premiados.

Pedro: 12 camisetas; Juca: 10 camisetas; Beto: 6 camisetas.

- Quantas camisetas cada um ganhou?

Vamos indicar a quantidade de camisetas que cada um ganhou com uma letra e resolver o problema por meio de um sistema de equações:

p — quantidade de camisetas de Pedro

j — quantidade de camisetas de Juca

b — quantidade de camisetas de Beto

A soma é 28.

$$p + j + b = 28$$

p, **j** e **b** são inversamente proporcionais a 5, 6 e 10. Ou seja, $5 \cdot p = 6 \cdot j = 10 \cdot b$

$$\begin{cases} p + j + b = 28 \\ 5 \cdot p = 6 \cdot j = 10 \cdot b \end{cases}$$

FOTOGRAFIAS: THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Vamos relacionar **p** e **j**, separadamente, com **b**.

$$5 \cdot p = 6 \cdot j = 10 \cdot b$$

$$\rightarrow 5 \cdot p = 10 \cdot b \text{ — } p = \frac{10 \cdot b}{5} \text{ — } \boxed{p = 2 \cdot b}$$

$$\rightarrow 6 \cdot j = 10 \cdot b \text{ — } j = \frac{10 \cdot b}{6} \text{ — } \boxed{j = \frac{5 \cdot b}{3}}$$

Substituímos **p** por $2 \cdot b$ e **j** por $\frac{5 \cdot b}{3}$ em $p + j + b = 28$.

$$2 \cdot b + \frac{5 \cdot b}{3} + b = 28$$

$$\frac{3 \cdot 2 \cdot b}{3} + \frac{1 \cdot 5 \cdot b}{3} + \frac{3 \cdot b}{3} = \frac{3 \cdot 28}{3}$$

$$6 \cdot b + 5 \cdot b + 3 \cdot b = 84 \text{ — } 14 \cdot b = 84 \text{ — } \mathbf{b = 6}$$

Substituímos **b** por 6 em $p = 2 \cdot b$ $\rightarrow$ $p = 2 \cdot 6$ — $\mathbf{p = 12}$

Substituímos **b** por 6 em $j = \frac{5 \cdot b}{3}$ $\rightarrow$ $j = \frac{5 \cdot 6}{3}$ — $\mathbf{j = 10}$

Portanto, Pedro ganhou 12 camisetas, Juca, 10, e Beto, 6.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

25. Adriana e Márcio vão se casar e combinaram que o aluguel do apartamento onde vão morar será dividido em partes diretamente proporcionais ao salário de cada um. O valor do aluguel é R$ 1 400,00. Se o salário de Adriana corresponde a 5 salários mínimos e o de Márcio, a 9 salários mínimos, quanto cada um pagará?
Adriana: R$ 500,00; Márcio: R$ 900,00.

26. As medidas da largura e do comprimento de um retângulo são diretamente proporcionais a 5 e 8, e seu perímetro é 78 cm.

a) Quais são as dimensões desse retângulo, se a largura é menor que o comprimento?
Largura: 15 cm e comprimento: 24 cm.

b) Qual é a área desse retângulo? 360 cm^2

27. No Natal, Pedro deu um prêmio de R$ 8 400,00 para seus dois vendedores, dividindo-o em partes inversamente proporcionais ao número de faltas que cada um teve durante o ano. Se Antônio faltou três dias e Marcelo, quatro, quanto cada um recebeu? Antônio: R$ 4 800,00; Marcelo: R$ 3 600,00

28. João quer repartir R$ 900,00 entre seus três netos em partes diretamente proporcionais à idade de cada um. Juca tem 7 anos, Marta tem 10 anos e Daniel tem 13 anos. Que quantia caberá a cada um? Juca: R$ 210,00; Marta: R$ 300,00 e Daniel: R$ 390,00.

29. Leila e Jorge receberam R$ 2 800,00 por um trabalho extra e combinaram que o total seria dividido em partes inversamente proporcionais ao salário de cada um. Se Leila ganha 6 salários mínimos e Jorge 8 salários mínimos, quanto coube a cada um? Leila: R$ 1 600,00; Jorge: R$ 1 200,00.

30. Em um terreno que possui, Manuel planeja formar um pomar com 1 800 m^2 e construir uma casa e uma piscina. O pomar ocupará a parte maior do terreno e a piscina, a menor. As áreas das partes planejadas são proporcionais a 2, 4 e 6. Qual é a área total do terreno de Manuel?
3 600 m^2.

31. Três pintores cobraram R$ 5 200,00 pela pintura de uma casa e combinaram que receberiam o valor em partes diretamente proporcionais ao número de dias trabalhados. O primeiro trabalhou 15 dias, o segundo, 12 dias, e o terceiro, 25 dias. Quanto recebeu cada um?


HÉLIO SENATORE

Primeiro: R$ 1 500,00; segundo: R$ 1 200,00 e terceiro: R$ 2 500,00.

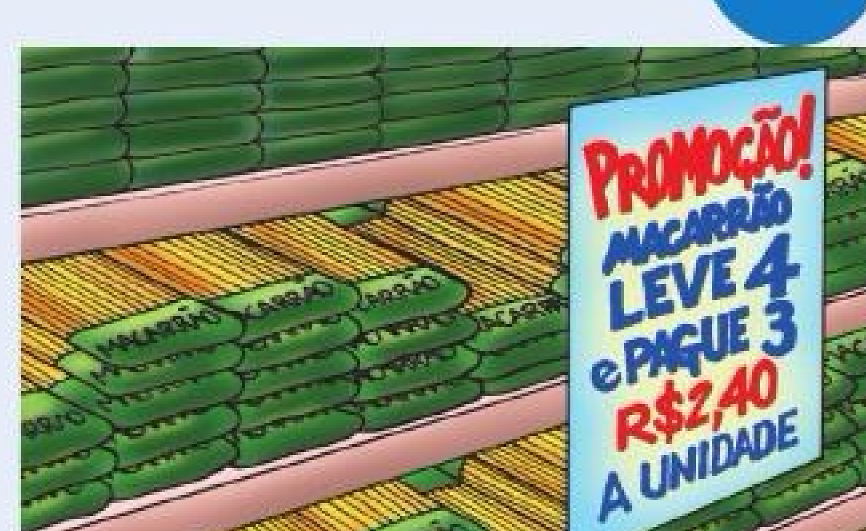
32. Regina, Marcelo e Márcio são corretores. A comissão de R$ 8 600,00 que ganharam na venda de um imóvel foi dividida em partes inversamente proporcionais ao tempo que estão na empresa. Regina está na empresa há 14 anos, Marcelo, há 12 anos, e Márcio, há 20 anos. Quanto recebeu cada um?
Regina: R$ 3 000,00; Marcelo: R$ 3 500,00 e Márcio: R$ 2 100,00

33. Numa imobiliária, os corretores recebem comissões diretamente proporcionais à quantidade de apartamentos que vendem. Se em um mês o gerente pagou um total de R$ 108 000,00 a três funcionários que venderam 1, 2 e 3 apartamentos, respectivamente, quanto ganhou o que vendeu mais apartamentos? R$ 54 000,00.

Troquem ideias e resolvam

FAÇA NO CADERNO

Em um supermercado, estão sendo anunciadas várias ofertas especiais. Uma delas é a de macarrão.



FRANCISCO VILACHÃ

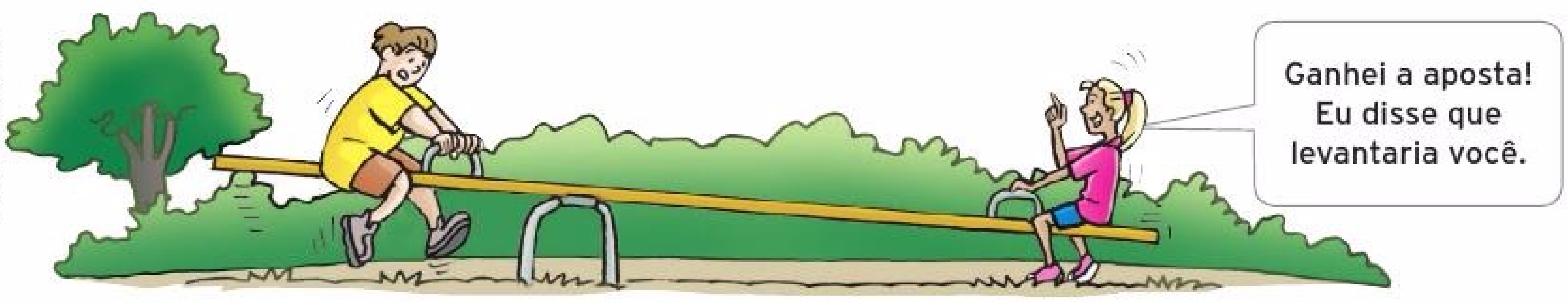
- Laura aproveitou a promoção anunciada. Quanto ela pagou por 4 pacotes de macarrão? E por 6 pacotes?
R$ 7,20; R$ 12,00.
- O número de pacotes é de alguma forma proporcional ao preço que deve ser pago por eles? Não.

Leitura

Proporcionalidade inversa

Proponha aos alunos a realização deste experimento. Com isso, eles estarão concretizando uma verificação da proporcionalidade inversa.

FRANCISCO VILACHÃ



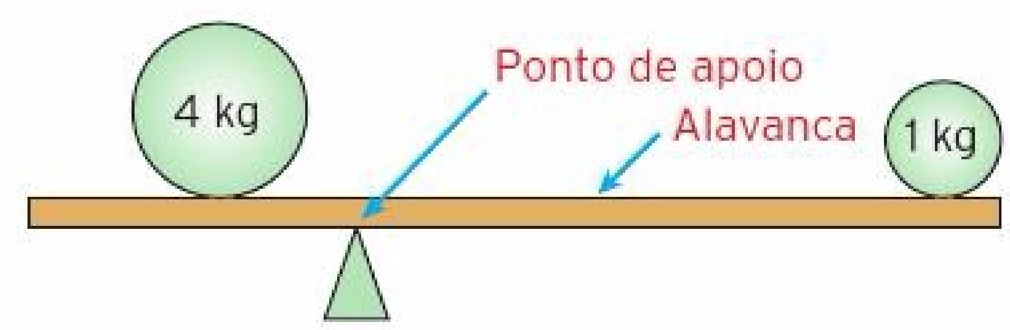
E então, você está surpreso?

Pois saiba que, no século III a.C., **Arquimedes** já dizia:

— Dê-me um ponto de apoio e eu levantarei o mundo!

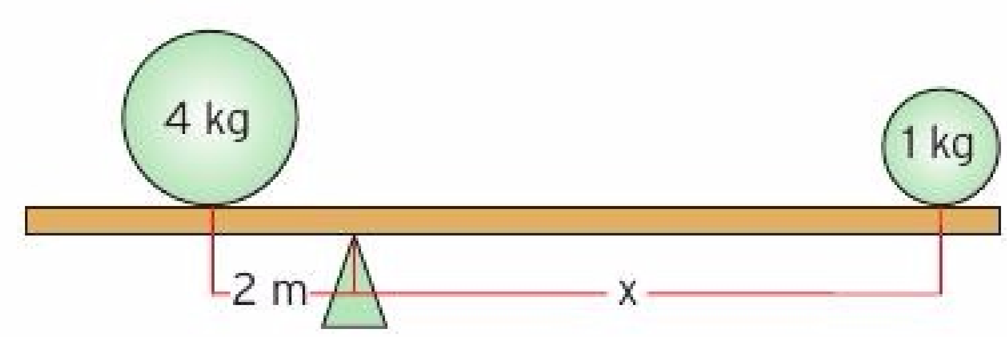
Essa é a **propriedade das alavancas**, que Arquimedes descobriu. Você já deve ter utilizado essa propriedade, mesmo sem conhecê-la.

A **alavanca** pode ser um pedaço de madeira, uma barra de ferro ou uma tábua, por exemplo a das gangorras. O **ponto de apoio** é um objeto qualquer.



Quanto mais distante do ponto de apoio for colocado um objeto de certa massa, maior será a massa do objeto que ele equilibrará na outra ponta.

Por exemplo, se colocarmos uma esfera de 4 kg a 2 m do ponto de apoio, a que distância desse ponto devemos colocar outra esfera de 1 kg para que a gangorra fique equilibrada?

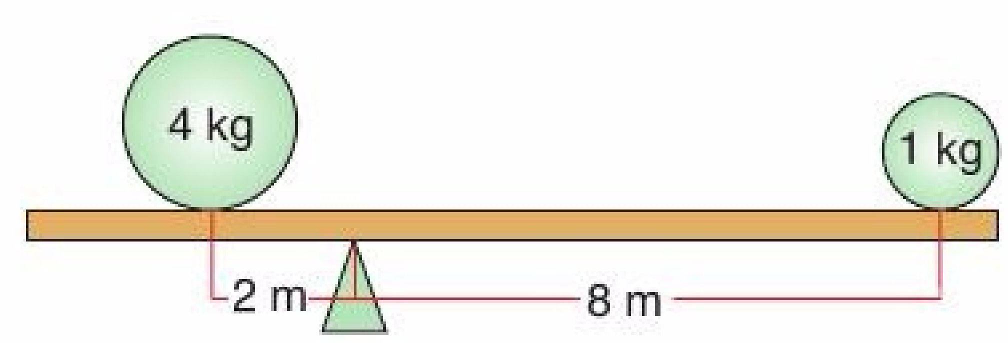


Menor massa, **maior** distância.

Massa (kg)	Distância (m)
4	2
1	**x**

Diminui — Aumenta

Grandezas inversamente proporcionais

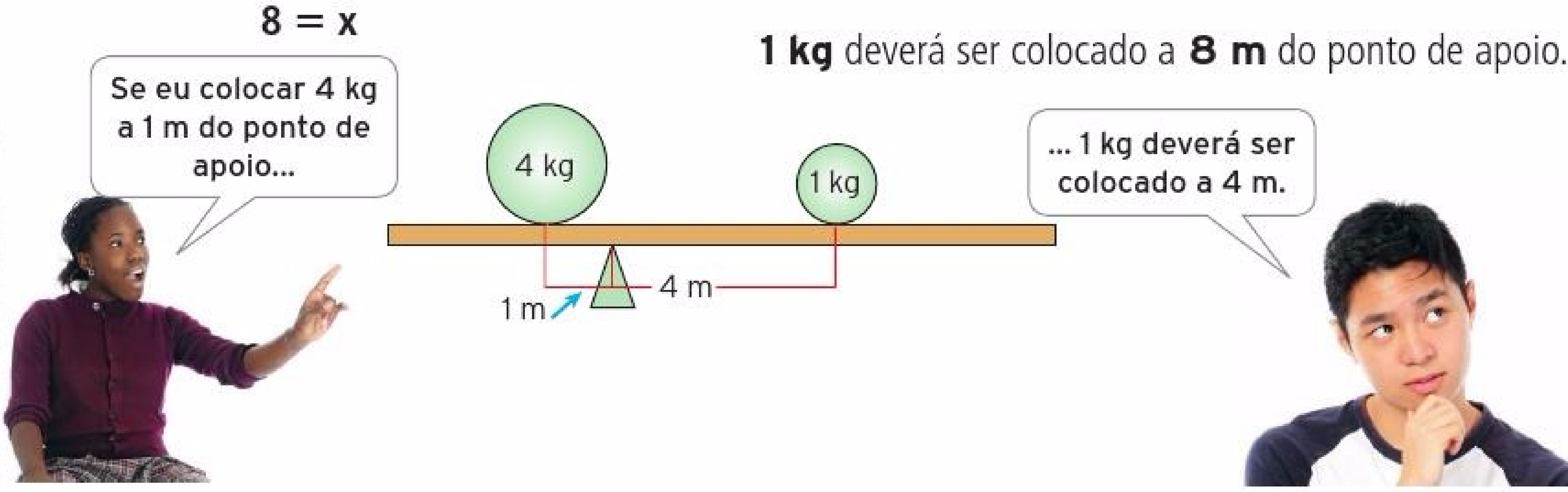


$$4 \cdot 2 = 1 \cdot x$$

$$\mathbf{8 = x}$$

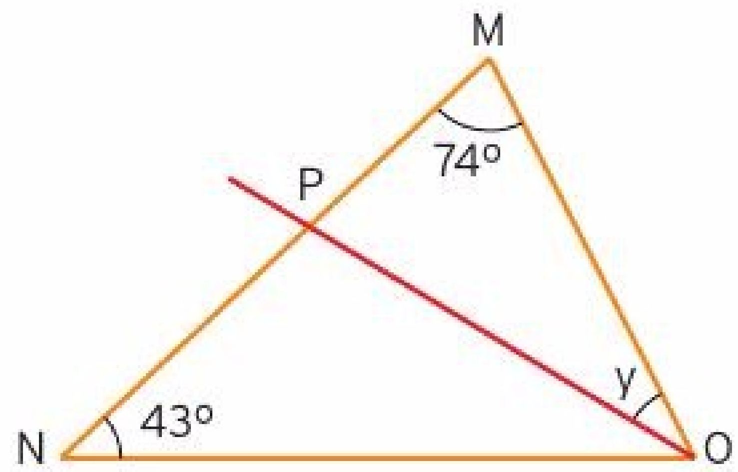
1 kg deverá ser colocado a **8 m** do ponto de apoio.

FOTOGRAFIAS: THINKSTOCK/GETTY IMAGES



Revisão cumulativa e testes

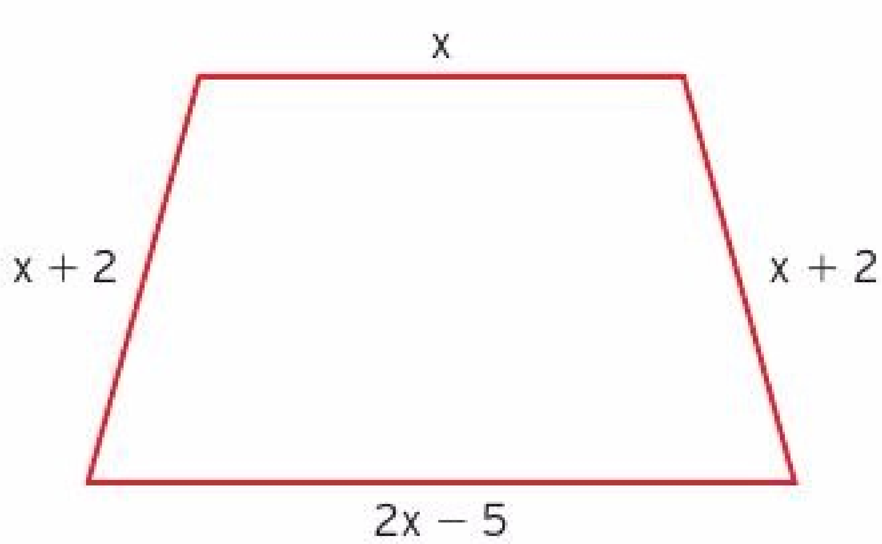
1. No triângulo MNO, **y** representa a medida de $P\hat{O}M$ e $\overrightarrow{OP}$ é a bissetriz do ângulo $N\hat{O}M$.



- Qual é o valor de **y**? 31° 30′

2. As abscissas dos pontos M e N são respectivamente −5 e 12. Qual é a abscissa do ponto médio do segmento de reta $\overline{MN}$? 3,5

3. Neste trapézio, a letra **x** representa uma medida em centímetros. O perímetro desse trapézio é 49 cm. Qual é o valor de **x**? 10



4. Um granjeiro levou para a feira uma quantidade de ovos. Vendeu $\frac{1}{3}$ dos que tinha e $\frac{2}{3}$ dos que restaram se quebraram. Mesmo assim, ele ainda ficou com 120 ovos. Quantos ovos o granjeiro levou para a feira? 540 ovos.

5. O volume de uma bola feita de madeira maciça é 0,5 cm^3. Qual é a massa dessa bola, sabendo-se que a densidade da madeira é 0,93 g/cm^3? 0,465 g

6. Uma herança de R$ 276 000,00 foi repartida em partes diretamente proporcionais às idades de 3 irmãos que possuem, respectivamente, 40, 46 e 52 anos.

a) Quanto recebeu o irmão mais novo? R$ 80 000,00

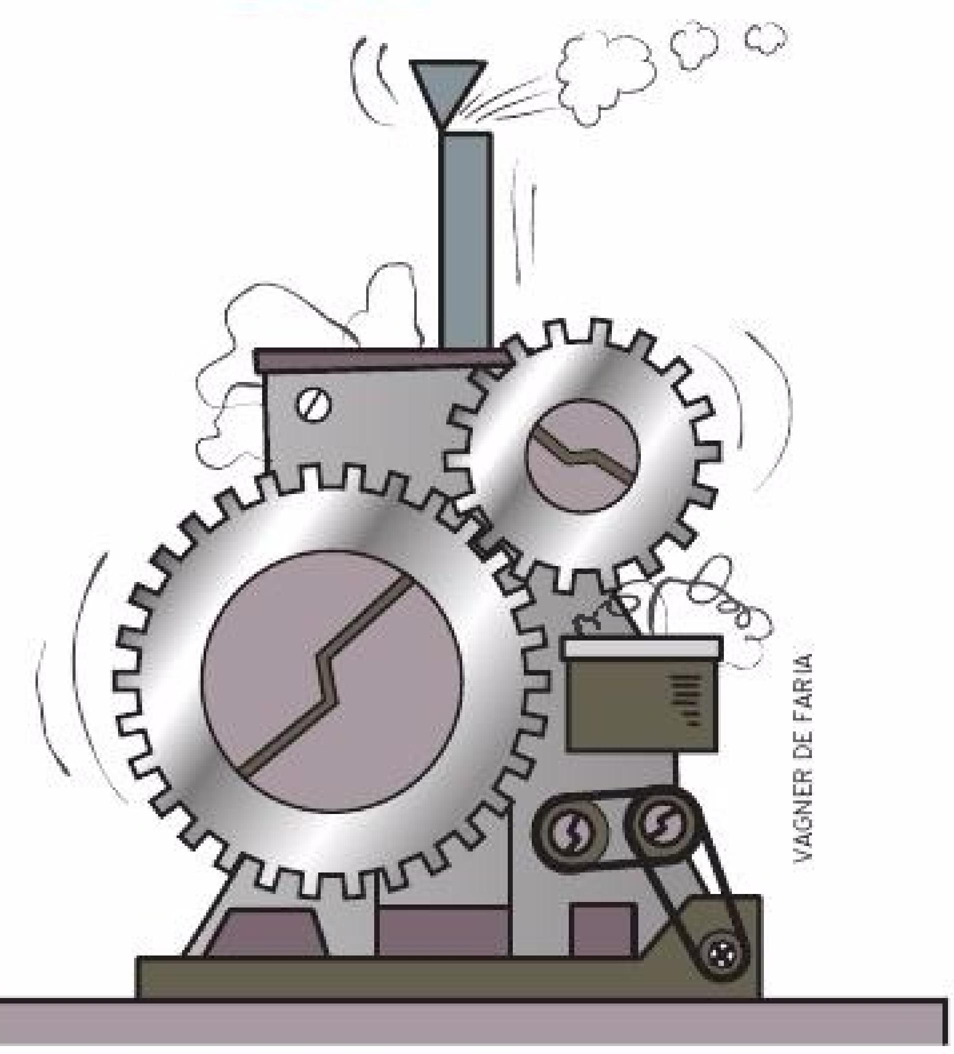
b) Quanto coube ao irmão mais velho? R$ 104 000,00

7. No campeonato interclasses de vôlei, o 7º ano C disputou 12 partidas e venceu 8. Qual o porcentual de vitórias obtidas pelo 7º ano C? 66,67%

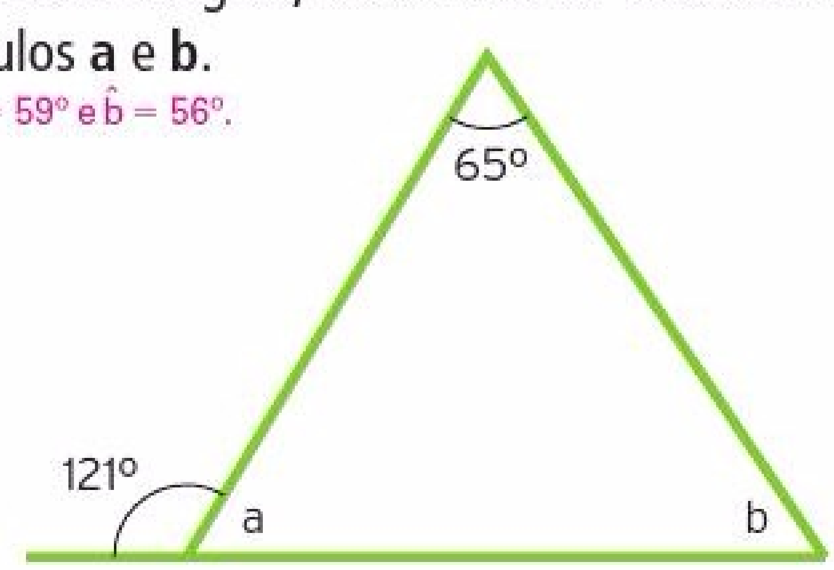
8. Antônio, Severino e João são frentistas de um posto de gasolina. Eles dividiram R$ 630,00, que ganharam no final de um mês como gorjetas, em partes inversamente proporcionais às faltas que tiveram no mês. Antônio faltou 1 dia, Severino, 3 dias, e João, 6 dias. Qual a quantia que coube a cada um? Antônio: R$ 420,00; Severino: R$ 140,00 e João: R$ 70,00.

9. Maria utiliza 2 dúzias de ovos para fazer 8 caixas de quindins, com 6 quindins iguais em cada caixa. Qual a maior quantidade de caixas de quindins iguais a essas, com 12 quindins em cada caixa, que será obtida com 3 dúzias de ovos? 6 caixas.

10. Uma máquina tem duas rodas dentadas que se engrenam. A maior tem 30 dentes e a menor, 18. Quantas voltas dá a menor enquanto a maior dá 150 voltas? 250 voltas.

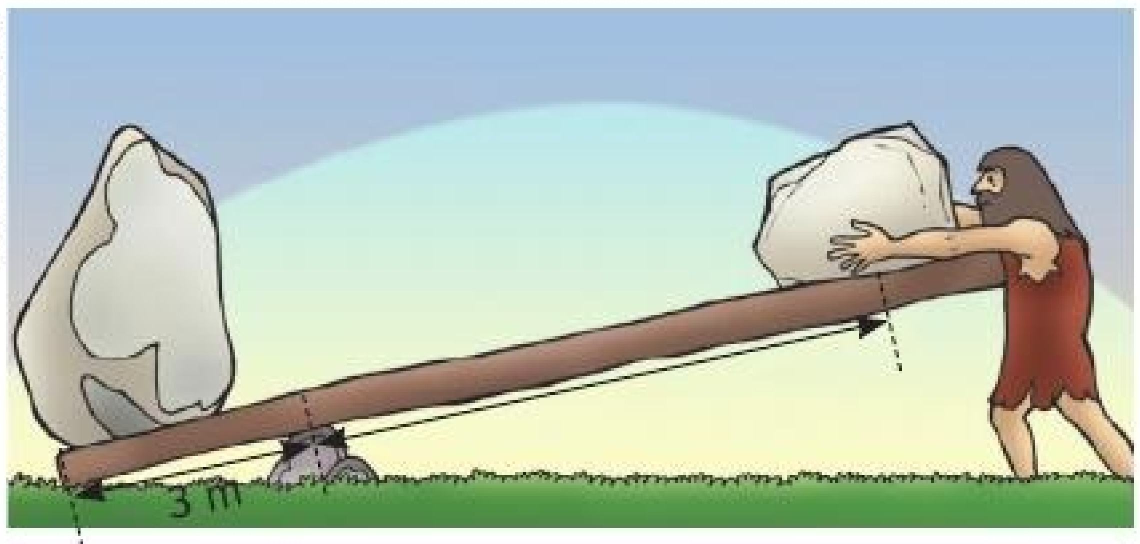


11. Neste triângulo, determine as medidas dos ângulos **a** e **b**.
$\hat{a} = 59°$ e $\hat{b} = 56°$.



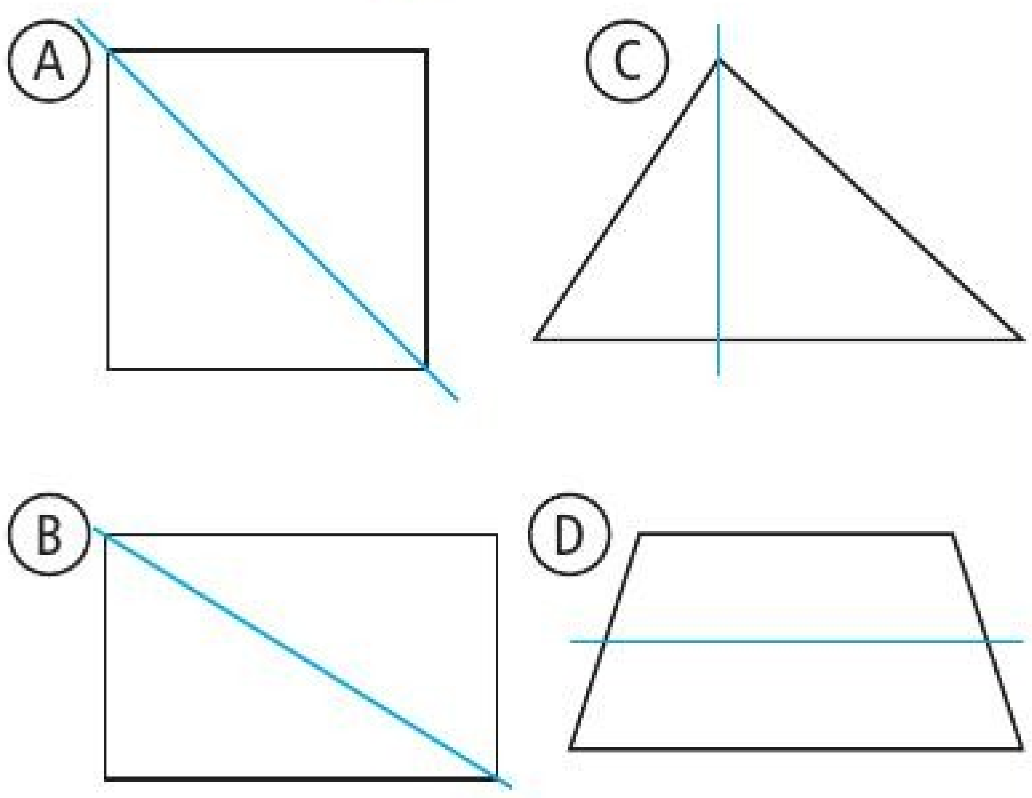
12. Na ilustração, suponha que a pedra tenha 120 kg e esteja a 3 m do ponto de apoio.

FRANCISCO VILACHÁ



- A quantos metros deverá ser colocado um objeto de 30 kg para levantar essa pedra? 12 m

13. Nestas figuras, aquela que tem um eixo de simetria destacado é: A



14. Um aluno obteve estas notas mensais de Matemática durante o ano:

5,0; 6,5; 4,5; 7,0; 6,0; 5,5; 8,0; 4,5; 7,0.

A sua média foi: c

a) 5
b) 5,5
c) 6
d) 7

15. Uma empresa tem três sócios. A um dos sócios coube a metade do lucro anual, o outro recebeu um terço desse lucro mais R$ 240 000,00 e o terceiro recebeu R$ 760 000,00. O lucro da empresa foi: d

a) R$ 2 000 000,00
b) R$ 4 000 000,00
c) R$ 5 000 000,00
d) R$ 6 000 000,00

16. Uma fábrica produz um lote de peças em 14 semanas utilizando 9 máquinas, que trabalham num determinado ritmo. Quantas máquinas, com o mesmo ritmo, serão necessárias para produzir o lote de peças em 6 semanas? c

a) 18 máquinas.
b) 21 máquinas.
c) 27 máquinas.
d) 36 máquinas.

17. (Fundação Carlos Chagas) Oito funcionários produzem 40 bicicletas em cinco dias de trabalho. Para o mesmo período, ou seja, cinco dias de trabalho, quantas bicicletas seriam produzidas por dez funcionários? d

a) 55 b) 57 c) 60 d) 50

18. Um prêmio acumulado da Megassena pagará R$ 28 000 000,00. b

Nessa situação, a sentença verdadeira é:

a) Duplicando o número de acertadores, duplica a quantia que caberá a cada um.
b) A quantia que caberá a cada um é inversamente proporcional ao número de acertadores.
c) A quantia que caberá a cada um é diretamente proporcional ao número de acertadores.
d) A quantia que caberá a cada um é sempre a mesma, não importando o número de acertadores.

19. (Saresp) Observe no gráfico o resultado de uma pesquisa realizada pela professora da escola "Saber é Bom" com os seus alunos. d

Se cada criança escolheu apenas uma atividade preferida, quantas foram entrevistadas nessa pesquisa?

a) 30 b) 75 c) 80 d) 90

UNIDADE 11

Matemática do comércio e das finanças

Porcentagem e juro simples estão presentes nesta introdução ao estudo de Matemática Comercial e Matemática Financeira. Além desses temas, o conceito de média ponderada será explorado nesta unidade.

Nesta unidade...

1. Porcentagem no comércio
2. Juro simples
3. Estatística e probabilidade

MATTHEW MICAH WRIGHT/GETTY IMAGES

Cena de pregão eletrônico da Bovespa (Bolsa de Valores de São Paulo), única bolsa de valores, mercadorias e futuros em operação no Brasil. Os pregões presenciais foram extintos e substituídos pela oferta eletrônica de ações.

Observe estas cenas, em que um amigo pede um favor a uma amiga.

Termos como **juro** e **porcentagem** fazem parte do vocabulário cotidiano das relações comerciais de instituições financeiras, bolsas de valores e de grande parte dos cidadãos. No mundo dos negócios, esses termos são utilizados quando se fala em lucro, abatimento, desconto, prejuízo, comissão, impostos, empréstimos e outros assuntos.

Por isso, eles estão presentes na mídia: basta abrir jornais, revistas, ligar o rádio, assistir à televisão ou acessar a internet. Daí a importância de conhecê-los para saber ler, conseguir analisar e avaliar situações sobre as quais desejamos obter informações mais detalhadas, como, por exemplo, quando ouvimos que o lucro dos grandes bancos no ano foi de 20%, a safra de grãos terá um aumento de 14%, quem economizar água terá 10% de desconto na conta, entre outras situações.

O que você já sabe?

- Qual é o símbolo utilizado para representar a expressão "por cento"? %
- Peça a alguém da sua família que descreva uma situação na qual teve de pagar algum juro. Anote em seu caderno e apresente aos colegas. Resposta pessoal.
- Você já presenciou alguma situação de compra em que recebeu um desconto? Resposta pessoal.
- Você já viu alguma propaganda na televisão em que é empregada a palavra "juro"? Conte aos colegas. Resposta pessoal.

1 Porcentagem no comércio

O que é taxa porcentual?

Inicie o tema propondo aos alunos uma pesquisa em jornais, revistas, anúncios, lojas e supermercados, solicitando-lhes que façam registros relacionados ao tema. Procure explorar o conhecimento que os alunos têm sobre porcentagem e juro.

Para refletir e responder

Em finais de estação, é comum vermos cenas como a da imagem ao lado. Nesta liquidação, está sendo dado um desconto de 15% em um terno que custa R$ 400,00.

ITSUO NAKASHIMA

- De quanto está sendo o desconto dado? Qual é o preço do terno com desconto?

R$ 60,00; R$ 340,00.

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

A razão $\frac{15}{100}$, indicada por **15%**, é chamada **taxa porcentual** ou apenas taxa.

Para calcular o desconto de 15% sobre 400, podemos fazer:

15% de $400 = 15\% \times 400 = 0{,}15 \times 400 = 60$

Preço do terno com desconto: $400 - 60 = 340$.

Outros exemplos:

Procurar explorar diferentes estratégias de resolução de problemas que envolvem porcentagens, para que os alunos possam optar pela estratégia mais apropriada.

- Pedro tem no estoque da fábrica 1 400 sandálias, quantidade que corresponde a 28% da sua produção mensal. Quantas sandálias Pedro fabrica por mês?

Podemos resolver esse problema de várias maneiras. Veja três delas.

- Utilizando a proporcionalidade:

  28% da produção mensal corresponde a 1400 sandálias;

  1% da produção mensal corresponde a 50 sandálias (1400 : 28 = 50);

  100% da produção mensal corresponde a 5000 sandálias ($100 \times 50 = 5000$).

- Usando uma equação de 1º grau com uma incógnita, **x** representa a produção mensal da fábrica:

$$\underbrace{28\%}_{\downarrow\ 0{,}28}\ \text{da}\ \underbrace{\text{produção mensal}}_{\downarrow\ x}\ \underbrace{\text{corresponde a}}_{\downarrow\ =}\ \underbrace{1400}_{\downarrow\ 1400}\ \text{sandálias.}$$

  Resolvemos a equação: $0{,}28 \cdot x = 1\,400$ —— $x = 5\,000$

- Usando uma proporção:

  $28\% = \dfrac{28}{100}$, em que 100 representa a produção mensal da fábrica:

$$\frac{28}{100} = \frac{140}{x} \text{ ——— } x = 5\,000$$

Pedro fabrica 5 000 sandálias por mês.

- A produção de café da fazenda São Jorge, em determinado ano, foi de 800 sacas.

No ano seguinte, as condições climáticas foram mais favoráveis, e a produção subiu para 1 300 sacas de café.

De quantos por cento foi o aumento da produção nesse ano em relação à do ano anterior?

Vamos resolver esse problema calculando a razão do aumento da produção em relação à produção do ano anterior:

800 sacas — produção de um ano
1300 sacas — produção do ano seguinte
500 sacas (1 300 – 800 = 500) — aumento da produção

JOÃO PRUDENTE/PULSAR IMAGENS

$$\frac{500}{800} = 0{,}625$$

Multiplicamos esse resultado por 100 e obtemos o porcentual de aumento usando o simbolo %.

$$0{,}625 \cdot 100 = 62{,}5\%$$

O aumento da produção desse ano em relação à do ano anterior foi de 62,5%.

- O *skate* anunciado em um jornal custava R$ 275,00 em uma liquidação. Três meses depois, seu preço sofreu um aumento de 18%. Quanto o *skate* passou a custar?


THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Veja dois modos de resolver o problema:

- Calculando o valor do aumento: 18% de 275 = $0{,}18 \cdot 275 = 49{,}50$.

  O preço do *skate* após o aumento passou a ser: $275{,}00 + 49{,}50 = 324{,}50$.

- Aplicando uma regra prática para calcular o novo preço após o aumento:

  novo preço: 100% do preço antigo mais 18% do preço antigo

  novo preço: 118% do preço antigo

  novo preço = $118\% \cdot 275 = 1{,}18 \cdot 275 = 324{,}50$

  O *skate* passou a custar R$ 324,50.

Multiplicamos o preço antigo por 1,18.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

1. Copie e complete:

a) 25% de 840 objetos são ■. 210 objetos.

b) 50% de R$ 12 400,00 são ■. R$ 6 200,00

c) 6% de 350 m² são ■. 21 m²

d) 7,5% de R$ 1 280,00 são ■. R$ 96,00

2. Copie esta tabela e complete-a: Respostas possíveis:

Fração ou decimal	$\frac{2}{100}$	$\frac{18}{100}$	0,5	0,854	0,06
Usando %	2%	18%	50%	85,4%	6%

3. Este círculo foi dividido em oito partes iguais. Anote apenas os números que representam a parte pintada nessa figura: b, c, e, f

a) $\frac{6}{8}$

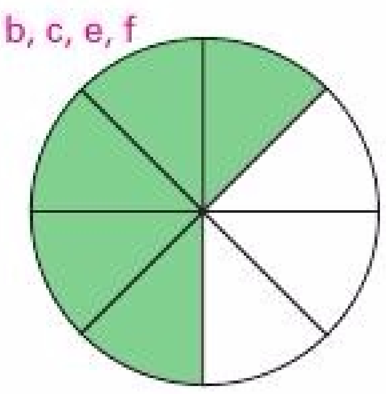
b) $\frac{5}{8}$

c) 0,625

d) $\frac{7}{8}$

e) $\frac{625}{1000}$

f) 62,5%



4. Uma frota de ônibus foi acrescida de 44 veículos. Como essa frota tinha 352 ônibus, a que porcentual da frota antiga representa esse acréscimo? 12,5%

5. Um celular de uma determinada marca passou de R$ 250,00 para R$ 270,00. Qual foi o porcentual de aumento desse celular em relação ao preço anterior? 8%

6. Célia comprou um fogão, em uma liquidação, ganhando 10% de desconto sobre seu valor. Se ela pagou R$ 540,00, qual era o preço inicial desse fogão? R$ 600,00

7. João ganhava R$ 2 400,00. Teve um aumento e passou a ganhar R$ 2 604,00. Quantos por cento de aumento ele teve? Aumento de 8,5%.

8. Na Farmácia Cura Tudo, aposentados recebem desconto de 15% sobre o preço de cada remédio. Renato, Marta e Isabel são aposentados.

a) Renato pagou R$ 51,00 por um remédio. Qual era o preço inicial desse remédio? R$ 60,00

b) Marta comprou remédios que custavam, sem desconto, R$ 23,80 e R$ 18,20. Que quantia ela obteve de desconto? Quanto ela gastou? Desconto: R$ 6,30; gasto: R$ 35,70.

c) Isabel comprou vários remédios, obtendo desconto de R$ 19,50. Calcule o preço dos remédios sem o desconto de 15%. R$ 130,00

9. Uma mercadoria que custava R$ 236,00 teve um aumento de 20%. Qual é o novo preço dessa mercadoria? R$ 283,20

10. Nos restaurantes é comum acrescentar à conta 10% do total de gastos, como taxa de serviço ou gorjeta. A conta de Renato ficou em R$ 56,00, sem a taxa de serviço. Quanto ele vai pagar se incluir a gorjeta? R$ 61,60

Investigue e explique

FAÇA NO CADERNO

Um criador começou sua criação com 212 cabeças de ovelha. Após um ano, seu rebanho havia aumentado 300%.

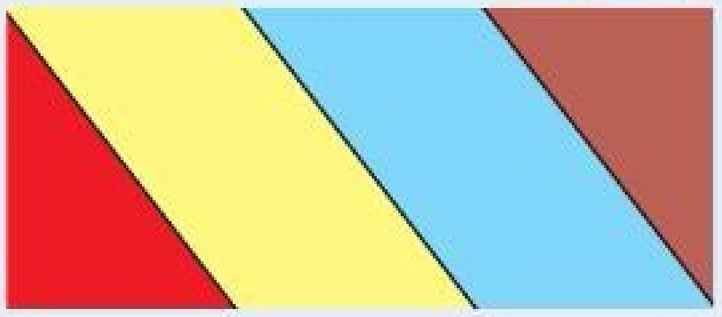
FOTOGRAFIAS: THINKSTOCK/GETTY IMAGES

- Quantas cabeças de ovelha havia em sua criação no final desse período? 848 cabeças.
- É possível determinar o total encontrado no item anterior multiplicando 212 por um número racional. Que número é esse? Explique por quê. 4; Resposta possível: Aumento de 300% significa 100% (criação inicial) + 300% (aumento) = 400% da criação inicial = $\frac{400}{100}$ da criação inicial = 4 vezes a criação inicial.
- Quantas cabeças de ovelha haveria com um aumento de 500%? 1 272 cabeças.
- Por qual número você multiplicaria o número de cabeças da criação original para saber quantas cabeças de ovelha haveria com um aumento de 500%? 6

Troquem ideias e resolvam

FAÇA NO CADERNO

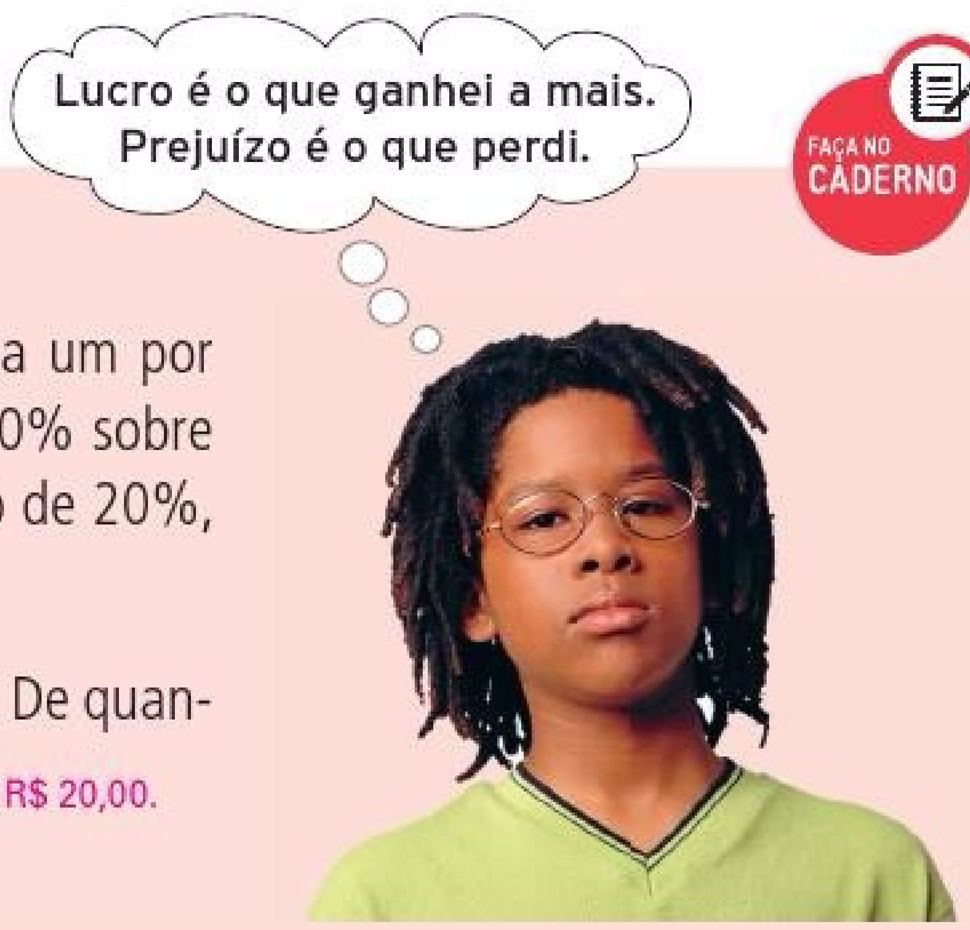
Junte-se a um colega, reflitam sobre o problema e encontrem uma solução.



- Quantos por cento da área do retângulo ocupa cada uma das partes coloridas? Vermelho: 16,67%, aproximadamente; marrom: 16,67%, aproximadamente; amarelo: 33,33%, aproximadamente; azul: 33,33%, aproximadamente.

Desafio

FAÇA NO CADERNO



Fazendo negócios

Rafael vendeu seu *skate* e sua prancha de surfe, cada um por R$ 240,00. Com a venda do *skate*, ele teve um lucro de 20% sobre o custo inicial e, com a venda da prancha, teve um prejuízo de 20%, também sobre o custo inicial.

- Ao fazer esse negócio, Rafael teve lucro ou prejuízo? De quanto foi o lucro ou o prejuízo de Rafael? Teve prejuízo de R$ 20,00.

2 Juro simples

O que é juro simples?

Explore o conceito de juro simples, propondo exercícios nos quais os alunos analisam e comparam situações de oferta e aparente oferta.

Observe o que Pedro, Célia e Lucas dizem:

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

- Se Pedro recebe juro de uma instituição financeira, é porque ele emprestou dinheiro a essa instituição. Isso significa que Pedro aplicou uma quantia nessa instituição financeira.
- Se Célia está pagando juro a uma instituição financeira, é porque ela fez um empréstimo de uma quantia em dinheiro dessa instituição financeira.
- Se Lucas está pagando juro a uma loja, é porque ele parcelou uma dívida que possui com a loja.

Essas são algumas situações que envolvem o conceito de **juro**. Ele está presente em toda situação em que há uma compensação em dinheiro pelo tempo que uma pessoa ou instituição fica com alguma quantia emprestada.

Exemplo:

Pedro aplicou R$ 18 000,00 em um banco, a uma taxa de juro simples de 15% ao ano. Após 2 anos de aplicação, ele recebeu R$ 5 400,00 de juro simples.

Um dos objetos envolvidos nessa situação é o dinheiro.

Nessa situação, encontramos alguns termos que são frequentes em Matemática financeira:

- **R$ 5 400,00** é o pagamento efetuado pelo banco a Pedro por ter "emprestado" o dinheiro dele. É o que chamamos de **juro simples**.
- **R$ 18 000,00** é o total de dinheiro aplicado por Pedro, que chamamos de **capital**.
- **15% ao ano** é o porcentual anual de aplicação, que chamamos de **taxa de juro simples anual**.
- **2 anos** é o período de aplicação, que chamamos de **tempo**.

Quando se estabelece uma taxa de juro, fixa-se também a duração de cada período de aplicação. Assim, **15% ao ano** significa **15% sobre um valor aplicado no período de um ano**.

> Chamamos de **juro simples** a quantia calculada sobre a aplicação de um capital (dinheiro) ao final de um ou mais períodos de aplicação. Nesse caso, ao final de cada período de aplicação é calculado o juro, mas ele não é incorporado ao capital, mesmo que o dinheiro continue aplicado.

Cálculo de juro simples

Para refletir e responder

Sandra aplicou R$ 2 000,00 por 3 anos a uma taxa de 10% ao ano.

- Quanto Sandra recebeu de juro simples ao final desse período?

R$ 600,00.

O juro simples que Sandra recebeu por ano corresponde a 10% de R$ 2 000,00.

capital aplicado — 2 000
tempo de aplicação — 3 anos
taxa de juro simples — 10% ao ano

juro simples referente ao período de 1 ano:

10% de 2 000 = 0,10 · 2 000 = 200

juro simples obtido em 3 anos: 3 · 200 = 600

Após 3 anos, Sandra recebeu R$ 600,00 de juro simples.

Podemos encontrar uma fórmula para calcular o juro simples. Acompanhe a resolução do problema anterior.

$$\underbrace{600}_{\text{juro}} = \underbrace{2\,000}_{\text{capital}} \cdot \underbrace{0{,}10}_{\text{taxa de juro simples (anual)}} \cdot \underbrace{3}_{\text{tempo (anos)}}$$

juro = capital · taxa de juro simples anual · tempo

Usando as letras **j** para juro, **c** para capital, **i** para taxa de juro simples anual e **t** para tempo de aplicação, temos:

$$\mathbf{j = c \cdot i \cdot t}$$

A resolução do problema anterior usando a fórmula fica assim:

A taxa porcentual pode ser escrita na forma decimal ou fracionária.

$j = 2\,000 \cdot 10\% \cdot 3$

$j = 2\,000 \cdot 0{,}10 \cdot 3$

$j = 600$

ou

$j = 2\,000 \cdot \dfrac{10}{100} \cdot 3$

$j = \cancel{2\,000}^{20} \cdot \dfrac{10}{\cancel{100}_{1}} \cdot 3 = 600$

Neste caso, **j** é o juro simples por 3 anos.

Outros exemplos:

- Célia fez um empréstimo de R$ 4 000,00 em um banco, por 9 meses, a uma taxa de 12,5% ao ano. Quanto ela pagou de juro?

tempo (t) —— 9 meses em $\underbrace{\text{12 meses}}_{\text{1 ano}}$ —— $t = \dfrac{9}{12}$

9 meses corrsepondem a $\dfrac{9}{12}$ do ano.

$j = c \cdot i \cdot t$

$j = 4\,000 \cdot 12{,}5\% \cdot \dfrac{9}{12}$

$j = \cancel{4\,000}^{40} \cdot \dfrac{12{,}5}{\cancel{100}_{1}} \cdot \dfrac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{12}_{4}}$

$j = \dfrac{\cancel{40}^{10} \cdot 12{,}5 \cdot 3}{\cancel{4}_{1}}$

$j = 10 \cdot 12{,}5 \cdot 3$

$j = 375$

O período de aplicação deve estar na mesma unidade de tempo que a taxa de juro simples.

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Célia pagou R$ 375,00 de juro.

- Renato aplicou certo capital por 2 anos, a uma taxa de juro simples de 25% ao ano, recebendo R$ 300,00 de juro simples. Calcule o **capital** aplicado por Renato.

Podemos obter a resposta usando a fórmula $\mathbf{j = c \cdot i \cdot t}$.

$j = 300$
$t = 2$
$i = 25\%$

$$300 = c \cdot 25\% \cdot 2$$

$$300 = c \cdot 0{,}25 \cdot 2$$

$$300 = c \cdot 0{,}50$$

$$c = \frac{300}{0{,}50}$$

$$\mathbf{c = 600}$$

O capital aplicado por Renato foi de R$ 600,00.

- Eduardo comprou um televisor que custa R$ 1250,00, financiado em 2 anos. O juro simples cobrado pela financeira foi de R$ 640,00. Calcule a taxa de juro simples anual fixada pela financeira.

Podemos obter a resposta usando a fórmula $\mathbf{j = c \cdot i \cdot t}$.

$c = 1\,250$
$t = 2$
$j = 640$

$$640 = 1250 \cdot i \cdot 2$$

$$640 = 2\,500 \cdot i$$

$$i = \frac{640}{2\,500}$$

$$i = 0{,}256$$

$$i = 0{,}256 \cdot 100 = 25{,}6\%$$

$$\mathbf{i = 25{,}6\%}$$

A taxa de juro fixada foi de 25,6%.

- Luis comprou um *tablet* de R$ 1400,00 e pagou R$ 1505,00 por tê-lo financiado em 3 meses. A financeira cobrou uma taxa de juro simples mensal. Qual foi a taxa fixada pela financeira?

Podemos calcular taxa de juro simples mensal aplicando a fórmula $\mathbf{j = c \cdot i \cdot t}$.

$j = 1505 - 1400 = 105$

$c = \text{R\$ } 1400{,}00$

$\mathbf{i}$ = taxa de juro simples mensal

$c = 1\,400$
$t = 3$

$105 = 1400 \cdot \mathbf{i} \cdot 3$

$105 = 4\,200 \cdot \mathbf{i}$

$\mathbf{i} = 2{,}5\%$

A taxa de juro simples mensal fixada pela financeira é de 2,5%.

Para empréstimos, ou aplicações financeiras, o regime de capitalização costuma ser o regime de juro composto.

A diferença entre o regime de juro simples e o regime de juro composto é que o rendimento da aplicação deste último é calculado sobre o saldo do último período e não sobre o capital inicial (exceto no final do primeiro período).

O assunto juro composto não será explorado neste momento.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

11. Maria aplicou um capital de R$ 8 000,00 à taxa de juro simples de 18% ao ano, durante 5 anos.

a) Que quantia de juro simples ela recebeu, referente ao período de 5 anos? R$ 7 200,00

b) Que quantia de juro simples Maria recebeu por ano? R$ 1 440,00

12. Raquel pediu um empréstimo a um banco a uma taxa de juro simples de 25% ao ano. O empréstimo deve ser pago no final de 3 anos. O total de juro simples a ser pago é de R$ 3 000,00.

a) Quanto Raquel pagará de juro simples ao final de 1 ano? R$ 1 000,00

b) Qual foi o total do empréstimo que ela fez? R$ 4 000,00

13. Um capital de R$ 80 000,00 foi aplicado durante 5 anos e rendeu R$ 82 400,00 de juro simples.

a) Qual foi a quantia de juro simples, referente ao período de 1 ano, que esse capital rendeu? R$ 16 480,00

b) Qual foi a taxa de juro simples anual? 20,6%

14. Carlos fez um empréstimo de R$ 2 500,00, durante dois anos e meio e pagou R$ 1 125,00 de juro simples. Qual foi a taxa de juro simples anual fixada para o empréstimo? 18%

15. Mônica pediu a um banco um empréstimo de R$ 1 200,00 por 2 anos, a uma taxa de juro simples de 27% ao ano.

a) Qual foi a quantia de juro simples, referente ao período de 1 ano, que Mônica pagou? R$ 324,00

b) Qual foi a quantia de juro simples, referente ao período de 2 anos, que ela pagou? R$ 648,00

c) Após 2 anos, qual foi o total pago por Mônica? R$ 1 848,00

16. Carolina comprou um aparelho de TV a prazo e, após 8 meses, pagou R$ 380,00 de juro simples, a uma taxa de juro simples de 24% ao ano. Calcule o preço que ela pagaria pelo aparelho de TV se o tivesse comprado à vista. R$ 2 375,00

17. Marco quer aplicar certa quantia durante um semestre, a uma taxa de juro simples anual de 32%, e receber R$ 8 400,00 de juro. Calcule a quantia que ele deverá aplicar. R$ 52 500,00

18. Um carro usado custa, à vista, R$ 14 000,00. Cristina quer comprar esse carro e pagá-lo em 6 meses com uma taxa de juro simples de 5% ao mês. Quanto Cristina pagará pelo carro? R$ 18 200,00

19. Ao ver esse anúncio, Valéria ficou entusiasmada. Comprou o celular e pagou, dois meses depois, o valor de R$ 672,00.

BIS

- Qual foi a taxa de juro simples mensal que a loja praticou? 6%

20. Uma instituição financeira remunera as aplicações de seus investidores a uma taxa de juro simples de 0,6% ao mês. Qual será o valor do juro de uma aplicação de R$ 20 000,00 por um semestre? R$ 720,00

3 Estatística e probabilidade

Média aritmética ponderada

Para refletir e responder

A tabela seguinte apresenta dados sobre os salários dos funcionários de uma empresa, de acordo com a função que exercem:

Função	Salário (em Reais)	Número de funcionários
Gerente	8 000,00	2
Diretor	20 000,00	1
Secretária	3 000,00	2
Escriturária	1 500,00	3
Recepcionista	1 000,00	2

- Qual é o salário médio dos funcionários dessa empresa?
R$ 4 850,00

Note que alguns salários são pagos a mais de um funcionário, por isso vamos acrescentar mais uma coluna à tabela acima, apontando a quantidade real paga a cada categoria.

O número de funcionários com o mesmo salário é o "peso" desse salário no salário médio. Por exemplo, 8 000 "pesa" 2 vezes na média.

Salário (em Reais)	Número de funcionários	Salário pago a cada função
8 000,00	2	$2 \times 8\,000 = 16\,000$
20 000,00	1	$1 \times 20\,000 = 20\,000$
3 000,00	2	$2 \times 3\,000 = 6\,000$
1 500,00	3	$3 \times 1\,500 = 4\,500$
1 000,00	2	$2 \times 1\,000 = 2\,000$

Para calcular o salário médio, multiplicamos o salário de cada função pelo respectivo "peso", somamos esses produtos e dividimos o resultado pela soma dos "pesos":

$$\text{Salário médio: } \frac{16\,000 + 20\,000 + 6\,000 + 4\,500 + 2\,000}{10} = \frac{48\,500}{10} = \text{R\$ } 4\,850{,}00$$

Esse tipo de média chama-se **média ponderada**.

A média ponderada é muito utilizada em situações como provas, concursos, campeonatos esportivos em que, para se calcular a média final, se atribuem pesos diferentes às modalidades que os compõem.

Veja, como exemplo, a situação a seguir.

Um professor de Português adotou os seguintes pesos para as notas bimestrais:

1º bimestre: peso 1	3º bimestre: peso 2
2º bimestre: peso 2	4º bimestre: peso 3

Qual será a média ponderada de um aluno que obteve as seguintes notas: 5,00; 7,00; 6,00 e 5,00 nos respectivos bimestres?

Da mesma forma, multiplicamos cada valor do conjunto por seu "peso", e o resultado será somado e dividido depois pela soma dos "pesos".

Média ponderada: $\frac{(5 \cdot 1) + (7 \cdot 2) + (6 \cdot 2) + (5 \cdot 3)}{8} = \frac{5 + 14 + 12 + 15}{8} = \frac{46}{8} = 5{,}75$

A média ponderada desse aluno será 5,75. Quando temos uma lista de números e informação sobre o peso com que esses números aparecem, a expressão da média ponderada é útil por ser mais rápida para escrever e calcular.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

21. Para ser aprovado num concurso, um participante precisa submeter-se a três provas: Conhecimentos Gerais, com peso **1**, Conhecimentos Específicos, com peso **3**, e Português, com peso **2**, e obter, no mínimo, média **6,0**.

Um candidato que obteve as notas **4,5** em Conhecimentos Gerais, **7,5** em Conhecimentos Específicos e **4,0** em Português foi aprovado no concurso? Explique sua resposta. Não foi aprovado porque sua média foi 5,83...

22. A tabela seguinte mostra tipos de camiseta, preços unitários de cada tipo e o número de camisetas vendidas por uma confecção no primeiro trimestre do ano.

Tipo de camiseta	Preço unitário (R$)	Camisetas vendidas	P – M (R$)
Regata	24,00	220	–4,60
Manga curta	29,00	180	0,40
Manga comprida	38,00	100	9,40

a) Qual foi a média do preço de camisetas vendidas nesse período? R$ 28,60

b) Que tipo de camiseta tem o preço unitário igual à média? Nenhum.

c) Copie a tabela dada e complete a 4ª coluna calculando a diferença P – M, em que P é o preço unitário de cada tipo de camiseta e M é o preço médio das camisetas. Há alguma diferença que é um número negativo? Por que isso acontece? Sim. Porque o preço unitário da camiseta regata é menor do que o preço médio do total de camisetas.

23. Para um churrasco foram comprados os seguintes tipos de carne aos respectivos preços:

- 8 kg de maminha, a R$ 34,50 o quilograma;
- 12 kg de linguiça, a R$ 9,00 o quilograma;
- 10 kg de picanha, a R$ 38,70 o quilograma.

Qual é o valor médio do quilograma de carne adquirido? R$ 25,70

A devastação da Amazônia

Este tema propicia formulação de questões relevantes relativas à sustentabilidade. Incentive a reflexão e a discussão em torno dele e avalie a possibilidade de desenvolver a interdisciplinaridade entre a Matemática e outras disciplinas escolares.


RAPHAEL ALVES/AFP

A madereira ilegal é a porta de entrada para o desmatamento. Santarém, Pará, 2014.

A Amazônia, a maior e mais rica floresta tropical do mundo, estende-se por nove países da América do Sul, incluindo o Brasil, que possui 60% do total da mata. Ela abriga um dos recursos naturais mais utilizados, que é a madeira. Na Amazônia, as árvores têm sido retiradas de forma predatória há mais de 300 anos. Nos últimos 30 anos, a exploração da madeira tem se tornado cada vez mais intensa e predatória.

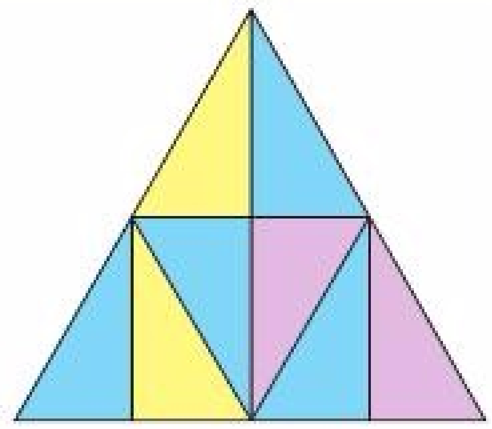
O modelo tradicional de extração de toras, como é praticado na Amazônia, causa desperdício de madeira aproveitável e danos à capacidade produtiva futura da floresta porque não é planejado.

O Brasil não é apenas o maior produtor mundial de madeira tropical, mas também o maior consumidor. Assim, não só os madeireiros, fazendeiros gananciosos e o governo, negligente na fiscalização, são responsáveis pela devastação. Nós, consumidores brasileiros de madeira, temos também nossa dose de culpa: compramos 64% de toda a madeira processada, oriunda da Amazônia.

Disponível em: <www.imazon.org.br>. Acesso em: 16 abr. 2015.

Revisão cumulativa e testes

1. Observe este triângulo, dividido em partes iguais, e responda:



a) Dessas partes, quantas estão pintadas de azul? 4 partes.

b) Quantos por cento da figura estão pintados de azul? 50%

c) Quantos por cento da figura não estão pintados de azul nem de amarelo? 25%

2. Em uma classe havia 40 estudantes. Certo dia, faltaram 25% dos rapazes, diminuindo para 36 o número de estudantes presentes.

a) Quantos rapazes estavam na classe naquele dia? 12 rapazes.

b) Qual era o número de moças presentes naquele dia? 24 moças.

c) Quantos por cento dessa turma era do sexo masculino? 40%

3. Para a eleição da diretoria do grêmio de uma escola, candidataram-se 10% dos 900 alunos. Foram eleitos 10% dos candidatos.

a) Quantos alunos eram candidatos? 90 alunos.

b) Quantos alunos foram eleitos? 9 alunos.

c) Quantos por cento dos alunos da escola representavam os eleitos? 1%

4. Um capital de R$ 2 500,00, aplicado a uma taxa de juro simples de 55% ao ano, durante certo período, rendeu R$ 5 500,00.

a) Por quanto tempo foi necessário manter a aplicação para obter esse juro? 4 anos.

b) Qual foi a quantia de juro simples que o capital rendeu, referente ao período de 1 ano? R$ 1 375,00

5. A praça da matriz na cidade de Maria tem uma forma triangular com 4 536 m² de área. Observando um dos lados, que tem 64,80 m de comprimento, qual é a medida da altura relativa a esse lado? 140 m

6. Resolva estas equações:

a) $4x - 3 \cdot (2 - x) = 64 + 2x$ 14

b) $\frac{y}{5} - 3y = 2 - 8y$ $\frac{5}{13}$

c) $4x - \frac{2x - 3}{2} = \frac{6x}{5}$ $-\frac{5}{6}$

7. Pedro, João e Laura receberam uma quantia em dinheiro por um trabalho que realizaram juntos. Dessa quantia, Laura ficou com R$ 1 116,00, João com 35% e Pedro com 20%.

a) Qual foi a quantia paga pelo trabalho que eles realizaram juntos? R$ 2 480,00

b) Quanto recebeu João? R$ 868,00

8. Renata financiou a compra de um terreno no valor de R$ 130 000,00 por um certo período, a uma taxa anual de juro simples de 30%, e pagou R$ 97 500,00 de juro simples. Em quanto tempo ela pagou esse terreno? 2,5 anos, ou 2 anos e 6 meses.

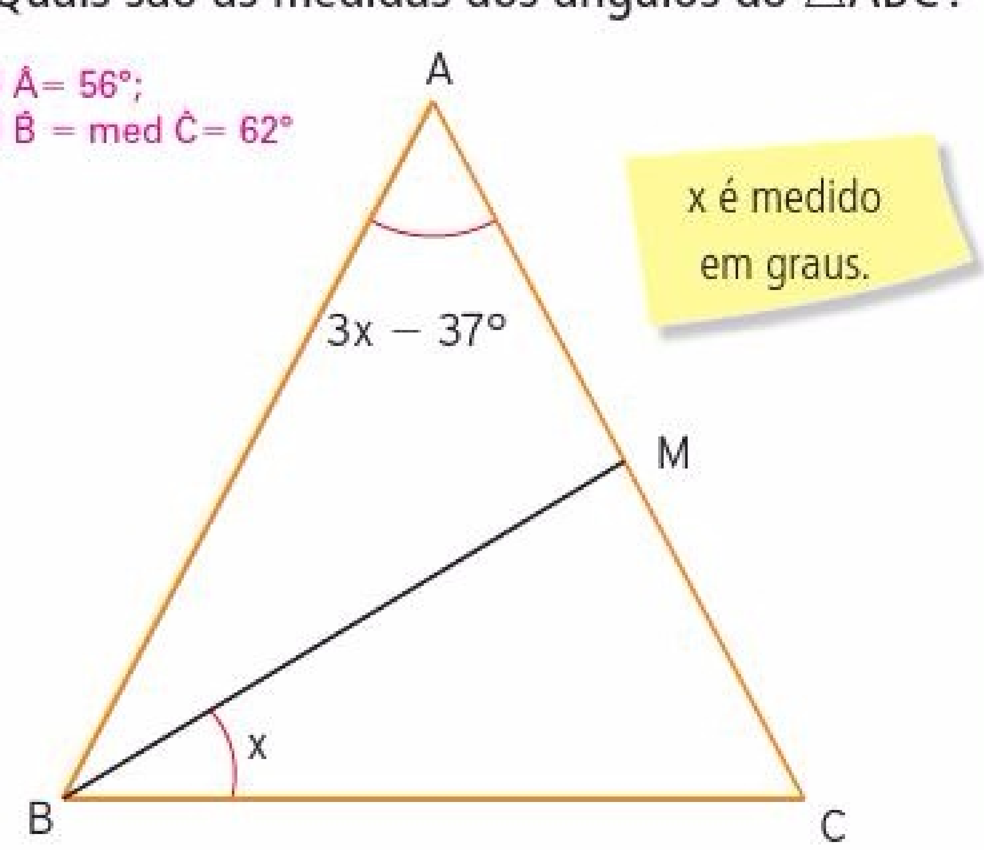
9. Laís aplicou R$ 720,00 durante um bimestre, no final do qual recebeu R$ 765,00, incluindo o capital aplicado. Determine a taxa de juro simples anual da aplicação feita por Laís. 37,5%

10. Este é um problema muito conhecido, resolva-o. Um tijolo tem massa 1 kg a mais que meio tijolo. Qual é a massa de um tijolo e meio? 3 kg

11. Neste triângulo ABC, os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ têm medidas iguais. Além disso, $\overline{BM}$ é bissetriz de $\hat{B}$.

Quais são as medidas dos ângulos do △ABC?

med $\hat{A}$ = 56°; med $\hat{B}$ = med $\hat{C}$ = 62°



12. Em um terreno retangular, o comprimento é o triplo da largura. Represente o perímetro por **p** e a largura por **x** e escreva:

a) uma equação de 1º grau com duas incógnitas para o perímetro desse retângulo; $p = 8x$

b) três pares ordenados (x; p) que sejam soluções dessa equação. Respostas possíveis: (1; 8); (3; 24); (5; 40).

c) Quais deverão ser as medidas dos lados para que o perímetro seja 340 metros? Largura: 42,5 m; comprimento: 127,5 m.

13. (Saresp) Na feira, um queijo foi dividido em 4 partes iguais. A quarta parte do queijo custa R$ 2,00. Quanto se pagaria por metade desse queijo? b

a) R$ 3,00
b) R$ 4,00
c) R$ 6,00
d) R$ 8,00

14. Adriana fez um empréstimo a uma taxa de juro simples anual de 9,4%. Essa taxa corresponde a: d

a) $\frac{94}{100}$
b) $\frac{94}{10}$
c) 0,94
d) 0,094

15. Em um grande aquário vivem, entre peixes e polvos, 62 animais. Se colocarmos um polvo a mais, a quantidade de peixes será o dobro da de polvos. Nesse aquário vivem: c

a) 31 peixes e 31 polvos.
b) 20 peixes e 42 polvos.
c) 42 peixes e 20 polvos.
d) 32 peixes e 30 polvos.

16. (Saresp) Um caminhão suporta cargas de até 3 000 quilos. Qual é o maior número de caixas que ele pode transportar, se cada uma delas pesa 120 quilos? a

a) 25
b) 26
c) 27
d) 28

17. (Saresp) O Teatro Martins Pena tem 243 poltronas. O número de poltronas do teatro equivale a: b

a) 3^4
b) 3^5
c) 3^6
d) 3^7

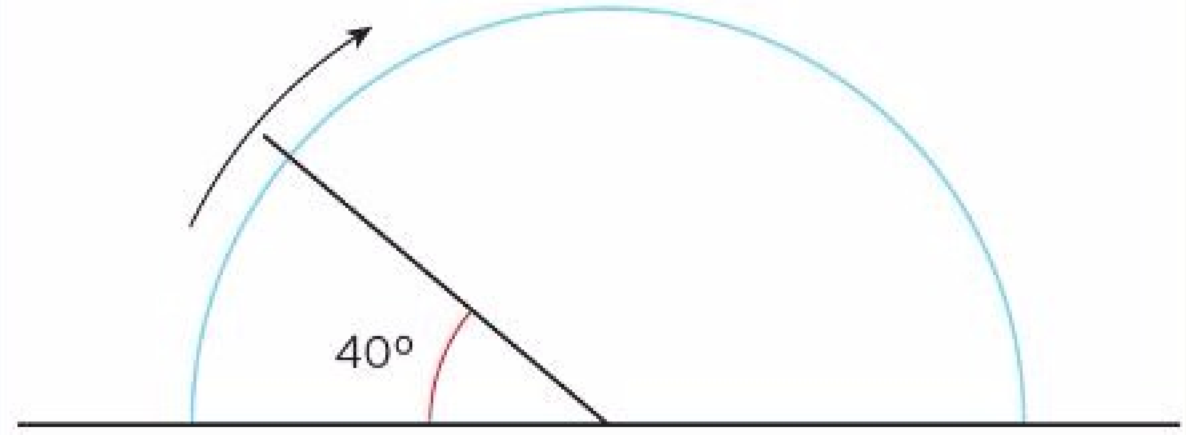
18. (Saresp) A média do 1º bimestre dos alunos do Colégio Aprender foi calculada da seguinte forma:

$\frac{2P + T}{3}$, em que P é a nota da prova e T a nota do trabalho. João tirou 7,0 na prova e 8,5 no trabalho.

Assim, sua média no 1º bimestre foi: b

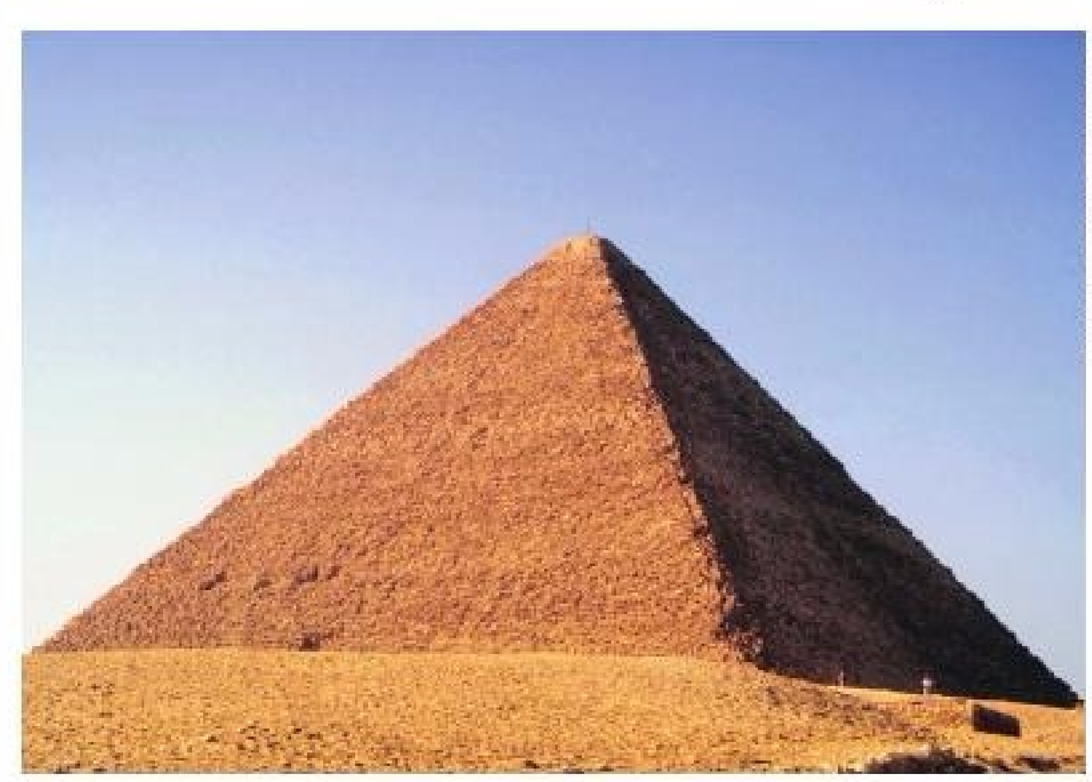
a) 5,0
b) 7,5
c) 7,8
d) 8,0

19. (Saresp) O movimento completo do limpador do para-brisa de um carro corresponde a um ângulo raso. Na situação descrita na figura, admita que o limpador esteja girando em sentido horário e calcule a medida do ângulo que falta para que ele complete o movimento. c



a) 50°
b) 120°
c) 140°
d) 160°

20. (Saresp) Esta fotografia é de uma pirâmide de base quadrada, a Grande Pirâmide de Quéops, uma das sete maravilhas do mundo antigo.



THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Grande Pirâmide de Quéops, no Egito.

O número de faces dessa pirâmide, incluindo a base, é: b

a) igual ao número de arestas;
b) igual ao número de vértices;
c) a metade do número de arestas;
d) o dobro do número de vértices.

Respostas

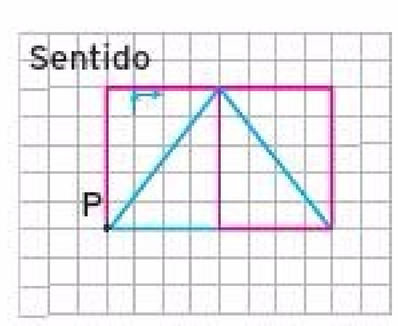
Unidade 1 – Números inteiros

1. O nível do mar.
2. Altitude zero metro.
3. Significa que Antônio deve R$ 148,00 ao banco.
4. Significa que esse ponto está aproximadamente 2 792 m acima do nível do mar.
5. a) −20 m. b) −50 m. c) +40 m.
6. a) −R$ 360,00 b) +R$ 457,00 c) +R$ 2 385,00 d) −R$ 658,00
7. −2
8. a) +41 °C. b) 0 °C. c) −15 °C. d) +100 °C. e) −21 °C.
9. Resposta pessoal.
10. −89 °C.
11. +2 994 m.
12. a) −14 m. b) −19 m.
13. a) −2 b) −50 m. c) −6 °C.
14. Respostas possíveis.
a) Dívida de R$ 2 500,00.
b) Perda de 40 pontos.
c) 11 andares acima do andar térreo.
15. a) Ela diminui. b) −18 °C.
16. a) De madrugada.
b) 22 °C.
c) Respostas possíveis:
−11 °C; −38 °C.
17. a) Negativo.
b) Quando ela sacou R$ 200,00.
c) −R$ 150,00.
18.

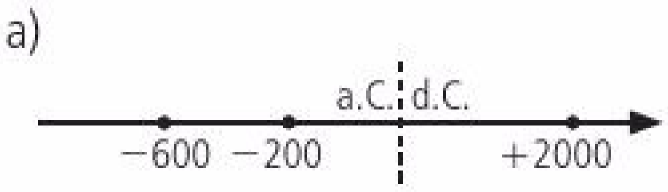
Número	Antecessor	Sucessor
+200	+199	+201
−9	−10	−8
−28	−29	−27
−100	−101	−99

19. −1
20. a) ∉ b) ∈ c) −9 d) 56,5 e) ∈ f) −40
(Para **c**, **d** e **f** há outras respostas possíveis.)
21. a) +27 °C. b) −3 °C. c) 0 °C. d) −4 °C.
22. Subir 28 m.
23. a) +45 − 60 = −15;
débito de R$ 15,00.
b) −7 − 6 = −13; −13 °C ou 13 °C abaixo de zero.
24. a) −18,00
b) −18,00 − 10,00 = −28,00
c) −28,00 + 20,00 = −8,00
• Dívida; R$ 8,00.
25. Respostas possíveis.
a) um número natural.
b) é; natural.
26. O número é −12 e seu sucessor é −11.

Desafio p. 17
Caminhos e os sinais + e −

•


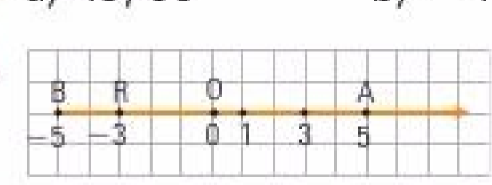
• a) Sim; dois iguais.
b) Sim, cinco; quatro triângulos retângulos e um triângulo isósceles.
c) 40 cm²; 20 cm².
d) 10 cm²; 20 cm².
• Respostas possíveis:
+6V; +6H; −6V; −6H.

27. a) −4 b) −26
28. a) 18 unidades. b) 20 unidades. c) 15 unidades.
29. M: −92; Ponto médio de $\overline{PM}$: −97.
30. a) −2 b) Andar zero ou térreo. c) −3
31. a) +R$ 422,00. b) +R$ 264,00. c) +R$ 319,00. d) −R$ 131,00.
32. +2 °C.
33. a)


b) −555 ou 555 a.C.
c) −250 ou 250 a.C.

Usando a calculadora p. 20

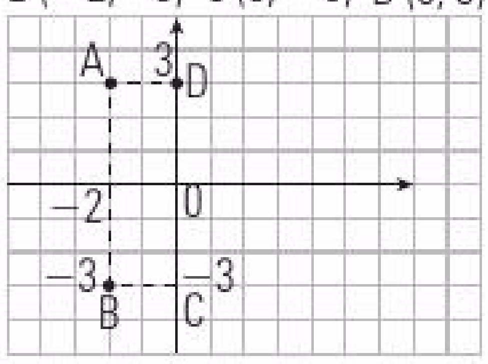
• 2; 1; 0; −1 ou 1−.
36; 11; −14 ou 14−.
• Resposta pessoal.
• 49

34. Para cima e para baixo.
35. Para cima e para baixo.
36. a) −9 °C. b) 18 °C.
37. É sempre um número inteiro não negativo.
38. São iguais.
39. Júlia: 100 ou −100;
Célia: −80 ou −79;
Edu: −100 ou 100.
40. a; c
41. a) 6 b) 102 c) −200 ou 200 d) 1 000 e) 450 ou −450 f) 2 800
(Para **c** e **e** existem outras respostas.)
42. a) 99 b) −51
43. a) 235 b) −1 000
44. a) 24 b) 63 c) 56 d) 159
45. Verdadeiras: **a**, **c**, **d**.
b) O simétrico de um número inteiro negativo é sempre um número inteiro positivo.
46. a) 49; 66 b) −17
47.


48. a) (−4, −3); (2, −2); (−3, 2).
b) A prefeitura. c) A biblioteca.
49. A (−1, −3); B (−1, −1); C (1, −1); D (1, 0); E (3, 0); F (3, 2).

Resposta possível:

50. B (−2, −3) C (0, −3) D (0, 3)



51. Resposta possível: 16 unidades.

52. a) P (−4, 2); M (−2, −4); R (4, −2); S (2, 2); X (−2, 4).

b) Um quadrilátero.

53. Resposta possível: −10; −1.

54. Resposta possível: Comparando os módulos de −10 e de −5.

55. a) < c) < e) <

b) > d) < f) =

56. Resposta possível: −8, −7, −2.

57. a) $-25 < -12 < -8 < -6 < < 1 < 3 < 7$

b) $-100 < -48 < -30 < 12 < < 18 < 22 < 104$

c) $56 > 16 > 13 > 0 > -37 > > -41 > -87$

d) $93 > 57 > 34 > -46 > -72 > > -293$

58. a) Números inteiros negativos.

b) Números inteiros positivos.

c) Números inteiros negativos.

d) Números inteiros positivos.

59. a)

		Total de pontos
Júlia	●●●●●○○○○	+1
Bianca	●●●○○○○	−1
Alex	●●●●○○○○○○	−2
Luís	●●●●●○○○○○	0

b) +1, 0, −1, −2

60. 47; 57; −57.

61. 308; 380; −308.

62. 486; 486.

63. O oposto do oposto de −486.

64. −6 ,−5, −4, −3, −2, −1, 0, 1

65. a) 97

b) −145

c) Respostas possíveis: −19, 38, 97, −65, 14.

d) 97

66. a) O número positivo.

b) Zero

c) Não.

d) −13 e +13

67. a) $|-50| = 50$

b) $|+18| = 18$

68. a) < c) <

b) > d) >

69. a) Diminuiu em 2%, ou seja, teve crescimento de −2%.

b) 96 vagas.

70. a) Variação de R$ 20,00; positivo.

b) −R$ 60,00; negativo.

c) Outubro. Variação de −R$ 120,00; saldo negativo; a família gastou mais do que ganhou.

Unidade 2 – Números inteiros: operações e problemas

1. a) − 9 metros; $(-18) + (+9) = -9$.

b) − 27 metros; $(-18) + (-9) = -27$.

2. a) $(+12) + (-7) = 5$

b) $(-20) + (-5) = -25$

3. a) $(+14) + (-20) = -6$

b) $(+239) + (-540) = -301$

4. a)

Crédito (R$)	Débito (R$)	Adição	Saldo (R$)
–	–	–	+230,00
–	630,00	$(+230) + (-630) = -400$	−400
85,00	–	$(-400) + (+85) = -315$	−315
–	100,00	$(-315) + (-100) = -415$	−415

b)

Crédito (R$)	Débito (R$)	Adição	Saldo (R$)
–	–	–	1 400,00
600,00	–	$(+1400) + (+600) = +2\,000$	+2000
–	950,00	$(+2000) + (-950) = +1050$	+1050
–	2 000,00	$(+1050) + (-2000) = -950$	−950

5. a) −3 c) 0

b) −4 d) 0

6. A, C e D.

7. Resposta possível: Porque o banco cobrou juros sobre o saldo devedor.

8. a) Elemento neutro.

b) Propriedade associativa.

c) Propriedade comutativa.

d) Propriedade comutativa.

9. a) O oposto de −20; +20. b) 33

10. a) Números inteiros iguais.

b) Respostas possíveis: −5 e −5; +64 e +64; −1 000 e −1 000.

11. a) −20 c) −90 e) −60

b) 30 d) 100 f) 0

12. a) 10; 20 c) −10; −20

b) 10; −20

13. −R$ 380,00.

14. a) +4 d) 0

b) −13 e) +27

c) +300 f) −17

15. Respostas possíveis: O saldo de uma conta-corrente era de −R$100,00 e dela foram sacados R$ 80,00. Um submarino que estava a −200 metros subiu 20 metros. João estava com 100 pontos ganhos em um jogo quando perdeu 280 pontos.

16. a) $(-46) - (-102) = +56$

b) $(+56) + (-102) = -46$

17. a) −122; Resposta possível: $(-122) - (-37) = -85$.

b) −87; Resposta possível: $(-87) + (-49) = -136$.

c) 162; Resposta possível: $(+162) + (-98) = 64$.

18. a) −146

b) −96

c) −455

Desafio p. 40

Quadrado mágico

−1	0	−5
−6	−2	2
1	−4	−3

19. a) -60

b) 490

c) -233

d) 380

20. a) Paulo: -50; Jair: 80.

b) Jair; 130.

21. a) 38

b) 0

22. -97

23. a) -60 c) 0

b) 300 d) -375

24. R$ 1 035,00

25. a) $>$

b) $<$

c) $=$

26. a) Ganhos.

b) $+150$

27. a) 138

b) $-2\,450$

c) 60

d) **x** e **y** representam números opostos, ou seja, que obedecem à relação $x + y = 0$.

28. $(-230) - (+500) =$
$= -230 - 500; -730$

$(+500) - (-230) = 500 +$
$+230; +730$

$(-230) + (-438) - (+500) =$
$= -230 - 438 - 500; -1\,168$

$(+500) - (-438) - (-230) =$
$= 500 + 438 + 230; 1\,168$

29. a) -150

b) Resposta possível:
$b = -50, c = -100$.

c) 99

d) 2

30. Quando os dois fatores têm sinais diferentes.

31. $5 \times (-140)$; $-$R$ 700,00

32. Resposta possível: $(+3) \times (+7)$; $(-3) \times (-7)$.

33. a) -24 c) -30

b) -63 d) 72

34.

Frases	Expressão numérica	Resultado
O produto de -13 pelo oposto de 7.	$(-13) \times (-7)$	91
O produto de -80 pelo oposto de -42.	$(-80) \times (+42)$	-3360
O produto do oposto do oposto de 42 pelo oposto de 20.	$-(-42) \times (-20)$	-840

Usando a calculadora p. 46

- $74\,903\,310$
- a) $-74\,903\,310$ d) $74\,903\,310$
  b) $-74\,903\,310$ e) $-74\,903\,310$
  c) $74\,903\,310$

35. a) $(-6) \times (+8)$ c) $(-6) \times (-16)$

b) $(+4) \times (-10)$ d) $(-12) \times (+12)$

36. a) 3 c) 179

b) -8 d) $-1\,000$

37. -240. Resposta pessoal.

38. $(-3) \times (-4) + (-3) \times (+9) =$
$= (-3) \times (-4 + 9)$

39. a) Sim. Resposta possível: Calcular $(-2) \times (-5)$, $(-8) \times (+10)$ e o produto entre os resultados obtidos.

b) -800

40. a) Negativo. b) -536

c) Resposta possível: $(-536) \times (-1) \times$
$\times (+1) \times (-1) \times (+1) \times (-1)$.

41. a) 1 b) -60 c) -1

42. $-, -, -; -, +, +; +, +, -; +, -, +$.

43. a) $-$ c) $-$ e) $+$

b) $+$ d) $-$

44. a) -10 c) -922.

b) $+73$ Sim.

45. a) $+14$ ou 14 b) -65

46. a) -3 c) 10 e) -7

b) 7 d) -5 f) 9

47. -17

48. -200

49. a) -2 d) 20

b) -3 e) 0

c) 100 f) Resposta possível: 2

50. Respostas possíveis: $(+6) \times (-10)$, $(-3) \times (+20)$, $(-5) \times (+12)$

Usando a calculadora p. 52

- a) -34 c) -43 e) -27
  b) -30 d) $+16$ f) $+113$

51. a) $<$ b) $=$ c) $>$ d) $=$

52.

Multiplicação	Divisão
$(-38) \cdot (+25) = -950$	$(-950) : (-39) = +25$
	$(-950) : (+25) = -38$
$(-64) \cdot (-14) = +896$	$(+896) : (-14) = -64$
	$(+896) : (-64) = -14$
$(+26) \cdot (-57) =$ $= -1482$	$(-1482) : (+26) = -57$
	$(-1482) : (-57) = 26$
$(-93) \cdot (+34) = -3\,162$	$(-3\,162) : (-93) = 34$
	$(-3\,162) : (+34) = 93$

53. a) Resposta possível: $(-1) \times 0 \times$
$\times (+1)$; 0

b) -12 e -11; -1320

54.

Dividendo	Divisor	Quociente
-108	$+60$	$-1{,}8$
$+111$	-3	-37
$+96$	-12	-8
-58	$+4$	$-14{,}5$

a) Não.

b) $(-108) : (+60)$; $(-58) : (+4)$

55. 17

56. a) -30 b) -15 c) 20

57. a) 520 c) -72

b) -43 d) -20

58. -288

59. a) -21 b) 7 c) -21 d) 21

60.

Linguagem matemática	Significado
$n - (-6)$	Diferença entre um número inteiro e -6.
$n : (-4)$	Quociente de um número inteiro por -4.
$(-20) - n$	Diferença entre -20 e um número inteiro.
$n \times (+18)$	Produto de um número inteiro por $+18$.
$n : (-27)$	Quociente de um número inteiro por -27.

Desafio p. 55

Brincando de espelho

−36	−30	−24	−18	−12	−6	6	6	12	18	24	30	36
−30	−25	−20	−15	−10	−5	5	5	10	15	20	25	30
−24	−20	−16	−12	−8	−4	4	4	8	12	16	20	24
−18	−15	−12	−9	−6	−3	3	3	6	9	12	15	18
−12	−10	−8	−6	−4	−2	2	2	4	6	8	10	12
−6	−5	−4	−3	−2	−1	1	1	2	3	4	5	6
−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6
6	5	4	3	2	1	−1	−1	−2	−3	−4	−5	−6
12	10	8	6	4	2	−2	−2	−4	−6	−8	−10	−12
18	15	12	9	6	3	−3	−3	−6	−9	−12	−15	−18
24	20	16	12	8	4	−4	−4	−8	−12	−16	−20	−24
30	25	20	15	10	5	−5	−5	−10	−15	−20	−25	−30
36	30	24	18	12	6	−6	−6	−12	−18	−24	−30	−36

- Respostas possíveis:
  rosa: $(+3) \times (+4) = 12$; $(+4) \times (+4) = 16$; **amarelo**: $(-2) \times (+4) = -8$; $(-1) \times (+6) = -6$; **verde**: $(+3) \times (-4) = -12$; $(+5) \times (-6) = -30$; **bege**: $(-2) \times (-5) = +10$; $(-5) \times (-5) = +25$

61. a) $(-15)^2$; 225 c) $(-1)^{10}$; 1
b) $(-10)^5$; $-100\,000$ d) 0^{12}; 0

62. a) 21; 3; 9 261 c) −1; 15; −1
b) −1; 8; +1 ou 1

63. $(-7)^8$

64. a) 400 b) −8 000 c) O cubo de −20.

65. a) −512 b) 289 c) −1 331 d) 0 e) 1 f) −1

66. a) 16 b) − 64 c) 100 d) 64 e) 64 f) 625 g) 81 h) 243 i) 64
- A potência é sempre um número positivo.
- A potência é sempre um número positivo.
- A potência é sempre um número negativo.

67. a) Negativo. b) Positivo. c) Positivo. d) Positivo. e) Negativo. f) Negativo.

68. a) 1 b) 0 c) −6

69. a) $(+3)^7$ b) $(-51)^9$ c) $(-13)^{12}$ d) $(-10)^{17}$

70. a) $(-4)^3 \times (-4)^3 = 4\,096$
b) $(-5)^2 \times (-5)^3 = -3\,125$

71. a) −128 b) 256 c) −18 d) 1 e) −243 f) −10

72. a) $(-4)^{15}$ b) $(-10)^{80}$ c) $(-7)^{30}$

73. a) Resposta possível: 4×10^5
b) 86×10^8

74. Respostas possíveis:
a) 35×10^8 b) 8×10^7 c) 457×10^{10} d) $3\,004 \times 10^9$

75. 1

76. a) 53 000 000 b) 240 000 000 c) 876 000 000

77. 946×10^{10} quilômetros.

78. 23

79. 35

80. a) 30 b) 50 c) 60 d) 100

81. a) −9 b) −12 c) 9 d) 198

82. 81

83. 2

84. 8 linhas e 8 colunas.

85. 9 cm².

86. 40 cm.

87. a) −4 b) 2 c) −3 d) 14

88. a) −147 b) −83 c) 27 d) 57

89. a) 13 b) 729 c) 36 d) −9 e) 25; 97

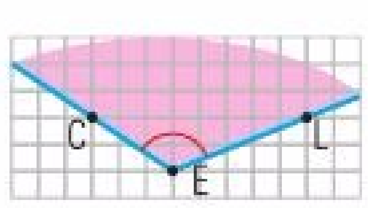
90. a) −1 728 b) 1 728 c) 0 d) 512

91. a) 4 b) 36 c) Resposta pessoal. Não.

Unidade 3 – Ângulos e circunferências

1. Região convexa: verde; região não convexa: laranja.

2.



3. YÔX; AĈB; NÔM.

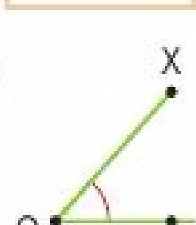
4. AB̂C, BĈD, DÂB, CD̂A.

5. B(1, 4); C(2, −1).

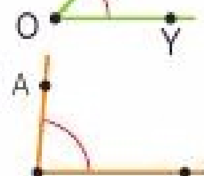
6. a) Resposta pessoal.
b) Resposta pessoal.
c)

Ângulo	Estimativa	Medida
AP̂B	Resposta pessoal	90°
DÊF	Resposta pessoal	140°
MÔN	Resposta pessoal	180°
FÊF	Resposta pessoal	0°

7. a)



b)



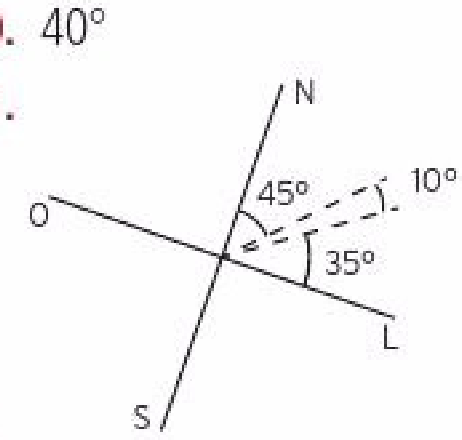
c)

8. a) 180° b) 360° c) 60°

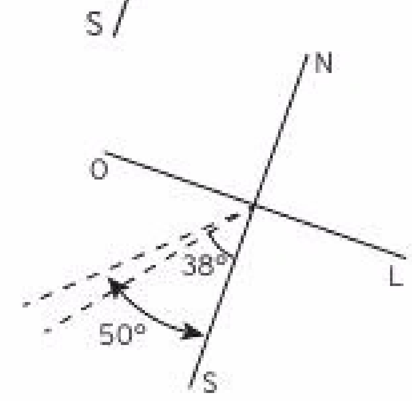
9. a) 135° c) 162° b) 53°

10. 40°

11.



12.



Desafio p. 75

Dando um jeitinho

- 50°

13. 100°

14. 45

15. a) med R̂ = 40°; med T̂ = 60°; med Ŝ = 80°
b) med Ê = med Ĝ = 50°
med F̂ = med Ĥ = 130°
c) med Ĵ = med L̂ = 90°
med M̂ = med P̂ = 125°
med N̂ = 110°

16. 37°

Desafio p. 76

Ângulos e o ponteiro do relógio

Resposta possível: 60°. Uma volta completa corresponde a um giro de 360°; o ponteiro grande faz 1 volta completa em 60 minutos, e como 10 minutos correspondem a um sexto de 60, em 10 minutos o ponteiro grande dará um giro correspondente a um sexto de volta, ou seja, 360°: 6 = 60°.

17. 1 214′

18. 1 537′

19. a) 525′
b) 6 050′

20. A e C

21. Sim, porque 1° = 60′ e para transformar 32° em minutos, Alice multiplicou 32 por 60′. Em seguida, somou o resultado obtido com 15′.

22. a) $x = 60°$ b) $y = 22,5°$

Desafio p. 78

Grau ou minuto?

Corretas: $93°\ 28′ = 5\ 608′$ e $125,8° = 125°\ 48′$; $135° = 8\ 100′$

23. a) Obtuso. c) Agudo.
b) Reto. d) Agudo.

24. a) $S\hat{E}A$
b) $C\hat{O}L$
c) Resposta possível: $E\hat{S}C$

25. a) 30°
b) Agudo.
c) Resposta possível: Percurso de 12 horas a 16 horas.

26. a) 30 minutos.
b) 15 minutos.

27. 212 minutos.

28. a) 18 h 15 min b) 18 h 55 min

29. a) 1 h 15 min
b) Sim, porque o capítulo que ela quer gravar tem 55 minutos de duração e o disco comporta mais 1 h 15 min de gravação.

Desafio p. 80

Ângulos e comunicação

- Os sinais correspondentes às letras **T** e **O**.
- Os sinais correspondentes às letras **S** e **M**. O sinal correspondente à letra **R**.

30. a) $A\hat{O}N$ e $M\hat{O}B$
b) $A\hat{O}M$ e $N\hat{O}B$

31. a) $N\hat{O}P$
b) $O\hat{P}M$
c) $P\hat{M}N$ e $M\hat{N}O$

32. Ângulo raso: $A\hat{O}E$.
Os ângulos obtusos: $A\hat{O}D$ e $B\hat{O}E$.
Os ângulos retos: $A\hat{O}C$ e $C\hat{O}E$.

33. a) 85° 32′
b) 96° 43′

Desafio p. 81

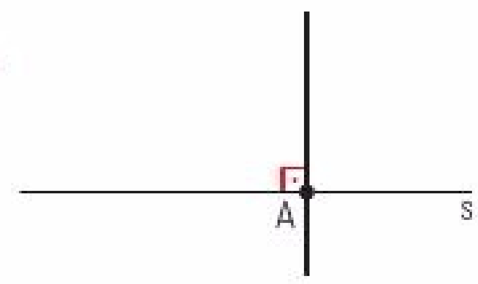
Operações com medidas de ângulos

- 28° 41′
- 77° 30′ e 72° 18°′

34. a) $\hat{D}$
b) Sim, porque têm medidas iguais.

35. 83°

36.

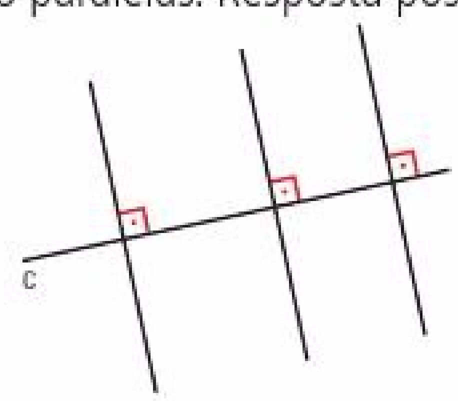


37. 45°

38. 60°

39. 60° 30′

40. São paralelas. Resposta possível:



41. 71°.

42. Respostas pessoais.

43. 72°

44. 45°

45. a) Resposta possível: A medida do ângulo formado pelas bissetrizes dos ângulos $A\hat{O}B$ e $\hat{B}OX$ é igual a 80° : 2 mais 55° : 2, ou ainda (80° + 55°) : 2. Ou 135° : 2.
b) 67,5° ou 67° 30′

Desafio p. 85

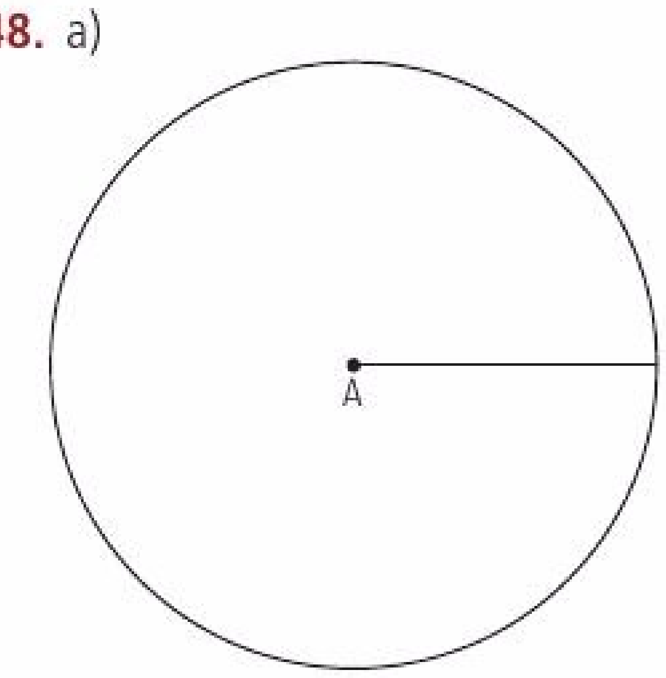
Vamos jogar sinuca?

a) Caçapa 3.
b) 23 quadrados.
c) 5 vezes

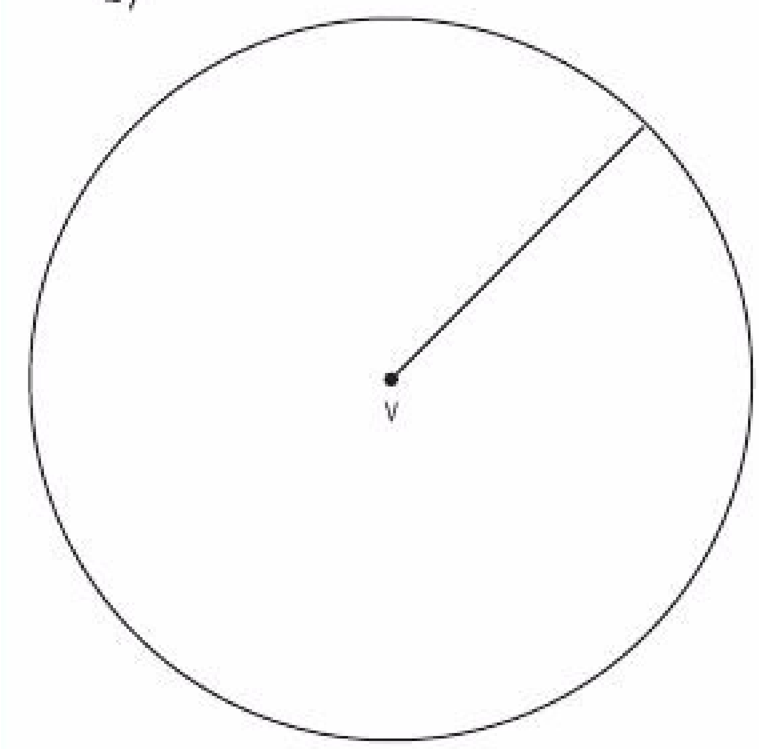
46. a) Resposta possível: $\overline{AO}$.
b) Resposta possível: $\overline{EF}$.
c) Resposta possível: $\overline{AB}$.
d) $A\hat{O}D$ e $B\hat{O}F$.

47. Os diâmetros.

48. a)



b)



49. a) F; G; H; I.
b) A; B; O.
c) D; C; E.
d) Resposta possível: O; A; B; H.

50. 4 cm.

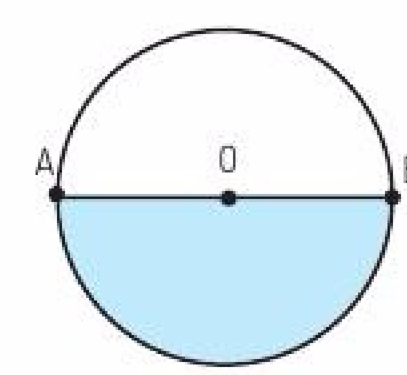
51. a) Círculo. b) Sim.

52. 1,15 cm; 0,9 cm.

53. a) B(2, 0) e D(−2, 0).
b) Resposta possível: $\overline{OD}$; $\overline{OC}$.
c) 2 cm; 4 cm.

54. a) Duas maneiras. b) Arcos.

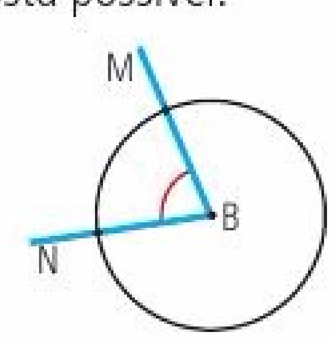
55.



56. a) 90° b) 140° c) 5°

57. a) 30° b) 90° c) 120°

58. Resposta possível:



59. 60°

60. a) 22% c) 15%; 15%
b) 43%

61. a) 88 rapazes. b) 72 rapazes.

62.

Unidade 4 – Área e volume

1. 51,84 m^2.

2. 33,60 cm^2.

3. a) 12 m. b) 46,40 m.

4. 1 e 72; 2 e 36; 3 e 24;
4 e 18; 6 e 12; 8 e 9.

5. a) 300 lajotas.
b) 330 lajotas.

6. 320,25 m^2.

7. 1 350 m^2.

8. 29,59 m^2.

9. 294 cm^2.

10. Aproximadamente 2 232 cm^2.

11. 7,5 cm^2.

Usando a calculadora p. 99

- R$ 1 040,00.
- R$ 52,00.
- R$ 988,00.

12. a) 11,05 cm^2. c) 21 cm^2.
b) 37 cm^2.

13. 346,5 cm^2.

14. 196 cm^2.

15. B, C, e E; A e D.

16. a) 30,5 cm^2.
b) 32 cm^2.

17. a)
- Duas faces.
- Duas faces.
- Duas faces.

b) 954 cm^2.

18. 3 400 m^2.

19. a) 2 triângulos e 3 retângulos.
b) Prisma triangular.
c) Faces triangulares: 15 cm^2.
Faces retangulares: 48 cm^2.
d) 174 cm^2.

20. a) Pirâmide de base quadrada.
b) 5 faces.
c) Um quadrado e 4 triângulos.
d) 96 cm^2.

21. a) 4 cubos.
b) 12 cubos.
c) 17 cubos.

22. a) 36
b) 64

23. a) 12 c) 18
b) 10 d) 6

24. 64 000 cm^3.

25. 39 600 cm^3.

26. 4,5 m.

Desafio p. 106
Um desafio saboroso

- a) 4 cubos pequenos.
b) 12 cubos pequenos.
c) 9 cubos pequenos.
d) 2 cubos pequenos.

27. 2 500 m^3.

28. 21 m^3.

29. a) 1 d) 0,001
b) 1 e) 0,000001
c) 1 000 000 f) 0,000001

30. 250 000 cm^3.

31. 40 500 dm^3.

32. 102,74928 dm^3.

33. a) 478 000 dm^3. c) 500 000 cm^3.
b) 6 700 cm^3. d) 0,006 dm^3.

34. Os volumes são iguais.

35. 2 250 caixas.

Usando a calculadora p. 107

- 0,512 m^3; 1 m^3.
- 0,488 m^3.

36. a) mL ou cm^3. c) mL ou cm^3.
b) L d) L ou m^3.

37. a) 20 L.
b) Resposta pessoal.

38. 0,335 L; 0,5 L

39. a) 3 500 mL c) 190 mL
b) 2 250 mL d) 72 mL

40. 2 000 frascos.

41. a) 37 000 L d) 86 L
b) 6 000 L e) 200 L
c) 7 500 L f) 5 L

42. a) 4 recipientes.
b) Lucro: R$ 1,10.

43. 16 minutos.

44. 200 ampolas.

45. a) 1,2 m^3.
b) 0,0684 m^3.
c) 0,1958 m^3.

46. 384 000 L

47. 7 200 L

48. 45 000 L

49. 51,2 L

50. 1 002 mL

51. 990 L

Desafio p. 111
Encrencas e possibilidades

Veja a seguir como dona Maricota pode proceder.

	8 L	5 L	3 L
1º	8		
2º	3	5	
3º	3	2	3
4º	6	2	
5º	6		2
6º	1	5	2
7º	1	4	3
8º	4	4	

Unidade 5 – Números racionais

1. a) $\frac{9}{10}$ c) $-\frac{26}{37}$
b) $\frac{14}{15}$ d) $\frac{53}{67}$

2. a) R$ 6,25
b) −4,5 m
c) −R$ 12,50

3. $-\frac{9}{10}$ ou −0,9.

4. Respostas possíveis: $-\frac{10}{14}$; $-\frac{20}{28}$; $-\frac{50}{70}$.

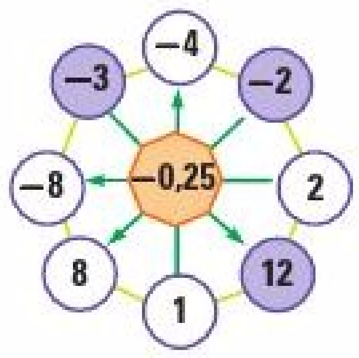
5. Respostas possíveis: $-\frac{148}{10}$; $-\frac{74}{5}$; $-\frac{296}{20}$.

Usando a calculadora p. 115

a) +2,75 c) +1,92
b) −3,6 d) +0,2

Desafio p. 115

Uma roda de números



6. a; d; e; f.

7. $\frac{49}{6}$

8. a) 8,9; 1,6666...; −1,35; −1,3636...; −0,1444...; 0,1212...

b) $\frac{5}{3}$; $-\frac{15}{11}$; $-\frac{13}{90}$; $\frac{4}{33}$.
6; 36; 4; 12.

9. Rafael e Mariana.

Usando a calculadora p. 117

Inteiro	Decimal exato	Dízima periódica
525	2 887,5	641,6666...
1 925	1 443,75	−213,88888...
1 155	721,875	−320,833333...
−385	−360,9375	−444,230769...
		444,230769...

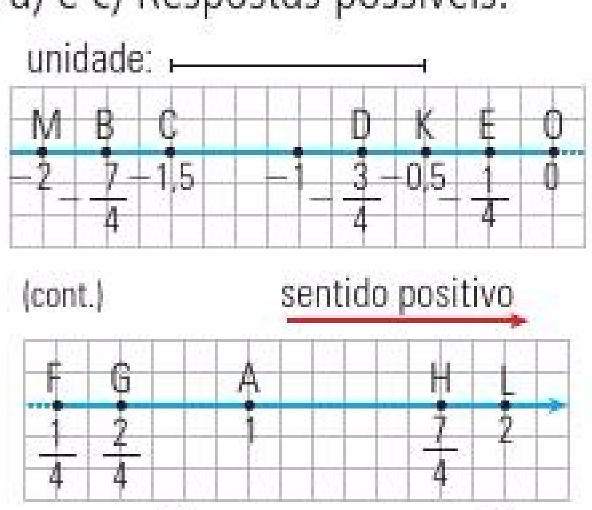
10. a) Correta.

b) Incorreta. O ponto **E** representa $\frac{3}{8}$.

c) Correta.

d) Incorreta. −0,5 é representado pelo ponto **B**.

11. a) e c) Respostas possíveis:



b) B: $-\frac{7}{4}$; C: −1,5; D: $-\frac{3}{4}$; E: $-\frac{1}{4}$;
F: $\frac{1}{4}$; G: $\frac{2}{4}$; H: $\frac{7}{4}$.

12. **A**: −1,4; **B**: −0,8; **C**: −0,4; **D**: 0,2; **E**: 0,4; **F**: 0,8; **G**: 1,2.

13. Respostas possíveis:
a) $-\frac{7}{10}$ ou −0,7   b) 0,4 ou $\frac{4}{10}$

14. a) $\frac{3}{8}$ b) 0,16   c) 3,25

$\left|-\frac{3}{8}\right|$, $|-0{,}16|$, $|-3{,}25|$.

15. Desceu. 3 °C.

16. a) <   c) =   e) >
b) >   d) <   f) =

17. a) M   b) P

18. a) <   c) >
b) >

19. −12,68

20. −2,7 °C ou 2,7 °C abaixo de zero.

21. $-\frac{13}{5}$ ou $\frac{13}{5}$.

Desafio p. 122

Falta ou sobra mercadoria?

Sim. A caixa que tem $-\frac{1}{2}$ é compensada com a que tem $+\frac{1}{2}$ e, como, até o momento, há duas caixas com cada uma dessas marcas, não há mercadoria a menos nem a mais.

22.

−3,8	−3,8	3,8	−3,8	−3,8	3,8	−3,8	−3,8	3,8	−3,8

23. −3,4 ou 3,4.

24. Nenhum dos dois, **R** e **S** são coincidentes.

25. $\frac{9}{2} > \frac{5}{2} > 2 > -\frac{9}{4} > -\frac{7}{2} > > -8{,}05 > -8{,}5$

26. O mergulhador.

27. a) $\frac{12}{7}$ c) −0,07
b) 4,9   d) 10,5

28. Respostas possíveis:
a) $-\frac{5}{8}$ c) −3,40300
b) −2

29. a) $-\frac{3}{20}$ b) $+\frac{11}{2}$ c) −9,6

30. a) $-\frac{3}{10}$ b) 0,69

31. a) $\frac{1}{3}$ b) −1,32   c) 12,76

32. $-\frac{23}{2}$

33. 137,6

34. a) $-\frac{1}{12}$ b) −0,295

35. −2,68

36. a) −R$ 40,15
b) −R$ 7,69

37. a) $-\frac{9}{5}$ ou −1,8   c) $-\frac{4}{3}$ ou $-1{,}\overline{3}$
b) $-\frac{17}{30}$ ou $-0{,}5\overline{6}$

38. $-\frac{5}{3}$ ou $-1{,}\overline{6}$

39. a) $-\frac{13}{8}$ ou −1,625

b) $-\frac{109}{10}$ ou −10,9

c) $\frac{3}{4}$ ou 0,75

d) −1,308

e) $-\frac{8}{5}$ ou −1,6

40. a) $-\frac{3}{4}$ ou −0,75   c) −2
b) $-\frac{7}{2}$ ou −3,5   d) 2

Usando a calculadora p. 126

- −7,98   −7,99998
  −7,998   −7,999998
  −7,9998   −7,9999998
- Sim. −7,99999998; −7,999999998; −7,9999999998.
- −8

Desafio p. 127

Qual é a sequência?

- Cada número, a partir do segundo, é: (número anterior) $-\frac{1}{2}$.
- Respostas possíveis: $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$; $-\frac{3}{2}$; −2; $-\frac{5}{2}$.

41. Cinco casas decimais.

42. $-\frac{7}{3}$

43. a) $-\frac{1}{18}$ b) 12,18

44. a) $-\frac{13}{40}$ ou −0,325   c) −68,18
b) 20,14

45. −14,56 ou $-\frac{364}{25}$

46. $\frac{9}{5}$; $-\frac{3}{8}$; $\frac{5}{12}$; −1,25.

47. a) R$ 1 234,26   b) R$ 822,84

48. $\frac{7}{5}$

49. a) $-\frac{4}{25}$ c) $\frac{5}{12}$ e) $-\frac{75}{4}$
b) $-\frac{3}{35}$ d) $-\frac{3}{8}$ f) −2,6

50. −700

51. $-\frac{8}{15}$

52. a) $\frac{18}{35}$ c) 0   e) 0
b) −6   d) Não existe.   f) −8

53. a) $\frac{3}{8}$ c) $-\frac{2}{35}$

b) $-\frac{9}{28}$ d) 1,5

54. $-8{,}5$

55. $\frac{1}{15}$

56. $\frac{3}{5}$ ou 0,6

Desafio p. 131

Verdadeiro ou falso?

- Não. $m = -6$.

57. $-\frac{1}{2}; 3; -\frac{1}{8}$.

58. Respostas possíveis:
$\left(-\frac{9}{13}\right)^{10}; \left(-\frac{9}{13}\right)^{27}$

59. 1

60. 0

61. a) $-\frac{343}{125}$ d) $\frac{100000}{59049}$

b) $-\frac{243}{32}$ e) 0,0001

c) $-0{,}729$ f) 0,0225

62. a) 1 b) $\frac{2}{3}$

63. a) $-\frac{57}{16}$ b) $-\frac{59}{40}$

64. a) $-\frac{1}{512}$ b) -8 c) $\frac{1}{8}$

65. $-\frac{125}{8}$

Usando a calculadora p. 134

- 4; -8; 16
  $(-2)^2; (-2)^3; (-2)^4$
- $(-2)^9$
- $-64{,}36343$

66. a) $-\frac{19}{41}$ c) 400

b) $-\frac{1}{1024}$ d) $-100\,000$

67. 2^{-4}

68. a) $-\frac{9}{4}$ c) $\left(-\frac{4}{25}\right)^{-3}$

b) 25

69. a) $3 \cdot 10^{-5}$ d) $-6 \cdot 10^{-4}$

b) $5 \cdot 10^{-7}$ e) $-16 \cdot 10^{-5}$

c) $92 \cdot 10^{-8}$ f) $-418 \cdot 10^{-6}$

70. $-125 \cdot 10^6$ ou $(-5)^3 \cdot 10^6$

Desafio p. 137

Particularidades das potências de dez

Potência de 10	Valor	Quantidade de casas decimais
10^{-2}	0,01	2
10^{-3}	0,001	3
10^{-4}	0,0001	4
10^{-5}	0,00001	5
10^{-6}	0,000001	6

- ... quanto o valor absoluto do expoente.

71. a)

b) Um corte de 4% no gasto com alimentação.

c) $-7{,}4\%$

72. 11,2 anos.

73. R$ 41,40

Unidade 6 – Equações

1. 1 e B; 2 e A; 3 e C.

2.

Expressão algébrica	Frase
$4 \cdot x + 6$	O quádruplo de um número qualquer adicionado a 6 unidades.
$-2{,}4 \cdot x$	O produto de $-2{,}4$ por um número qualquer.
$x + 3 \cdot x$	Um número qualquer adicionado ao seu triplo.
$2 \cdot x - 5$	A diferença entre o dobro de um número qualquer e 5.

3. Corretas: **a** e **d**.

b) Incorreta. O valor numérico da expressão algébrica $2 \cdot y + 5$, quando atribuímos a **y** o valor $\frac{1}{2}$, é 6.

c) Incorreta. Para $n = 3$, o valor numérico de $2 \cdot n$ é 6 e o valor numérico de n^2 é 9.

4. a) $10 + x$ c) 250 cm^2

b) $5 \cdot (10 + x)$

5. $\frac{13}{6} \cdot x$ ou $\frac{13}{6}x$

6. a) $10 \cdot x + 6$ ou $10x + 6$ (em cm).

b) $15 \cdot x$ ou $15x$ (em cm^2).

7. a) $27 \cdot x$ ou $27x$

b) $-38 \cdot a$ ou $-38a$

c) $25 \cdot n$ ou $25\,n$

8.

Lado (cm)	1	3	6	0,5	1,5	24,8	m
Perímetro (cm)	4	12	24	2	6	99,2	$4 \cdot m$

9. a) $x + 10$ b) $x - 5$

10. $\frac{3}{2} \cdot y$ ou $\frac{3y}{2}$

Desafio p. 147

Da Aritmética à Álgebra

- $a - 10$; 20 cm.
- 6 lados; hexágono.
- 100 cm^2.
- $30 \cdot a - 100$ ou $30a - 100$ (em cm^2).
- 1 250 cm^2.

11. d

12. a) 9 b) 14

13. Sim, porque para $n = 0$ obtemos uma sentença verdadeira.

14. 1 $2 \cdot x = 8$;
2 $3 \cdot x = x + 6$;
3 $3 \cdot x + 5 = 2 \cdot x + 2$;
4 $4 \cdot x + 5 = x + 3$.

a) 3

b) Situação 1: $x = 4$; situação 3: $x = -3$; situação 4: $x = -\frac{2}{3}$.

15. 1,8; -2; 0.

16. I-e; II-c; III-a; IV-f; V-b; VI-d.

17. a) Resposta possível: $\frac{n}{3} - 4 = 9$

b) 39 anos.

18. a) Resposta possível: $45 \cdot p = 216$.

b) 4,8

c) 43,2 m.

19. b

20. R$ 2 010,00

21. 1-B; 2-C; 3-A; 4-D

Desafio p. 151

A história do pote de azeite do emir Omar Ibn Sinan

- 0,5 kg

22. a) Resposta possível: Atribuindo a **x** o valor -3 e verificando se a igualdade resultante é verdadeira.

b) Respostas possíveis: $x + 3 = 0$; $-12x = 36$

23. a) Resposta possível: $4x + 5 = 9$

b) 1 kg

24. a) Respostas possíveis: $6x+7=10$; $6x = 10-7$
b) $\frac{1}{2}$

25. a) 13 c) -3 e) $-\frac{7}{2}$
b) -7 d) $-\frac{3}{5}$ f) 0

26. -64 °C.

27. 39 pontos.

28. a) Resposta possível: $28 \cdot x = 175$.
b) 6,25 cm
c) med $\overline{OR}$ = med $\overline{TA}$ = 56,25 cm; med $\overline{TO}$ = med $\overline{RA}$ = 31,25 cm.

29. 8

30. Resposta pessoal.

31. a) 0 b) 6 c) 20

32. 3. Sim.

33. Menor que 3.

34. Comprimento: 31,5 m; largura: 10,5 m.

35. Cavalo: 70 quilômetros por hora; avestruz: 72 quilômetros por hora.

36. 29 anos.

37. Problema sem solução.

38. 339, 340, 341

39. a) $x = 15$
b) Sim. Taís usou as operações inversas e Milena resolveu equacionando o problema.

Desafio p. 159

Um problema que mais parece uma charada!

- R$ 75,00

40. a) $y = 3$; raízes com inteiros negativos: itens **b** e **c**.
b) $z = -3$; raízes negativas inteiras: $z = -3$ e $x = -17$.
c) $x = -17$
d) $t = -\frac{3}{5}$

41. João: 15 anos; Júlia: 6 anos; Renato: 12 anos.

42. R$ 2 920,00

43. R$ 750,00

44. a) 12 cm. b) 13 cm; 13 cm; 3 cm.

45. a) Bissetriz.
b) São iguais.
c) 145°

46. 10,2 cm; 12,2 cm; 12,2 cm e 15,4 cm.

Desafio p. 163

Qual é o número?

- a
- 1 500

47. a) 76 cm. b) 19 cm. c) 361 cm^2.

48. a) 6 868 km.
b) 23 000 km, aproximadamente.

49. a) $\frac{7}{5}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{1}{5}$

50. Crocodilo: 7 m; jacaré-açu: 6 m; jacaré do Pantanal: 2,5 m.

Desafio p. 164

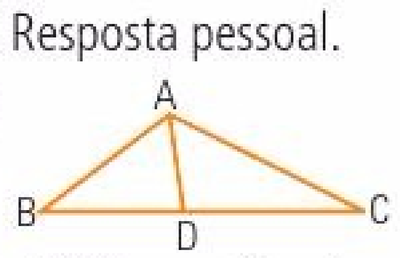
Um caso de amor

- 30 pérolas

Unidade 7 – Aprendendo mais sobre ângulos

1. a) Um ângulo reto.
b) Um ângulo obtuso.
c) Resposta pessoal.

2. a)



b) $\triangle ABD$: acutângulo; $\triangle ADC$: obtusângulo.

3. 42°

4. a) 60° b) 60°

5. a)

Frase	Expressão algébrica
O ângulo $\hat{B}$ mede o triplo do ângulo $\hat{C}$.	$3 \cdot m$
O ângulo $\hat{A}$ mede o dobro do ângulo $\hat{B}$.	$6 \cdot m$
Medida do ângulo $\hat{C}$.	m

b) $m \cdot 3 + m \cdot 6 + m = 180°$ ou $10 \cdot m = 180°$ e $m = 18°$
c) med $(\hat{A}) = 108°$; med $(\hat{B}) = 54°$; med $(\hat{C}) = 18°$

6. a) 45°, 60° e 75°
b) 36°, 54° e 90°
c) 20°, 40° e 120°

7. 68° 21′

8. a) 32° 48′ b) 32° 48′; 99° 12′

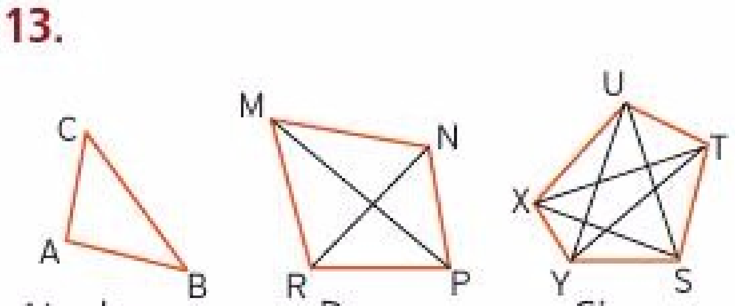
9. a) Sim, porque são raios da circunferência.
b) Isósceles, porque $\overline{AM}$ e $\overline{AN}$ (raios) têm medidas iguais.
c) med $A\hat{N}M$ = med $N\hat{M}A$ = 47° 30′

10. a) 32° b) 96°

11. med $A\hat{C}D = 70°$; med $C\hat{D}A = 53°$; med $D\hat{A}C = 57°$.

12. a) Sim. b) Resposta pessoal.

13.



Nenhuma diagonal. Duas diagonais. Cinco diagonais.

14. 100°

15. 50°; 50°; 130° e 130°.

16. 30°; 30°; 150°; 150°.

17. Resposta pessoal.

18. Quadriláteros regulares: A e C.

19. Resposta possível: Porque não possui todos os lados com medidas iguais.

20. a) Não. c) Complementares.
b) Sim.

21. a) $M\hat{A}R$ e $N\hat{A}P$.
b) Sim, $N\hat{A}P$ e $M\hat{A}R$.
c) Resposta possível: $M\hat{A}N$ e $N\hat{A}P$

22. a) $D\hat{C}A$ b) $E\hat{A}B$ c) $F\hat{B}C$

23. Respostas possíveis:
a) $A\hat{M}B$ e $C\hat{M}D$ c) $N\hat{P}S$ e $P\hat{S}N$
b) $E\hat{F}H$ e $H\hat{F}G$

24. a) Correta.
b) O suplemento de um ângulo agudo é um ângulo obtuso.
c) A medida do suplemento de um ângulo reto é 90°.

25. 71° 15′

26. a) Sim, porque a soma de suas medidas é 90°.
b) 32°15′

27. 105° e 75°

28. a) III b) 26° e 64°

29. 72°

30. a) Ângulos complementares.
b) 71° 30′; 18° 30′.

31. 38° 30′ ou 38,5°

32. 72°

33. 36°

34. 60° e 120°

35. Respostas possíveis: XÔZ e RÔT; YÔZ e SÔT.

36. 54°; 144°

37. 110°

38. 33°

39. a) 8° 30′ b) 30° c) 30°

Desafio p. 183

Triângulos e seus ângulos

- 20°
- 40°, 60° e 80°.
- 60°
- São iguais a 60°.

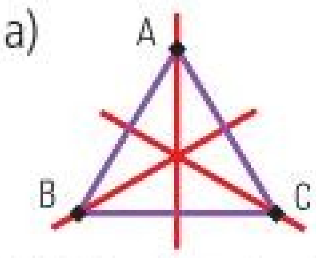
40. Resposta pessoal.

41. As três bissetrizes se cruzam em um mesmo ponto.

42. a) 90°

b) Sim; o ângulo formado pelas bissetrizes de dois ângulos adjacentes e suplementares é sempre um ângulo reto.

43. a)

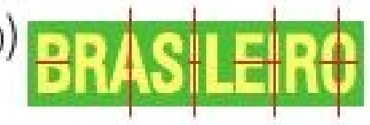


b) Três eixos de simetria.

44. Sim.

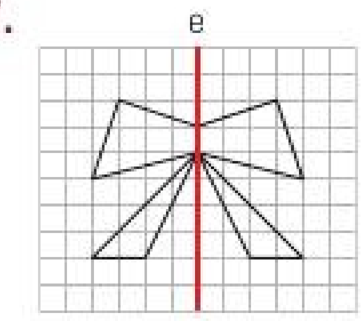
45. a) A, E, I, O, B. c) Sim; I e O.

b)



46. a: um eixo de simetria, c: seis eixos de simetria.

47.



Desafio p. 187

***Kirigami*, a arte de cortar papel**

Unidade 8 – Sistema de equações

1. a) (6, 10); (6, 12); (6, 20); (10, 12); (10, 20); (12, 20).

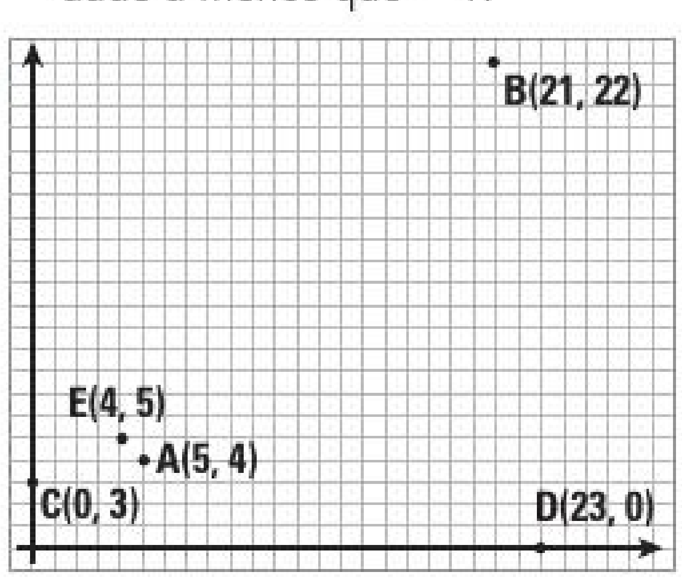
b) Não, porque não existe ficha numerada com 5.

2. $a = 0$

3. a) $(-4, -3)$; $(-3, -2)$; $(-2, -1)$; $(-1, 0)$

b) Não, porque 0 não tem uma unidade a menos que -1.

4.



5. Ⓐ e Ⓑ

6. a) Resposta possível: $2x - y = 48{,}6$

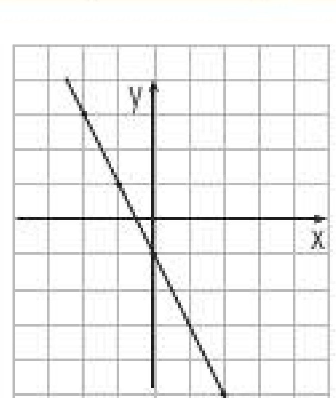
b) 58,2 m

7. b, d

8. a)

x	$2x + y = -1$	y	Solução
-2	$-4 + y = -1$	3	$(-2, 3)$
-1	$-2 + y = -1$	1	$(-1, 1)$
0	$0 + y = -1$	-1	$(0, -1)$
2	$4 + y = -1$	-5	$(2, -5)$

b)



9. Ⓐ

10. Respostas possíveis: (1, 0), (5, 1), $\left(3, \frac{1}{2}\right)$, $\left(0, -\frac{1}{4}\right)$, $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$.

11. a) Sim, pois $\frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$.

b) Não, porque $2 \cdot \frac{1}{2} + 0 = 1 + 0 = 1 \neq -2$.

c) Não, porque $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ não é solução da equação $2 \cdot m + n = -2$.

12. a) (2, 4)

b) $\left(\frac{9}{2}, 6\right)$

13. Ⓑ, Ⓒ

14. a) (3, 2)

b) (10, 2)

c) $\left(-\frac{7}{2}, -\frac{2}{3}\right)$

15. a) Ⓑ

b) 20 empadinhas e 30 coxinhas.

16. a) $(2, -2)$

b) $(2, -2)$

c) $\left(-\frac{7}{2}, -\frac{2}{3}\right)$

17. Renato: 25 anos; Juliana: 5 anos.

18. 75°; 105°

19. 54 anos; 21 anos.

20. 7 cm e 14 cm.

21. 28 rapazes; 30 moças.

22. 15 de R$ 5,00 e 6 de R$ 10,00.

23. Camiseta: R$ 36,00 e calça: R$ 45,00

24. 12 questões.

25. 84 motos; 36 carros.

Desafio p. 202

Salada de frutas

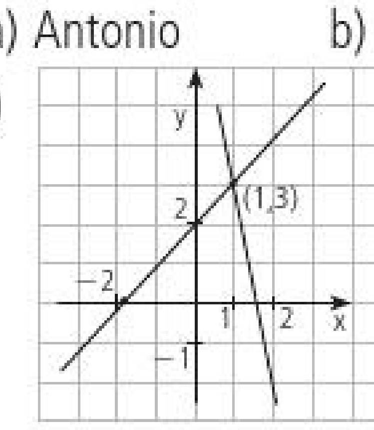
- Banana: 1; morango: 2; maçã: 3; uva: 4; abacaxi: 5.

26. a) (3, 3) c) $(-3, 9)$

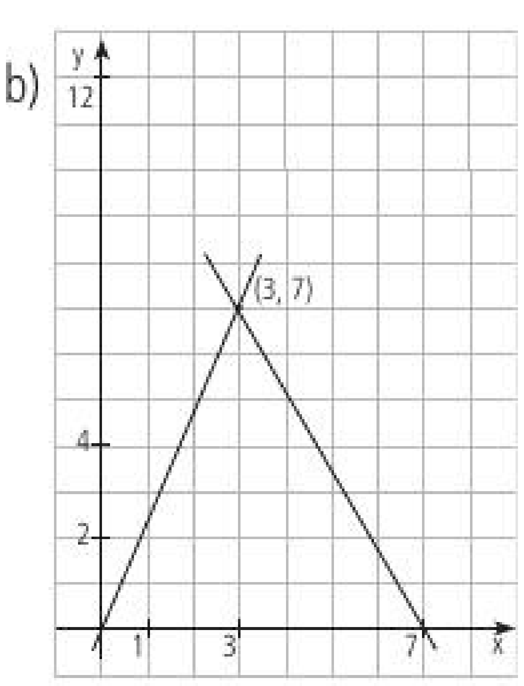
b) $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

27. a) Antonio b) $(1, -3)$

28. a)



b)



29. a) $\left(\frac{3}{5}, -7\right)$

b) Ⓐ: $\left(-4, \frac{3}{10}\right)$; Ⓑ: $(-10, -15)$

30. Sala de jogos: 180 m²; sala de televisão: 50 m².

31. Anita: 28 pontos; Pedro: 14 pontos.

32. a) $(3, -6)$ c) $\left(-3, -\frac{1}{3}\right)$

b) $\left(-\frac{1}{2}, -7\right)$

33. 2 665 cm²

34. 10 dm³

35. 6,6 cm²

36. 32 moedas de R$ 0,10 e 26 moedas de R$ 0,50.

37. Caixa de creme: 180 g; lata de milho: 230 g.

38. (v, v); (v, a); (v, p); (a, a); (a, v); (a, p); (p, p); (p, v); (p, a).

39. a) (1, 1); (1, 2); (1, 3); (1, 4); (1, 5); (1, 6).
b) (2, 1); (2, 2); (2, 3); (2, 4); (2, 5); (2, 6).

Unidade 9 – Razões e proporções

1. Cecília; porque $\frac{2}{3} > \frac{2}{5}$.

2. a) $\frac{8}{12}$ ou $\frac{2}{3}$. b) 2 saques.

3.

m	2	7	90	$\frac{3}{5}$	1,2
n	7	2	100	$\frac{4}{25}$	3,6
$\frac{m}{n}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{15}{4}$	$\frac{1}{3}$

4. 8 vagas.

5. $\frac{48}{60}$ ou $\frac{4}{5}$.

6. 12

7. $\frac{5}{3}$

8. a) 5 litros de água, 5 colheres rasas (sopa) de açúcar, 5 colheres rasas (café) de sal.
b) Resposta possível: reduzindo todas as medidas à metade.

Desafio p. 216
Cigarro × vida

- $\frac{1}{4}$
- $\frac{25}{300}$ ou $\frac{1}{12}$
- $\frac{30}{200}$ ou $\frac{3}{20}$
- Respostas possíveis: Diminuir os riscos de infarto e de câncer de pulmão; melhorar a respiração e o paladar.

9. 500 habitantes/km².

10. Aproximadamente 1 345,54 hab/km²; 3 714,29 hab/km².

11. 11 300 g/dm³.

12. a) 56 km/h. c) 17,92 km/h.
b) 44,8 km/h.

13. 200 cm³.

14. 96,6 kg.

15. 34,72 m/s e 33,78 m/s.

16.

Material	Densidade (g/cm³)	Massa (g)	Volume (cm³)
Cobre	8,9	1780	200
Álcool	0,8	264	330
Mercúrio	13,6	40,8	3

17. a) 1 224 000 m/h. b) 340 m/s.
c) Não, ouve-se a trovoada depois do relâmpago porque a velocidade da luz é maior do que a velocidade do som.

18. a) 24 cm; 36 cm².
b) 48 cm; 144 cm².
c) As razões são iguais.
d) Não.

19. 0,24 g/cm³.

20. a) 1 700 km; 2 550 km.
b) 840 km/h.

Usando a calculadora p. 220

- Norte: 4,12 hab/km²; Nordeste: 34,13 hab/km²; Sudeste: 86,87 hab/km²; Sul: 47,63 hab/km²; Centro-Oeste: 8,75 hab/km².
- Sudeste
- Norte

21. a) $\frac{15}{50}$ ou $\frac{3}{10}$ b) $\frac{30}{100}$ ou 30% c) Renata.

22. 56%; 62%; 87,5%; 56,25%; 8%; 72,5%; 13,6%; 90%; $\frac{1}{20}$ ou 0,05; $\frac{1}{10}$ ou 0,1; $\frac{100}{100}$ ou 1; $\frac{3}{8}$ ou 0,375.

23. 2

24. $\frac{3}{10}$; 0,3

25. 72 questões.

26. 37,5%

27. a) 30% b) 70%

28. a) 65% b) 35%

29. a) $\frac{4}{6}$ ou $\frac{2}{3}$
A soma das medidas dos diâmetros de duas moedas é igual à soma das medidas do comprimento de 3 clipes.
b) 12 clipes.
c) 9 clipes.
d) 12 moedas.

30. a) $\frac{3}{2}$
b) 9 ovos.
c) $\frac{9}{6}$ ou $\frac{3}{2}$
d) Sim, porque $\frac{3}{2}$ ou $\frac{9}{6}$ são razões iguais.

31. a) 12 e 16; 32 e 6.
b) Resposta possível: Sim; $\frac{6}{16} = \frac{12}{32}$.

32. Sim; simplificando $\frac{21}{24}$, temos $\frac{7}{8}$.

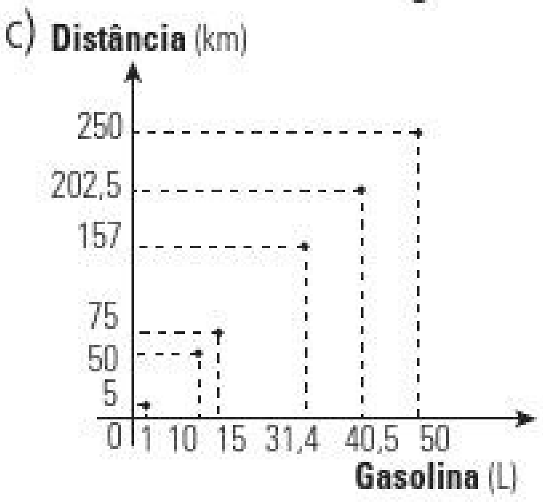
33. Acertaram: Berenice e Jandira. Augusto errou porque as duas razões não são iguais. Mário errou porque, na proporção que escreveu, 5 e 36 são os meios e 9 e 20 são os extremos.

34. A, C

35. a)

Gasolina (L)	1	10	15	31,4	40,5	50
Distância (km)	5	50	75	157	202,5	250

b) Resposta possível: $\frac{1}{5}$
c)



36. a) Sim. b) Não. c) Sim.

37. $\frac{3}{8} = \frac{9}{24}$; $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$; $\frac{7}{2} = \frac{14}{4}$; $\frac{10}{25} = \frac{2}{5}$; $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$; $\frac{10}{16} = \frac{5}{8}$.

38. Respostas possíveis para todos os itens.
a) med $\overline{MN}$ = 4 cm, med $\overline{PQ}$ = 12 cm.
b) $\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$

39. 5

40. Três questões.

41. 54 meninos.

42. 3000 L de álcool.

43. 280 jovens, entre moças e rapazes.

44. 35 questões.

45. a) 1 : 2
b) Resposta possível: Não, porque os lados do retângulo B não são proporcionais aos do retângulo D.
c) A razão de redução é menor que 1.

46. 1 : 200

47. 1150 km.

48. a) 26,25 m². b) Resposta pessoal.

Desafio p. 234

Bancando o arquiteto

Resposta pessoal.

49. a) 42

b) Resposta possível: $\frac{54}{9} = \frac{42}{7}$

c) Sim.

d) $\frac{7}{9} = \frac{21}{27}$

50. a) 44 b) 15 c) 8

51. a) -3 b) -24

52. 4

53. Cláudio: 32 anos; Alice: 20 anos.

54. Renato: R$ 5 800,00;
Paulo: R$ 14 500,00.

55. Juca: 42 anos; irmão: 35 anos.

56. Comprimento: 50 m; largura: 60 m.

57. R$ 1 552,50; R$ 2 587,50.

58. $\frac{98}{200}$ ou $\frac{49}{100}$.

59. a) $\frac{10}{24}, \frac{17}{38}, \frac{21}{40}, \frac{42}{96}$; não.

b) 52,5%

c) 43,75%. d) $\frac{1}{2}$

60. a) A, M, O ou R. c) 1 possibilidade.

b) 4 resultados. d) $\frac{1}{4}$

Desafio p. 237

Preto, vermelho ou azul?

- Preto; $\frac{3 \text{ bolas pretas}}{5 \text{ bolas}} = \frac{3}{5}$; a probabilidade de sair a bola preta é maior do que a de saírem as das outras cores.

Unidade 10 – Grandezas proporcionais

1. a) $\frac{180}{12} = 15$ c) 15

b) $\frac{720}{48} = 15$

2.

Volume (L)	2,5	6,1	9,2	10
Preço (R$)	5,00	12,20	16,40	20,00

3. a) Triplica.

b) $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

c) Sim, porque a quantidade de tecido e a quantidade de uniformes aumentam na mesma razão: $\frac{5}{15} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

4. a) Proporcionalidade direta.

b) 12

5. a) Divide-se por 3 e passa de 12 para 4.

b) Inversamente proporcionais.

c) 3,2 minutos ou 3 min 12 s.

6.

Funcionários (número)	Quantia recebida por funcionário (em R$)
2	5 000,00
4	2 500,00
8	1 250,00
10	1 000,00
16	625,00

7.

Nº de acertadores	1	2	3	4	5	10
Quantia (R$)	81 000	40 500	27 000	20 250	16 200	8 100

8. 57 min 36 s

9. 125 ladrilhos.

10. 59 min 12 s

11. 675 km/h

12. 180 caixas.

13. 6 dias.

14. 9 h por dia.

15. R$ 2 520,00

16. 9 horas.

17. 2 025 m.

18. 9 p.s.i.

19. 12 dias.

20. 25 páginas.

21. 1 h 30 min.

22. 12 dias.

23. a) Resposta possível: 15 metalúrgicos, trabalhando 4 horas por dia.

b) Resposta possível: Serão produzidos 5 carros.

24. a) 946 728 000 km.

b) 243 dias e 12 horas.

25. Adriana: R$ 500,00; Márcio: R$ 900,00.

26. a) Largura: 15 cm e comprimento: 24 cm.

b) 360 cm^2

27. Antônio: R$ 4 800,00;
Marcelo: R$ 3 600,00.

28. Juca: R$ 210,00; Marta: R$ 300,00 e Daniel: R$ 390,00.

29. Leila: R$ 1 600,00; Jorge: R$ 1 200,00.

30. 3 600 m^2.

31. Primeiro: R$ 1 500,00; segundo: R$ 1 200,00 e terceiro: R$ 2 500,00.

32. Regina: R$ 3 000,00; Marcelo: R$ 3 500,00 e Márcio: R$ 2 100,00.

33. R$ 54 000,00

Unidade 11 – Matemática do comércio e das finanças

1. a) 210 objetos. c) 21 m^2

b) R$ 6 200,00 d) R$ 96,00

2. Respostas possíveis:

Fração ou decimal	$\frac{2}{100}$	$\frac{18}{100}$	0,5	0,854	0,06
Usando %	2%	18%	50%	85,4%	6%

3. b, c, e, f.

4. 12,5%

5. 8%

6. R$ 600,00

7. Aumento de 8,5%.

8. a) R$ 60,00

b) Desconto: R$ 6,30; gasto: R$ 35,70.

c) R$ 130,00

9. R$ 283,20

10. R$ 61,60

Desafio p. 265

Fazendo negócios

- Teve prejuízo de R$ 20,00.

11. a) R$ 7 200,00 b) R$ 1 440,00

12. a) R$ 1 000,00 b) R$ 4 000,00

13. a) R$ 16 480,00 b) 20,6%

14. 18%

15. a) R$ 324,00 c) R$ 1 848,00

b) R$ 648,00

16. R$ 2 375,00

17. R$ 52 500,00

18. R$ 18 200,00

19. 6%

20. R$ 720,00

21. Não foi aprovado porque sua média foi 5,83...

22. a) R$ 28,60 b) Nenhum.

c)

Tipo de camiseta	Preço unitário (R$)	Camisetas vendidas	P – M (R$)
Regata	24,00	220	– 4,60
Manga curta	29,00	180	0,40
Manga comprida	38,00	100	9,40

Sim. Porque o preço unitário da camiseta regata é menor do que o preço médio do total de camisetas.

23. R$ 25,70

Indicação de leituras complementares para os alunos

BERLOQUIN, P. *100 jogos lógicos*. 5. ed. Lisboa: Gradiva, 2002. Coleção O Prazer da Matemática.

______. *100 jogos numéricos*. Lisboa: Gradiva, 1999. Coleção O Prazer da Matemática.

BOLT, B. *Actividades matemáticas*. Trad. Leonor Moreira. Lisboa: Gradiva, 1991. Coleção O Prazer da Matemática.

______. *Mais actividades matemáticas*. Trad. Luisa Carreira. Lisboa: Gradiva, 1992. Coleção O Prazer da Matemática.

CÂNDIDO, Suzana Laino. *Formas num mundo de formas*. São Paulo: Moderna, 1999. Coleção Vivendo a Matemática.

GUELLI, Oscar. *A invenção dos números*. 9. ed. São Paulo: Ática, 1998. Coleção Contando a História da Matemática.

______. *Equação*: o idioma da Álgebra. 11. ed. São Paulo: Ática, 1999. Coleção Contando a História da Matemática.

______. *Jogando com a Matemática*. 8. ed. São Paulo: Ática, 2005. Coleção Contando a História da Matemática.

______. *História de potências e raízes*. 9. ed. São Paulo: Ática, 2002. Coleção Contando a História da Matemática.

______. *Números com sinais*: uma grande invenção. 3. ed. São Paulo: Ática, 2013. Coleção Contando a História da Matemática.

GUZMÁN, M. de. *Contos com contas*. Trad. Jaime Carvalho e Silva. Lisboa: Gradiva, 1991. Coleção O Prazer da Matemática.

______. *Aventuras matemáticas*. Trad. João Filipe Queiró. Lisboa: Gradiva, 1997. Coleção O Prazer da Matemática.

IMENES, Luiz Márcio. *Brincando com números*. 11. ed. São Paulo: Scipione, 2004. Coleção Vivendo a Matemática.

______. *Geometria das dobraduras*. 7. ed. São Paulo: Scipione, 2001. Coleção Vivendo a Matemática.

______. *Problemas curiosos*. 7. ed. São Paulo: Scipione, 1999. Coleção Vivendo a Matemática.

IMENES, Luiz Márcio; LELLIS, Marcelo. *Geometria dos mosaicos*. 12. ed. São Paulo: Scipione, 2000. Coleção Vivendo a Matemática.

______. *Os números na história da civilização*. 12. ed. São Paulo: Scipione, 2006. Coleção Vivendo a Matemática.

IMENES, Luiz Márcio; JAKUBO, José; LELLIS, Marcelo. *Álgebra*. 16. ed. São Paulo: Atual, 2004. Coleção Pra que Serve a Matemática?

______. *Geometria*. 16. ed. São Paulo: Atual, 2004. Coleção Pra que Serve a Matemática?

______. *Números negativos*. 20. ed. São Paulo: Atual, 2004. Coleção Pra que Serve a Matemática?

______. *Ângulos*. 17. ed. São Paulo: Atual, 2005. Coleção Pra que Serve a Matemática?

MACHADO, Nilson José. *Os poliedros de Platão e os dedos da mão*. 7. ed. São Paulo: Scipione, 1999. Coleção Vivendo a Matemática.

______. *Polígonos, centopeias e outros bichos*. 9. ed. São Paulo: Scipione, 2000. Coleção Vivendo a Matemática.

______. *Lógica? É lógico!* 10. ed. São Paulo: Scipione, 2006.

ROSA NETO, Ernesto. *Em busca das coordenadas*. 11. ed. São Paulo: Ática, 2001. Coleção A Descoberta da Matemática.

SILVA, Maria Cecília Costa e. *Padrões numéricos e sequências*. São Paulo: Moderna, 2000.

MANUAL DO PROFESSOR
Orientações Didáticas

Colegas,

Nesta edição da coleção para o Ensino Fundamental de 6º ao 9º ano, destacamos as múltiplas aplicações da Matemática nas ciências e no cotidiano, enriquecidas com fotografias e ilustrações. O desenvolvimento dos conceitos enfoca ora os acontecimentos históricos da Matemática, ora a resolução de situações-problema. Com uma abordagem mais atualizada, esperamos auxiliar os alunos a vencer o desafio de aprender Matemática e, dessa maneira, mudar a imagem estereotipada que se construiu sobre essa disciplina – "uma ciência para **poucos**" –, além de criar condições para a inserção dos alunos em um mundo marcado por mudanças sociais, econômicas, científicas e tecnológicas.

Procuramos também um projeto gráfico que proporcionasse um visual mais arejado e que tornasse a leitura dos textos mais eficiente, o que contribui para uma melhoria no aprendizado.

A abordagem dos conceitos é feita em espiral, explorando os temas e retomando-os ao longo dos quatro livros desta coleção. Às seções já existentes, como **Leitura**, **Troquem ideias e resolvam**, **Revisão cumulativa e testes**, foram acrescidas as seções **Para refletir e responder**, **Desafio** e **Investigue e explique**. Dessa forma, estamos certas de que o interesse e o envolvimento dos alunos, quando instigamos sua curiosidade, desafiando-os com problemas, convidando-os a raciocinar e a resolvê-los, levarão a um melhor desempenho e ao gosto por essa disciplina, tão importante no mundo de hoje.

Esperamos que esta coleção contribua para desenvolver nos alunos uma postura que os leve a se tornarem solucionadores de problemas, formuladores de hipóteses e questões, para que tenham chance de vencer desafios com os quais certamente se defrontarão durante e após os estudos e que demandam a utilização do raciocínio e do conhecimento matemático.

Acreditamos que tanto os professores quanto os alunos conseguirão otimizar a proposta desta coleção e alcançarão os objetivos maiores – melhorar o **pensar**, o **falar**, o **escrever** e o **produzir** Matemática.

Críticas que possam enriquecer esta proposta são bem-vindas, para que, juntos, busquemos novos caminhos para o ensino e o aprendizado da Matemática.

As autoras

Sumário

O que apresentamos neste Manual

As orientações apresentadas neste Manual pretendem torná-lo um material de apoio prático e eficiente, claro e objetivo ao trabalho docente a ser desenvolvido não só em períodos de planejamento escolar, mas também ao longo do ano em sala de aula. Elas visam, também, contribuir para o desenvolvimento pedagógico do dia a dia do professor, esclarecendo os pressupostos metodológicos adotados, apresentando informações, textos de aprofundamento e sugestões de atividades que possam enriquecer o trabalho do professor.

As orientações foram organizadas da seguinte forma:

- Pressupostos metodológicos;
- Conteúdos deste Manual;
- Estrutura da obra;
- Blocos de conteúdos e orientações didáticas;
- Avaliação em Matemática;
- Conteúdos propostos em cada ano;
- Indicações para a formação continuada do professor;
- Resolução de algumas atividades.

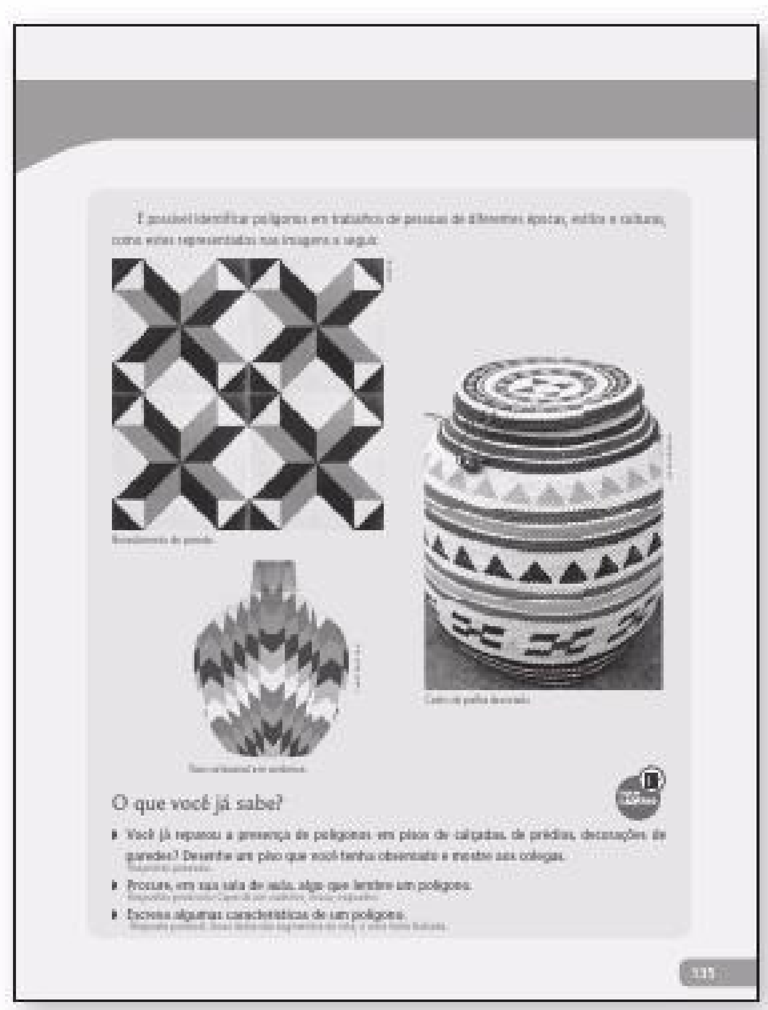
Pressupostos metodológicos

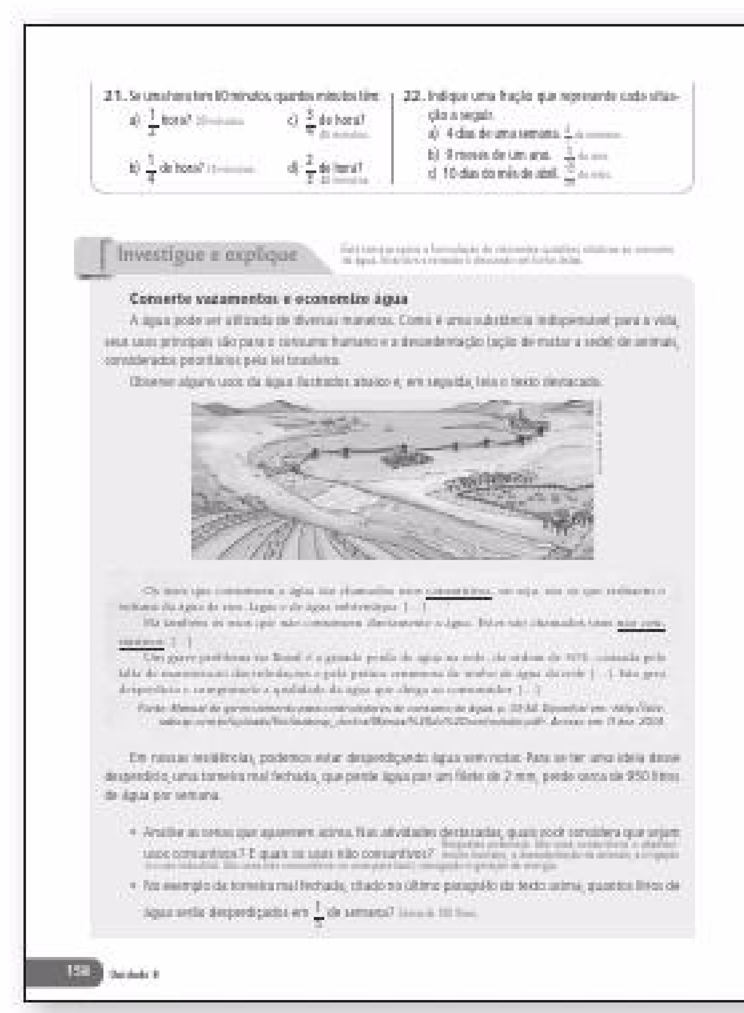
É consenso que não existe uma única metodologia identificada como a melhor para o ensino de qualquer disciplina e, em particular, da Matemática. Existem, sim, diversas possibilidades de trabalho em sala de aula. Mas, para que os alunos aprendam Matemática com significado, é importante que eles estabeleçam conexões entre os diferentes temas matemáticos e também entre estes e as demais áreas do conhecimento de maneira que possam mobilizar esses conhecimentos em situações escolares e no dia a dia.

Com esse propósito, esta coleção aborda temas relacionados a saúde, meio ambiente, sustentabilidade e pluralidade cultural, que são explorados e problematizados de forma a conduzir à reflexão, o que pode contribuir para a formação social e cultural e desenvolver a capacidade de exercício da cidadania.

A compreensão de questões sociais relacionadas à saúde, ao saneamento básico e às condições de trabalho, assim como o acompanhamento do próprio desenvolvimento físico, são alguns dos assuntos que poderão ser trabalhados para alcançar tal objetivo. É muito importante também o conhecimento de problemas envolvidos em questões ambientais, pois isso proporciona a conscientização e uma visão mais clara deles, além da tomada de decisões e de possíveis intervenções.

Esses temas, em geral, podem ser extraídos de jornais, revistas, internet e ampliados de acordo com o interesse dos alunos. Convide-os a selecionar os temas, permitindo que assumam responsabilidades e atuem de forma participativa, opinando, resolvendo conflitos e propondo possíveis soluções para os problemas encontrados.





Esta coleção procura desenvolver uma metodologia que almeja ser eficaz e atual, tanto em relação aos **conteúdos** do 6º ano ao 9º ano, quanto em relação à **abordagem metodológica** e às **atividades propostas**. Essa metodologia procura contemplar as necessidades dos alunos, tendo como pressupostos básicos os conhecimentos matemáticos e não matemáticos de que dispõem.

Espera-se que os alunos caminhem em direção a um processo constante de elaboração e reelaboração de conceitos, descoberta e redescoberta de conhecimentos matemáticos e de desenvolvimento de competências para analisar um problema ou desafio e tomar as decisões necessárias à sua resolução.

Com a elaboração e a reformulação desta coleção, procura-se responder a algumas questões:

- Qual Matemática é significativa na aprendizagem?
- O que é relevante no processo ensino-aprendizagem?
- Qual o encaminhamento metodológico?

Qual Matemática é significativa na aprendizagem?

A coleção tem como pressuposto que o conhecimento é resultado da compreensão e da vivência. Além disso, a Matemática também é resultado da resolução de situações-problema.

Os acontecimentos ao longo da história das ciências mostram que a produção teórica tem suas raízes nos problemas que surgem na prática, no dia a dia.

Atualmente, muitos matemáticos produzem conhecimentos puramente teóricos, mas não resta dúvida de que, muitas vezes, esses conhecimentos também subsidiam as soluções práticas, ainda que para o aluno isso venha a ocorrer apenas no futuro.

Um dos objetivos deste trabalho é a formação de um indivíduo autônomo, que externe suas opiniões e seja criativo, fruto da sua **capacidade** de pensar, raciocinar e resolver problemas. Busca-se a formação de um indivíduo que se apropria de um conhecimento matemático e usa esse conhecimento para **ler** o mundo à sua volta, **interferir** positivamente nesse mundo, **produzir** novos conhecimentos e também – por que não? – **produzir Matemática**, pois a Matemática tem pontos de conexão com todas as áreas do conhecimento humano, sejam elas de natureza física ou social.

O que é relevante no processo ensino-aprendizagem?

Partindo da premissa de que cabe ao professor pensar o planejamento didático das atividades e a avaliação do trabalho, em suas circunstâncias específicas, a coleção apresenta uma proposta metodológica em que:

- a técnica é desenvolvida com o apoio da **compreensão** e da **construção** dos procedimentos e conhecimentos matemáticos, aliadas a uma proposta metodológica que pode ser adequada a cada realidade;
- a resolução de problemas tem um destaque especial por meio da resolução de desafios e situações-problema;
- investe-se no desenvolvimento de algumas **ideias fundamentais**, como:
  - **padrões, regularidades e generalizações** – padrões que se repetem em fenômenos físicos, nas formas geométricas, em números e na Álgebra, resultando em propriedades matemáticas;
  - **proporcionalidade** – fundamental na análise da interdependência da variação de uma grandeza em relação a outra, em ampliações e reduções de figuras, mapas, plantas e especificamente no estudo da semelhança entre figuras;
  - **equivalência** – presente no estudo de números racionais, de equações, de áreas ou de volumes de figuras planas ou espaciais;
  - **ordem** – referência básica nos conjuntos numéricos, na construção de algoritmos, na representação geométrica de números;
  - **combinatória** – aparece especificamente na abordagem do princípio multiplicativo, nos problemas de contagem e de combinação. É um estudo inicial do bloco Estatística e Probabilidade.

Além disso, é recomendação atual que os alunos aprendam a **linguagem matemática** e seus **símbolos** e desenvolvam um procedimento de **comunicação de ideias matemáticas** por meio deles. Esse é um pressuposto básico que deverá compor qualquer planejamento conectado às tendências atuais em relação ao ensino e à aprendizagem da Matemática.

Qual o encaminhamento metodológico?

Uma listagem de conteúdos por ano não garante a apreensão desses conteúdos por parte da maioria dos alunos. Assim, a coleção apresenta uma proposta que poderá complementar o que já é feito em sala de aula, pois é possível adaptar à sua realidade.

Além disso, empregando uma linguagem simples e acessível, propõe um tratamento diferenciado tanto para os novos conteúdos como para os tradicionais, como os pontos destacados a seguir.

PROBLEMAS E OPERAÇÕES – cada tema é introduzido com a proposta de uma ou mais situações-problema, que têm como objetivo despertar o interesse do aluno para o assunto. Esse é um momento de socialização do conhecimento e de participação ativa do aluno na construção dos conceitos. Sempre que possível, são situações-problema que fazem parte da realidade dos alunos e que poderão ser adaptadas de acordo com a classe.

Assim, exploramos o significado das operações de várias maneiras.

Ao estudarmos os números naturais ($\mathbb{N}$), sistematizamos o conhecimento que os alunos adquiriram nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

No trabalho com números inteiros ($\mathbb{Z}$), utilizamos a representação geométrica na reta numerada como auxiliar na compreensão e construção das regras de sinais das operações, a partir de situações-problema concretizadas por essa representação.

No estudo dos números racionais ($\mathbb{Q}$), recorremos à composição e à decomposição de figuras, enfatizando o todo-referência ou inteiro, fundamental para a compreensão das novas regras de cálculo com números racionais na forma de fração. Damos destaque especial à multiplicação e à divisão, em que apenas regras sem o significado não resultam em aprendizagem. Não há necessidade de enfatizar cálculos trabalhosos com a forma de fração, mas é preciso um trabalho mais longo e profundo com a escrita numérica decimal. Isso é decorrente do desenvolvimento da tecnologia nos tempos atuais.

Iniciamos o estudo dos números reais (ℝ) com a exploração do teorema de Pitágoras, em uma proposta que percorre o caminho histórico do surgimento dos números irracionais. Recorremos mais uma vez à representação geométrica na reta numerada de números como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$, que têm uma representação decimal infinita e não periódica.

GEOMETRIA E MEDIDAS — mereceram um tratamento exploratório e bastante intuitivo no início e uma sistematização gradativa dos conceitos e das propriedades, visando a uma formalização ao longo dos quatro livros. Exploramos inicialmente objetos e formas do espaço e mais tarde trabalhamos com a Geometria Euclidiana Plana, sem explicitar os axiomas. É uma proposta na qual as propriedades surgem de um trabalho empírico que tem como pressuposto o axioma da medição.

ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE — foram abordadas, no início, partindo dos conhecimentos que os alunos possuem sobre o assunto, adquiridos por intermédio dos meios de comunicação. Em cada volume, esse conteúdo foi distribuído e interligado aos conteúdos propostos e às questões relacionadas aos Temas Transversais, como políticas públicas de saúde e educação, questões ambientais, consumo, migração e família.

O conteúdo foi desenvolvido de modo que os alunos percebam a importância desse tema atualmente, uma vez que favorece a integração com outras áreas e disciplinas.

ÁLGEBRA — iniciamos com a Pré-Álgebra no livro do 6º ano e a abordamos de forma gradativa a partir do volume do 7º ano, quando os alunos estão mais preparados para compreender e trabalhar uma Matemática mais formal. Demos ênfase à Álgebra como **generalização** da Aritmética, como **ferramenta** importante na resolução de problemas usando equações como **linguagem** que expressa com precisão o desenvolvimento do raciocínio no processo de resolução de um problema. É importante lembrar que o ser humano levou muitos séculos para generalizar a Aritmética e criar a Álgebra, mas, depois que ela foi criada, houve um grande avanço na Matemática e nas demais ciências.

CÁLCULO MENTAL, ESTIMATIVAS, ARREDONDAMENTOS E APROXIMAÇÕES — são abordados para oferecer aos alunos instrumentos e procedimentos de cálculo nas situações mais variadas do dia a dia e, também, para que possam desenvolver e sistematizar estratégias de verificação e controle de resultados. Pela diversidade dos caminhos possíveis, o uso frequente de procedimentos de cálculo mental, estimativas, arredondamentos e aproximações permite que os alunos desenvolvam ferramentas para manipular as propriedades das operações, apropriar-se delas e desenvolver instrumentos necessários às aquisições mais formalizadas.

Esperamos que esta proposta lhe permita — tendo diagnosticado sua realidade — aprofundar todas as ideias ou dar prioridade a uma em relação a outra. Cabe a você, professor, dirigir sua prática de sala de aula, tendo esta coleção como um material didático dentre outros, para que possa contribuir no processo de construção do conhecimento matemático dos alunos.

O conteúdo deste Manual

Aulas tradicionais versus *alunos sujeitos de sua aprendizagem*

Além das observações pedagógicas indicadas no Livro do Professor, expomos neste Manual:

- **estrutura da obra**, em que apresentamos cada seção do livro com comentários sobre suas funções;
- **blocos de conteúdo** e **orientações didáticas**, em que são abordados em espiral os temas desenvolvidos, ou seja, retomando-os várias vezes em níveis diferenciados de aprofundamento. Acreditamos que dessa forma os alunos poderão elaborar e reelaborar os conceitos, aprimorando seus conhecimentos matemáticos. Expomos, também, comentários sobre os pressupostos teóricos e algumas indicações metodológicas que poderão ser utilizadas com sucesso;
- **avaliação em Matemática**, em que apresentamos concepções teóricas e práticas sobre o tema, dentro de uma visão atual;
- **conteúdos propostos em cada ano,** em que sugerimos as expectativas de aprendizagem para cada unidade; orientações didáticas; resolução das seções **Desafios**, **Troque ideias e resolva, Investigue e explique**; textos de aprofundamento; sugestões de atividades complementares com subsídios específicos que esperamos que se somem ao seu trabalho;
- **indicações para a formação continuada do professor** e **contribuições para a ação em sala de aula**. Pensando na formação do educador como um processo que não termina com a graduação, mas se constitui em um contínuo aperfeiçoamento, recomendamos algumas obras de referência que contribuirão para sua prática de ensino, bem como algumas leituras complementares para os alunos.

Estrutura da obra

Para viabilizar esta proposta, cada volume da obra é composto por unidades: no volume 6, por exemplo, existem 12 unidades. Cada unidade começa com uma abertura em página dupla. De modo geral, na página par é apresentada uma imagem e a página ímpar é composta por um pequeno texto, ambos relacionados ao assunto que será desenvolvido, e a seção "O que você já sabe?".

No decorrer dessas unidades, os assuntos foram agrupados em **capítulos** e você encontrará as seções a seguir:

- Para refletir e responder
- Fazer e aprender
- Usando a calculadora
- Investigue e explique
- Troquem ideias e resolvam
- Exercícios complementares
- Desafio
- Leitura
- Revisão cumulativa e testes

Primeira seção de cada unidade

A seção **O que você já sabe?** é proposta na página ímpar após um pequeno texto e apresenta questões que têm como objetivo principal proporcionar espaço para que os alunos explicitem conhecimentos de que dispõem sobre o tema que será tratado ao longo da unidade. Essa seção poderá ser desenvolvida oralmente em forma de painel de discussões. Esse momento propicia um diagnóstico do conhecimento prévio dos alunos e, por consequência, um ajuste do seu planejamento, caso seja necessário.

Desenvolvimento dos conceitos

De modo geral, os conceitos matemáticos são abordados por meio de situações-problema que envolvem temas do dia a dia em uma seção denominada **Para refletir e responder**. Acreditamos que, dessa forma, propiciam-se a reflexão e a discussão sobre o conceito em questão. As resoluções desses problemas constituem o ponto de partida para a construção dos conceitos.

Em um primeiro momento, os alunos são convidados a opinar sobre as situações propostas. Se preferir, peça aos alunos que leiam os problemas com antecedência em casa, ou que façam uma leitura silenciosa em sala de aula, e depois promova uma discussão, encerrando com uma síntese do tema tratado.

Em seguida, o aluno encontrará um pequeno texto, escrito em uma linguagem clara e acessível, com as conclusões sobre o conceito que foi abordado.

Acreditamos que melhorar a capacidade de ler, interpretar e resolver problemas faz parte da construção do conhecimento matemático, além de contribuir para o desenvolvimento da comunicação de ideias matemáticas. Além disso, explorar assuntos do interesse dos alunos despertará sua curiosidade, envolvendo-os na busca por novos conhecimentos e enriquecendo os já adquiridos.

Vamos lembrar que, nessa fase de aprendizagem, os conceitos matemáticos não são necessariamente expressos em uma linguagem formal, podendo-se usar um vocabulário mais próximo e acessível, sem abrir mão do rigor matemático necessário. Além disso, esses conceitos serão retomados e consolidados ao longo do período escolar.

Fazer e aprender

Nessa seção, apresentamos exercícios de fixação, de aplicação da teoria estudada e atividades dispostas em grau crescente de complexidade.

Sempre que possível, acompanhe os alunos no momento em que estiverem resolvendo essas atividades e problemas. Dessa observação resultarão indicadores dos avanços quanto à apropriação dos conhecimentos, que contribuirão para uma avaliação qualitativa e para o encaminhamento de seu trabalho.

Usando a calculadora

Nessa seção, a calculadora é utilizada como uma ferramenta de apoio para a resolução de atividades que envolvem problemas significativos, propostos com o objetivo de introduzir e consolidar conceitos e procedimentos.

Além de ser útil na resolução de problemas relacionados a situações reais, há outras vantagens no uso desse equipamento:

- constatar que o cálculo, por si só, não é importante, mas uma parte fundamental na resolução de um problema;
- explorar propriedades numéricas;
- observar padrões ou regularidades numéricas;
- utilizar diferentes métodos de cálculos numéricos, como na resolução de equações;
- possibilitar a comparação entre procedimentos e o levantamento de hipóteses.

Investigue e explique

Essa seção tem como objetivo principal explorar situações de natureza investigativa, em que os estudantes são solicitados a formular conjecturas sobre o que está sendo investigado.

"As investigações matemáticas envolvem, naturalmente, conceitos, procedimentos e representações matemáticas, mas o que mais fortemente as caracteriza é este estilo de conjectura-teste-demonstração".

Fonte: PONTE, BROCARDO & OLIVEIRA, 2006, p. 10.

A realização de uma investigação matemática envolve quatro momentos principais:

- reconhecimento da situação;
- formulação de conjecturas;
- realização de testes;
- argumentação, demonstração e avaliação do trabalho realizado.

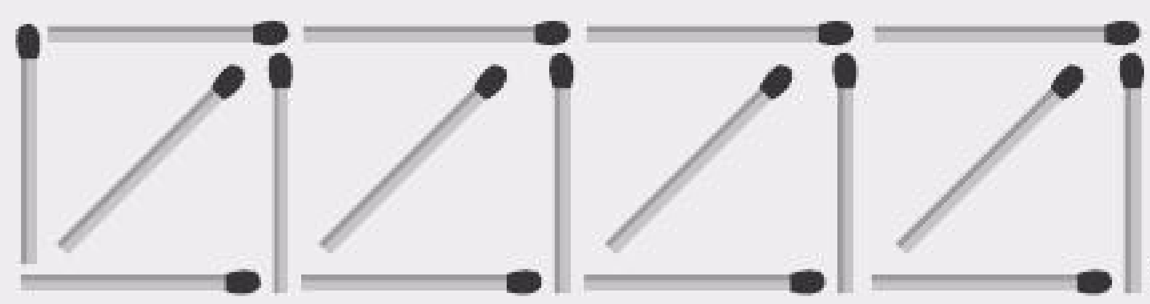
Veja um exemplo de uma situação de investigação com uma atividade proposta na página 19, do Volume do 6º ano.

Investigue e explique

Palitos e quadrados

Junte-se a um colega e reflitam sobre a questão a seguir:

Com 17 palitos de fósforo usados, pode-se montar quadrados com uma de suas diagonais como mostra a figura.



BIS

- Procedendo da mesma maneira, quantos quadrados como esses podem ser montados usando 85 palitos de fósforo? Expliquem como chegaram a esse resultado. Resposta possível: 21 quadrados.

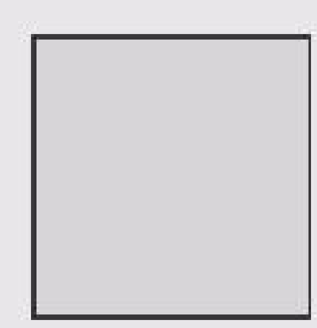
Troquem ideias e resolvam

Essas seções aparecem intercaladas às atividades. Nelas, as atividades propostas assumem um caráter dinâmico e de socialização, uma vez que possibilitam uma discussão em grupo (ou com a classe) em que ocorram troca de conhecimentos e descobertas entre os alunos.

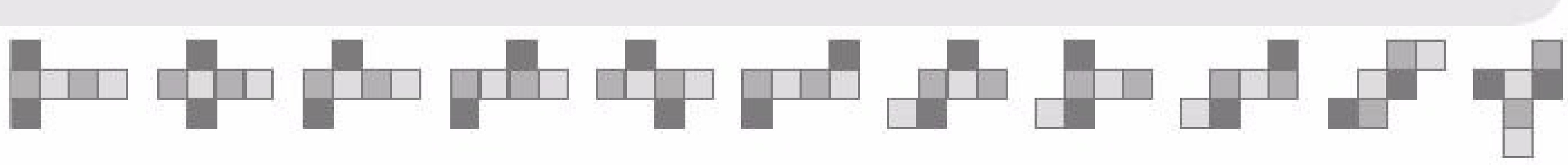
Um exemplo que ilustra essa seção pode ser visto na página 43 do volume do 6º ano.

Troquem ideias e resolvam

Junte-se a um colega e experimentem:



- Desenhem 6 quadrados em folhas avulsas e, usando a tesoura, obtenham recortes como este.
- Montem um cubo, utilizando os recortes. Usem fita adesiva para fechá-lo.
- Mudando a posição dos recortes quadrados, podemos obter diversas planificações do cubo. É possível obter 11 planificações diferentes.
- Desenhem, em uma folha quadriculada, todas as planificações possíveis de um cubo. Usem três cores em cada uma e pintem da mesma cor as faces opostas do cubo.



Exercícios complementares

Nessa seção, são propostos atividades e problemas que ampliam o estudo dos temas estudados, bem como questões de aprofundamento dos conteúdos tratados. Quando possível, eles estão inter-relacionados a outras disciplinas que aplicam conceitos da Matemática. Algumas atividades dessa sequência propõem situações novas que, para serem solucionadas, requerem que o aluno utilize conhecimentos já adquiridos em outras situações.

As atividades dessa seção poderão ser feitas em sala de aula ou em casa, individualmente ou em grupo, com intervenções adequadas sempre que necessário.

É importante ressaltar que a seção tem por função complementar as atividades desenvolvidas, contribuindo para que todos os alunos adquiram os conhecimentos fundamentais para cada ano, considerados imprescindíveis para a formação conceitual dos estudantes de Matemática.

Desafio

Na seção **Desafio** são propostas atividades de cálculo mental e estimativas, problemas não rotineiros, brincadeiras e jogos.

Os problemas não rotineiros costumam exigir dos alunos mais reflexão, suscitar discussões em sala de aula ou instigar a curiosidade e o interesse. As resoluções podem percorrer caminhos diferentes, às vezes surpreendentes. Observe as estratégias de seus alunos e socialize aquelas que achar interessantes.

Sugerimos que crie um programa "Problemas do Mês", por exemplo. Nesse caso, prepare-se para aceitar problemas que seus alunos trarão de outras fontes. Não se preocupe em ter as soluções prontas, pois haverá tempo para pesquisar e resolvê-los.

As atividades dessa seção são apropriadas para o trabalho em grupo.

Leitura

Nessa seção, tratamos de assuntos extracurriculares e interdisciplinares com temas que contam um pouco a história de pessoas que criaram a Matemática, os processos de construção dos conceitos matemáticos, lendas e fatos curiosos, além de mostrar as aplicações da Matemática nas demais ciências. Tratamos também de assuntos que envolvem Temas Transversais.

É conveniente planejar situações coletivas em que os estudantes possam expor e trocar interpretações sobre os textos lidos.

A seguir, algumas sugestões de abordagem dessa seção que poderão auxiliá-lo.

Solicite aos alunos que façam:

- Leitura em grupo na sala de aula, seguida de ampla discussão com a classe.
- Leitura em casa.
- Leitura complementada por anotações resultantes de pesquisas em revistas, jornais, livros e na internet e desenvolvimento de amplo painel em sala de aula ou exposição dos resultados das pesquisas realizadas.
- Leitura complementada por palestras, vídeos ou visitas a exposições e museus.
- Leitura e aprofundamento do tema tratado, fazendo um trabalho integrado com outras disciplinas.

Seguem comentários sobre alguns temas abordados ao longo dos quatro volumes desta coleção, nas seções **O que você já sabe?, Desafio, Leitura, Troquem ideias e resolvam** e **Investigue e explique**.

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

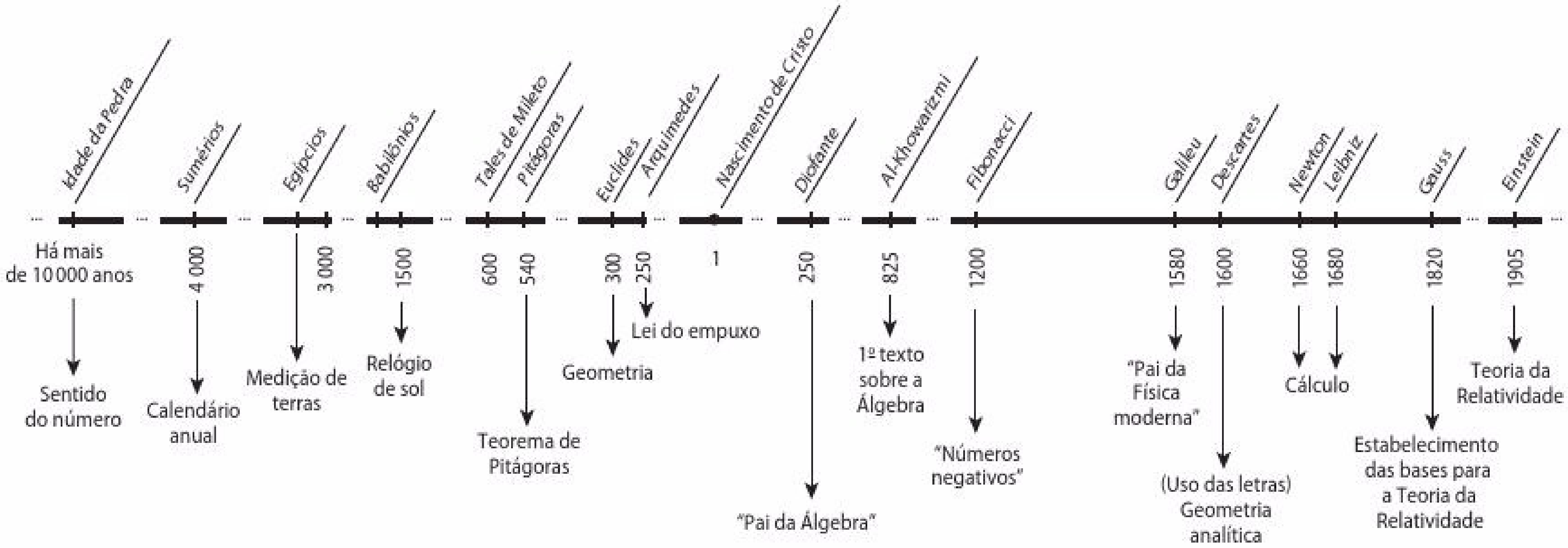
A Matemática faz parte da história do ser humano, pois foi construída por ele ao longo dos séculos e está viva e em constante transformação. Ao revelar a Matemática como construção do ser humano ao longo da história da humanidade, e não como um conhecimento pronto e acabado, mostrando as várias necessidades e preocupações de diversas culturas, em diferentes momentos históricos, são criadas condições para uma aprendizagem mais significativa por parte dos alunos.

Assim, a História da Matemática pode ser usada em sala de aula, destacando-se as relações existentes entre ela e as outras ciências. Por exemplo, na arte, na cultura e na vida dos povos, podemos observar:

– os conhecimentos de Geometria na época das construções de templos e pirâmides;
– o uso das razões áureas pelos gregos e na arte renascentista;
– a utilização da Astronomia para a elaboração de calendários e para o planejamento das viagens marítimas etc.

Dessa forma, a abordagem por meio da História da Matemática pode contribuir para motivar os alunos a observar o modo como se deu a evolução das ideias matemáticas e procurar reproduzir nas aulas como ocorreram as passagens dessa evolução. Afinal, a Matemática é construída continuamente pelos alunos a cada novo aprendizado.

Veja o desenvolvimento do conhecimento matemático na linha do tempo a seguir:



– **"É preciso contar: filhos, ovelhas, objetos"** – o ser humano inventou o número e um processo rudimentar de contagem – é o começo da Matemática.

– **Há 5 000 anos** – **Egípcios** – As frequentes enchentes no rio Nilo fizeram com que fosse necessária a criação da medição de terras: é o começo da Geometria. Era uma Geometria preocupada apenas com as aplicações práticas.

– **Durante muitos séculos, a Aritmética** – a "ciência dos números" – **e a Geometria** – a "ciência das formas" – desenvolveram-se por meio de **padrões**, isto é, estudando as regularidades dos **fenômenos físicos**, das **formas** e das **ideias**, e foram os dois grandes eixos da Matemática.

– **Há mais de 3 000 anos**, os babilônios dividiram o ano em 360 dias. Para os egípcios, um ano tinha 365 dias. O ano bissexto, a cada quatro anos, surgiu mais tarde no calendário egípcio.

– **1500 a.C.** – já se conhecia o relógio de sol: era possível medir o movimento aparente do Sol observando a sombra de um pedaço de madeira colocado verticalmente no chão.

– **600 a.C.** – **Tales de Mileto**, vendedor de azeite e grande matemático, foi o primeiro grego a pensar uma Geometria que trilhasse o **caminho da abstração**, das **demonstrações** e da **dedução lógica**.

– **540 a.C.** – **Pitágoras**, discípulo de Tales de Mileto, deixou grandes contribuições à Geometria e à Matemática, desde o fundamento das escalas musicais até o teorema de Pitágoras, além de uma descoberta que ele mesmo e a escola que ele fundou tentaram ignorar: o número irracional.

– **300 a.C.** – **Euclides**, de Alexandria, o grande mestre da Geometria, reuniu pela primeira vez os conhecimentos existentes sobre a Geometria e os organizou, estabelecendo seus axiomas e postulados e demonstrando seus teoremas, realizando, assim, o sonho de Tales de Mileto.

– **250 a.C.** – **Arquimedes**, de Siracusa, fez descobertas tão fantásticas e criativas que é considerado o "pai da Engenharia prática". Calculou o volume da esfera, formulou a Lei do empuxo, a Lei das alavancas, os métodos para determinar o centro da gravidade de um corpo, entre outros feitos.

– **Ano 1** – **Nascimento de Cristo**.

– **250** – **Diofante**, matemático grego, foi o primeiro a abreviar sistematicamente seu pensamento com símbolos matemáticos, por meio de equações. É considerado o "pai da Álgebra".

– **825** – **Al-Khowarizmi**, matemático árabe, além de divulgar a escrita numérica decimal, que usamos hoje, escreveu o primeiro texto sobre a Álgebra – uma Álgebra que já havia sido vislumbrada pelos egípcios há mais de 4 000 anos.

– **1200** – **Fibonacci (Leonardo de Pisa)**, matemático italiano, desvendou os "mistérios dos números negativos". Admitiu a existência desses números como soluções de problemas que envolviam lucros e perdas.

– **1580** – **Galileu Galilei**, astrônomo e físico italiano, nasceu em Pisa. Sua grande contribuição à Ciência foi ter resgatado o método experimental, muito utilizado nos tempos de Arquimedes. É considerado por muitos o "pai da Física moderna". Seus estudos contribuíram decisivamente para as invenções do telescópio, do termômetro, do relógio de pêndulo etc. Fez grandes descobertas no campo da Astronomia e defendeu a teoria de Copérnico, na qual ele afirma que "a Terra não é o centro do universo".

– **1600** – **René Descartes**, filósofo e matemático francês, criou a notação de potência. Seu grande mérito foi unir a Aritmética, a Álgebra e a Geometria em um único campo de estudo – a **Geometria Analítica** –, o campo da representação dos números por meio de pontos em um plano, com a conversão de equações em gráficos e gráficos em equações. A partir disso, não houve mais limites para a produção do conhecimento matemático e da tecnologia: a Análise, o Cálculo, a Probabilidade, a Estatística, outras geometrias, a energia atômica, os computadores etc.

– **1660** – **Newton**, físico inglês, produziu uma das ideias mais fantásticas – o **Cálculo** –, que pela primeira vez permitiu medir e analisar os movimentos e as mudanças constantes de um mundo onde "nada escapa às mudanças". Elaborou as **Leis dos movimentos e da gravitação**, fundamentais na Física, e definiu a **aceleração** nos processos que envolvem movimentos físicos.

– **1680** – **Gottfried Leibniz**, matemático alemão, foi um gênio em várias áreas do conhecimento. Publicou sua versão do **Cálculo**, em 1684, sem conhecer os trabalhos de Newton.

- **1820** – **Carl Friedrich Gauss**, gênio alemão, dominou a Matemática do século XIX e, segundo alguns estudiosos, foi o "último gênio a dominar todas as matemáticas". Inovou na Análise e na Geometria e estabeleceu as bases para a **relatividade** e a **Teoria Atômica** do século XX. Inventou o telégrafo, junto com Weber, e cerca de dois anos antes de Morse. Encheu páginas e páginas de seus cadernos com uma Matemática de criação própria.
- **Por volta de 1900** – **Albert Einstein**, nascido na Alemanha, é considerado um dos maiores gênios da Física, "o fundador da Física moderna". Baseou-se nas ousadas ideias de Gauss e Riemann e produziu sua **Teoria da Relatividade** para descrever o universo real: "o tempo, o tamanho e o peso não são constantes, mas variam de acordo com a velocidade". Sugeriu, também, um universo com quatro dimensões, em que o **tempo** é a quarta dimensão. Criou a famosa equação da energia nuclear, $\mathbf{E = mc^2}$, em que "a energia **E**, em uma porção de matéria, é igual à massa **m** multiplicada pelo quadrado da velocidade da luz, **c**".
- **Do final do século XIX até os dias de hoje** – o ritmo da evolução das ciências foi tão fantástico que fica difícil citar apenas alguns gênios, pois são muitos os grandes: Jules Henri Poincaré, que estudou sobre probabilidade e equações diferenciais; David Hilbert, que estudou espaços abstratos; Giuseppe Peano, que fundou o simbolismo formal; além de outros nomes, como Augustin Louis, Cauchy, Bernard Bolzano, Georg Cantor e Kurt Gödel, por exemplo.

NOTAÇÃO CIENTÍFICA

Nesta coleção, a comunicação de ideias matemáticas foi feita de forma gradual e contextualizada. Diante das preocupações com a linguagem e a notação matemática, há a necessidade e a importância de os alunos compreenderem a notação científica, presente em textos e artigos que tratam de assuntos das ciências.

A necessidade de operar com números que, comparados com a unidade, são muito grandes ou muito pequenos e a inconveniência de representá-los com uma notação com muitas casas decimais levaram os cientistas a utilizar a notação científica. É uma forma de representação que usa um número entre 0 e 10 multiplicado por uma potência de base 10, que representa qualquer número real. Essa representação é vantajosa, pois ocupa menos espaço, elimina a necessidade de contar zeros e facilita os cálculos.

DESENHO GEOMÉTRICO

Além de sua contribuição no estudo da Geometria, o desenho geométrico é uma ferramenta importante para profissionais que, por exemplo, fazem projetos, desenham plantas e representam muitos objetos.

A construção de figuras geométricas requer o uso de materiais de desenho como régua, esquadro e compasso. Nesta coleção, são apresentadas diferentes atividades em que são necessários esses materiais, o que favorece a construção pelo aluno dos conceitos relacionados às noções básicas necessárias à aprendizagem de Geometria, além dos aspectos lúdicos que envolvem esse tipo de atividade.

CÁLCULO MENTAL, ESTIMATIVAS, ARREDONDAMENTOS E APROXIMAÇÕES

Os alunos podem se tornar aptos a efetuar rapidamente cálculos aproximados, medir, verificar se uma solução é razoável, examinar conjecturas ou tomar decisões, desenvolvendo habilidades de cálculo mental e recursos de estimativa.

Com isso, eles aprendem a conferir e validar suas respostas aos problemas. Às vezes, devido a erros aritméticos ou de outra natureza, os resultados de um problema matemático podem ser interpretados de forma equivocada.

Por meio de cálculo mental, estimativas, aproximações e arredondamentos, os alunos poderão rever os cálculos, constatar se as respostas são coerentes e decidir quando um resultado específico é suficientemente preciso para o objetivo desejado. Ao valorizarmos o hábito de verificar e controlar os resultados, podemos ajudá-los a ter confiança em suas possibilidades e a desenvolver a capacidade de perseverança na busca de resultados e uma postura crítica diante deles. Dessa maneira, conduzimos os alunos a um melhor desempenho em Matemática.

REGULARIDADES, PADRÕES NUMÉRICOS, ALGÉBRICOS E GEOMÉTRICOS – GENERALIZAÇÕES

A importância do trabalho com padrões e com a observação de regularidades é reconhecida pela sua contribuição na construção do conceito de número, dos conceitos geométricos e na apreensão das propriedades numéricas e geométricas. O trabalho com regularidades também representa uma estratégia útil e difundida de resolução de problemas. Explorar sequências numéricas é um caminho para introduzir a Pré-Álgebra, assim como observar padrões geométricos facilita a compreensão dessa parte da Matemática devido ao apelo visual. Modificar e estender os padrões são atividades que ajudam no desenvolvimento da Álgebra.

À medida que os alunos buscam regularidades, eles aprendem a fazer suas próprias investigações sobre os conceitos matemáticos, ensaiam possíveis organizações e tentam verificar se elas são válidas em todos os casos.

A descoberta de regularidades, a análise e o uso de padrões tornam disponíveis aos alunos recursos que permitem formular leis gerais em um processo de busca de generalizações.

Nesta coleção, há uma preocupação em atender a todos esses aspectos, o que é feito de modo significativo ao longo dos quatro volumes. Atividades com esses objetivos serão encontradas em diferentes seções, em especial na seção **Investigue e explique**, e em atividades que envolvem a observação e a criação de padrões de repetição numéricos ou geométricos.

Essas atividades são bastante criativas e enriquecedoras na medida em que os alunos participam, criam seus próprios padrões e os associam a mosaicos e às sequências.

RESOLUÇÕES DE PROBLEMAS

A resolução de problemas deve ser o ponto de partida da atividade matemática. Conceitos, ideias e procedimentos são abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las. São situações que estimulam a curiosidade e a investigação, possibilitando que eles utilizem experiências anteriores e que adquiram novos conhecimentos ampliando, dessa forma, os que já possuem.

Resolver problemas é uma atividade complexa que envolve a coordenação de conhecimento, experiência anterior, intuição e confiança, entre outras habilidades. Não se reduz ao uso específico de um algoritmo pelo qual os alunos seguem regras preestabelecidas para chegar à solução. Envolve habilidades fundamentais como a capacidade de ouvir, discutir, escrever, ler ideias matemáticas, interpretar significados e pensar de forma criativa.

Nesta coleção, são propostos problemas que fazem parte do dia a dia dos alunos: alguns de aplicação imediata dos conceitos e procedimentos abordados, outros relacionados a vários conceitos e procedimentos já estudados, além dos problemas não convencionais. Estes se caracterizam como diferenciadores e têm extrema relevância no processo de aprendizagem, pois desenvolvem a capacidade de planejar e elaborar estratégias variadas, permitem que os alunos aceitem as diversas soluções dos colegas e compreendam a lógica de outras soluções.

APLICAÇÕES EM OUTRAS ÁREAS

Nos diferentes meios de comunicação, são comuns assuntos que envolvem conceitos e procedimentos matemáticos, como problemas de economia, gastos com produção, despesas e lucros, comparação de preços cobrados em lojas e dados estatísticos.

Temas como Meio Ambiente, Saúde e Educação podem ser utilizados para envolver os alunos na discussão de problemas sociais e provocar sua mobilização em busca de soluções.

Muitas vezes, essas buscas incentivam os alunos a aplicar os conhecimentos matemáticos adquiridos, favorecendo a interdisciplinaridade.

Sabemos que a instrumentação para a vida depende, em uma democracia, de uma preparação para o pleno exercício da cidadania e, para isso, é necessário desenvolver a capacidade de analisar e interpretar dados estatísticos, possuir noções de Economia, resolver situações de conflito e ser capaz de tomar uma decisão. Nesse sentido, esta coleção é permeada por problemas que possibilitam essas discussões e o desenvolvimento dessas habilidades.

ATIVIDADES LÚDICAS E JOGOS

Atualmente, tem-se dado relevância às atividades lúdicas e aos jogos no ensino e na aprendizagem da Matemática. Nessas atividades, os alunos passam a lidar com regras que lhes permitem a compreensão do conjunto de conhecimentos veiculados socialmente, fornecendo-lhes novos elementos para apreenderem os conhecimentos futuros. Os jogos favorecem o aprendizado, pois sabemos que, ao brincar, os alunos apreendem a estrutura lógica do material e, desse modo, a estrutura matemática presente.

As atividades lúdicas e os jogos também favorecem o desenvolvimento de habilidades de resolução de problemas. Eles dão aos alunos a oportunidade de estabelecer um plano de ação para atingir determinados objetivos, executar jogadas segundo esse plano e avaliar a eficácia dessas jogadas nos resultados obtidos.

Algumas atividades lúdicas e alguns jogos realizados em grupo privilegiam o tratamento de aspectos afetivos e podem contribuir para a formação de atitudes que valorizam o trabalho coletivo.

Revisão cumulativa e testes

Seção apresentada ao final de cada unidade com o objetivo principal de rever conteúdos estudados em unidades anteriores, na própria unidade e até mesmo em anos anteriores. As questões são apresentadas em duas formas: discursivas e testes. A proposição de testes tem como objetivo principal preparar os alunos para os vários tipos de avaliação a que são submetidos, atualmente, nos sistemas educacionais municipais, estaduais e nacional.

O livro do aluno não traz as respostas desses testes, o que possibilita seu uso para avaliação. Essa coleção de respostas se encontra nas últimas páginas do Manual.

Blocos de conteúdo e orientações didáticas

Ao longo dos quatro livros da coleção, são abordados os blocos de conteúdos:

- Números e Operações;
- Geometria;
- Grandezas e Medidas;
- Álgebra;
- Estatística e Probabilidade.

Números e Operações

Qual é a idade da nossa linguagem numérica?

É quase impossível responder a essa pergunta. Existem muitos indícios de que ela é milhares de anos mais antiga que a linguagem escrita: a gênese do número perde-se nas idades pré-históricas.

Em algum momento da História, o ser humano aprendeu a **contar**, e foi a **contagem** que produziu extraordinários efeitos na evolução dos conhecimentos científico e não científico acumulados ao longo do tempo. Os números constituem ferramentas fundamentais nessa evolução.

As pessoas estão cercadas de números: número da cédula de identidade, horário de trabalho, estatísticas diversas, impostos, distâncias, velocidade do automóvel, recordes de jogos etc.

Os números são empregados em diversas situações e também têm diferentes finalidades. As principais funções dos números são: **contar**, **medir**, **ordenar** e **codificar**. Para responder à pergunta "Quantos alunos há na sala?", utilizamos um **número cardinal** depois de realizar a **contagem**. O resultado de algumas **medidas** também é expresso com números cardinais: distâncias entre cidades, capacidades etc.

Já a posição dos pilotos vencedores de uma corrida automobilística é indicada com **números ordinais**.

Os números são empregados ainda como **código** e, nesse caso, podem identificar pessoas ou objetos. Esses números não expressam necessariamente uma quantidade, são números convencionais. Por exemplo, os números das placas dos automóveis, os números de telefones, os números de documentos de identidade, os números das contas bancárias e os códigos de barras.

Ao longo dos quatro livros desta coleção, organizamos os números dentro de uma estrutura (não explícita) de conjuntos numéricos, partindo dos números naturais até chegar aos números reais. Da contagem resultaram os números naturais, da medição resultaram os números racionais e os reais e da formalização das operações surgiram os números inteiros, formando os quatro conjuntos numéricos que estudamos no Ensino Fundamental e Médio.

O objetivo é fazer com que os alunos percebam uma extensão do conceito de número, adquirido ao longo dos anos iniciais de estudo, e a ampliação que se faz de um conjunto numérico para outro. Nessas ampliações, mantêm-se as propriedades já estudadas em cada conjunto numérico, e cada um deles é inserido em outro, como subconjunto.

Com essa abordagem, esperamos que os alunos construam o conceito de número, compreendam o Sistema de Numeração Decimal, construam os algoritmos, desenvolvam as habilidades com o cálculo escrito, o cálculo mental e o uso da calculadora, aprendam a estimar resultados e desenvolvam habilidades para resolver problemas.

Os procedimentos de cálculo permitem que os alunos os percebam como ferramentas na resolução de problemas, enquanto as atividades numéricas proporcionam ocasiões para o desenvolvimento de algumas estratégias gerais.

Esses temas são ampliados quanto à abordagem e à profundidade ao longo dos quatro livros da coleção. Alguns deles serão sistematizados até o final do Ensino Fundamental.

Os itens a seguir fornecem elementos para poder esclarecer os alunos quanto à importância do tema e das habilidades numéricas, geométricas e algébricas à medida que forem adquiridas. O objetivo é levar os alunos a ampliar as aplicações dessas habilidades no dia a dia.

O estudo das propriedades das operações propõe levar os alunos a descobrir as regularidades, em procedimentos (compor e decompor, arredondar, estimar) e na aplicação de estratégias de cálculo mental e escrito, sem dar ênfase à nomenclatura.

Ainda nesse tema, tratamos das operações com números inteiros, números racionais nas formas fracionária e decimal, números irracionais na forma de radical, sugerindo-se que leve em conta o ritmo e as experiências dos alunos.

Os problemas propostos nesta coleção são variados e exploram os diferentes significados das operações, além de possibilitar o reconhecimento das relações entre os diferentes tipos de números e entre as diversas operações.

Além do cálculo escrito, que favorece a compreensão dos algoritmos e das propriedades, destaca-se o cálculo mental, que está diretamente ligado a aspectos da vida cotidiana, assim como a estimativa, que permite fazer previsões e tomar decisões.

Nessas situações, é conveniente que os alunos saibam usar outros recursos, como as calculadoras, para auxiliá-los na análise e checagem de resultados e na resolução de problemas com dados reais que, de modo geral, são mais complexos, pois nem sempre trabalham com valores exatos. Pode-se, desse modo, usar o tempo que seria destinado aos cálculos para análise e discussão dos resultados.

Antecipando a introdução da linguagem algébrica, para que os alunos se sintam familiarizados com o sentido dos números e com o significado das operações, são propostas situações-problema para que eles identifiquem as operações estudadas, apliquem propriedades e determinem o elemento desconhecido, de modo que expressem a relação entre as operações.

Por exemplo:

$72 - 13 = \mathbf{n}$ quer dizer o mesmo que $13 + n = 72$ e

$21 : 7 = \mathbf{n}$ quer dizer o mesmo que $7 \cdot n = 21$.

Geometria

A Geometria é, inicialmente, o conhecimento imediato da nossa relação com o espaço. Começa com a visão e caminha em direção ao pensamento, vai do que pode ser percebido para o que pode ser concebido, e os problemas colocados por esse conhecimento nos levam à construção gradativa do saber geométrico.

Esse bloco está estruturado de modo a articular percepção e concepção, construção e representação, considerando a importância de uma inter-relação desses aspectos.

São realizadas atividades de manipulação, que se iniciam com formas tridimensionais.

Observando e experimentando objetos do mundo físico, idealizam-se esses objetos como formas geométricas. Descobrem-se relações e adquire-se um sentido espacial ao construir, desenhar, medir, visualizar, comparar, transformar e classificar formas geométricas.

As atividades geométricas proporcionam contextos adequados para o desenvolvimento de habilidades, procedimentos e estratégias de caráter geral, a partir:

- da percepção espacial, que é a habilidade de se orientar no espaço e coordenar diferentes ângulos de observação de objetos no espaço;
- da habilidade de observação do espaço tridimensional e da elaboração dos meios (representações) de se comunicar a respeito desse espaço;
- de habilidades do raciocínio lógico e de argumentação, buscando responder a questões como "o que acontecerá se...", que ajudam a aprender a analisar um argumento e a reconhecer os argumentos válidos e os não válidos no contexto das formas geométricas e, por extensão, nos problemas da vida diária;
- de habilidades de desenho e representações geométricas, utilizando modelos para visualizar certas propriedades, analisar e resolver problemas. As interpretações geométricas podem contribuir para que se entenda melhor uma representação abstrata (simbólica).

A integração e a aplicação da Geometria em outros campos do conhecimento permitem instigar ideias e propor aplicações práticas para que possamos enfrentar problemas reais, em geral, de natureza interdisciplinar. O trabalho feito a partir da exploração dos objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, desenhos, escultura e artesanato possibilitará que os alunos estabeleçam conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento.

O estudo de Geometria por meio das **construções geométricas** é desenvolvido a partir da resolução de problemas e com o uso de vários instrumentos e operações. A construção de figuras geométricas requer a manipulação de materiais de desenho como régua, esquadro e compasso.

É possível que essa manipulação subsidie a construção dos conceitos da Geometria, não de uma maneira axiomática, mas a partir de uma proposta que se inicia empiricamente — medindo, experimentando, analisando — até chegar a um trabalho que exige um raciocínio lógico-dedutivo.

É uma proposta que não implica uma falta de rigor conceitual, mas que tem como pressuposto básico que o conhecimento é adquirido em uma elaboração e reelaboração constante dos conceitos, como revela a própria história da Geometria.

Também é abordada a Geometria das transformações, que trata das translações, rotações, reflexões, enfim, dos movimentos, das isometrias e das homotetias.

O conceito de **transformação geométrica** é trabalhado com ênfase na intuição e na verificação experimental de algumas conjecturas. O trabalho proposto não se resume à transmissão de postulados, teoremas e definições logicamente organizados, apresentados de forma dogmática, sem possibilidade de discussão; ele é significativo e funcional no dia a dia.

Grandezas e Medidas

Medida é uma importante aplicação de número. Medir é uma habilidade que se origina nas atividades comuns do ser humano e está presente no pensamento matemático. Medir **grandezas** tem por objetivo quantificar o mundo que nos rodeia.

As atividades com medidas propostas nesta coleção são desenvolvidas por meio de relações com a proporcionalidade, os conceitos geométricos, as noções numéricas e as representações gráficas, vinculando, assim, Grandezas e Medidas com Números, com Geometria e com Estatística e Probabilidade, de modo simultâneo.

O trabalho com medidas também é desenvolvido de forma a ampliar a noção de números. Os números racionais (na forma decimal ou fracionária) estão ligados às medidas. As frações surgiram há muitos séculos para expressar medidas que não podiam ser indicadas por números naturais.

Para os pitagóricos, as frações eram apenas relações de tamanho entre grandezas de mesma espécie, pois consideravam números apenas os inteiros. Acreditavam que, dadas duas grandezas quaisquer, sempre seria possível encontrar uma unidade de medida que coubesse um número inteiro de vezes nas duas grandezas, ou seja, para eles só existiam grandezas comensuráveis. Mais tarde, descobriram que existiam grandezas incomensuráveis, não importando até que ponto fosse pequena a unidade de medida.

Os matemáticos da Antiguidade foram capazes de fazer medições de grandes distâncias, semelhantes às que são realizadas hoje por cientistas com seus poderosos e sofisticados instrumentos, obtendo resultados que surpreendem por sua exatidão. Para isso, era utilizada uma ideia simples, porém brilhante: a semelhança de triângulos.

Desde o momento em que o ser humano sentiu a necessidade de efetuar medidas, tentou estabelecer sistemas que possibilitassem medir comprimento, massa e volume.

De início, não se media, apenas comparavam-se volumes, comprimentos e massas. Com a evolução da humanidade, as necessidades foram mudando e buscou-se uma padronização de unidades, caracterizando o desenvolvimento da noção de medir.

Para unidades de comprimento usava-se o "pé", a "polegada" e a "jarda", unidades que na época derivavam do tamanho das partes do corpo do rei de cada região.

Essas unidades de medida não eram comuns a todos: o pé do rei de determinado lugar podia ser maior ou menor que o pé do rei de outro lugar. Isso acarretava uma série de dificuldades que prejudicavam tanto o comércio entre povos como as comparações de dados científicos já conhecidos na época. Começava-se, então, a pensar em unidades de medidas que fossem bem definidas e reconhecidas mundialmente.

Surge dessa forma a necessidade de se trabalhar com unidades convencionais relacionadas ao problema da comunicação. Para efetuar uma medição, escolhe-se uma unidade de medida de mesma natureza da grandeza que se deseja medir. Somente grandezas de mesma natureza são comparadas em situações de medição.

Ao construírem as unidades padrão, os alunos precisam perceber que certos comprimentos, ou outros tipos de medida, não são mensuráveis com apenas uma única unidade e que a partir de uma poderão ser criadas outras. Assim, eles começarão a perceber a adequação das unidades de medida às grandezas que se deseja medir e a descobrir as equivalências entre as unidades criadas em um mesmo sistema de medida.

As atividades propostas também procuram explicitar as diferenças de natureza entre medidas de comprimento, massa, capacidade, tempo, superfície e volume e levá-los a justificar a necessidade da unidade padrão. Ao apresentar as unidades padrão para essas grandezas, são propostas situações que possibilitam aos alunos estabelecerem relações entre unidades de medida e empregarem múltiplos e submúltiplos das unidades fundamentais. Procure enfatizar apenas as unidades mais comuns no dia a dia dos alunos.

As habilidades para o uso de instrumentos apropriados para medir diversas grandezas vão se refinando gradativamente.

Álgebra

A Álgebra caracteriza-se pelo conjunto de conceitos, propriedades e procedimentos que empregam letras e expressões literais para estabelecer relações e realizar operações.

Nas expressões algébricas, as letras desempenham funções muito diferentes: podem representar um número qualquer, um número desconhecido, uma variável ou uma relação entre conjuntos de números ou símbolos arbitrários de uma estrutura estabelecida por certas propriedades. As funções das expressões algébricas estão relacionadas com as várias interpretações possíveis da Álgebra:

- Álgebra como generalização da Aritmética;
- Álgebra como estudo de procedimentos para resolver certos problemas;
- Álgebra como estudo de relações entre quantidades;
- Álgebra como estudo das estruturas.

O uso das letras facilita pensar em ideias matemáticas e permite representar, para qualquer número, ideias ou relações que valem para números específicos. Por exemplo, sabemos que, se $10 + 6 = 16$, então $16 - 6 = 10$ ou $16 - 10 = 6$. Se usarmos **a**, **b** e **c** para representar quaisquer números, poderemos dizer que, se $a + b = c$, então $c - b = a$ ou $c - a = b$.

Em Aritmética, buscamos respostas numéricas particulares; em Álgebra, procuramos estabelecer procedimentos e relações e expressá-los em uma forma geral.

Na concepção da **Álgebra como estudo de procedimentos para resolver certos problemas**, o tema central é a resolução de equações. Nesse caso, as letras são incógnitas específicas.

Em seu manual de Álgebra *Aritmética universal*, Isaac Newton (1642-1727) escreveu: "O idioma da Álgebra é a equação. Para resolver um problema referente a números ou relações abstratas de quantidades, basta traduzir o tal problema, do inglês ou de outra língua, para o idioma algébrico".

No entanto, essa tradução não é tão simples, uma vez que exige uma explicitação prévia das relações matemáticas entre a incógnita e os demais dados do problema. Para resolvê-lo, depois de obtida a equação, é preciso aplicar sobre ela determinado algoritmo de cálculo para chegar ao valor da incógnita.

Por exemplo: "João tem 46 moedas. Se o dobro da quantidade de moedas de Mariana, adicionado à quantidade de moedas de João, for igual a 76, quantas moedas terá Mariana?".

Ao usarmos uma letra para representar a quantidade de moedas de Mariana, **x**, por exemplo, temos a equação:

$2x + 46 = 76$

Na concepção da **Álgebra como estudo de relações entre quantidades**, as letras não são incógnitas. Elas descrevem certos aspectos de um objeto ou um fenômeno, possibilitando compreender seu funcionamento ou mesmo deduzir novas propriedades.

Nessa interpretação, as letras assumem o sentido completo de variável, isto é, as variáveis "variam". Existem as noções de *variável independente* e *variável dependente*, e a relação entre elas pode ser uma função.

Por exemplo:

- a fórmula da área de um retângulo ($A = b \cdot h$) é uma relação entre as variáveis comprimento e largura;
- na função representada pela expressão $y = 5x - 3$, o valor de **y** depende de **x**.

Na concepção da **Álgebra como estudo das estruturas**, as letras são consideradas símbolos arbitrários de uma estrutura estabelecida por certas propriedades. Ou seja, elas constituem elementos pertencentes a estruturas algébricas, tais como grupos, anéis ou corpos, que fundamentam a teoria da Álgebra.

Nesta coleção, a Álgebra é explorada desde o 6º ano.

Estatística e Probabilidade

A importância de conteúdos de Estatística, Probabilidade e Combinatória é reconhecida hoje nos mais diversos campos, das pesquisas científicas e sociais ao mundo dos negócios, constituindo, assim, uma ferramenta para outras disciplinas.

Esse eixo de conteúdos permite que os professores tragam para a sala de aula o cotidiano presente nos diferentes meios de comunicação, como jornais, revistas e internet, e na vida dos cidadãos.

É possível que os alunos se sintam mais motivados a estudar as noções básicas de Estatística, já que a maioria dos assuntos referentes a esse bloco de conteúdos é veiculada pelos meios de comunicação e faz parte do cotidiano deles.

Como o mundo que nos rodeia é apresentado por meio de informações estatísticas, é indispensável que cada cidadão saiba selecioná-las e interpretá-las para desenvolver a capacidade de análise, crítica, tomada de decisões e intervenções. Disso depende a possibilidade de se obter um avanço na formação para a cidadania.

Com esse tema, esperamos subsidiar os alunos com uma pequena bagagem de conhecimentos para que possam fazer uma leitura mais crítica dos artigos que, muitas vezes, se utilizam da Estatística para manipular dados, induzindo o leitor a conclusões que interessam ao seu autor.

Nesse trabalho, são empregados gráficos e tabelas de textos jornalísticos e textos próprios para a formulação de questões e problemas.

Esse bloco de conteúdos envolve também possibilidades e chances, como elementos do estudo de Probabilidade, além de problemas de contagem que englobam o princípio multiplicativo.

Os problemas de contagem objetivam levar os alunos a lidar com situações que envolvem diferentes tipos de agrupamentos, possibilitando o desenvolvimento do raciocínio combinatório e a compreensão do princípio multiplicativo.

Problemas que envolvem possibilidades são trabalhados desde o volume 6, como, por exemplo, o problema dos apertos de mãos, em que os alunos são levados a quantificar as possibilidades.

Com relação ao estudo de Probabilidade, a principal finalidade é a de que os alunos compreendam que muitos dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e que se pode identificar possíveis resultados desses acontecimentos e até estimar o grau da chance de ocorrência de um deles.

O ensino das noções sobre Probabilidade pode ser realizado mediante uma metodologia heurística e ativa, por meio de experimentação, como, por exemplo, lançando dados e moedas.

O que se pretende nessa etapa do Ensino Fundamental é que o conceito de Probabilidade seja entendido como a razão, nesta ordem, entre o número de resultados possíveis de um experimento e o número de todos os resultados possíveis, ao se realizar um experimento aleatório (espaço amostral).

A Teoria de Probabilidades é um assunto difícil, do ponto de vista teórico e do ponto de vista técnico.

Por causa das dificuldades inerentes ao estudo de Probabilidades, fazemos uma sugestão de trabalho em sala de aula com o objetivo de que as pessoas comecem a "pensar probabilisticamente".

Avaliação em Matemática

Avaliar significa ir além da busca de resultados, é um **processo** de observação e verificação de como os alunos apreendem os conhecimentos matemáticos e do que pensam sobre a Matemática.

Como parte do próprio processo de ensino/aprendizagem, o objetivo da avaliação é aprimorar a qualidade dessa aprendizagem. Ela deve ser contínua, dinâmica e, com frequência, informal, para que, por meio de uma série de observações sistemáticas, se possa emitir um juízo de valor sobre a evolução do aluno no aprendizado da Matemática e tomar as atitudes necessárias.

A avaliação do desempenho dos alunos tem como finalidades:

a) Em relação ao aluno:

- verificar e mensurar seu conhecimento matemático;
- acompanhar o desenvolvimento de seus procedimentos matemáticos;
- observar sua postura diante da Matemática;
- possibilitar a reflexão sobre seus êxitos e dificuldades.

b) Em relação ao professor:

- colher informações para orientação e tomada de decisões em relação à atuação docente;
- identificar as áreas em que alguns alunos apresentam dificuldades e reorientar o trabalho.

A avaliação centrada basicamente em provas, nas quais os alunos devem mostrar sua destreza nas técnicas adquiridas e a capacidade de memorizar regras, fatos e definições, tem função seletiva e promocional e não fornece todas as informações sobre a aprendizagem efetiva dos alunos.

Avaliar não é só construir um instrumento de verificação, mas também transformá-lo em registro adequado para acompanhar e comprovar o grau de aquisição da aprendizagem, tornando-se uma referência para a reflexão e a conscientização dos alunos e dos professores. Segundo essa concepção, destacamos os componentes da avaliação: conceitos matemáticos, procedimentos matemáticos, atitudes e raciocínios.

Componentes da avaliação	Espera-se que os alunos
Conceitos matemáticos	• nomeiem, identifiquem e definam os conceitos; • reconheçam os diversos significados e interpretações dos conceitos e os diferenciem; • identifiquem as propriedades; • apliquem os diversos conceitos em outras situações; • busquem interdependências entre conceitos.
Procedimentos matemáticos	Comunicação: • utilizem as mais variadas formas para representar situações matemáticas; • interpretem e utilizem diferentes linguagens: numérica, geométrica, gráfica e algébrica; • empreguem vocabulário matemático e notações para representar ideias e descrever relações. Algoritmos de cálculo: • estimem e comparem resultados; • utilizem os algoritmos tradicionais de cálculo; • reconheçam quando um algoritmo é adequado e eficaz. Construções geométricas: • estimem e comparem medidas; • utilizem de maneira correta os instrumentos de medida habituais; • realizem construções geométricas; • entendam os conceitos sobre os quais se apoia um processo de construção geométrica; • saibam quando aplicar as construções geométricas.

Componentes da avaliação	Espera-se que os alunos
Atitudes	Apreciação da Matemática: • reconheçam e valorizem os conhecimentos matemáticos para representar, comunicar ou resolver diferentes situações da vida cotidiana; • desenvolvam confiança na própria capacidade para resolver problemas matemáticos; • demonstrem curiosidade e interesse para resolver situações matemáticas; • desenvolvam a perseverança na busca de soluções; • demonstrem interesse em aprimorar a apresentação de seus trabalhos, de modo que facilitem a análise e a compreensão; • se interessem pelas diferentes estratégias de resolução de problemas; • desenvolvam a criticidade com relação ao seu trabalho e ao de seus colegas; • valorizem o trabalho coletivo.
Raciocínios	• realizem especulações; • busquem regularidades na ação existente por ocasião da apresentação ou construção de um conhecimento matemático; • analisem situações matemáticas e sintetizem fatos já analisados; • apliquem o método indutivo com o objetivo de buscar regularidades e generalizações; • apliquem o método dedutivo para determinar ou verificar resultados significativos; • formalizem conhecimentos por meio de evoluções dos códigos de linguagem criados ou construídos como um processo final na aquisição ou construção de um conhecimento.

E como avaliar?

PROCEDIMENTOS PARA COLETAR DADOS

É muito difícil observar diariamente todos os alunos de maneira sistemática. Porém, é necessário fazer observações com regularidade. Os registros precisam ser compreensíveis e ser mais do que um grupo de qualificações numéricas ou listagens. Podem incluir anotações breves ou amostras de trabalhos dos alunos.

O procedimento de registro precisa ser simples, rápido e ter como base:

- as respostas dos alunos, quando eles manifestarem de forma implícita ou explícita suas certezas, dúvidas e erros;
- as observações das ações e discussões efetuadas durante as tarefas individuais, em grupos pequenos ou com a classe toda;
- a análise de provas, tarefas feitas em casa, diários e trabalhos escritos.

No processo de construção do saber matemático, espera-se que os alunos façam inferências sobre o que observam, formulem hipóteses e não necessariamente encontrem uma resposta certa. Deve-se considerar na avaliação o processo, e não apenas o seu resultado. Nesta coleção, as aberturas e as seções **Desafio**, **Troquem ideias e resolvam**, **Investigue e explique** e **Revisão cumulativa e testes** podem proporcionar elementos para a avaliação continuada.

Instrumentos

A avaliação não pode se apoiar em um só instrumento ou em uma só técnica. O modo de avaliação pode ser escrito ou oral. As atividades que os alunos realizam proporcionam um amplo rol de possibilidades para demonstrar sua iniciativa e capacidade e, por isso, é conveniente que sejam utilizadas como fonte de informações para avaliá-los.

Tipos de instrumentos

- exercícios, problemas, pesquisas, resumos, esquemas, cadernos de classe;
- atividades extraclasse, como trabalhos em casa, projetos, dramatizações e exposições em feiras de ciências;
- provas de tipos variados com respostas discursivas curtas, abertas ou testes de múltipla escolha.

Conteúdos propostos em cada ano

Apresentaremos mais adiante os conteúdos, por unidades e expectativas de aprendizagem. Você encontrará também as seções:

Orientações didáticas

Nas orientações didáticas, sugerimos alguns cuidados que poderão ser tomados na introdução dos temas tratados em cada unidade. Também apontamos dificuldades que poderão ocorrer durante o processo de aprendizagem dos conteúdos propostos e sugerimos algumas alternativas que poderão auxiliá-lo a superá-las, favorecendo o desenvolvimento de atitudes positivas.

Textos de aprofundamento

Reunimos textos relacionados à Matemática no dia a dia, à história da Matemática, à fundamentação teórica, à aplicação em outras disciplinas e a temas da Matemática que serão tratados formalmente em níveis mais avançados.

Os textos são subsídios que poderão complementar as suas aulas, instigando a curiosidade e despertando o interesse dos alunos.

Comentários e resolução de atividades

Neste espaço, são resolvidas e comentadas as atividades das seções **Investigue e explique**, **Troquem ideias e resolvam** e **Desafio**, destacando propostas e alguns desdobramentos que poderão ocorrer a partir das propostas apresentadas: problemas parecidos, outros problemas, investigações, generalizações e fórmulas. Fica a critério do professor decidir pelo aproveitamento ou não das situações sugeridas.

Observe todas as sugestões apresentadas pelos alunos. Converse com a classe sobre os vários caminhos que existem na solução de um problema. Isso mostrará a eles que a criatividade e a imaginação não são limitadas, sobretudo em Matemática. A percepção e a consciência da liberdade de pensamento em Matemática poderão melhorar o desenvolvimento do raciocínio de seus alunos.

Sugestões de atividades complementares

Nesta seção são propostos, como sugestões complementares, problemas não rotineiros, jogos e quebra-cabeças que poderão ser utilizados de acordo com a disponibilidade de tempo.

Indicações para a formação continuada do professor

BALDINO, R. R. *Ensino de Matemática ou educação matemática? Temas e debates*. Blumenau, SBEM, vol. IV, n. 3, 1991.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; GARNICA, Antonio Vicente Marafioti. *Filosofia da Educação Matemática.* Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

BOYER, C. B. *História da Matemática*. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher/Edusp, 1974.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto/Secretaria de Ensino Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais – Introdução. Temas transversais, 3º e 4º ciclos.* Brasília: MEC/SEF, 1998.

____. *Parâmetros curriculares nacionais – Matemática, 1º e 2º ciclos.* Brasília: MEC/SEF, 1997.

____.*Parâmetros curriculares nacionais – Matemática, 3º e 4º ciclos.* Brasília: MEC/SEF, 1998.

BUSHAW, D. *Aplicações da Matemática escolar*. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1997.

CARAÇA, B. J. *Conceitos fundamentais da Matemática*. Lisboa: Gradiva, 1998.

CARRAHER, T. N. *Aprender pensando*. 19. ed. São Paulo: Vozes, 2008.

Coleção Matemática sem problemas. Rio de Janeiro/São Paulo: José Olympio/Melhoramentos, 1972.

D'AMBROSIO, Beatriz S. Conteúdo e metodologia na formação de professores. In: FIORENTINI, D.; NACARATO, A. M. (Org.). *Cultura, Formação e Desenvolvimento Profissional de Professores que Ensinam Matemática:* investigando e teorizando a partir da prática. 1. ed. São Paulo: Musa Editora, 2005.

D'AMBROSIO, U. *Da realidade à ação*: reflexões sobre Educação e Matemática. São Paulo: Summus, 1986.

DANTE, L. R. *Didática da resolução da Matemática*. 12. ed. São Paulo: Ática, 1999.

DANTZIG, T. *Número*: a linguagem da ciência. Trad. Sérgio Goes de Paula. Rio de Janeiro: Zahar, 1970.

DAVIS, P. J. *A experiência matemática*. Trad. João B. Pitombeira. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1986.

____; HERSH, R. *O sonho de Descartes*. Trad. Mário C. Moura. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1988.

FAINGUELERNT, E. K. *Educação matemática*: representação e construção em Geometria. Porto Alegre: Artmed, 1999.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A.; MIGUEL, A. As concepções de educação algébrica. In: *Proposições*. São Paulo: Cortez, v. 4, n. 1 (10): 39-54, mar. 1993.

FIORENTINI, D., MIORIM, M. A. (Org.). *Por trás da porta, que Matemática acontece?* Campinas: Unicamp, 2001.

FIORENTINI, D. *Alguns modos de ver e conceber o ensino da Matemática no Brasil*. Revista Zetetiké, Campinas, ano 3, n. 4, p. 1-37, 1995.

HOGBEN, L. *Maravilhas da Matemática*. São Paulo: Globo, 1970.

IFRAH, G. *Os números*: a história de uma grande invenção. 5. ed. Rio de Janeiro: Globo, 1992.

KARLSON, P. *A magia dos números*. Porto Alegre: Globo, 1961.

KRULIK, S.; REYS, R. E. *A resolução de problemas na Matemática escolar*. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1998.

LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A. P. *Aprendendo e ensinando Geometria*. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.

LINS, Romulo & GIMENEZ, Joaquim. *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI*. Campinas: Papyrus, 1997. (Coleção Perspectivas em Educação Matemática.)

LOPES, M. L. L.; NASSER, L. *Geometria na era da imagem e do movimento*. Rio de Janeiro: UFRJ, 1996.

MACHADO, N. J. *Matemática e língua materna*: análise de uma impregnação mútua. São Paulo: Cortez, 1990.

____. *Matemática e realidade*. 2. ed. São Paulo: Cortez, 1987.

MOISE, E.; DOWNS, F. L. *Geometria moderna*. Trad. Renate Watanabe. São Paulo: Edgard Blücher, 1971.

MURRIE, Z. F (Org.). *Matemática e suas tecnologias*. Brasília: MEC/INEP, 2002.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática*. Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, 1988.

NIVEN, I. *Números*: racionais e irracionais. Trad. Renate Watanabe. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1984. (Coleção Fundamentos da Matemática Elementar.)

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Org.). *Educação Matemática* – pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004.

PIRES, C. M. C. *Currículos de Matemática*: da organização linear à idéia de rede. São Paulo: FTD, 2000.

____. *Números naturais e operações*. São Paulo: Melhoramentos, 2013. (Coleção Como eu ensino.)

POLYA, G. *A arte de resolver problemas*. São Paulo: Interciências, 1978.

PONTE, J. P.; BROCADO, J.; OLIVEIRA, H. *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

PROPOSTAS CURRICULARES PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA, 1º grau dos vários estados do Brasil.

SACRISTAN, J. G. *O currículo*: uma reflexão sobre a prática. Trad. Ernani F. da F. Rosa. 3. ed. Porto Alegre: ArtMed, 2000.

SECRETARIA DA EDUCAÇÃO. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. *Experiências matemáticas*. São Paulo: SE/CENP, 1984.

____. *Prática pedagógica*: Matemática 1º grau. São Paulo: SE/CENP, 1993. v. 4.

SOARES, M. G. (Coord.). *Geometria experimental*. São Paulo: MEC/IMECC/PREMEN/SE/CENP, 1980.

SOCIEDADE BRASILEIRA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. *A Educação Matemática em Revista*. Publicações de 1993 a 2005.

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA. *Revista do Professor de Matemática*. Publicações de 1988 a 2005.

SOUZA, E. R.; DINIZ, M. I. de S. V. *Álgebra*: das variáveis às equações e funções. 2. ed. São Paulo: CAEM-IME/USP, 1996.

STRUIK, D. J. *História concisa das Matemáticas*. Trad. João Cosme Santos Guerreiro. Lisboa: Gradiva, 1992.

TAHAN, M. *As maravilhas da Matemática*. 6. ed. Rio de Janeiro: Bloch, 1987.

____. *Matemática divertida e curiosa*. 24. ed. Rio de Janeiro: Record, 2006.

TINOCO, L. A. A. (Coord.). *Razões e proporções*. Rio de Janeiro: Editora da UFRJ, 1996.

Centros de formação continuada

Caem – Centro de Aperfeiçoamento do Ensino de Matemática. Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo. Rua do Matão, 1010, Bloco B, sala 167, Cidade Universitária, São Paulo/SP, CEP 05508-900, tel./fax: (0xx11) 3091-6160; http://www.ime.usp.br/caem; e-mail: caem@ime.usp.br

Cempem – Centro de Estudos, Memória e Pesquisa em Educação Matemática. Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas. Rua Bertrand Russell, 801, Cidade Universitária, Campinas/SP, CEP 13083-970, tel.: (0xx19) 3788-5587; http://www.cempem.fae.unicamp.br; e-mail: cempem@grupos.com.br

CENP – Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. Secretaria de Estado da Educação. Praça da República, 53, térreo, sala 63, São Paulo/SP, CEP 01045-903, tel.: (0xx11) 3237-2115; http://cenp.edunet.sp.gov.br; e-mail: cenpgabinete@edunet.sp.gov.br

FNDE – Fundo Nacional de Desenvolvimento de Educação. Diretoria de Ações Educacionais. Coordenação Geral dos Programas do Livro, SBS, Quadra 2, Bloco F, Edifício FNDE, sala 1401, Brasília/DF, CEP 70070-929, tels.: (0xx61) 3966-4919/4915; http://www.fnde.gov.br; e-mail: cac@fnde.gov.br

Gepem – Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática. Instituto de Educação da UFRRJ, sala 30, Rod. BR 465, km 7, Seropédica/RJ, CEP 23890-000, tel./fax: (0xx21) 2682-1841; http://www.gepem.ufrrj.br; e-mail: gepem@ufrrj.br

LEM – Laboratório de Ensino de Matemática. Universidade Estadual de Campinas. Caixa Postal 6065, Campinas/SP, CEP 13083-970, tel.: (0xx19) 3521-6017; http://www.ime.unicamp.br; e-mail: lem@ime.unicamp.br

MEC – Secretaria de Educação Básica. Esplanada dos Ministérios, Bloco L, 5º andar, sala 510, Brasília/DF, CEP 70047-901, tel.: (0xx61) 2104-8612/8617, fax: (0xx61) 2104-9269; http://portal.mec.gov.br

Centro de Referência Virtual – Secretaria de Estado de Educação de Minas Gerais. Avenida Amazonas, 5855, CEP: 30510-000, tel: (0xx31) 3379-8429; http://crv.educacao.mg.gov.br; e-mail: crv@educacao.mg.gov.br

Proem – Programas de Estudos e Pesquisas no Ensino de Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP). Rua Marquês de Paranaguá, 111, Consolação, São Paulo/SP, CEP 013013-050, tel.: (0xx11) 3256-1622 – ramal 215; http://www.proem. pucsp.br; e-mail: proem@pucsp.br

Projeto Fundão – Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro. Caixa Postal 68530, Rio de Janeiro/RJ, CEP 22295-900, tel.: (0xx21) 2562-7511; http://www.projetofundao.ufrj.br/matematica; e-mail: pfundao@im.ufrj.br

SBEM – Sociedade Brasileira de Educação Matemática. Universidade de Brasília. *Campus* Darcy Ribeiro, Caixa Postal 4332 - AC UNB, CEP 70904-970; http://www.sbem.com.br; e-mail: sbem@sbem.com.br

SBM – Sociedade Brasileira de Matemática. Estrada Dona Castorina, 110, sala 109 - Fone: (0xx21) 2529-5095, Rio de Janeiro/RJ, CEP 22460-320; http://www.sbm.org.br

____ Revista Professor de Matemática Online (PMO); http://pmo.sbm.org.br/pmo-h.html

____ Revista Professor de Matemática; http://rpm.org.br/

____ Coleção Explorando o Ensino; http://rpm.org.br/

Sites

- www.apm.pt. *Site* da Associação de Professores de Matemática de Portugal, um grupo ativo de discussões sobre o ensino da Matemática.
- www.eduquenet.net/jogosmatematicos. Portal com jogos matemáticos.
- www.history.mcs.st-and.ac.uk/history/BiogIndex.html. Este *site* apresenta biografias de matemáticos.
- www.hsw.uol.com.br. *Site* que explica como tudo funciona. Além de texto, há infográficos e animações que analisam cada tópico de maneira clara, simples e objetiva.
- www.ibge.gov.br. *Site* do IBGE que apresenta seções voltadas ao uso de estatísticas.
- www.inep.gov.br/basica/saeb/matrizes/matematica. O *site* do Inep traz a Matriz de Referência de Matemática.
- www.pt.khanacademy.org. O *site* é estruturado para usuários individuais: crianças com conhecimentos iniciantes de Matemática, estudantes da educação básica, estudantes universitários, concurseiros e para professores usarem na sala de aula, acompanhando o progresso de cada aluno.

UNIDADE 1 Números inteiros

Conteúdos	Expectativas de aprendizagem
1. Números inteiros positivos e negativos A ideia de números menores que o zero A subtração em IN e os números inteiros negativos O conjunto dos números inteiros Antecessor e sucessor de um número inteiro **2. Ordenando números inteiros** Representação geométrica Números simétricos e opostos Módulo ou valor absoluto de um número inteiro Os números inteiros e a localização Comparação de números inteiros **3. Estatística e probabilidade** Gráficos	Espera-se que os alunos: • percebam e identifiquem situações do dia a dia nas quais apareçam números positivos e números negativos; • ampliem o conceito de número; • comparem e ordenem números inteiros; • representem números inteiros na reta numerada e interpretem sua localização; • utilizem números inteiros na localização de pontos em um plano; • compreendam o significado de ponto de referência e equidistância.

Orientações didáticas

Procure iniciar o estudo dos números inteiros fazendo um levantamento de situações do dia a dia dos alunos que envolvam esses números.

Proponha aos alunos atividades de pesquisa, jogos e problemas que envolvam pontos perdidos e ganhos, créditos e débitos, altitudes (acima ou abaixo do nível do mar) e temperaturas (acima ou abaixo de zero). Durante as atividades, promova discussões que apontem para a necessidade de utilização de novos números a fim de representar e resolver as situações propostas. O trabalho com percursos na reta numerada poderá ajudá-los a superar muitas das dificuldades que possam ocorrer. Proponha-lhes também atividades que possibilitem a análise e interpretação de dados e gráficos em que situações de perdas e ganhos, crescimento e decrescimento sejam representadas por meio de números inteiros.

De modo geral, as atividades envolverão a ideia de **orientação** (sentido), de **ponto de referência** (zero) e de **distância entre dois pontos**.

É preciso garantir que os alunos construam o conceito de **oposto** ou **simétrico** de um número inteiro, por se tratar de um dos pré-requisitos para o estudo das operações com esses números e para a ampliação do conjunto dos números naturais.

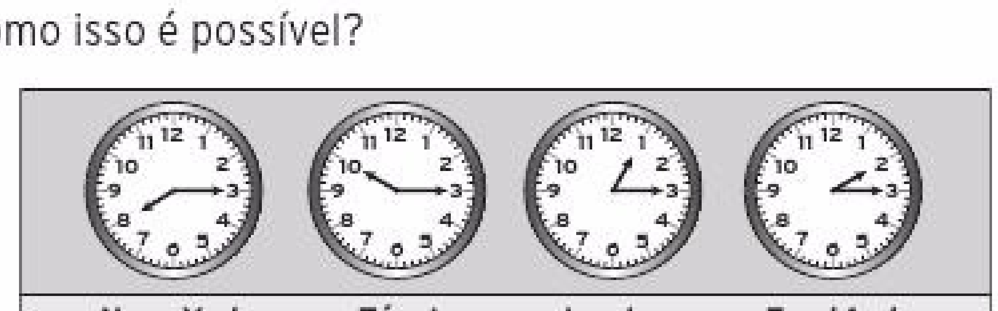
Sobre **Estatística e probabilidade**, procure explorar gráficos que são apresentados em revistas e jornais nos quais aparecem números inteiros positivos e negativos. Discuta com os alunos o significado dos dados negativos que aparecem nos gráficos selecionados.

Texto de aprofundamento

Dividindo a Terra em fusos horários

Em aeroportos, saguões de hotéis e agências de turismo podemos observar painéis com vários relógios; apesar de cada relógio indicar um horário diferente em um mesmo instante, todos estão igualmente corretos.

Como isso é possível?



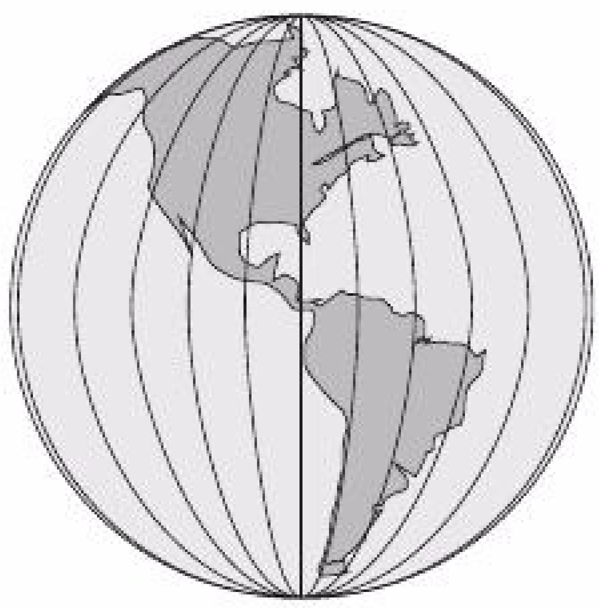
O desenvolvimento da tecnologia permitiu que a comunicação entre pessoas próximas ou muito distantes umas das outras fosse feita com uma rapidez cada vez maior.

O mundo tornou-se uma "grande avenida"!

Por isso, houve a necessidade de se estabelecer uma correspondência de horários para determinar a hora em todas as regiões da Terra.

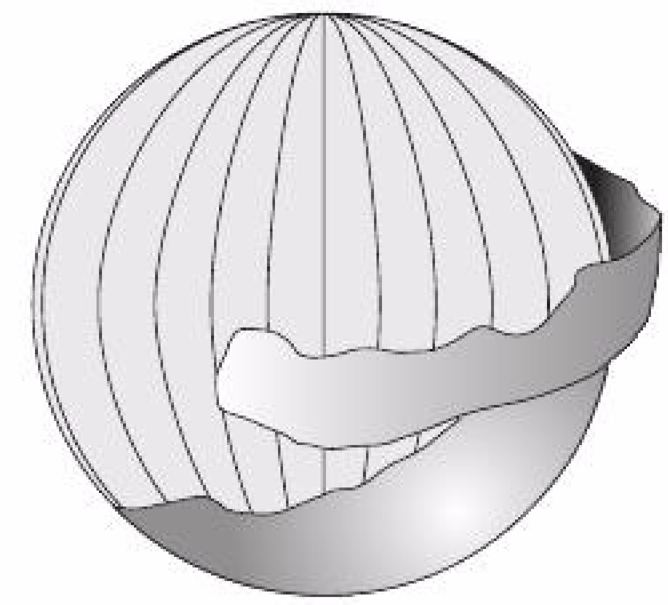
A diferença horária entre todas essas regiões ocorre por causa do movimento de **rotação** da Terra e é expressa por meio dos **fusos horários**.

Fuso horário é uma faixa imaginária que se estende de um polo a outro da Terra, limitada por dois **meridianos**. A Terra está dividida em 24 faixas imaginárias, que correspondem ao número de horas necessárias para que ela complete seu movimento de rotação, ou seja, para que todas as suas regiões passem por todas as horas do dia.



Dividindo-se 360° (medida da circunferência) por 24, obtém-se 15°, que é a medida de cada fuso horário.

Com a determinação dos fusos horários, é possível comparar a Terra com uma laranja dividida em 24 gomos.



O fuso em que se localiza o meridiano de Greenwich é o referencial para a determinação das horas: nele temos a **zero hora**.

Como a Terra gira de oeste para leste, os fusos a leste de Greenwich têm as horas adiantadas (+) em relação a essa localidade. Já os fusos situados a oeste têm as horas atrasadas (−) em relação à hora de Greenwich. Todas as localidades que se encontram em um mesmo fuso apresentam a mesma hora.

Porto Alegre, Curitiba, Rio de Janeiro, Maceió e Recife, por exemplo, são cidades localizadas no terceiro fuso a oeste de Greenwich. Assim, quando forem 12 horas em Greenwich, serão 9 horas nessas cidades. Já na cidade de Tóquio, que se encontra no nono fuso a leste de Greenwich, serão 21 horas.

Imagine sair hoje às 10 horas de Tóquio, viajar cerca de 12 horas e chegar, ainda hoje, às 10 horas no Rio de Janeiro?

Comentários e resolução de atividades

Troquem ideias e resolvam (p. 15)

Diariamente, percebemos a ocorrência de variações de temperatura. No cotidiano, a medida e o controle da temperatura são importantes, seja nas indústrias, em laboratórios e até mesmo nas residências.

No entanto, é difícil controlar e verificar a temperatura de uma vasta quantidade de corpos ou objetos, em diferentes momentos e circunstâncias, sem ajuda de um termômetro.

Esse é um momento oportuno para explorar algumas informações sobre esse aparelho e as escalas termométricas utilizados para medir a temperatura dos corpos.

No Brasil, as medições são feitas na Escala Termométrica Celsius (°C). Essa escala foi criada em 1742, pelo astrônomo sueco Anders Celsius, que estabeleceu pontos fixos da sua escala como sendo os pontos de fusão do gelo e de ebulição da água, que correspondem a 0° para o ponto de fusão de gelo e 100° para o ponto de ebulição da água.

Termômetro é um instrumento utilizado para medir a temperatura de um determinado corpo. Até há pouco tempo, o mais utilizado era o termômetro de mercúrio, cujo uso foi proibido por conter essa substância que é altamente tóxica, persistente no meio ambiente e capaz de se disseminar globalmente, por diversas vias de contaminação.

Investigue e explique (p. 16)

A utilização de uma calculadora é particularmente útil quando recaímos em cálculos longos e também quando um grande número de operações repetidas tem que ser feitas. Os cálculos mentais, as aproximações e as estimativas são favorecidas pela facilidade com que podem ser conferidos no visor de uma calculadora. As calculadoras ainda agilizam a busca de regularidades e propriedades dos números e dos cálculos.

Além da conveniência da utilização de calculadoras em salas de aula, pode ser significativo estimular os estudantes a realizar estimativas de seus cálculos com o objetivo de criticar os resultados obtidos e não simplesmente aceitar os que são mostrados em seus visores.

Esta atividade possibilita a construção de uma sequência numérica dos números inteiros e a noção de sucessor de um número inteiro, que é o número que vem imediatamente depois dele na sequência.

Da mesma forma, aproveite para explorar o conceito de antecessor de um número inteiro.

Esses conceitos favorecem a construção da reta numerada e possibilitam que os alunos observem que todos os números inteiros possuem um, e somente um, antecessor e também um e somente um, sucessor.

Desafio – Caminhos e os sinais + e – (p. 17)

Esta atividade se propõe, de forma lúdica, explorar a localização, orientação, deslocamento de pontos no plano, associados às noções de direção e sentido.

Apresente aos alunos as regras estipuladas para esta atividade:

✓ A direção do deslocamento sobre a malha pode ser horizontalmente (representada por H) ou verticalmente (representada por V).

✓ O sentido do deslocamento sobre a malha pode ser para a direita ou para cima (representada por +) ou para a esquerda ou para baixo (representada por −).

Se achar oportuno, comente com os alunos que quando "estipulamos" alguma regra fazemos um acordo, e se fossem adotadas outras regras, o resultado obtido seria diferente. Quando esses acordos são universais, costumamos dizer que é por convenção.

Solicite aos alunos que resolvam a atividade individualmente, para que você observe as dificuldades apresentadas nessa unidade.

Troquem ideias e resolvam (p. 20)

O uso da reta numerada permite observar relações entre números inteiros em situações concretas. A escala do tempo apoia-se numa representação geométrica.

Atividades sobre representação de números positivos e negativos na reta numerada envolvem as "ideias" de orientação (sentido), de ponto de referência (zero) e de distância entre dois pontos.

Uma representação de números inteiros em uma reta numerada tem por objetivo facilitar na compreensão do conjunto dos números inteiros (representado por $\mathbb{Z}$) como um conjunto formado por números que estão "discretamente" ordenados infinitamente em sentidos opostos, a partir de um ponto de referência ou origem comum.

Esse fato torna possível a existência de números simétricos, ou opostos, com relação àquela origem, que é um dos pré-requisitos para o estudo das operações com esses números e se presta para a ampliação do conjunto dos números naturais, como particulares números inteiros.

Sugestões de atividades complementares

Horário do mundo

A coluna abaixo informa a diferença entre o horário local da cidade e o horário de Brasília, conforme o fuso horário.

Brasília é considerada o ponto zero para a determinação das horas em nosso país. Assim, as cidades localizadas em fusos diferentes e a leste de Brasília têm as horas adiantadas (+) em relação à hora de Brasília; as cidades localizadas em fusos diferentes e a oeste de Brasília têm as horas atrasadas (−) em relação à hora de Brasília.

Cidade	Hora
Atenas	+6
Barcelona	+4
Beirute	+6
Chicago	−2

- Observe as informações e responda:
  a) O que significa a hora de Barcelona: +4?
  b) O que significa a hora de Chicago: −2?

- O jogo final da Copa do Mundo de 2014 aconteceu no Rio de Janeiro, teve início às 16 horas (horário de Brasília) e foi transmitido ao vivo pela televisão de vários países.
  a) A que horas iniciou essa transmissão, ao vivo, em Beirute? E em Barcelona?
  b) Pesquise se Tóquio tem horas adiantadas ou atrasadas em relação a Brasília e qual é a diferença de fusos entre essas duas cidades. Depois, responda: a que horas se iniciou a transmissão, ao vivo, do jogo de final da Copa do Mundo de 2014 em Tóquio?

Respostas:

- a) Significa que Barcelona tem as horas adiantadas em 4 horas em relação à hora de Brasília.
  b) Significa que Chicago tem as horas atrasadas em 2 horas em relação à hora de Brasília.
- a) 22 horas; 20 horas.
  b) Tóquio tem 12 horas adiantadas em relação a Brasília. A transição indicou 4 horas da manhã.

UNIDADE 2

Números inteiros: operações e problemas

Conteúdos	Expectativas de aprendizagem
1. Adição e subtração A adição de números inteiros A adição e as propriedades Propriedade comutativa Elemento neutro Propriedade associativa Calculando diferenças Relação entre adição e subtração Expressões numéricas **2. Multiplicação e divisão** Multiplicação de números inteiros A multiplicação e as propriedades Propriedade comutativa Elemento neutro Propriedade associativa Propriedade distributiva da multiplicação em relação à soma algébrica Como dividir números inteiros? Uso de letras para representar números inteiros **3. Potência e raiz quadrada** Simplificando a escrita multiplicativa Propriedades de potências Multiplicação de potências de bases iguais Divisão de potências de bases iguais Potência de potência Potências de base 10 e a escrita numérica abreviada Raiz quadrada Cálculo da raiz quadrada exata de um número inteiro Mais sobre expressões numéricas	Espera-se que os alunos: • efetuem cálculos com números inteiros, envolvendo as diversas operações: adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação; • selecionem e utilizem procedimentos de cálculo (mental, escrito e por estimativa) em função da situação-problema proposta; • compreendam os diferentes significados das operações com números inteiros e as relações entre as operações.

Orientações didáticas

Procure abordar as operações com números inteiros a partir de situações apresentadas pelos alunos. Isso os auxiliará na compreensão e na construção dessas operações.

É possivel que os alunos levem um tempo para adquirir habilidades de cálculos com números inteiros, fazer abstrações e generalizações de situações concretas

Para os alunos, geralmente é mais fácil compreender a adição e a subtração se forem utilizadas situações que envolvam pontos ganhos e perdidos, créditos e débitos, temperaturas acima e abaixo de zero.

Multiplicações do tipo **$(+4) \cdot (-2)$** e **$(-6) \cdot (+2)$** serão trabalhadas como adições reiteradas de parcelas iguais e os resultados serão obtidos com relativa facilidade. O mesmo não ocorre com multiplicações do tipo $(-6) \cdot (-2)$.

Para esse tipo de multiplicação, utilizamos este raciocínio: **-6 é o oposto de $+6$**, ou seja, **$-6 = -(+6)$**.

Se achar conveniente, recorra a outras explicações, além daquelas que foram apresentadas no texto do livro, como estas:

- **Estender a propriedade distributiva, lembrando que $+6 - 6 = 0$:**

  $0 \cdot (-2) = 0$

  $(+6 - 6) \cdot (-2) = 0$

  $(+6) \cdot (-2) + (-6) \cdot (-2) = 0$

  $-12 + (-6) \cdot (-2) = 0$

  Como $-12 + 12 = 0$, podemos concluir que $(-6) \cdot (-2) = +12$.

Texto de aprofundamento

"Menos com menos dá mais ou dá menos?"

A ideia de número negativo apareceu na Matemática chinesa na Antiguidade. Durante séculos ele foi usado pelos matemáticos gregos e indianos como instrumento para resolução de problemas, embora não fosse considerado uma solução real para eles. Foram necessários 1500 anos para que as regras de sinais fossem sistematizadas e mais alguns séculos (até o século XIX) para que os inteiros se constituíssem formalmente como campo numérico.

O processo de construção dos números negativos foi longo. Do ponto de vista histórico, a necessidade de admitir a existência de números negativos como quantidades reais e, por consequência, a ampliação dos sistemas numéricos surgiram, segundo Caraça (1958), da impossibilidade de realizar a subtração **(a − b)** nos naturais, nos casos em que **b > a**. Na tentativa de superar tal obstáculo, o ser humano acabou criando um novo conjunto numérico, no qual não havia mais essa impossibilidade.

O processo de construção desse novo sistema não foi simples nem rápido. Glaeser (1981-85) analisa os obstáculos de natureza epistemológica impostos à compreensão dos números relativos ao longo da História. Ele tinha como preocupação investigar se as dificuldades vividas pelos matemáticos ao longo do tempo eram as mesmas que hoje afligem os estudantes. Glaeser aponta, no desenrolar da compreensão dos números relativos, seis obstáculos encontrados nas obras de vários matemáticos clássicos:

- inaptidão para manipular quantidades isoladas;
- dificuldades em dar sentido a quantidades negativas isoladas;
- dificuldade em unificar a reta numerada;
- ambiguidade do zero (zero absoluto e zero-origem);
- dificuldade de afastar-se de um sentido "concreto" atribuído aos seres numéricos;
- desejo de um modelo unificado para adição e multiplicação.

Da mesma forma que a criança começa a usar os números negativos antes mesmo de compreendê-los, na evolução histórica, diz Glaeser, "a prática clandestina do cálculo dos números relativos antecedeu 1600 anos sua compreensão".

A aprendizagem operatória dos números inteiros, tendo como pressuposto a compreensão do seu significado, supõe que o aluno domine paulatinamente as propriedades que regem os inteiros como um sistema. Os processos necessários para compreendê-los enquanto tal podem ser resumidos da seguinte forma:

- abstração de que os números negativos são menores que os positivos;
- diferenciação progressiva dos números negativos em relação aos positivos, permitindo integrar os dois campos;
- descoberta de que o número negativo é menor que o positivo, levando à indagação sobre o ponto de onde se originam e ampliando, assim, a concepção do zero-ausência para o zero-origem;
- integração dos números negativos aos positivos, resultando no sistema dos números inteiros que, como tal, não representa mais objetos contáveis, mas realidades reversíveis;
- compreensão dos números inteiros pressupondo a construção interna de um esquema de referência móvel que se aplica a um conjunto de números operados simultaneamente em dois sentidos opostos. É preciso que os esquemas de reversibilidade por compensação sejam construídos para operar com números cujos valores são relativos, pois se modificam conforme a posição;
- compreensão de que o número negativo é um operador em um duplo sentido: representa estados e operações;
- ampliação do conceito de adição — até então associado apenas à ideia de acrescentar — para associações que produzem acréscimo, decréscimo ou resultam em zero;
- compreensão da subtração como operação inversa da adição e não apenas ligada à ideia de tirar, pois os operadores negativos são números que operam transformações de oposição;
- compreensão de que a adição e a subtração de números inteiros são equivalentes, pois adicionar grandezas com sinais diferentes (+ e −) é o mesmo que subtrair grandezas de mesmo sinal (+);
- entendimento de que na multiplicação de números inteiros há uma duplicidade de operações: a que multiplica conjuntos equivalentes é simultânea à operação de transformação que se aplica aos números, fazendo-os manter ou inverter sua posição em relação à região a que pertenciam.

Em síntese, a aprendizagem operatória dos números inteiros supõe a construção por regulações do invariante mais geral do sistema — a negatividade — que é produto de operações a que se chega por abstrações reflexivas e generalizações completivas no nível do pensamento.

Fonte: TEIXEIRA, Leny R. M. *Diário de classe*. São Paulo: Fundação para o Desenvolvimento da Educação (FDE), 1994 (fragmentos).

Comentários e resolução de atividades

Desafio – Quadrado mágico (p. 40)

Trata-se de uma brincadeira divertida que desenvolve o raciocínio lógico e operações. Consiste em explorar as possibilidades e coordenar, ao mesmo tempo, a soma das linhas, colunas e diagonais.

O quadrado mágico é um arranjo de números em um quadrado de tal modo que a soma de cada fila, coluna e diagonal tenha um número constante e os nove números dentro do quadrado não se repetem.

Resolução

Neste quadrado mágico a soma constante é −6. É conveniente ordenar as linhas e colunas, por exemplo, do seguinte modo:

	1ª coluna	2ª coluna	3ª coluna
1ª linha			−5
2ª linha			
3ª linha	1		−3

Como na 3ª coluna, 3ª linha e uma diagonal há dois quadrados menores preenchidos, começamos por eles. Assim, temos:

3ª coluna: $(-5) + (-3) = -8$

$(-6) - (-8) = 2$

3ª linha: $1 + (-3) = -2$

$(-6) - (-2) = -4$

	1ª coluna	2ª coluna	3ª coluna
1ª linha			−5
2ª linha		−2	2
3ª linha	1	−4	−3

A partir daí, preenchemos os quadrados que faltam ser completados.

−1	0	−5
−6	−2	2
1	−4	−3

Propondo atividades semelhantes a esta, os alunos poderão realizar adição e subtração com números inteiros de forma lúdica.

Investigue e explique (p. 49)

Antes de iniciar o trabalho, observe quais procedimentos de cálculo mental os alunos já utilizam para multiplicar dois números naturais.

De forma simples, pode-se dizer que se calcula mentalmente quando se efetua uma operação, recorrendo-se a procedimentos confiáveis, sem os registros escritos e sem a utilização de instrumentos.

O cálculo mental apoia-se no fato de que existem diferentes maneiras de calcular e que se pode escolher a que melhor se adapta a uma determinada situação, em função dos números e das operações envolvidas.

Para a multiplicação, consideram-se casos em que o produto de dois ou mais fatores é 10 ou múltiplo de 10, e faz-se uso da propriedade associativa, como nos exemplos:

O sinal do produto é −

$2 \times 5 = 10$

$10 \times 7 = 70$

$(+2) \times (-7) \times (+5) = -70$

O sinal do produto é +

$5 \times 2 = 10$

$4 \times 5 = 20$

$10 \times 20 = 200$

$200 \times 6 = 1200$

$(+5) \times (-2) \times (-1) \times (+4) \times (-5) \times (-6) = 1200$

Nessa atividade é importante que os alunos investiguem alguma regularidade em relação ao sinal do produto relacionando-o com o número de fatores negativos de uma multiplicação.

- ✓ Se a quantidade de fatores negativos for par, o sinal do produto será positivo.
- ✓ Se a quantidade de fatores negativos for ímpar, o sinal do produto será negativo.

Desafio – Brincando de espelho (p. 55)

Nessa atividade, os alunos terão a oportunidade de consolidar os procedimentos de localização de um número e de seu simétrico na reta numerada e de perceber a simetria existente nessa representação. Além disso, poderão consolidar a regra de sinais para o cálculo do produto de dois números inteiros.

Esse desafio possibilita que os alunos:

✓ realizem conexões entre números inteiros e suas representações em um plano cartesiano;

✓ apliquem procedimentos de localização de pontos de um plano por meio de um sistema de coordenadas;

✓ consolidem os resultados de multiplicação de dois números inteiros.

Essa situação pode ser associada à localização de pontos em um plano cartesiano. Assim, relacionando as faixas azuis aos eixos e às regiões coloridas aos quadrantes, temos:

✓ **Na parte amarela** (2º quadrante): as abscissas são números simétricos das abscissas dos pontos situados na parte cor-de-rosa (1º quadrante). Isso produzirá pontos simétricos aos pontos situados no 1º quadrante em relação ao eixo das ordenadas, e o produto dessas coordenadas será simétrico ao número que está no 1º ou no 3º quadrante (parte bege).

✓ **Na parte verde** (4º quadrante): as ordenadas são números simétricos das ordenadas dos pontos situados no 1º quadrante. Isso produzirá pontos simétricos aos pontos situados nesse quadrante em relação ao eixo das abscissas, e o produto dessas coordenadas será simétrico ao número que está no 1º ou no 3º quadrante.

✓ **Na parte bege** (3º quadrante): as ordenadas são números simétricos das ordenadas dos pontos situados no 2º quadrante. Isso produzirá pontos simétricos aos pontos situados no 2º quadrante em relação ao eixo das abscissas, e o produto dessas coordenadas será simétrico ao número que está no 2º ou no 4º quadrante.

Faça as seguintes perguntas aos alunos:

✓ Em que região se encontra o produto −30? Quais os dois números inteiros que resultam produto −30?

✓ Quais são os fatores do ponto simétrico a −30 em relação ao eixo azul vertical? Em que região ele se encontra?

Parte amarela — Parte cor-de-rosa

−36	−30	−24	−18	−12	−6	6	6	12	18	24	30	36
−30	−25	−20	−15	−10	−5	5	5	10	15	20	25	30
−24	−20	−16	−12	−8	−4	4	4	8	12	16	20	24
−18	−15	−12	−9	−6	−3	3	3	6	9	12	15	18
−12	−10	−8	−6	−4	−2	2	2	4	6	8	10	12
−6	−5	−4	−3	−2	−1	1	1	2	3	4	5	6
−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6
6	5	4	3	2	1	−1	−1	−2	−3	−4	−5	−6
12	10	8	6	4	2	−2	−2	−4	−6	−8	−10	−12
18	15	12	9	6	3	−3	−3	−6	−9	−12	−15	−18
24	20	16	12	8	4	−4	−4	−8	−12	−16	−20	−24
30	25	20	15	10	5	−5	−5	−10	−15	−20	−25	−30
36	30	24	18	12	6	−6	−6	−12	−18	−24	−30	−36

Parte bege — Parte verde

Troquem ideias e resolvam (p. 60)

Aproveite o tema abordado para conversar com os alunos sobre as precauções que devem ser tomadas durante uma tempestade, o que devemos fazer para melhor nos proteger de eventuais relâmpagos etc.

Veja alguns cuidados que podemos tomar.

Cuidados fora de casa durante tempestades:

– Afaste-se das árvores e dos terrenos abertos;

– Não permaneça em piscinas, rios e lagos;

– Evite ficar em morros e terrenos elevados;

– Se estiver dirigindo, permaneça no carro;

– Não permaneça perto de redes elétricas;

– Afaste-se de cercas de arame, varais metálicos e trilhos.

Cuidados em casa durante tempestades:

– Procure ficar em casa até passar a tempestade;

– Evite banhos enquanto durar a tempestade;

– Evite contato com qualquer objeto com estrutura metálica, inclusive torneiras;

– Evite usar o telefone.

Fonte: <www.clamper.com.br/blog/prevencao/saiba-como-se-proteger-dos-raios-dentro-e-fora-de-casa>. Acesso em: 26 fev. 2015.

Resolução

- A Terra é atingida por relâmpagos 100 vezes por segundo.
  Como 1 minuto = 60 segundos, então a Terra é atingida por relâmpagos por minuto:
  $60 \cdot 100 = 6 \cdot 1\,000 = 6 \cdot 10^3$ vezes.
  Como 1 hora = 60 minutos, a Terra é atingida por relâmpagos por hora:
  $60 \cdot 6 \cdot 10^3 = 6 \cdot 10 \cdot 6 \cdot 10^3 = 36 \cdot 10^4$ vezes.
  1 dia = 24 horas.
  Então, a Terra é atingida por relâmpagos por dia:
  $24 \cdot 36 \cdot 10^4 = 864 \cdot 10^4$ vezes.
- Calcula-se inicialmente a distância para atingir a Terra.
  Na descida:
  ✓ tempo = 0,02 segundo
  ✓ velocidade = 1 400 km/s
  Distância percorrida: $1\,400 \cdot 0{,}02 = 28$ km
  Na subida:
  ✓ velocidade = 140 000 km/s (vide texto)
  ✓ distância = 28 km
  Tempo: $28 : 140\,000 = 0{,}0002$ s
  A descarga de volta leva 0,0002 s para percorrer a mesma distância.

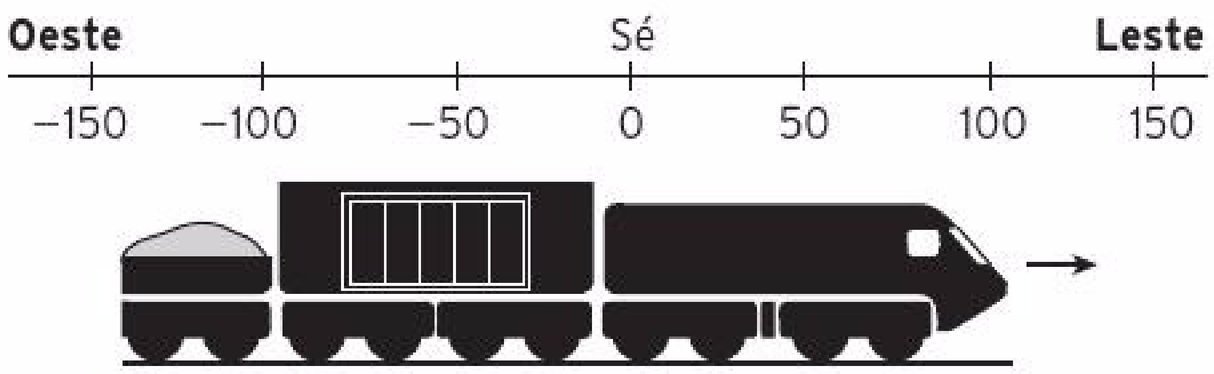
Sugestões de atividades complementares

Outra proposta para multiplicação de números inteiros

Em um sistema ferroviário, os trens da linha leste-oeste trafegam a uma velocidade constante de 50 km/h. A velocidade é considerada positiva no sentido oeste-leste, e negativa no sentido contrário, leste-oeste. A cidade Sé é o **ponto zero**.

Agora, responda:

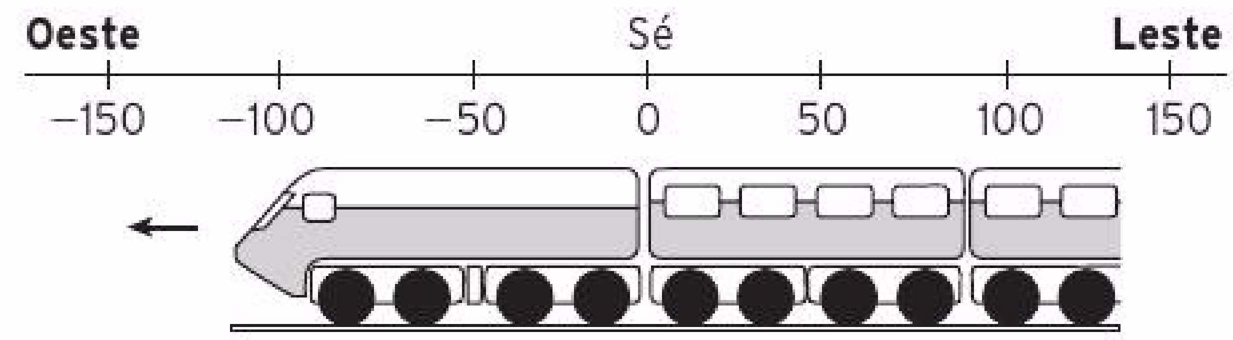
- Um trem deslocando-se de oeste para leste passa, exatamente ao meio-dia, pela cidade Sé.



a) Três horas antes, onde se encontrava esse trem?

b) Três horas depois, onde estará esse trem?

- Um trem deslocando-se de leste para oeste (velocidade negativa) passa, exatamente ao meio-dia, pela cidade Sé.



a) Onde estará esse trem depois de três horas?

b) Três horas antes, onde se encontrava esse trem?

Respostas

- a) Na posição representada por −150.
  b) Na posição representada por 150.
- a) Na posição representada por −150.
  b) Na posição representada por 150.

UNIDADE 3 Ângulos e circunferências

Conteúdos	Expectativas de aprendizagem
1. Ângulos O que é ângulo? Usos do ângulo **2. Medida de ângulos** Grau Medindo ângulos Submúltiplos do grau Classificação de ângulos Unidades de tempo: agrupamentos de 60 em 60 **3. Ângulos e retas** Ângulos congruentes Retas perpendiculares Traçado de retas perpendiculares Bissetriz de um ângulo **4. Circunferência e círculo** O que é circunferência? Raio e corda Traçado de uma circunferência O que é círculo? Arco, ângulo central e setor circular **5. Estatística e probabilidade** Gráfico de setores Como construir um gráfico de setores? **Leitura** A leitura dos céus	Espera-se que os alunos: • associem ângulos à mudança de direção; • identifiquem ângulo como uma figura geométrica formada por duas semirretas de mesma origem e não contidas na mesma reta; • utilizem um transferidor como instrumento para medir ângulos; • meçam ângulos utilizando o grau como unidade fundamental de medida e relacionem graus, minutos e segundos; • classifiquem ângulos segundo suas medidas; • desenvolvam habilidades de cálculo em situações que envolvem graus e minutos; • identifiquem a bissetriz de um ângulo; • identifiquem círculo e circunferência e alguns de seus elementos: centro, raio, diâmetro e corda; • identifiquem arco, ângulo central e setor circular; • interpretem e comparem informações apresentadas em gráficos de setores; • desenvolvam habilidades em construir gráficos de setores.

Orientações didáticas

"... para que o conhecimento constitua competência e seja mobilizado na compreensão de uma situação ou na solução de um problema, é preciso que sua aprendizagem esteja referida a fatos da vida do aluno, a seu mundo imediato, ao mundo remoto que a comunicação tornou próximo ou ao mundo virtual..."

Fonte: *Referência curricular do Rio Grande do Sul.* ‹www.educacao.rs.gov.br›. Acesso em: 21 abr. 2015.

É essencial identificar conhecimentos que os alunos possuem sobre ângulos. Peça que contem o que sabem sobre essa figura geométrica e digam em que situações do dia a dia eles conseguem associar à ideia de ângulo.

Veja algumas situações que poderão ser citadas:

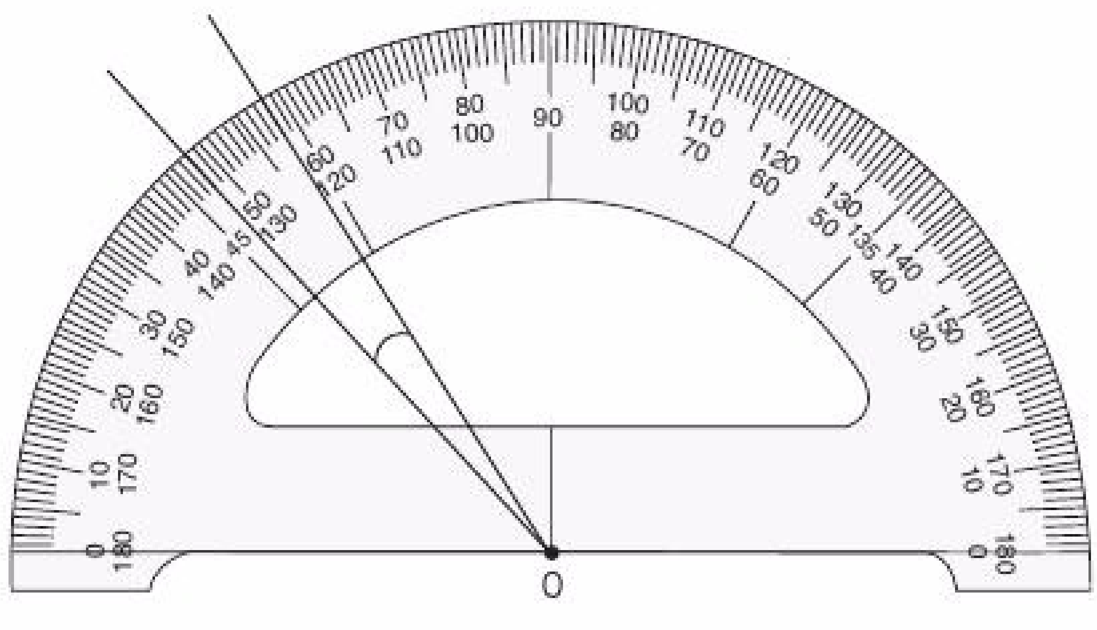
- no jogo com bolinhas de gude, acertar outras bolinhas dando um impulso em uma delas depende de ângulos;
- " zerinho" é uma manobra em que o skatista dá um giro de 360º, de uma só vez, ou em várias etapas. Durante a execução de um "zerinho", a ideia de ângulo está associada a esse giro.

Apesar de citações como essas, é provável que eles não tenham construído o conceito de ângulo como o caracterizamos em Geometria, ou seja, como a figura plana formada por duas semirretas de mesma origem e não contidas na mesma reta.

Explorar atividades que envolvem execução de giros, como "girar meia volta à direita", "girar uma volta à esquerda", "girar $\frac{1}{4}$ de volta à direita", parte do que é próximo e significativo para os alunos e pode facilitar a apropriação do conceito formal de ângulo.

Quanto ao uso do transferidor, alguns alunos poderão encontrar dificuldade no manuseio de tal instrumento. Oriente-os para que sobreponham o transferidor ao ângulo, certificando-se de que o vértice do ângulo, que está sendo objeto de medição, esteja coincidindo exatamente com o centro do transferidor e que um dos lados do ângulo esteja no zero. Informe-os de que a medida do ângulo será indicada pelo número sob o qual está o outro lado do ângulo.

Lembre-se de que existem outras formas de determinar a medida de um ângulo, por exemplo, recorrendo à diferença entre medidas. Veja exemplo abaixo.



A medida desse ângulo é igual a 10º (58º − 48º = 10º).

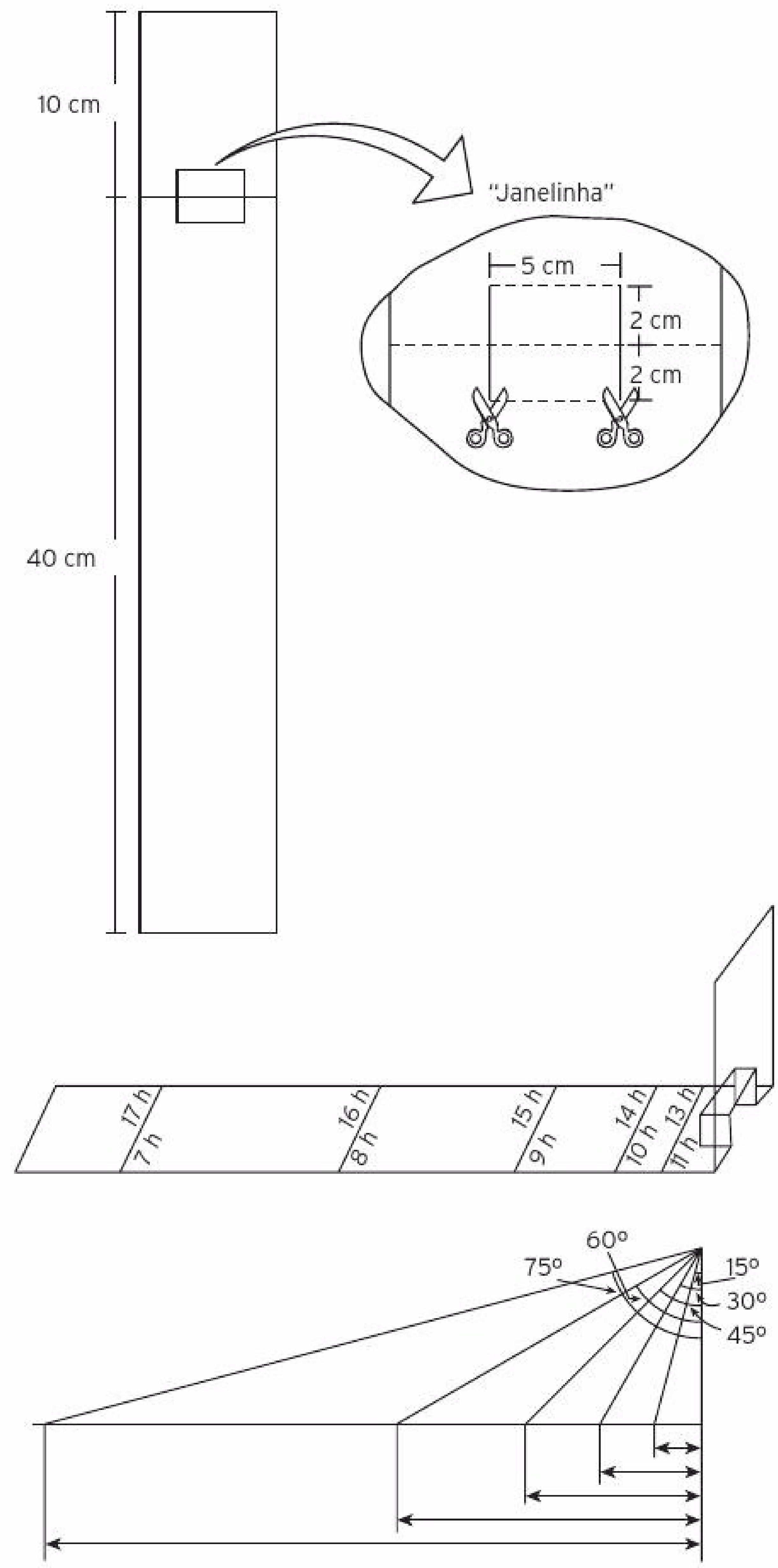
O conceito de ângulo é aplicado em diferentes situações que de certa forma influenciaram a criação dos submúltiplos do grau. Por exemplo, ao pilotar um avião, ou localizar cidades, muitas vezes a precisão exigida faz com que apenas a medida em graus não seja suficiente para indicá-la. Para resolver problemas como esse, a unidade-padrão de ângulos, o grau, foi subdividida em 60 partes iguais. Cada uma corresponde a um minuto, e cada minuto foi subdividido também em 60 partes iguais, cada uma denominada segundo.

Quanto ao estudo da circunferência e do círculo, sugerimos que inicie solicitando aos alunos que citem objetos que lembrem tais formas geométricas. Exemplos: moedas, anéis e bambolê. Além disso, peça para que citem objetos com os quais é possível obter uma circunferência, se colocados sobre uma folha de papel, desenhando o seu contorno com um lápis. Exemplos: copos, latas e moedas.

No estudo inicial sobre circunferência e círculo, foi proposto um trabalho em torno do reconhecimento dessas figuras para, em seguida, explorar seus componentes principais: diâmetro, raio, corda, arco de circunferência, setor circular e ângulo central. Nesse texto, fez-se a distinção entre a figura bidimensional e a figura unidimensional designando-as pelos nomes **círculo** e **circunferência**, respectivamente. Algumas pessoas consideram as palavras "círculo" e "circunferência" como sinônimas, usando-as para designar a linha de fronteira de uma superfície circular e usam a palavra "disco" para designar a própria superfície. Portanto, uma diferenciação entre o uso delas pode ser considerada apenas uma convenção.

Nesse trabalho considerou-se também oportuno explorar gráfico de setores, por ser um gráfico construído com base no círculo, o que possibilita uma conexão e aplicação das ideias até então desenvolvidas. A proposta de construção desse gráfico pelos alunos poderá resultar de uma pesquisa sobre um tema de escolha deles e desenvolvida em sala de aula.

A história da construção de um relógio de sol pode ser também utilizada para motivar o estudo de ângulos. Proponha aos alunos a montagem de um relógio de sol de cartolina. Veja o modelo abaixo.



Siga estes passos:

Faça uma tira de cartolina com as medidas indicadas na figura e recorte-a. Nela, desenhe uma "janelinha" conforme especificado, fazendo um corte nas laterais e dobrando-a nas linhas tracejadas e na marca de 10 cm. Essa "janelinha" servirá de suporte para que parte da tira fique na posição vertical.

De acordo com o ângulo de inclinação dos raios solares, a sombra projetada na parte horizontal do relógio indicará as horas do dia. Por exemplo, o ângulo de 15° formado pelos raios de sol corresponde a 11 horas ou a 13 horas, o ângulo de 30° corresponde a 10 horas ou a 14 horas, e assim por diante.

Peça aos alunos para construírem uma tabela de sombras, a partir das observações feitas, marcando o ângulo de inclinação do Sol, a sombra e a hora correspondente. Para os ângulos dados, eles obterão uma tabela como esta abaixo.

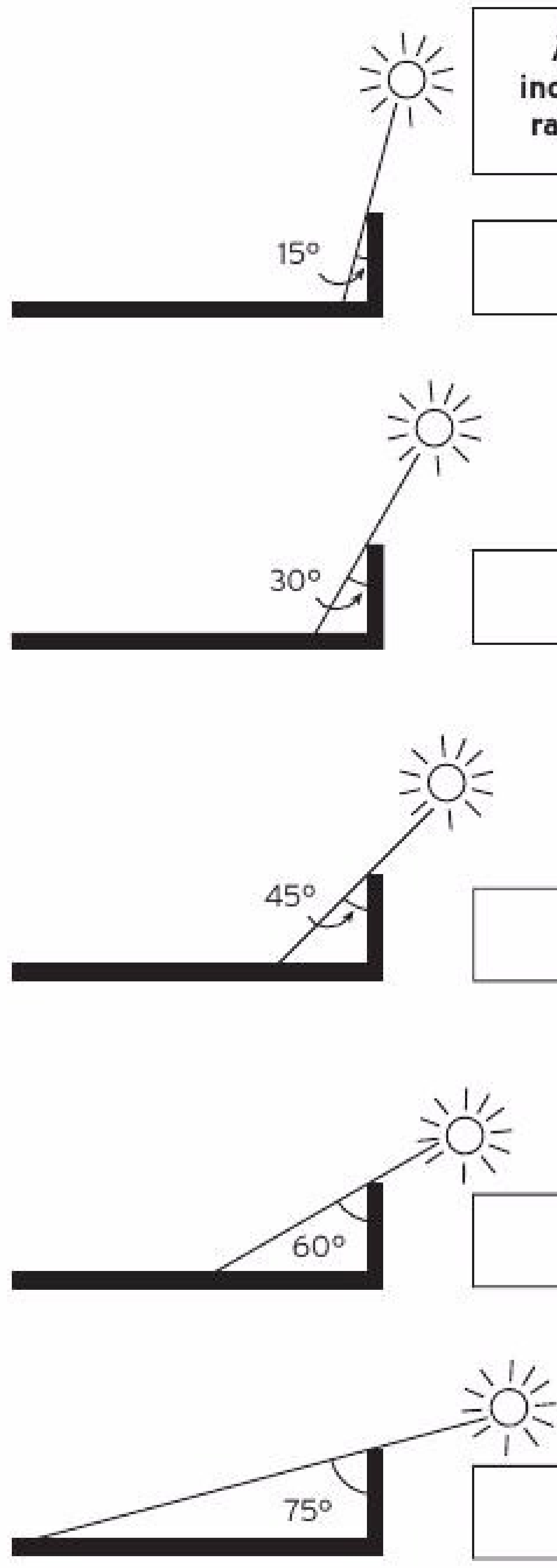


Tabela de sombras

Ângulo de inclinação dos raios solares	Sombra	Hora
15°	0,268 m	11 h
30°	0,577 m	10 h
45°	1 m	9 h
60°	1,732 m	8 h
75°	3,732 m	7 h

Outro antigo instrumento de Astronomia, usado para observar a posição dos astros e calcular sua altura acima do horizonte, é o **astrolábio**. É talvez o mais antigo instrumento científico, e sua invenção é atribuída ao astrônomo e matemático grego Hiparco (século III a.C.).

Em sua forma mais primitiva, o astrolábio consistia em um disco de madeira dividido em graus, suspenso por um anel. No final da Idade Média, com o advento das grandes navegações, o astrolábio foi aperfeiçoado, recebendo tabelas de declinação do Sol ou da distância angular do equador celeste, que permitiam aos marinheiros determinar as latitudes.

Boden/Ledingham/Masterfile

Astrolábio do século XIII.

Outro instrumento de orientação é a **bússola**. Esse aparelho foi inventado pelos chineses no século X e é parecido com um relógio em que se destacam os pontos cardeais. A bússola possui um ponteiro constituído por uma agulha imantada apontando sempre para o norte. Conhecendo-se um dos pontos cardeais é sempre possível determinar os outros.

Iara Venanzi/Kino.com.br

Bússola.

Resgatar esses aspectos da História é importante para expor aos alunos as aplicações da Matemática em contextos reais, além de sugerir possibilidades de integração com outras áreas, como, por exemplo, Geografia e História.

Comentários e resolução de atividades

Desafio – Dando um jeitinho (p. 75)

Resolução

Um dos lados do ângulo passa pela medida de 20º marcada no transferidor, e o outro lado, por 70º. A medida do ângulo é dada por 70º − 20º, ou seja, é igual a 50º.

Desafio – Ângulos e comunicação (p. 80)

Nessa atividade espera-se que os alunos recorram a uma correspondência um a um entre as letras que compõem a palavra STORM e os ângulos formados pelos braços da pessoa que faz a sinalização.

Resolução

Classificando o ângulo formado pelos braços de cada pessoa em agudo ou obtuso em relação a um ângulo reto tem-se:

- T e O: ângulos agudos;
- S e M: ângulos obtusos; Resposta: ângulo raso.

Desafio – Operações com medidas de ângulos (p. 81)

O objetivo principal dessa atividade é desenvolver um algoritmo de cálculo da diferença entre medidas de dois ângulos. Espera-se que os alunos desenvolvam um algoritmo semelhante ao desenvolvido no cálculo da soma das medidas de dois ângulos. Oriente-os para que troquem 1º por 60′, e vice-versa, sempre que necessário.

Resolução

- $$\begin{array}{r} 76^\circ\ 35' \\ -\ 47^\circ\ 54' \end{array} \xrightarrow[\text{1º por 60′}]{\text{Trocando}} \begin{array}{r} 75^\circ\ 95' \\ -\ 47^\circ\ 54' \\ \hline 28^\circ\ 41' \end{array}$$

- Calculamos a medida do primeiro ângulo ("primeiro mede 47º 18′ a mais que o segundo e este mede 30º 12′"):
  47º 18′ + 30º 12′ = **77º 30′**

A medida do terceiro ângulo é a diferença entre 180º e a soma das medidas do primeiro com a do segundo ângulo.

- Soma das medidas do primeiro e segundo ângulos:
  77º 30′ + 30º 12′ = 107º 42′.
- Média do terceiro ângulo: 180º − 107º 42′, ou seja,
  179º 60′ − 107º 42′ = **72º 18′**.
  Verificação:
  77º 30′ + 30º 12′ + 72º 18′ = 180º.

Investigue e explique (p. 85)

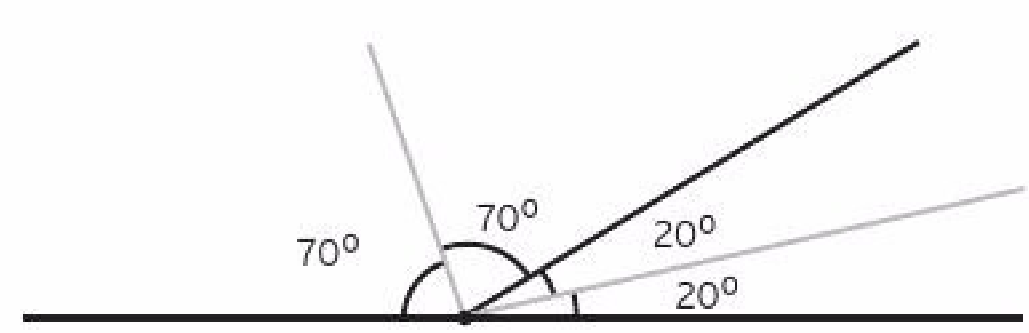
Nessa atividade, o aluno tem a oportunidade de aplicar o conhecimento adquirido sobre bissetriz de ângulos e descobrir um padrão existente na medida do ângulo formado pelas bissetrizes de dois ângulos adjacentes suplementares.

O objetivo principal da primeira pergunta é reconhecer a situação apresentada.

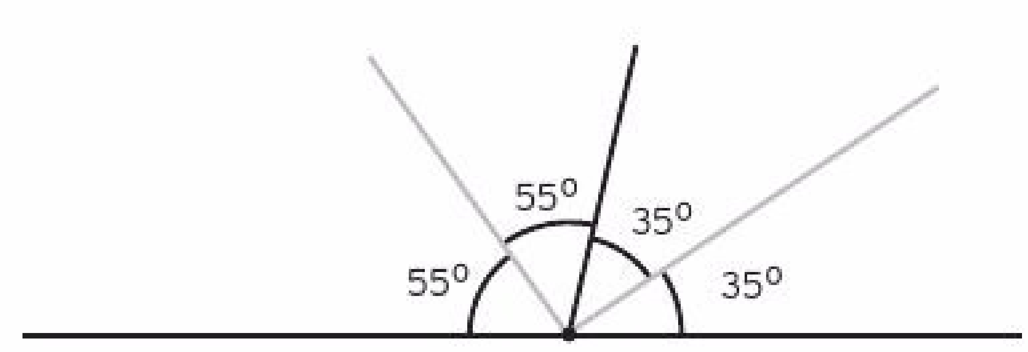
✓ Os dois ângulos apresentados nas três situações são adjacentes e a soma das medidas deles, em cada caso, é igual a 180º;

✓ Nas três situações as semirretas traçadas em cinza são bissetrizes dos ângulos apresentados.

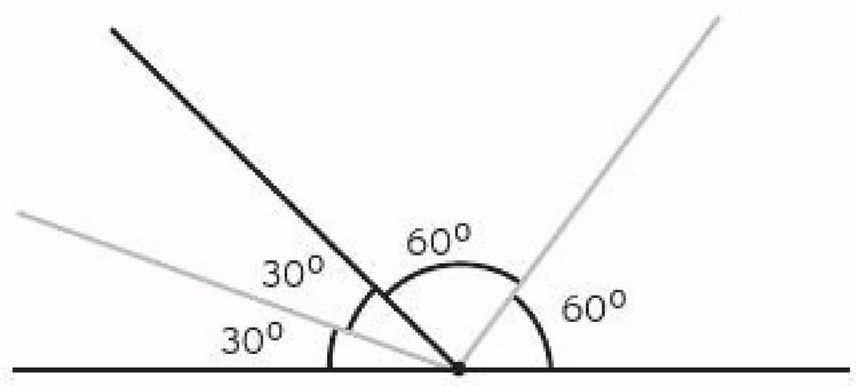
Feita a segunda pergunta, espera-se que os alunos formulem conjecturas sobre a medida do ângulo formado pelas bissetrizes: "é um ângulo reto". Nesta fase, a validação de tal hipótese poderá ser feita por meio de medições dos ângulos formados pelas bissetrizes.



70º + 20º = 90º



55º + 35º = 90º



$30° + 60° = 90°$

O ângulo formado pelas bissetrizes de dois ângulos nas situações apresentadas mede 90°, ou seja, é um ângulo reto.

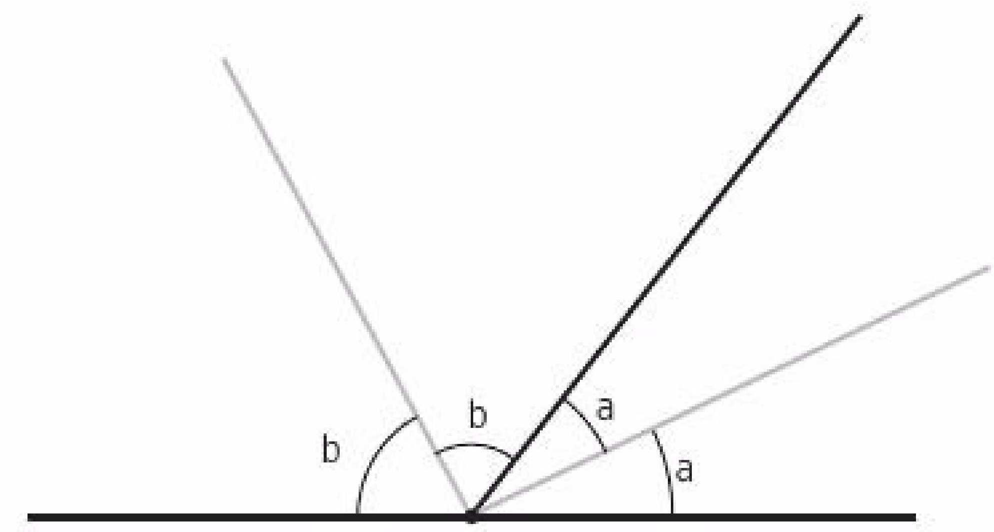
Desdobramento

Se achar oportuno, oriente-os para que elaborem uma demonstração (que não dependa de medições diretas) de que "o ângulo formado pelas bissetrizes de dois ângulos adjacentes suplementares é um ângulo reto".

Faça uma figura como esta abaixo para auxiliá-los na demonstração.

Espera-se que eles reconheçam que:

$2a + 2b = 180°$ e dividam todos os termos por 2: $a + b = 90°$.



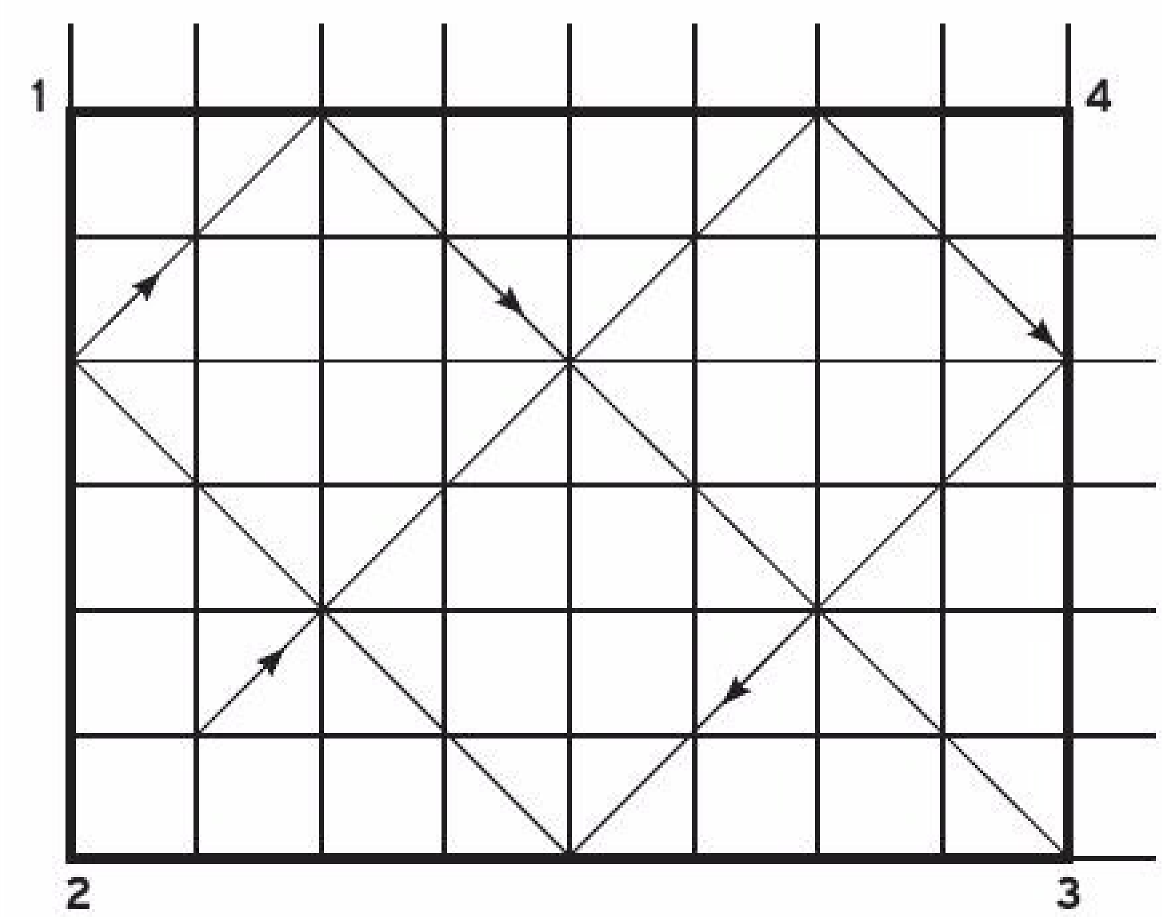
Desafio – Vamos jogar sinuca? (p. 85)

Antes de executar a atividade peça aos alunos que façam conjecturas e formulem algumas hipóteses para as questões propostas.

É importante que as questões apresentadas sejam corrigidas. Para isso proponha correções coletivas, criando situações para que estudantes comparem suas resoluções com as feitas coletivamente e analisem diferentes procedimentos de resolução.

Resolução

- Reproduzindo o caminho percorrido pela bola em uma malha quadriculada é possível concluir que ela cairá na caçapa de número 3.
- O total de quadrados atravessados pela bola poderá ser encontrado por meio de uma contagem no mesmo esboço elaborado: atravessará 23 quadrados.
- Ainda contando, tem-se que a bola tocará as bordas da mesa 5 vezes.



Troquem ideias e resolvam (p. 92)

Os objetivos principais deste Desafio são desenvolver a competência leitora, a conscientização de problemas ambientais provocados pelo descarte incorreto dos resíduos produzidos pela população e o levantamento de possíveis soluções para o problema, ou ações que possam minimizá-lo. Caso seja do interesse dos alunos e adequado ao seu planejamento, o tema poderá ser ampliado e desenvolvido em interdisciplinaridade com outras disciplinas em formato de miniprojeto escolar.

Proponha uma leitura de todo o texto, convidando um aluno para que o leia em voz alta. Esclareça dúvidas que surgirem. Avalie a necessidade de retomar conceitos sobre porcentagem. Os itens de **a** até **e** poderão ser respondidos em um amplo painel, promovendo uma síntese das sugestões apresentadas pelos alunos. O item **f** pode ser desenvolvido em grupos de três ou quatro alunos com uma exposição, no mural da escola, dos gráficos produzidos.

Resolução

- Questões **a** e **b**: as respostas poderão ser encontradas observando o título da tabela: "Destino final dos resíduos sólidos no municípios"; "período de 2011 a 2014".
- Questão **c**: a resposta é a diferença entre os dados apresentados na linha dos anos 2012, 2013 e a coluna correspondente ao aterro sanitário: $58{,}3 - 58{,}0 = 0{,}3$, ou seja, 0,3% dos municípios;
- Questão **d**: a resposta encontra-se na linha correspondente ao ano de 2013 da tabela, na coluna "Aterro sanitário": 58,3% correspondem a mais do que metade dos municípios.

Sugestão de atividade complementar

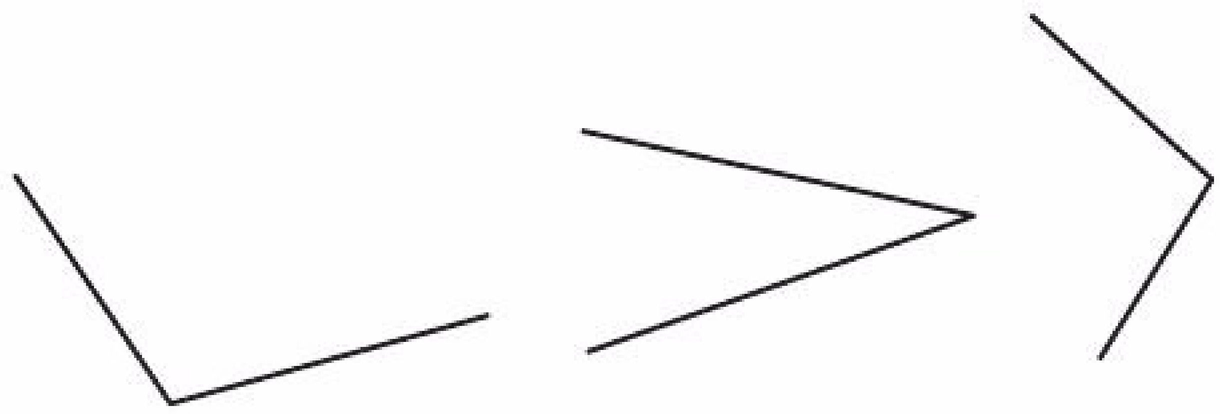
Esquadros e medida de ângulos

Material:

✓ Dois tipos de esquadros para cada aluno.

✓ Em uma folha de papel, desenhe ângulos com aberturas diferentes. Veja exemplos.

- Faça uma estimativa sobre a medida dos ângulos apresentados a seguir, utilizando os ângulos presentes em esquadros. Depois, confira a estimativa feita, utilizando um transferidor.



- Utilize transferidores e desenhe ângulos com as seguintes medidas:

  a) 90°
  b) 120°
  c) 75°
  d) 100°
  e) 135°

UNIDADE 4 Área e volume

Conteúdos	Expectativas de aprendizagem
1. Usos de área Revendo cálculo de áreas Área de trapézios Embalagem e área total **2. Medindo volume** Empilhamento de cubos O que é volume? Volume de paralelepípedos Volume de cubo Unidades de medida de volume Relação entre m³, dm³ e cm³ **3. Medindo capacidades** Relação entre as unidades de capacidade	Espera-se que os alunos: • adquiram o conceito de área, volume e capacidade; • calculem áreas utilizando a composição e a decomposição de figuras; • utilizem a noção de área de alguns quadriláteros e triângulos, as unidades de superfície, seus múltiplos, submúltiplos e suas relações; • utilizem o cubo para calcular volume; • compreendam e utilizem o metro cúbico e as relações entre seus múltiplos e submúltiplos; • compreendam as relações entre as unidades de volume e capacidade.

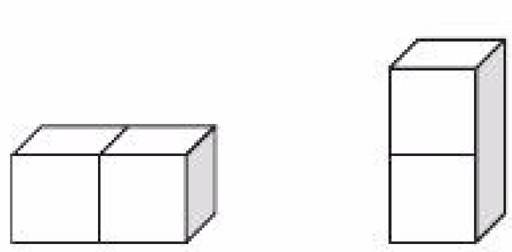
Orientações didáticas

Espera-se que os alunos desenvolvam o hábito de usar estimativas para determinar áreas de figuras com formas geométricas não definidas e áreas de regiões geográficas próximas do local em que vivem. Calcular áreas de ambientes físicos de interesse do aluno poderá ser um atrativo a mais para que ele estude esse tema. Utilize a composição e a decomposição de figuras para calcular as áreas. Essa estratégia permitirá que os alunos percebam que é possível calcular áreas de algumas figuras mesmo sem conhecer as fórmulas.

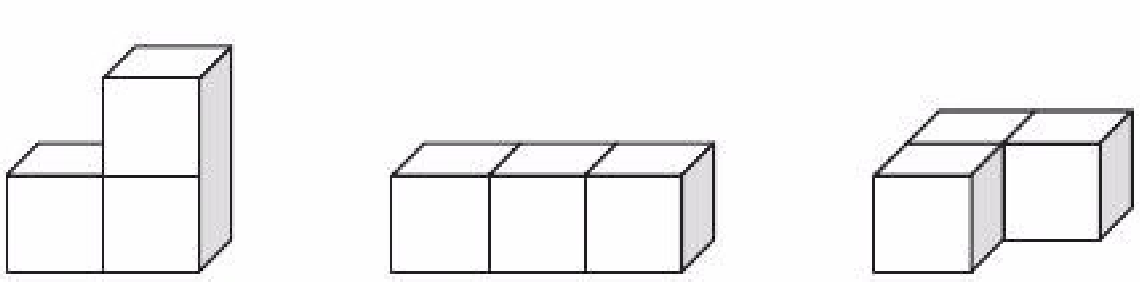
O conceito de volume pode ser construído a partir do empilhamento de cubos, desenvolvendo-se, ao mesmo tempo, a percepção espacial e a habilidade de desenho e de representações geométricas, como sugere a atividade a seguir:

Utilizando a imaginação, os alunos poderão empilhar alguns cubos de diversas maneiras, formando pilhas horizontais (dispondo um cubo ao lado do outro) ou verticais (colocando um cubo sobre o outro), por exemplo. Eles podem fazer empilhamentos com:

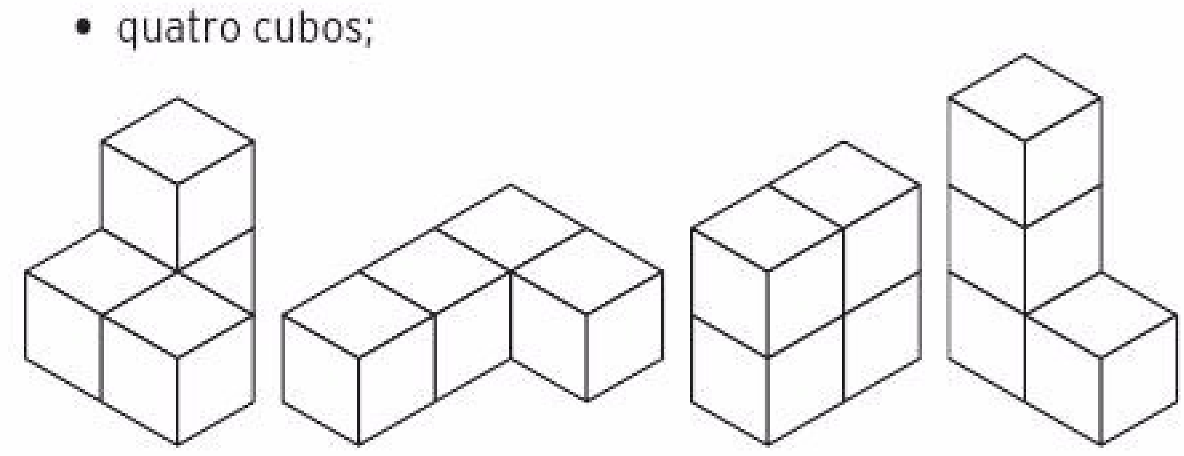
- dois cubos;



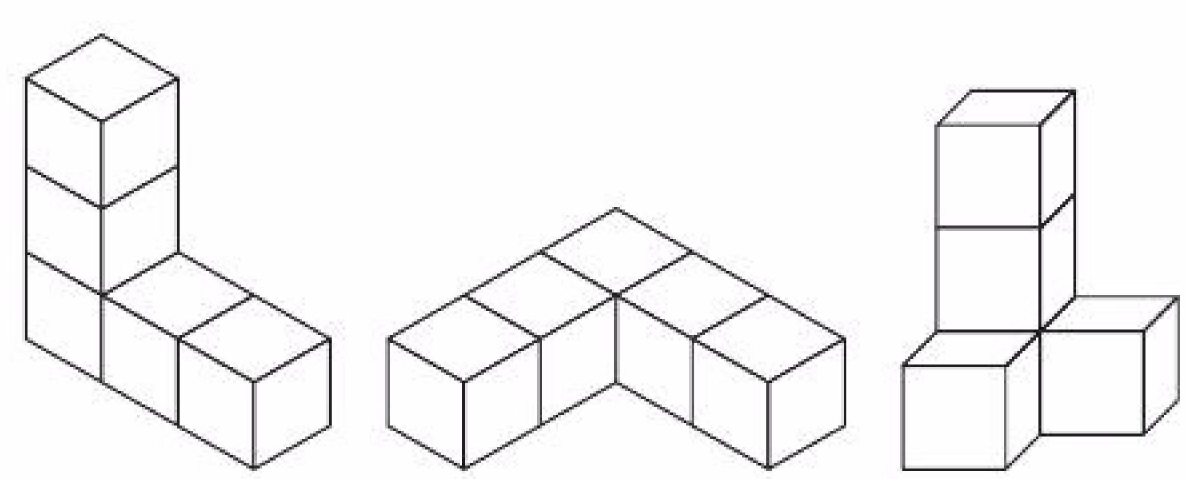
- três cubos;



- quatro cubos;

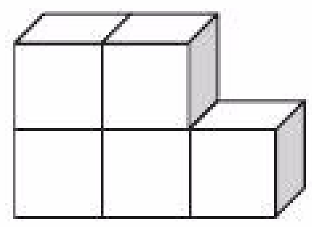


- cinco cubos.



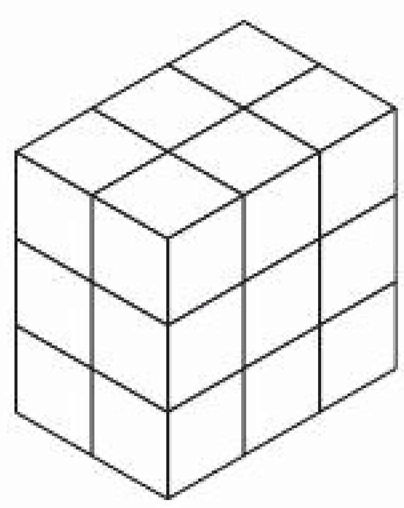
É compreensível que os alunos tenham mais dificuldades em fazer o desenho de empilhamentos nos quais um cubo se encontra na frente do outro. Essa dificuldade decorre do fato de a quantidade de cubos que aparecem no desenho, isto é, a quantidade de cubos que os alunos veem, ou o número de cubos dos quais se vê uma face ou parte de uma face, ser diferente da que compõe o empilhamento.

Considerando o cubo como unidade de medida de volume, os alunos poderão calcular os volumes de diferentes figuras espaciais por meio da contagem dos cubos.

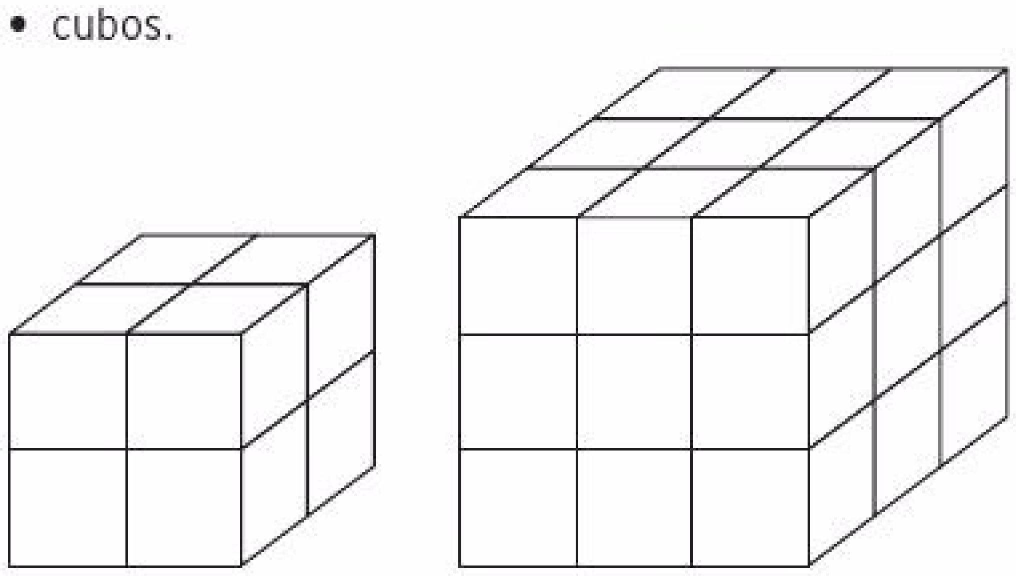


Além disso, eles poderão realizar alguns empilhamentos simples que resultarão em sólidos conhecidos como:

- blocos retangulares;



- cubos.



No caso dos cubos, solicite aos alunos que façam empilhamentos que tenham a mesma quantidade de cubos na altura, na largura e no comprimento.

É possível que percebam, nessas construções, relações que contribuirão para desenvolver o cálculo do volume do cubo fazendo analogia ao raciocínio usado para o cálculo de área. Peça a eles que registrem, de forma organizada, as possibilidades para se obter o volume de um cubo utilizando cubos menores.

Número de cubos	Produto: largura · comprimento · altura
1	$1 \cdot 1 \cdot 1$
8	$2 \cdot 2 \cdot 2$
27	$3 \cdot 3 \cdot 3$
64	$4 \cdot 4 \cdot 4$
125	$5 \cdot 5 \cdot 5$
216	$6 \cdot 6 \cdot 6$

Ao observar os dados da tabela, é possível que os alunos descubram um padrão e, assim, estabeleçam uma maneira de calcular o volume de um cubo, conhecendo as medidas das arestas.

Dessa forma, os alunos também poderão construir paralelepípedos e escrever uma "fórmula" para calcular seus volumes, considerando como unidade cada cubo menor.

Texto de aprofundamento

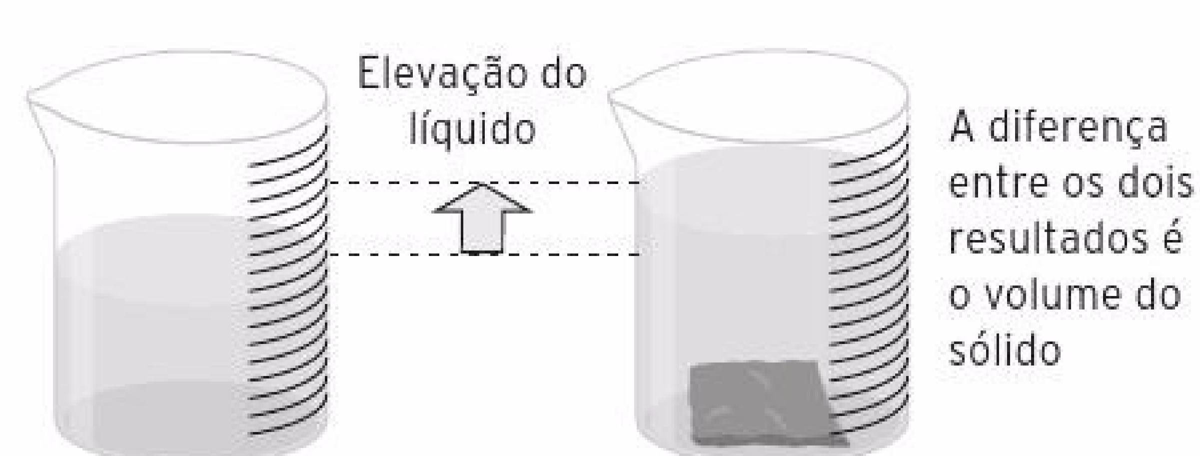
Um pouco de história

A preocupação com o cálculo de volumes é bastante antiga. Há milhares de anos a civilização egípcia já conhecia alguns processos para esse cálculo. Os habitantes da Grécia Antiga aprimoraram esses processos e desenvolveram outros. Destaca-se o trabalho do matemático e físico Arquimedes, que viveu no século III a.C.

Desenvolvendo raciocínios bastante criativos, Arquimedes mostrou como calcular o volume de diversas figuras geométricas.

Conta-se que, enquanto tomava banho, constatou que a água subia quando ele mergulhava. Essa quantidade de água que subia era seu volume.

Veja como obter o volume de um sólido qualquer, como uma pedra, uma fruta, um legume etc. usando o princípio de Arquimedes.



Fonte: <www.educacao.globo.com/telecurso>. Acesso em: 26 fev. 2015.

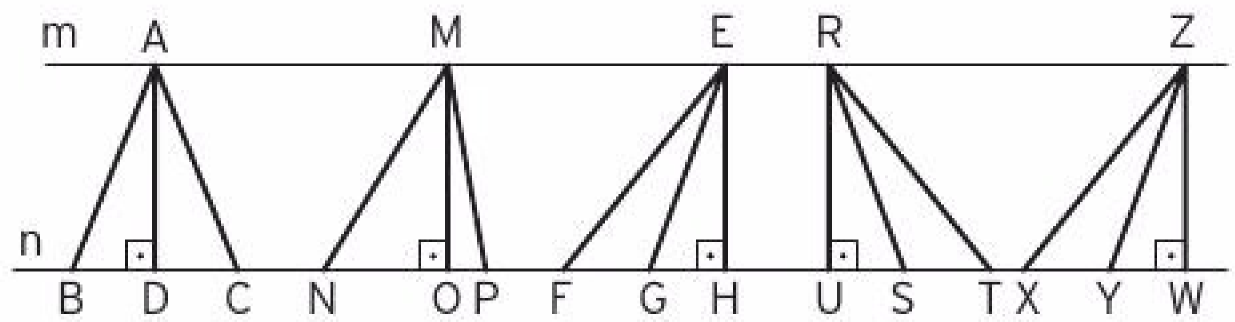
Comentários e resolução de atividades

Investigue e explique (p. 99)

Resolução

Como **m** e **n** são retas paralelas, a distância de qualquer ponto de **m** a **n** é sempre a mesma. Então, as alturas $\overline{AD}$, $\overline{MO}$, $\overline{EH}$, $\overline{RU}$ e $\overline{ZW}$ têm a mesma medida.

Todos os triângulos têm base e altura relativas a essa base com medidas iguais, então a área de cada um dos triângulos mede 40,8 cm².



Desafio – Um desafio saboroso (p. 106)

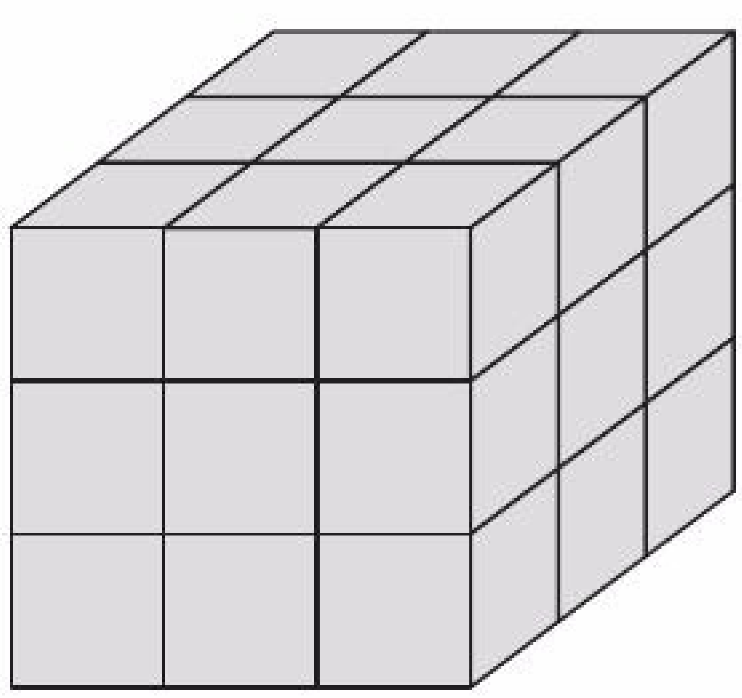
Esse é um problema não convencional e um dos objetivos é perceber a diversidade de procedimentos que podem ser utilizados.

Inicie a atividade pedindo que os alunos desenhem um bolo em forma de cubo e indiquem ou nomeiem as 5 faces cobertas de chocolate. Em seguida, pergunte como foi cortado o bolo para que fossem obtidos 27 cubos pequenos iguais.

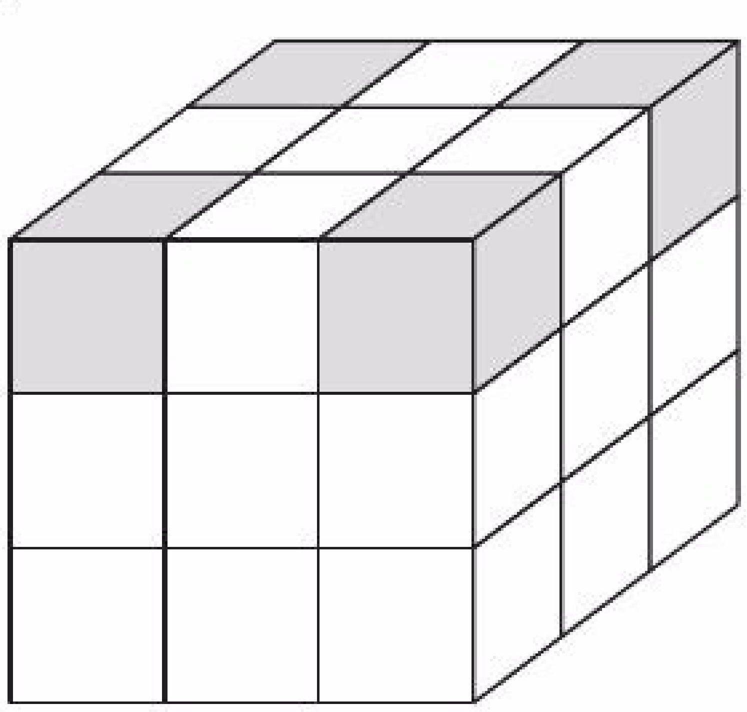
Dê oportunidade para que os alunos expressem seus conhecimentos, identifiquem e apresentem suas dúvidas e formulem hipóteses.

Resolução

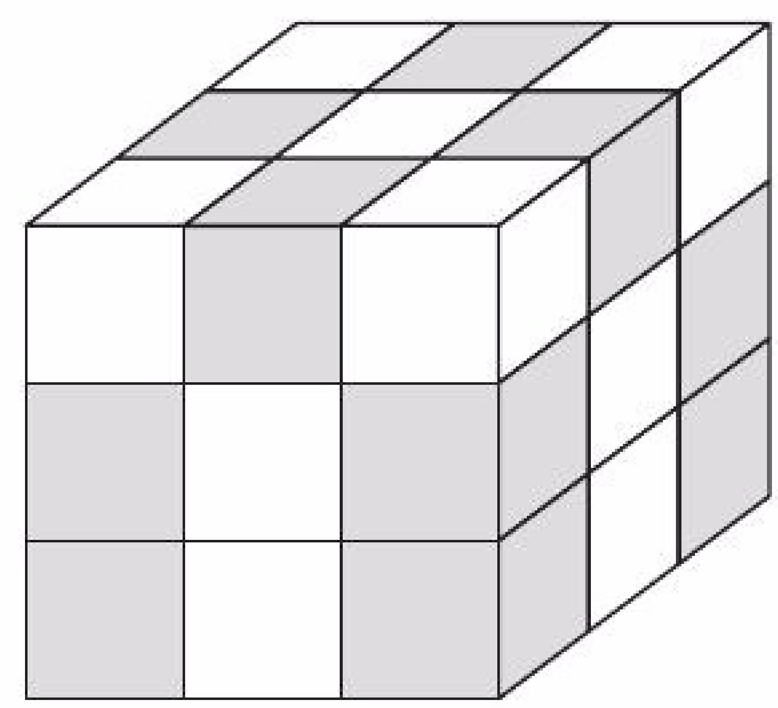
5 faces cobertas de chocolate: face de cima e as 4 faces laterais (2 visíveis na figura e 2 ocultas);



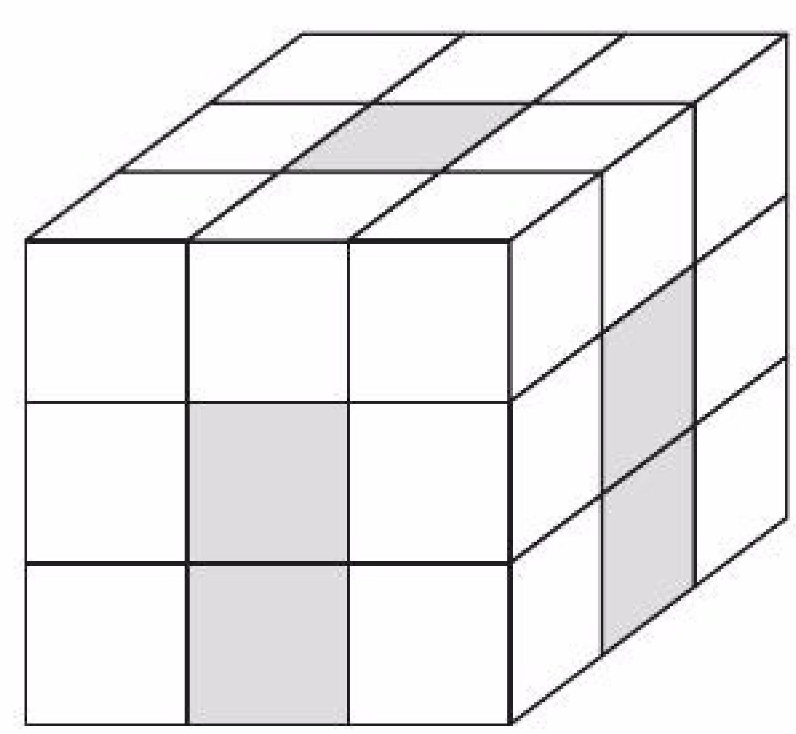
a) 3 faces com cobertura: 4 cubos dos "cantos" que estão em cima;



b) 2 faces com cobertura: 12 cubos (10 nas faces visíveis e 2 nas faces ocultas);



c) 1 face com cobertura: 9 cubos (5 nas faces visíveis e 4 nas faces ocultas);



d) nenhuma face com cobertura: 2 cubos (1 no centro do bolo e o outro abaixo dele).

Se alguns alunos tiverem dificuldades em visualizar as soluções representadas nas figuras, mostre com material manipulável "montando" um bolo com 7 pequenos cubos iguais de cartolina ou material dourado.

Troquem ideias e resolvam (p. 110)

Inicie esclarecendo aos alunos o que será trabalhado e qual a finalidade de estudar o cálculo de volume e capacidade. Faça-os compreender que a capacidade de um recipiente é o seu volume interno.

Explique que uma unidade muito usual de volume é o litro (L), definido como o volume de um cubo com 1 dm de lado, ou seja: $1\ dm^3 = 1000\ m^3 = 1\ L$.

Resolução

- Assim, o volume da caixa-d`água é $1{,}8\ m^3 = 1800\ m^3 = 1800\ L$.
- Supondo que a caixa-d'água é um paralelepípedo, o seu volume é o produto das medidas da largura, do comprimento e da altura.

Volume = largura × comprimento × altura

Capacidade da caixa-d'água = largura × comprimento × altura

1800 L = largura × comprimento × altura

Dobrando as medidas da largura, do comprimento e da altura, temos:

Nova capacidade = 2 × largura × 2 × comprimento × 2 × altura = 2 × 2 × 2 × largura × comprimento × altura = 8 × largura × comprimento × altura = 8 × 1800 L

Ou seja, a nova capacidade será oito vezes a capacidade atual.

- Nova capacidade: 8 × 1800 L = 14 400 L.

Desafio – Encrencas e possibilidades (p. 111)

Esse é um problema que envolve diferentes combinações que resultam no número 8, em que a solução é dividir em partes iguais: duas partes de 4 litros. São necessárias várias passagens de uma vasilha para outra para se chegar à solução.

Existe mais de uma solução e não há uma regularidade inerente a elas. Esse problema é considerado um tipo de recreação, cuja finalidade é desafiar e envolver o aluno.

A solução para a atividade dependerá muito da observação, pois espera-se que os alunos cheguem à divisão em partes iguais se adicionarem ou subtraírem os números dados de forma conveniente.

Pode-se começar fazendo um registro como:

8 L	5 L	3 L
8		
3	5	
3	2	3
6	2	
6		2
1	5	2
1	4	3
4	4	

Outra solução possível é:

8 L	5 L	3 L
8		
5	3	
2	3	3
2	5	1
7		1
4	1	3
4	4	

Desdobramento

Analisar as possíveis soluções para o caso de as medidas de capacidade envolvidas serem substituídas por 5 L, 3 L e 2 L.

Sugestão de atividade complementar

Empilhamentos e volumes

Junte-se a outros colegas para realizar essa atividade.

Com alguns cubos e um pouco de imaginação, você poderá empilhá-los de diversas formas.

Cada grupo montará 6 cubos. Em seguida, cada membro do grupo fará um empilhamento e representará o que fez em uma folha de papel quadriculada.

Depois, verifiquem que montagens poderão ser consideradas empilhamento. Calculem os volumes desses empilhamentos.

UNIDADE 5

Números racionais

Conteúdos	Expectativas de aprendizagem
1. Racionais positivos e racionais negativos Onde encontramos números racionais negativos? Números racionais e a propriedade fundamental das frações **2. Ampliação do conjunto dos números inteiros** Um número inteiro é um número racional? Dízimas periódicas **3. Representação geométrica** Reta numerada Números racionais opostos e módulo Comparação de números racionais **4. Operações** Adição e subtração Eliminação de parênteses Cálculos de somas e diferenças Relação entre adição e subtração Multiplicação Decidindo o sinal do produto Inverso multiplicativo Divisão Decidindo o sinal do quociente **5. Números racionais e potências** Potência: expoentes inteiros positivos Potências e expoentes negativos Usos da potência de expoente negativo **6. Estatística e probabilidade** Os números racionais negativos e os gráficos Média aritmética **Leitura:** Tão rápido que um segundo é tempo demais!	Espera-se que os alunos: • identifiquem situações em que são necessários números não inteiros e números não racionais absolutos para quantificá-las; • compreendam os diferentes significados de número racional em situações-problema variadas; • representem números racionais nas formas decimal e fracionária e estabeleçam relações entre eles; • identifiquem, interpretem e utilizem diversas representações dos números racionais indicadas por diferentes notações, vinculando-as a contextos que ocorrem no dia a dia; • estendam aos números racionais as propriedades já estudadas para os números inteiros; • comparem e ordenem números racionais nas formas decimal e fracionária; • resolvam problemas que envolvem números racionais nas formas fracionária e decimal e, a partir delas, construam e ampliem os significados da adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação; • utilizem procedimentos para desenvolver habilidades no uso de algoritmos e técnicas de cálculo das várias operações com números racionais nas formas fracionária e decimal, com compreensão dos processos envolvidos; • leiam e interpretem números racionais relacionados a dados estatísticos; • atribuam significado à média aritmética de um grupo de valores numéricos e saibam calculá-la.

Orientações didáticas

A compreensão e interpretação de informações recebidas pelos meios de comunicação demandam um conhecimento sobre números racionais, em sua maioria na forma decimal. Daí a necessidade de realizar um trabalho concomitante com números racionais nas formas fracionária e decimal.

Explore o conjunto dos números racionais dando destaque à ampliação do conjunto dos números inteiros. Isso auxiliará na extensão das operações e propriedades já estudadas. Comente com os alunos que assim como existem situações que não podem ser representadas por meio de números naturais, existem situações que não podem ser representadas por meio de números inteiros. Apresente alguns exemplos: 3,5 °C abaixo de zero, 25,68 m abaixo do nível do mar, débito de R$ 38,57, o quociente de −5 por 6, entre outros.

Procure ampliar o conhecimento que os alunos já conquistaram sobre as operações com frações e decimais absolutos explorando situações-problema que envolvam números racionais positivos e negativos. Isso será útil para aqueles que tiveram um pouco mais de dificuldade em cálculos com números inteiros e números racionais absolutos e ratificará as conclusões daqueles que já aprenderam a operar com eles.

Outro aspecto que merece atenção nessa unidade é o estudo das potências de base 10 com expoentes inteiros positivos ou negativos. Esse estudo é mais significativo quando as situações exploradas estão contextualizadas e resultam de uma ampliação do trabalho com a potenciação envolvendo números naturais. Para isso, é conveniente recorrer às tabelas, observando as possíveis regularidades que constituam encaminhamento para a pré-álgebra.

Texto de aprofundamento

Os cientistas, especialmente os físicos modernos, lidam com números de tirar o fôlego de qualquer um.

Você sabia?

- ✓ A vida média de uma estrela é da ordem de **10 bilhões** de anos.
- ✓ As partículas existentes no átomo morrem, renascem e voltam a morrer e a renascer **1 milhão** de vezes no fugaz intervalo de 1 segundo.
- ✓ Em **10 bilhões** de anos, a luz pode percorrer algo como a metade do Universo.
- ✓ Em 1 segundo, a luz percorre **300 mil** quilômetros.

Agora, observe como escrevemos alguns números:

10 bilhões ——— 10 000 000 000

1 bilionésimo ——— 0,000 000 001

Recorrendo às potências de 10, podemos escrever:

10 000 000 000 ——— 10^{10}

expoente 10: indica o número de zeros após o algarismo 1.

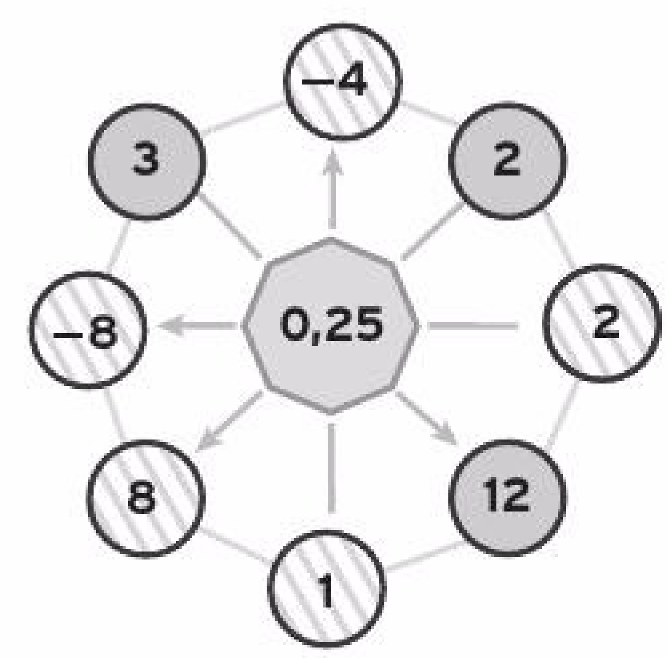
0,000 000 001 ——— 10^{-9}

expoente −9: indica o número de casas decimais.

Desafio – Uma roda de números (p. 115)

De modo geral, os alunos encontram mais dificuldades na divisão do que na multiplicação. Então, uma ideia é recorrer à multiplicação por −0,25, uma vez que os resultados são dados: −8 , −4, 1, 2 e 8.

- ✓ $-8 \times (-0{,}25) = 2$, então $2 : (-0{,}25) = -8$. Uma seta deve partir de 2, passar por −0,25 e chegar em −8;
- ✓ $-4 \times (-0{,}25) = 1$, então $1 : (-0{,}25) = -4$. Uma seta deve partir de 1, passar por −0,25 e chegar em −4;
- ✓ $8 \times (-0{,}25) = -2$, então $-2 : (-0{,}25) = 8$. Uma seta deve partir de − 2, passar por −0,25 e chegar em 8.



Desafio – Falta ou sobra mercadoria? (p. 122)

Cada $-\frac{1}{2}$ kg é compensado com $\frac{1}{2}$ kg e não falta nem sobra mercadoria. Como são 4 caixas e as marcações formam dois pares de $-\frac{1}{2}$ kg e $\frac{1}{2}$ kg, Sérgio tem razão: "Não falta nem sobra mercadoria".

Desafio – Qual é a sequência? (p. 127)

Resolução

- Seguindo a pista apresentada podemos substituir 2 por $\frac{4}{2}$, 1 por $\frac{2}{2}$, 0 por $\frac{0}{2}$ e assim por diante. A sequência apresentada é equivalente a:
$\frac{4}{2}, \frac{3}{2}, \frac{2}{2}, \square, \frac{0}{2}, \square, -\frac{2}{2}, \square, \square, \square,$

Comparando cada termo com o termo anterior, a partir do segundo termo é possível perceber que o denominador é sempre o mesmo e o numerador diminui de 1 em 1, ou seja, cada termo é o termo anterior subtraindo $\frac{1}{2}$.

- Números ocultos:
  - ✓ Termo seguinte a 1: $\frac{2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$;
  - ✓ Termo seguinte a 0: $\frac{0}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$;

✓ Termo seguinte a −1: $-\frac{2}{2}-\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}$;

✓ Termo seguinte a $-\frac{3}{2}$: $-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=-\frac{4}{2}=-2$;

✓ Termo seguinte a −2: $-\frac{4}{2}-\frac{1}{2}=-\frac{5}{2}$.

Comentários e resolução de atividades

Investigue e explique (p. 130)

Nessa atividade o aluno tem a oportunidade de investigar relações existentes entre a multiplicação e a divisão de números racionais e descobrir a equivalência entre as representações fracionárias e decimais, como, $\frac{1}{2}=0{,}5$; $\frac{1}{4}=0{,}25$ e outras.

O objetivo principal da primeira questão proposta é reconhecer a situação apresentada: o resultado de 1856 : 0,5 poderá ser encontrado pelo produto de 1856 por 2. Espera-se que o aluno recorra à pista apresentada e utilize o conhecimento adquirido sobre a divisão de números racionais na forma fracionária para validar a hipótese levantada, ou seja, que $a : \frac{1}{2}$ é igual ao produto de **a** pelo inverso de $\frac{1}{2}$, que é 2.

Resolução

- $1856 : 0{,}5 = 1856 : \frac{1}{2} = 1856 \times \frac{2}{1} = 1856 \times 2 = 3712$

  A validação do resultado poderá ser realizada utilizando uma calculadora.

- A descoberta de um padrão poderá ser feita baseando-se, por exemplo, na resolução da primeira questão, ou seja, encontrando um número racional na forma fracionária que seja igual a 0,2.

$$0{,}2=\frac{1}{5}$$

As divisões apresentadas são equivalentes a produtos do dividendo por 5.

a) $84 : 0{,}2 = 84 \times 5 = 420$
b) $320 : 0{,}2 = 320 \times 5 = 1\,600$
c) $1\,000 : 0{,}2 = 1\,000 \times 5 = 5\,000$

- Uma das maneiras de resolver a questão proposta é descobrir qual desses tem o inverso multiplicativo na forma decimal igual a 0,25.

  ✓2 — o inverso é $\frac{1}{2}$, que é igual a 0,5. Não é o número procurado.

  ✓4 — o inverso é $\frac{1}{4}$, que é igual a 0,25. É o número procurado.

Desafio – Verdadeiro ou falso? (p. 131)

Resolução

- Atribuindo a **m** o valor zero, $\frac{2 \cdot 0 + 25}{13}=\frac{0+25}{13}=\frac{25}{13}$, que é diferente de 1.

A igualdade não é válida para m = 0.

- Lembre-se de que:

  $\frac{1}{1}=1$; $\frac{2}{2}=1$; $\frac{-3}{-3}=1$; $\frac{-10}{-10}=1$; $\frac{50}{50}=1$; $\frac{100}{100}=1$...

  Ou seja, uma fração com numerador e denominador igual é sempre equivalente a 1 e vice-versa: se uma fração é igual a 1, seus termos precisam ser iguais.

Na situação apresentada, podemos escrever: $2 \cdot m + 25 = 13$

Determinando o valor de **m** por meio de operações inversas:

✓A adição e a subtração são operações inversas

$$2 \cdot m = 13 - 25 \qquad 2 \cdot m = -12$$

✓A multiplicação e a divisão são operações inversas

$$m = (-12) : 2 \qquad m = -6$$

Verificação: atribuindo a **m** o valor −6 temos:

$$\frac{2 \cdot (-6) + 25}{13}=\frac{-12+25}{13}=\frac{13}{13}=1$$

Troquem ideias e resolvam (p. 131)

Resolução

Pode-se iniciar com o 10º acionamento do comando, em que a área da figura é de 200 cm². Lembrando que a área dobrou a cada acionamento do comando, ou seja, cada área é a metade da área que vem imediatamente depois dele.

– 10º acionamento do comando ——— área = 200 cm^2

– 9º acionamento do comando ——— área = 100 cm^2

Pois, 200 : 2 = 100.

Portanto, acionando o comando 9 vezes a área da figura será de 100 cm^2.

Desafio – Particularidades das potências de dez (p. 137)

Resolução

A resolução baseia-se na observação de um padrão existente entre os termos da sequência formada pelas potências de 10 apresentadas na primeira coluna do quadro: cada termo, a partir do segundo, é o termo anterior dividido por 10. Veja:

✓ $10^{-1} : 10^{1} = 10^{-1-1} = 10^{-2}$;

✓ $10^{-2} : 10^{1} = 10^{-2-1} = 10^{-3}$;

✓ $10^{-3} : 10^{1} = 10^{-3-1} = 10^{-4}$, e assim por diante.

Os resultados na forma decimal, que compõem o quadro, poderão ser encontrados usando uma calculadora. Nesse caso, oriente os alunos para que comecem calculando 0,01 : 10 digitando [.] [1] [:] [1] [0] na calculadora e prossigam dividindo o resultado encontrado por 10 consecutivamente.

A frase poderá ser completada uma vez que seja determinado um padrão que relacione os resultados ao expoente de cada número apresentado. A frase pode ser completada da seguinte forma: quanto o valor absoluto do expoente.

Sugestões de atividades complementares

Oposto e inverso

Junte-se a um colega, reflitam sobre as questões e respondam. **Oposto** é o mesmo que **inverso**? Estão em dúvida?

- Então, desenhem uma tabela como esta e completem-na:

x representa um número racional.

x	Oposto de x	Inverso de x	x + (oposto de x)	x · (inverso de x)
35		$\frac{1}{35}$	$35 + (-35) =$ ■	$35 \cdot \frac{1}{35} =$ ■
	$\frac{28}{17}$			
		100		
$-\frac{1}{46}$				

Afinal, **oposto** é ou não o mesmo que **inverso**? Expliquem, usando suas próprias palavras.

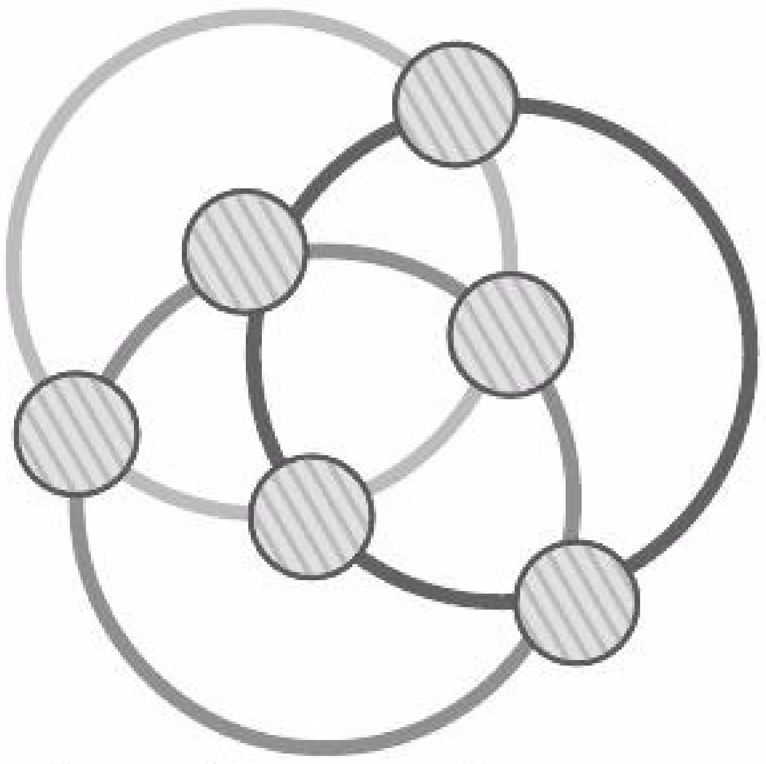
Resposta

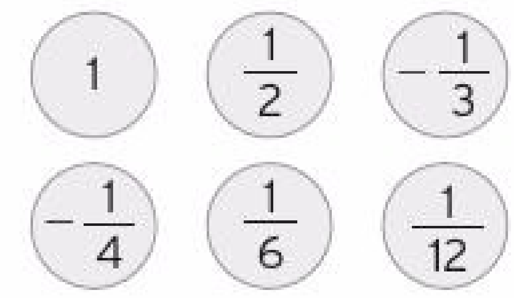
x	Oposto de x	Inverso de x	x + (oposto de x)	x · (inverso de x)
35	-35	$\frac{1}{35}$	$35 + (-35) = 0$	$35 \cdot \frac{1}{35} = 1$
$-\frac{28}{17}$	$\frac{28}{17}$	$-\frac{17}{28}$	$-\frac{28}{17} + \frac{28}{17} = 0$	$\left(-\frac{28}{17}\right) \cdot \left(-\frac{17}{28}\right) = 1$
$\frac{1}{100}$	$-\frac{1}{100}$	100	$\frac{1}{100} + \left(-\frac{1}{100}\right) = 0$	$\frac{1}{100} \cdot 100 = 1$
$-\frac{1}{46}$	$\frac{1}{46}$	-46	$-\frac{1}{46} + \frac{1}{46} = 0$	$\left(-\frac{1}{46}\right) \cdot (-46) = 1$

Espera-se que os alunos percebam que o oposto de um número não é o mesmo que o inverso desse número.

Produto de números racionais

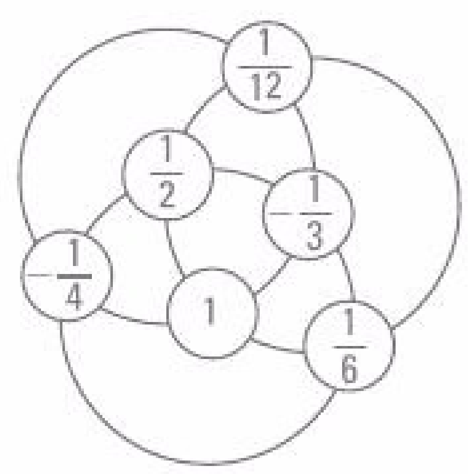
Nesta figura existem três circunferências, sobre cada uma delas existem quatro círculos hachurados.





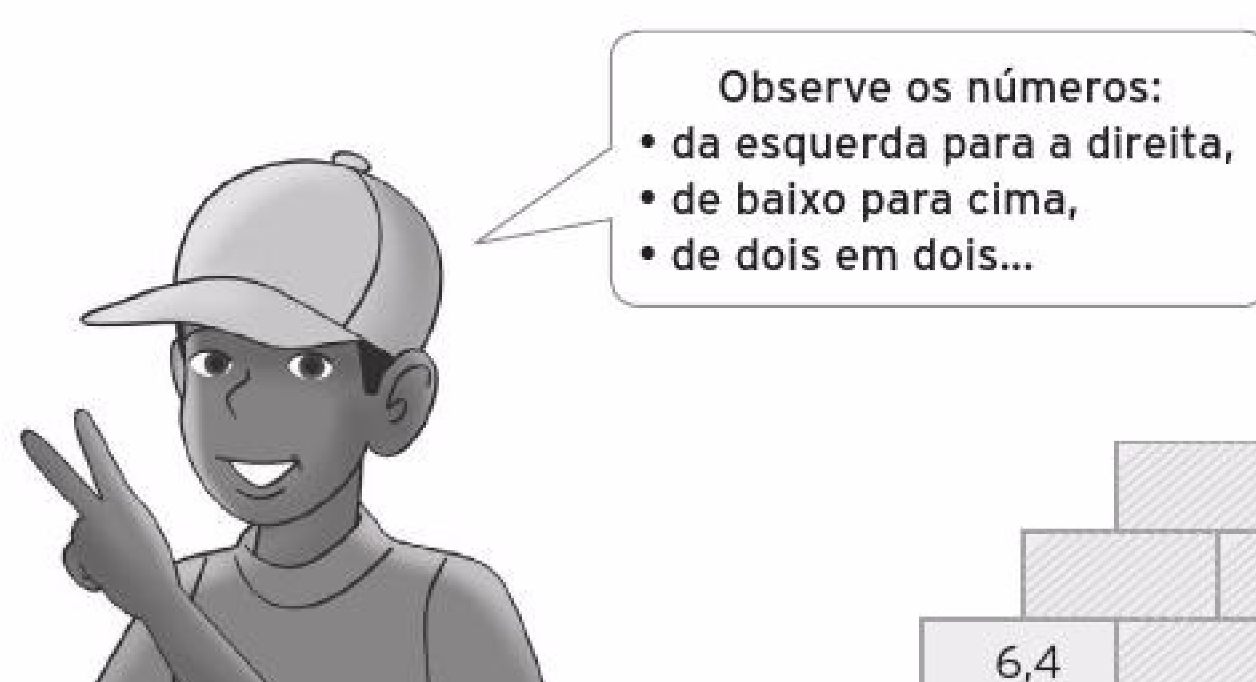
- Desenhe uma figura como esta e escreva um destes números em cada círculo:
  Em cada circunferência, o produto dos números que estão nos círculos deve ser $\frac{1}{144}$.

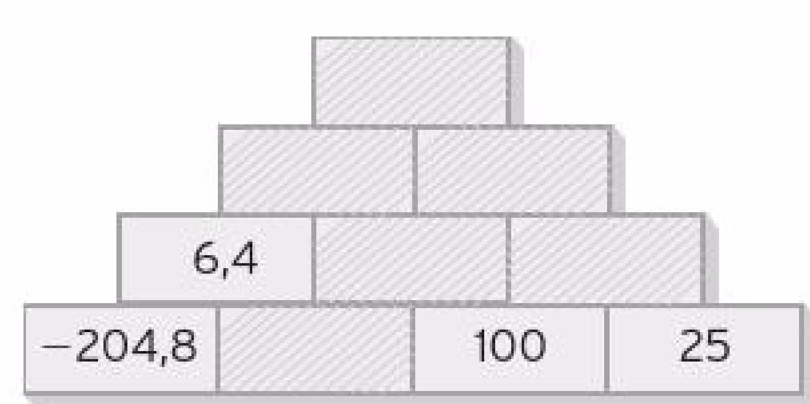
Resposta



"Pirâmide" de números

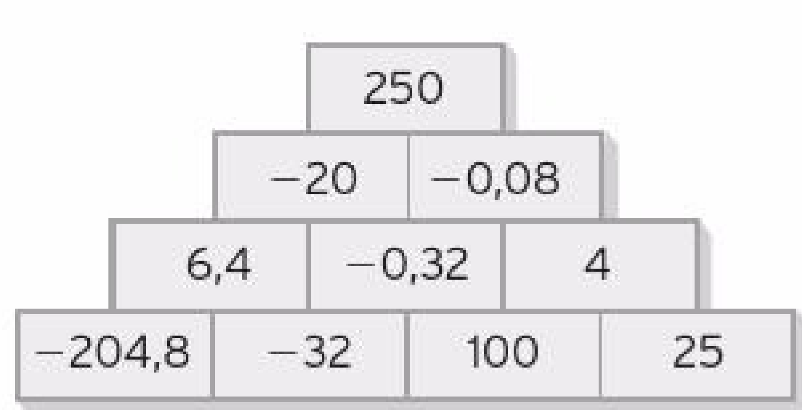
Existe pelo menos um padrão entre os números marcados nestes tijolinhos, empilhados uns sobre os outros:





- E então? Descobriu um padrão? Use-o para preencher os tijolinhos do desenho acima.

Resposta



UNIDADE 6

Equações

Conteúdos	Expectativas de aprendizagem
1. O uso das letras em Matemática O uso de letras como números **2. Equações de 1º grau com uma incógnita** O equilíbrio em jogo O que é solução de uma equação? Como encontrar a raiz de uma equação? **3. Equações e resolução de problemas** Números e soluções de problemas Equação com denominadores Equação, geometria e medidas **Leitura:** A evolução de alguns símbolos	Espera-se que os alunos: • identifiquem e desenvolvam uma nova linguagem matemática: a linguagem algébrica; • ampliem o conhecimento matemático, trabalhando com números representados por meio de letras; • utilizem a linguagem algébrica para expressar regularidades e generalizações; • representem problemas por meio de equações de 1º grau; • utilizem equações de 1º grau na resolução de problemas; • construam o conceito de raiz de uma equação.

Orientações didáticas

Nessa unidade, os alunos estudarão, pela primeira vez, as equações de maneira formal. Talvez muitos deles já tenham tido contato com elas em atividades em que era nescessário determinar um número desconhecido para que a sentença dada seja verdadeira. Nessas situações, as estratégias de resolução consistiam em recorrer às operações inversas. Essas estratégias são ampliadas com a aquisição de noções de álgebra que permitem usar letras para representar números, escrever equações que traduzem as condições do problema e trabalhar com as letras como se elas fossem números: é uma nova linguagem matemática.

Para adquirir essa linguagem, é preciso passar gradualmente da verbalização para o simbolismo algébrico.

A habilidade algébrica básica é algo que ultrapassa a simples manipulação de símbolos. Ela requer a compreensão de conceitos como o de variável e o de função. Portanto, para que os alunos comecem a assimilar um significado importante desses conceitos é conveniente que sejam propostas muitas atividades parecidas com as que estão no texto.

No decorrer do trabalho, certifique-se de que:

- $\mathbf{2x}$ seja interpretado como $\mathbf{2 \cdot x}$ e representa $\mathbf{x + x}$;
- $\mathbf{3x}$ seja interpretado como $\mathbf{3 \cdot x}$ e representa $\mathbf{x + x + x}$;
- $\mathbf{2x + 3x}$ seja interpretado como $\mathbf{x + x + x + x + x}$ e representa $\mathbf{5 \cdot x}$ ou $\mathbf{5x}$;
- $\mathbf{3x - 2x}$ seja interpretado como $\mathbf{x + x + x - (x + x)}$ que é igual a $\mathbf{x + x + x - x - x}$, ou seja, $\mathbf{x}$.

Texto de aprofundamento

Um passo de alguns milhares de anos... em alguns segundos

Se a origem dos números remonta à Pré-história, podemos dizer, a título de comparação, que a história das equações tem a idade de um bebê de alguns meses, talvez alguns dias, quem sabe alguns segundos.

Observando a história da Matemática, encontramos registros bastante recentes de fatos que mostram que alguns povos, como os indianos, resolviam problemas de certa complexidade, embora não conhecessem as equações.

Devemos a esse povo alguns importantes conhecimentos da Matemática, como o **zero**. A análise de alguns documentos nos mostra que aos indianos não faltavam nem originalidade nem eloquência poética, mesmo quando trabalhavam com Matemática.

Acompanhe um exemplo de um desses problemas:

De todas as abelhas de certo enxame, $\frac{1}{5}$ pousou sobre uma flor de candâmbia e $\frac{1}{3}$ sobre a flor de uma silindra. O triplo da diferença entre esses dois números dirigiu-se às flores de uma cutaja, restando então uma abelha, que pairou no ar, atraída, simultaneamente, pelo doce aroma de um jasmim e de um pandano. Diz-me, encantadora mulher, qual o número de abelhas?

Imagina-se que a encantadora mulher resolveu esse problema mesmo sem conhecer as equações. Se ela as conhecesse, resolveria da seguinte forma:

x ——— número de abelhas do enxame

$\frac{1}{5}x$ ——— número de abelhas que pousaram sobre a flor de candâmbia

$\frac{1}{3}x$ ——— número de abelhas que pousaram sobre a flor de uma silindra

$\frac{1}{5}x + \frac{1}{3}x$ ——— número de abelhas que pousaram nas duas flores

$x - \left(\frac{1}{5}x + \frac{1}{3}x\right)$ ——— número de abelhas que restaram

$\frac{1}{3}x - \frac{1}{5}x$ ——— diferença entre o número de abelhas que pousaram nas duas flores

$3 \cdot \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{5}x\right)$ ——— triplo da diferença entre o número de abelhas que pousaram nas duas flores (igual ao número de abelhas que se dirigiram às flores de cutaja)

Equação:

$$x - \left(\frac{1}{5}x + \frac{1}{3}x\right) - 3 \cdot \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{5}x\right) = 1$$

Resolução

$$x - \frac{3x + 5x}{15} - \frac{3 \cdot (5 - 3)x}{15} = 1$$

$$x - \frac{8x}{15} - \frac{3 \cdot 2x}{15} = 1$$

$$\frac{15 \cdot x - 8 \cdot x - 6 \cdot x}{15} = 1 \text{ ——— } x = 15$$

O número de abelhas é **15**.

Esse problema, hoje, pode nos parecer muito simples de ser resolvido, mas na época, sem o recurso das equações, talvez não fosse tão simples assim. Os indianos propunham e resolviam questões mais complexas que essa. Algumas delas envolviam até mesmo equações de 2º grau, como registram alguns documentos históricos. No século VII, eles publicaram um tratado de teologia geral, chamado *Lilavati*, no qual estão registrados vários problemas que evidenciam avanço em um tipo de Álgebra bastante próprio da época.

O problema seguinte aparece no *Lilavati*. Verifique a possibilidade de propor para os alunos.

De um ramo de puras flores de lótus, um terço, um quinto e um sexto foram oferecidos, respectivamente, aos deuses Shiva, Vishnu e Sol; um quarto foi oferecido a Bhavani. As restantes seis flores foram dadas ao venerável preceptor. Diz-me depressa o número total de flores...

Desafio – Da Aritmética à Álgebra (p. 147)

O objetivo principal dessa atividade é identificar a relação existente entre Geometria, Álgebra e medidas.

- Expressão algébrica que representa a medida do segmento de reta $\overline{AE}$: a − 10.

  Medida do segmento de reta $\overline{CG}$:

  (30 − 10) cm = 20 cm.

- Retirando o quadrado na figura apresentada restará um polígono com seis lados, ou seja, restará um hexágono.
- Área do quadrado que será recortado:

  10 cm · 10 cm = 100 cm^2.

- Expressão algébrica que representa a área da cartolina:

  30 · a ou 30a.

  Expressão algébrica que representa a área após o recorte: área do retângulo menos a área do quadrado.

  Área do retângulo: 30a

  Área do quadrado: 100

  Área após o recorte: 30a − 100 (em cm^2)

- Se o comprimento inicial medisse 45 cm, para representar a área do pedaço de cartolina usando a expressão (30a − 100), substituiríamos **a** por 45 cm.

  Assim, a área seria:

  30 · 45 − 100 = 1250 ——— área de 1250 cm^2.

  Sem usar a expressão algébrica, poderíamos obter a área do pedaço de cartolina, calculando a área do retângulo de medidas 45 cm por 30 cm e subtraindo a área do quadrado de lado 10 cm.

Desdobramento

Nessa atividade é possível explorar o conceito intuitivo de função. Considerando a expressão (30a − 100), chamamos de **S** a área procurada e variamos a medida do lado. Temos assim esta expressão:

$$S = 30a - 100$$

Vamos descobrir o valor de **S**, substituindo **a** pelos valores indicados nesta tabela:

a	S
20	500
21	530
22	560
...	...

Desafio – A história do pote de azeite do emir Osama Ibn Sinan (p. 151)

Essa atividade tem o objetivo de levar o aluno a:

✓ fazer conjecturas;

✓ formular hipóteses;

✓ discutir diferentes estratégias de resolução de problemas.

Peça aos alunos que observem as imagens que ilustram esta atividade.

Incentive-os a irem além da mera identificação e peça que interpretem a situação usando palavras próprias.

Observe se os alunos conseguem selecionar as informações mais relevantes e se conseguem expressar verbalmente em que consiste o problema.

É possível que uma parte dos alunos consiga equacionar o problema, mas apresente dificuldades em encontrar a solução, dado que os procedimentos de resolução não foram ainda estudados.

Neste caso, é salutar valorizar outras formas de registrar as respostas, incentivando a exposição das ideias e a análise de procedimentos, como na resolução a seguir:

Resolução

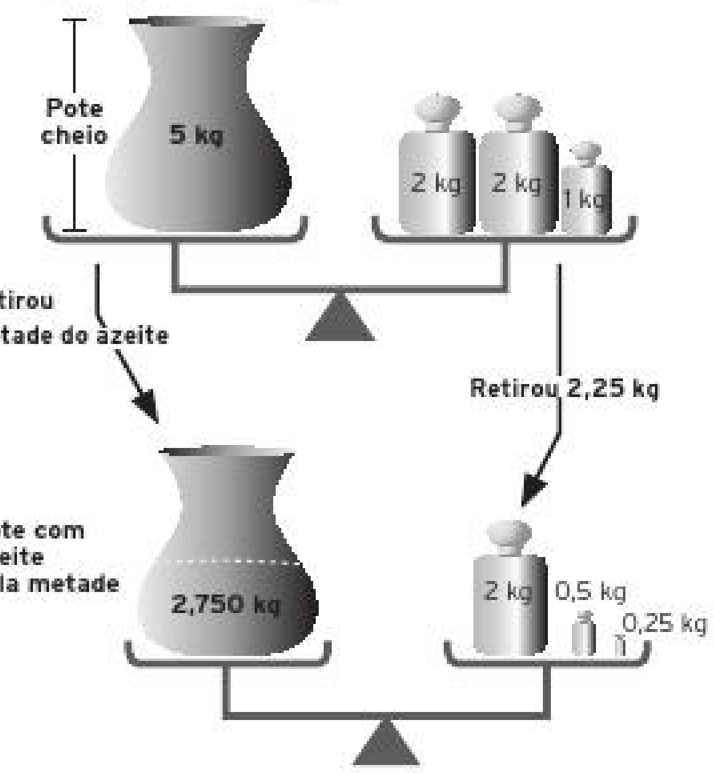
Temos que:

✓ massa da metade da quantidade de azeite que estava no pote: 2,25 kg;

✓ massa da quantidade toda de azeite: $2 \cdot 2{,}25$, ou seja, 4,5 kg;

✓ massa do pote: $5 - 4{,}5 = 0{,}5$ kg

O pote pesa 0,5 kg ou 500 g;



Troquem ideias e resolvam (p. 151)

Resolução

Se cada adulto pagou R$ 28,00, cada criança pagou a metade desse valor ("desconto de 50%" sobre o preço pago por um adulto), ou seja, pagou R$ 14,00 ($28 : 2 = 14$).

Número de pessoas		Valor pago (R$)
x (número de adultos)	—	$28 \cdot x$
$38 - x$ (número de crianças)	—	$14 \cdot (38 - x)$

O valor total pago, R$ 840,00, é a soma dos dois valores indicados acima:

Equação:

$$28 \cdot x + 14 \cdot (38 - x) = 840$$
$$28 \cdot x + 532 - 14 \cdot x = 840$$
$$28 \cdot x - 14 \cdot x = 840 - 532$$
$$14 \cdot x = 308$$
$$x = 308 : 14$$
$$\mathbf{x = 22}$$
$$38 - x = 38 - 22 = \mathbf{16}$$

Portanto, participaram da excursão 22 adultos e 16 crianças.

Desafio – Um problema que mais parece uma charada! (p. 159)

Resolução

Quantia que o avô tem		Quantia para cada neto
x	—	$\frac{x}{2}$
x + 75	—	x
(se ele tiver R$ 75,00 a mais)		(dobro do que receberia se o avô tivesse x)

Equação: $x + 75 = x + x$

$x + 75 = 2x$

$\mathbf{x = 75}$

Verificação: Se o avô tivesse R$ 150,00, que é R$ 75,00 + R$ 75,00, cada neto ganharia R$ 75,00, e essa quantia é o dobro dos R$ 37,50 (metade de R$ 75,00) que cada neto ganhará.

Portanto, o avô possui R$ 75,00.

Comentários e resolução de atividades

Investigue e explique (p. 161)

A cena apresentada permite o reconhecimento da situação: estão envolvidas bolas coloridas de três cores diferentes, vermelha, amarela e azul, em um total de 108 bolas. Além disso, a quantidade de bolas azuis é o dobro da de bolas vermelhas, e a de bolas amarelas, o triplo da de bolas azuis. As demais questões apresentadas conduzem a análise e a investigação sobre a ocorrência de um evento que ocorre ao acaso.

Resolução

- A quantidade de bolas citadas pelo palhaço satisfaz uma das condições apresentadas no problema e não satisfaz a outra. Ou seja, 20 (bolas azuis) é o dobro de 10 (bolas vermelhas) e 60 (bolas amarelas) é o triplo de 20 (bolas azuis), mas o total de bolas, que é 90 ($10 + 20 + 60$), é diferente de 108. A informação apresentada pelo palhaço não está correta.
- O aluno poderá levantar várias hipóteses sobre a quantidade de cada tipo de bola e verificar qual delas satisfaz às condições apresentadas (estratégia: tentativas e erro). Considerando 10 bolas vermelhas, o total ficou abaixo de 108. Isso significa que é preciso aumentar esse número.
  - ✓ Considerando 15 bolas vermelhas: teriam 30 bolas azuis e 90 bolas amarelas. O total de bolas seria 135, número muito maior que 108.
  - ✓ O número de bolas vermelhas está entre 10 e 15.
  - ✓ Considerando 12 bolas vermelhas: teriam 24 bolas azuis e 72 bolas amarelas. O total seria 108 bolas.

  Então, são 12 bolas vermelhas, 24 bolas azuis e 72 bolas amarelas.

  Como o principal objetivo dessa unidade é relacionar equações à resolução de problemas, incentive os alunos a encontrarem a solução por meio do equacionamento do problema apresentado. Veja como poderá ser:

  v —— número de bolas vermelhas

  $2 \cdot v$ —— número de bolas azuis

  $3 \cdot 2 \cdot v$, ou seja, $6 \cdot v$ —— número de bolas amarelas

  Equação: $v + 2 \cdot v + 6 \cdot v = 108$ —— $9 \cdot v = 108$

  $v = 108 : 9$ —— $v = 12$ —— 12 bolas vermelhas

  Bolas azuis: $2 \cdot v = 2 \cdot 12 = 24$ —— 24 bolas azuis

  Bolas amarelas: $6 \cdot v = 6 \cdot 12 = 72$ —— 72 bolas amarelas

  Verificação:

  24 é o dobro de 12 e 72 é o triplo de 24. Além disso, $12 + 24 + 72 = 108$.
- Azul, porque há mais bolas azuis do que vermelhas.
- Amarela, porque há mais bolas amarelas do que azuis ou vermelhas.

Desafio – Qual é o número? (p. 163)

Resolução

- Analisando o que as crianças disseram, temos:

  $2 \cdot x$ —— número pensado (deve ser par), **x** deve ser um número natural

  $2 \cdot x + 600$ —— número pensado adicionado a 600 unidades

  $3600\ cm^2$ —— área de um quadrado com 60 cm de lado

  A equação ("linguagem matemática") está no item **a**.
- Resolve-se a equação $2 \cdot x + 600 = 3600$ —— $2 \cdot x = 3000$, o número pensado foi 3000.

Verificação:

$3000 + 600 = 3600$ e 3600 é igual ao número que dá a área de um quadrado com 60 cm de lado.

Desafio – Um caso de amor (p. 164)

Representando por **x** o número total de pérolas do colar, podemos escrever a equação:

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{5} + \frac{x}{6} + \frac{x}{6} + 4 = x$$

Resolvendo essa equação, temos:

$$\cancel{30} \cdot \frac{10x + 6x + 5x + 5x + 120}{\cancel{30}} = \frac{30x}{\cancel{30}} \cdot \cancel{30}$$

$26x + 120 = 30x$

$120 = 30x - 26x$

$120 = 4x$

$\frac{120}{4} = x$

$x = 30$ pérolas.

Verificação:

✓ $\frac{1}{3}$ de $30 = 10$;

✓ $\frac{1}{5}$ de $30 = 6$;

✓ $\frac{1}{6}$ de $30 = 5$;

✓ total de pérolas do colar: $10 + 6 + 5 + 5 + 4 = 30$.

Sugestões de atividades complementares

Forma simplificada

Copie e complete o quadro seguinte:

Expressão algébrica	$-9 \cdot (a + 3) - 18$	$(3 - b) \cdot 6 + 10 \cdot b$	$1 \cdot (m + 4) - \frac{3}{4} \cdot (m - 2)$
Forma simplificada			

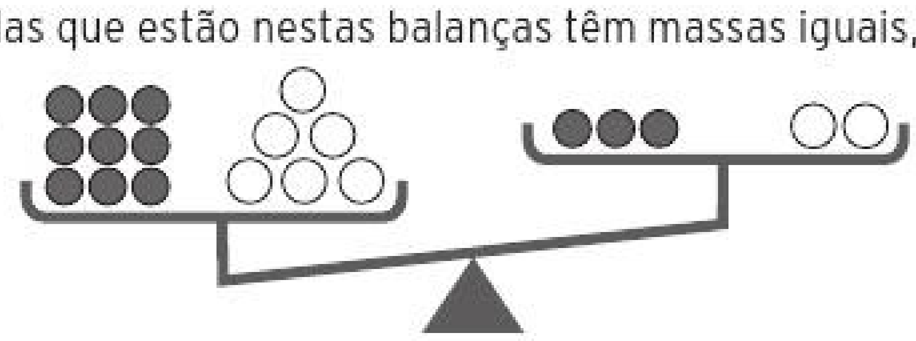
Resposta

Expressão algébrica	$-9 \cdot (a + 3) - 18$	$(3 - b) \cdot 6 + 10 \cdot b$	$1 \cdot (m + 4) - \frac{3}{4} \cdot (m - 2)$
Forma simplificada	$-9 \cdot a - 45$	$18 + 4 \cdot b$	$\frac{m}{4} + \frac{11}{2}$

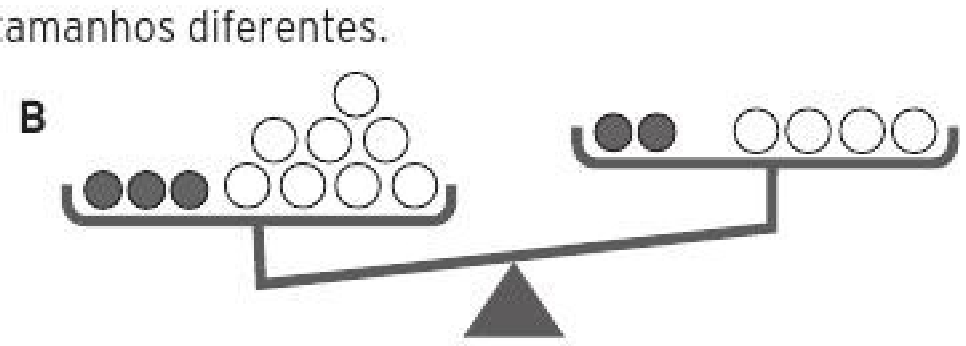
Balanças desequilibradas

As bolas que estão nestas balanças têm massas iguais, mas cores e tamanhos diferentes.

A



B



a) Como equilibrar a balança em cada situação anterior?
b) Escreva a igualdade que foi obtida em cada situação no item **a**.
c) A partir das igualdades do item **b**, obtenha duas outras, utilizando o princípio aditivo da igualdade.
d) Agora, a partir de uma das igualdades do item **b**, obtenha uma outra igualdade, utilizando o princípio multiplicativo da igualdade.

Resolução

a) A: Triplicando a quantidade de bolas pretas e brancas no prato à direita.
B: Retirando 1 bola preta e 4 brancas do prato à esquerda.
(Existem outras respostas.)

b) A: $9 + 6 = 3 \cdot (3 + 2)$; B: $3 + 8 - 5 = 2 + 4$.
(Existem outras respostas.)

c) $9 + 6 + 4 = 3 \cdot (3 + 2) + 4$
$5 + 3 + 5 - 6 = 6 + 7 - 6$. (Existem outras respostas.)

d) $(3 + 8 - 5) : 3 = (2 + 4) : 3$. (Existem outras respostas.)

Usando a calculadora

Utilizando uma calculadora, digite a sequência de teclas a seguir e anote o resultado que aparece no visor.

[–] [7] [=] [=] [=] [=]

a) Continuando a digitar a tecla [=] na sequência acima, qual é o resultado após a 5ª tecla [=]?

b) Escreva uma expressão algébrica para expressar o resultado após digitar **n** teclas [=] nessa sequência.

[–] [7] $\underbrace{[=]\ [=]\ [=]\ [=]\ [=]\ [=]\ [=]\ [=]\ [=]\ [=] \dots [=]}_{\textbf{n}\text{ vezes}}$

c) Utilize essa expressão algébrica e determine uma equação para resolver o problema abaixo:
Quantas vezes deveremos pressionar a tecla [=] para obter o número -1064?

Resolução

a) 35

b) $-7 \cdot n$

c) 152 vezes.

UNIDADE 7 Aprendendo mais sobre ângulos

Conteúdos	Expectativas de aprendizagem
1. Usos de ângulos Ângulos de um polígono Ângulos de um triângulo Soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo Soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero Polígonos regulares **2. Mais sobre ângulos** Ângulos adjacentes Ângulos complementares Ângulos suplementares **3. Ângulos opostos pelo vértice** O que são ângulos opostos pelo vértice? **4. Construções geométricas e simetria** Construção da bissetriz de um ângulo Simetria axial **Leitura:** Geometria e desenho Geométrico Origami e simetria	Espera-se que os alunos: • reconheçam, no ambiente que os rodeia, elementos que dão a ideia de ângulos e polígonos; • verifiquem experimentalmente a validade da propriedade da soma das medidas dos ângulos internos para um triângulo qualquer; • identifiquem a propriedade da soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero; • identifiquem e descrevam ângulos adjacentes; • reconheçam ângulos complementares e ângulos suplementares e apliquem suas propriedades em situações--problema que envolvam equações de 1º grau; • desenvolvam habilidades em construir geometricamente a bissetriz de um ângulo; • identifiquem e descrevam ângulos opostos pelo vértice e identifiquem a relação presente entre dois ângulos opostos pelo vértice; • compreendam a natureza de uma primeira demonstração: a congruência dos ângulos opostos pelo vértice; • utilizem a congruência de ângulos opostos pelo vértice em resolução de problemas que envolvem conceitos geométricos e algébricos; • reconheçam figuras simétricas e identifiquem seus eixos de simetria.

Orientações didáticas

Utilizar dobraduras para constatar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° é uma abordagem empírica que ajudará os alunos a aceitar esse fato e poderá auxiliar, posteriormente, na compreensão da sua demonstração.

Com dobraduras, os alunos também poderão construir linhas retas, ângulos e suas bissetrizes e ainda verificar que dois ângulos opostos pelo vértice são congruentes.

Essas experimentações possibilitam aos alunos compreender alguns conceitos e propriedades que serão posteriormente formalizados.

Outro aspecto importante a ser destacado é o fato de que todo polígono pode ser composto e decomposto por triângulos. Essa decomposição facilita o cálculo de áreas e a determinação da soma das medidas dos ângulos internos de um polígono.

Nessa unidade os alunos também perceberão a relação entre Álgebra e Geometria ao determinar por equação, por exemplo, as medidas dos ângulos internos de um polígono ou ao relacionar por equação as medidas de ângulos complementares e suplementares.

Na demonstração da congruência de ângulos opostos pelo vértice, apresentamos aos alunos a primeira oportunidade de desenvolver uma demostração local. Não há, neste momento, a preocupação com os termos **teorema**, **hipótese**, **tese** ou **dedução**. Insistimos em um caminho no qual os alunos possam fazer o exercício do raciocínio lógico-dedutivo, sem a necessidade de conhecer esses termos.

Desenvolva atividades exploratórias por meio de dobraduras que propiciam o reconhecimento de figuras com simetria, além de favorecerem habilidades de coordenação motora fina. Em uma dobradura poderão ser obtidas figuras com eixo de simetria e ela possibilita, aos alunos, uma aproximação à ideia de simetria axial, à percepção de que simetrias conservam formas (comprimentos e ângulos), o reconhecimento dos eixos de simetria de diversas figuras simétricas simples e a familiarização com as propriedades que caracterizam figuras simétricas.

Explore, também, atividades de desenho de figuras, figurativas ou geométricas, em papel quadriculado, pois elas propiciarão oportunidade de explorar intuitivamente o conceito de simetria: o quadriculado permite destacar propriedades inerentes às figuras simétricas planas.

Texto de aprofundamento

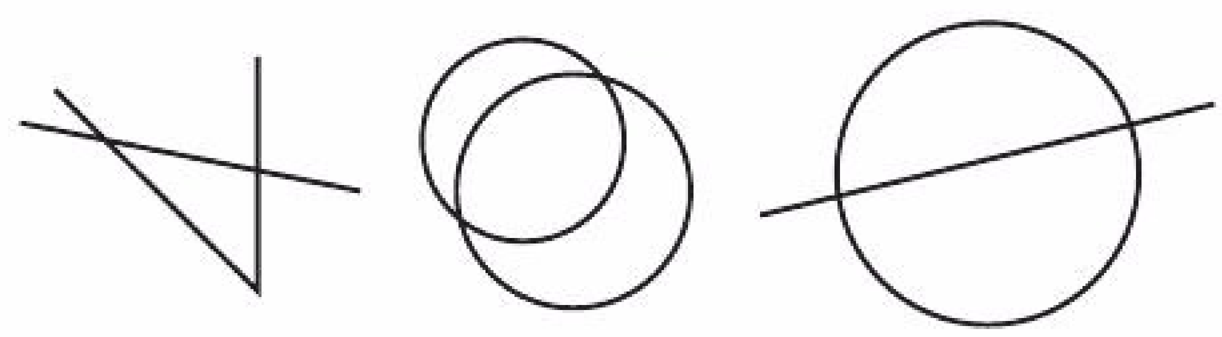
Desenho geométrico e Matemática

O desenho geométrico tem base na Geometria e tem larga aplicação prática e teórica em Matemática, Engenharia, Arquitetura e ciências físicas em geral. Não conhecemos sua origem exata, mas sabemos que desde a Antiguidade os gregos já mostravam habilidades em construções geométricas, como se pode observar nas artes daquele período.

Assim como nos esportes (futebol, vôlei, basquete etc.) existem regras a serem seguidas, nas construções geométricas há um conjunto de regras que devem ser obedecidas a fim de se obter o resultado desejado. Diz-se que foi o filósofo grego Platão quem primeiro estabeleceu a regra que limita uma construção geométrica ao uso do compasso e de uma régua sem escala.

Nos procedimentos matemáticos, há uma diferença entre construção geométrica e desenho. É possível desenhar figuras geométricas usando uma variedade de instrumentos: régua e esquadros graduados, instrumentos curvos e outros mais. No entanto, em construção geométrica não é permitido medir com réguas graduadas, transferidores ou outros instrumentos.

As construções com régua e compasso envolvem intersecções de retas, de circunferências ou de retas e circunferências.



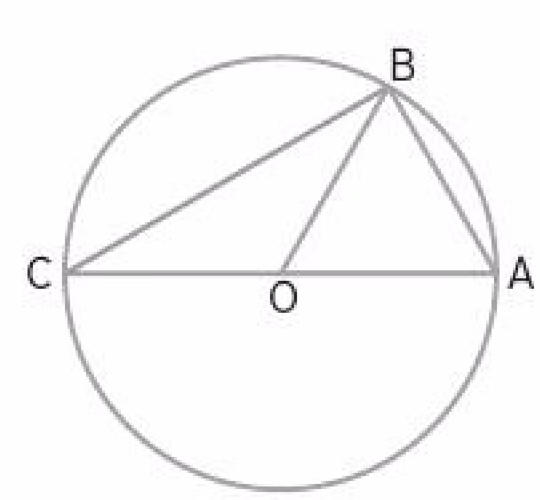
As construções geométricas propiciam ações de manuseio de compasso, régua e esquadros e contribuem para a compreensão de algumas propriedades geométricas, que emergem quando se tenta fazer uma construção. A manipulação desses instrumentos subsidia a construção dos conceitos relacionados às noções básicas necessárias à Geometria euclidiana, não de uma maneira axiomática, mas segundo uma proposta que se inicia empiricamente — experimentando e analisando —, até se chegar a um trabalho que exige um raciocínio lógico-dedutivo. É uma proposta que certamente não implica uma falta de rigor conceitual, mas que tem como pressuposto básico que o conhecimento é adquirido numa espiral, numa elaboração e reelaboração constante de conceitos, como é a própria história da Geometria.

Fonte: NORTON, M. Scott. Construções geométricas. *Matemática sem problemas*. Rio de Janeiro/São Paulo: José Olympio/ Melhoramentos, 1972. vol. III.

Comentários e resolução de atividades

Troquem ideias e resolvam (p. 181)

Resolução



✓ No $\triangle OAB$:

$\triangle OAB$ equilátero —— $med\ B\hat{O}A = med\ O\hat{A}B = med\ A\hat{B}O = 60°$

$med\ B\hat{O}A + med\ C\hat{O}B = 180°$

$60° + med\ B\hat{O}C = 180°$ —— $med\ B\hat{O}C = 120°$

✓ $\overline{OC}$ e $\overline{OB}$ são raios, então têm medidas iguais. Logo, o $\triangle OBC$ é isósceles.

✓ No $\triangle OBC$:

$med\ B\hat{C}O = med\ O\hat{B}C$

$med\ B\hat{C}O + med\ O\hat{B}C + med\ B\hat{O}C = 180°$

$med\ B\hat{C}O + med\ B\hat{C}O + 120° = 180°$

$2 \cdot med\ B\hat{C}O = 60°$ —— $med\ B\hat{C}O = med\ O\hat{B}C = 30°$

No $\triangle OBC$, os ângulos medem 30°, 30° e 120°.

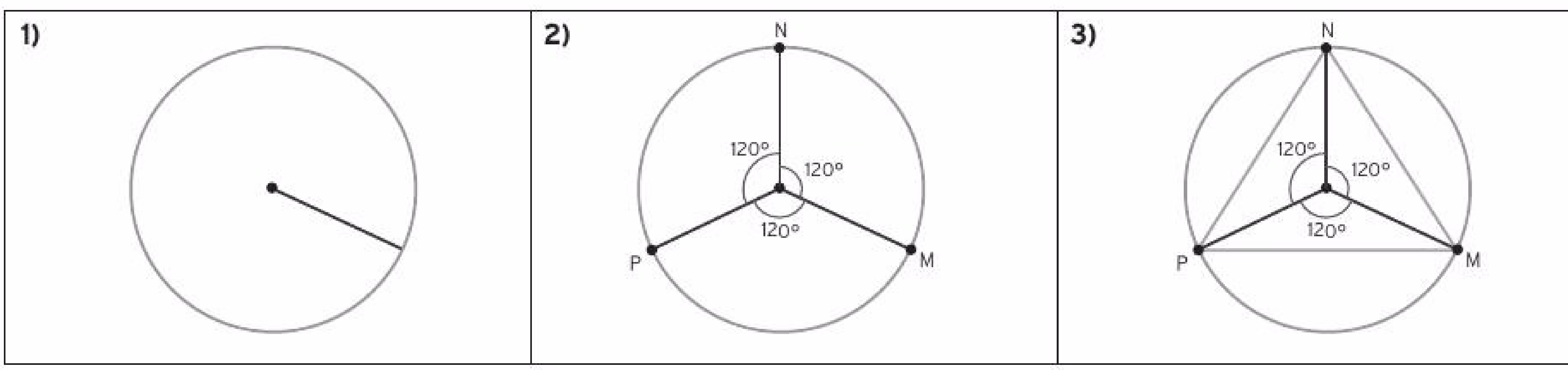
Investigue e explique (p. 181)

O objetivo principal dessa atividade é identificar um procedimento para a obtenção do desenho de um polígono regular. É possível que alguns alunos encontrem dificuldades no manuseio de um compasso e de um transferidor. Se for esse o caso, organize os alunos em duplas para que um aluno auxilie o outro na execução das tarefas.

Resolução

- Questão apresentada: Traçando três ângulos centrais congruentes, o triângulo formado pelas interseções dos lados desses ângulos com a circunferência formam um polígono regular?

  Para traçar um ângulo central da circunferência, medindo 120°, traça-se uma das semirretas do ângulo e, em seguida, traça-se a segunda semirreta usando um transferidor para medir 120° a partir da primeira. Da mesma forma, traça-se a terceira semirreta a partir de uma dessas semirretas, usando o transferidor para determinar o ângulo.

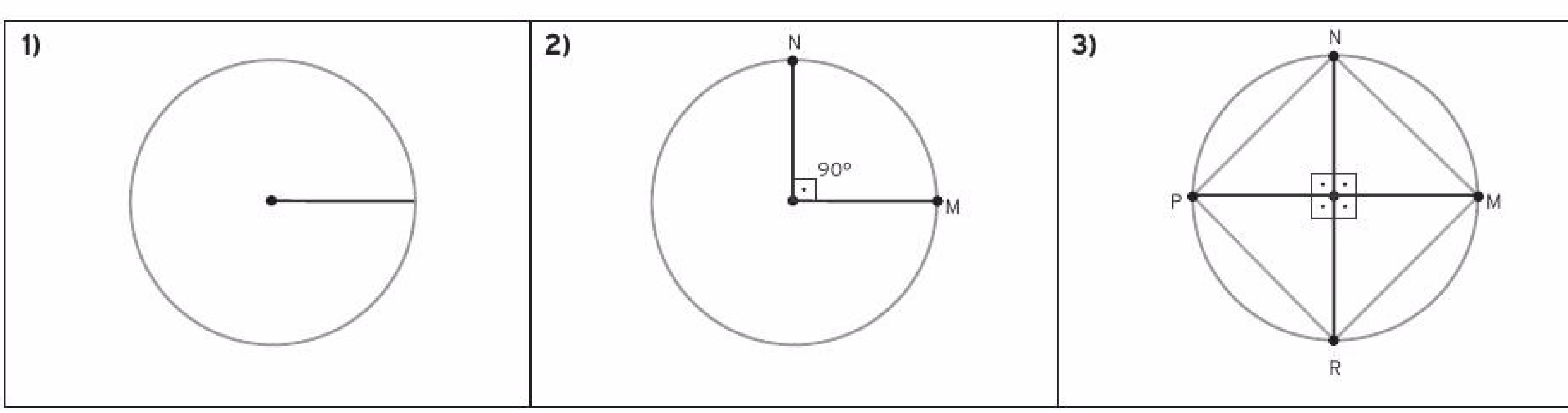


  Nesta fase, é possível recorrer ao compasso para comparar os lados do triângulo MNP: os três lados têm tamanhos iguais (são congruentes) e o triângulo MNP é equilátero e seus ângulos têm medidas iguais a 60°, então o triângulo MNP é um polígono regular.

- Questão apresentada: Traçando quatro ângulos centrais congruentes, o quadrilátero formado pelas interseções dos lados desses ângulos com a circunferência formam um polígono regular?

  Deve-se adotar o mesmo procedimento utilizado na primeira questão, mas, nesse caso, o ângulo central deve medir 90° e a circunferência ficará dividida em 4 partes iguais.

  Como na questão anterior, comparando os comprimentos dos lados e medindo os ângulos conclui-se que os lados são congruentes, assim como os ângulos, ou seja, o quadrilátero obtido é um quadrado e é um polígono regular.



- Questão apresentada: Como traçar um pentágono regular?

  Espera-se que os alunos levantem a hipótese de que é possível obter tal polígono desenhando cinco ângulos centrais, cada um medindo 72° (360° : 5). Tal hipótese poderá ser validada construindo um pentágono seguindo o mesmo procedimento desenvolvido nas questões anteriores.

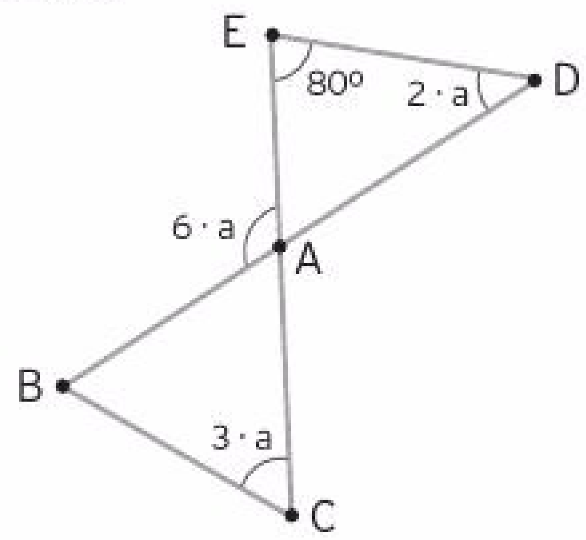
Desdobramento

Trace um hexágono regular e um decágono regular.

Desafio – Triângulos e seus ângulos (p. 183)

Resolução

- Na figura, temos:



Cálculo do valor de **a**:

$E\hat{A}D$ e $B\hat{A}E$ são ângulos suplementares.

med $E\hat{A}D$ + med $B\hat{A}E$ = 180º

med $E\hat{A}D + 6 \cdot a = 180º$

med $E\hat{A}D = 180º - 6 \cdot a$

No $\triangle EAD$: med $E\hat{A}D$ + med $D\hat{E}A$ + med $A\hat{D}E$ = 180º

$180º - 6 \cdot a + 80º + 2 \cdot a = 180º$

$180º + 80º - 180º = 6 \cdot a - 2 \cdot a$

$80º = 4 \cdot a$ —— $a = 20º$

- med $E\hat{A}D = 180º - 6 \cdot a = 180º - 6 \cdot 20º = 60º$
- med $A\hat{D}E = 2 \cdot a = 2 \cdot 20º$

med $A\hat{D}E$ = 40º

med $E\hat{A}D = 180º - 6 \cdot a = 180º - 6 \cdot 20º$

med $E\hat{A}D$ = 60º

med $D\hat{E}A$ = 80º

Os ângulos do $\triangle EAD$ medem 40º, 60º e 80º.

- No $\triangle ABC$:

med $C\hat{A}B$ = med $E\hat{A}D$ (ângulos o.p.v.) —— **med $C\hat{A}B$ = 60º**

med $B\hat{C}A = 3 \cdot a = 3 \cdot 20º$ —— med $B\hat{C}A$ = 60º

med $B\hat{C}A$ + med $C\hat{A}B$ + med $A\hat{B}C$ = 180º

60º + 60º + med $A\hat{B}C$ = 180º

med $A\hat{B}C$ = 180º − 120º —— med $A\hat{B}C$ = 60º

Os três ângulos do $\triangle ABC$ medem 60º.

Sugestões de atividades complementares

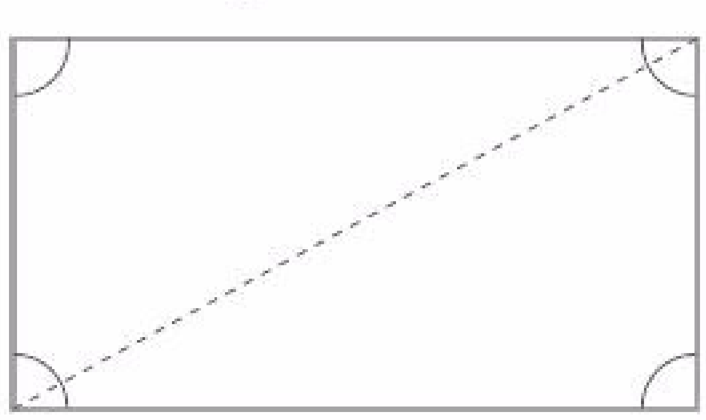
Soma das medidas dos ângulos internos de polígonos

Responda:

- O que ocorre com a soma das medidas dos ângulos internos de um retângulo? E de um quadrado?
- Qual é a soma das medidas dos ângulos internos de um hexágono?
- Existe uma fórmula para a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono de **n** lados?

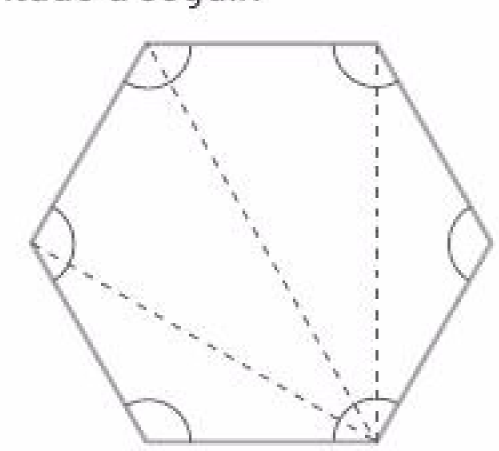
Resolução

- O retângulo e o quadrado são quadriláteros e todo quadrilátero pode ser decomposto em dois triângulos como representado a seguir.



A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180º, então a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a 360º (2 · 180º = 360º).

Um hexágono pode ser decomposto em quatro triângulos como representado a seguir.

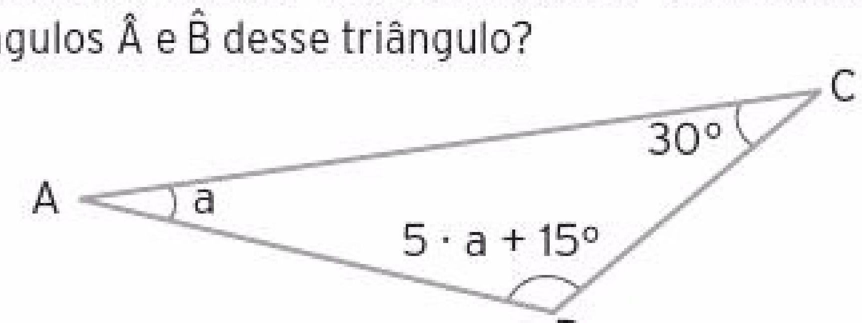


Então, a soma das medidas dos ângulos internos de um hexágono é igual a 720º (4 · 180º = 720º).

- Um polígono de **n** lados pode ser decomposto em n − 2 triângulos, então, a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono de **n** lados é dada por (n − 2) · 180º.

Ângulos de um triângulo

Observe os dados marcados no triângulo da figura. A letra **a** representa uma medida em grau. Quais são as medidas dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ desse triângulo?



Resposta

O ângulo **A** mede 22º 30′ e o ângulo **B**, 127º 30′.

UNIDADE 8

Sistema de equações

Conteúdos	Expectativas de aprendizagem
1. Par ordenado O que é par ordenado? Representação geométrica **2. Equação com duas variáveis** O que é equação de 1º grau com duas variáveis Soluções de equações com duas variáveis Soluções de equações do 1º grau com duas variáveis Representação geométrica **3. Sistema de duas equações de 1º grau com duas variáveis** Duas variáveis em uma única situação Como resolver um sistema de equações? **4. Estatística e probabilidade** Pares ordenados e possibilidades Sistema de coordenadas, gráfico de colunas e gráfico de barras **Leitura:** As fórmulas e o cálculo	Espera-se que os alunos: • ampliem o conhecimento matemático que possuem sobre equações; • apropriem-se do conceito de pares ordenados; • localizem e identifiquem pontos representados por pares ordenados em um sistema de coordenadas cartesianas; • desenvolvam habilidades e técnicas em resolver sistemas de duas equações de 1º grau com duas variáveis com compreensão dos procedimentos envolvidos; • resolvam problemas por meio de um sistema de equações do 1º grau, com duas variáveis, discutindo o significado das soluções encontradas no contexto da situação proposta; • desenvolvam habilidades em representar e contar possibilidades em situações combinatórias por meio de diagrama de árvore e pares ordenados.

Orientações didáticas

Nessa unidade, os alunos terão contato com um novo ente matemático: o par ordenado de números racionais.

Nesse trabalho optou-se por uma abordagem mais intuitiva, recorrendo à representação desses pares ordenados em um plano cartesiano como um recurso que poderá auxiliar na compreensão, construção e apropriação de conceitos inerentes ao tema. Foram propostas algumas atividades lúdicas que lembram batalha naval e guias de cidades como contextos próximos à realidade dos alunos. Sugira outras semelhantes e, quando possível, procure explorar o trabalho algébrico relacionado a essas atividades.

É fundamental que os alunos percebam a inter-relação entre duas variáveis **x** e **y** em uma equação de 1º grau e que uma equação desse tipo tem infinitas soluções.

Os pares ordenados de números racionais poderão auxiliar também na organização de soluções de problemas de contagem, como recurso visual, ou facilitar a contagem das possibilidades de solução de um problema.

Nesse livro, foram abordados os seguintes métodos algébricos para a resolução de um sistema de equações: o método da substituição, por ser mais genérico o da comparação e a resolução gráfica. No 8º ano, ao ser aprofundado o estudo de sistema de duas equações com duas variáveis será acrescentado o método da adição.

Os alunos poderão perceber gradualmente que os métodos algébricos utilizados na resolução de problemas equacionados por um sistema dessa natureza apresentam todas as características do método aritmético. A diferença está em utilizar algum símbolo para representar um número desconhecido. É importante que eles reconheçam a ineficiência do método aritmético na resolução de alguns problemas e a necessidade de utilização dos métodos algébricos à medida que as dificuldades forem aumentando.

Texto de aprofundamento

Quando os números se vestem com letras

Aritmética vem da palavra grega *arithmós*, que significa **"número"**, mas a maneira como escrevemos os números e com eles calculamos é herança dos árabes, como, por exemplo, do matemático Al-Khowarizmi, que viveu por volta do ano 800 depois de Cristo.

Se a conquista da maneira como lidamos com os números hoje é recente em relação à história da humanidade, mais jovem ainda é a conquista da Álgebra.

Álgebra vem de *al-jabr*, também por causa de Al-Khowarizmi, para quem esse termo significava "uma certa regra para transformar uma igualdade numa outra igualdade tendo o mesmo valor (isto é, equivalentes), regra simples e fácil de compreender", conforme estudamos ainda nos dias de hoje.

A Álgebra se desenvolveu rapidamente, trouxe novos conhecimentos à Matemática e tornou-se um instrumento poderoso na resolução de problemas.

Quando queremos resolver um problema por meio da álgebra, usamos **letras** para representar **números**, escrevemos **equações** para traduzir as condições do problema e trabalhamos com as letras como se elas fossem números: essa é uma nova linguagem, uma "nova" Matemática, "a Matemática das letras".

Leia o problema a seguir e imagine como seria a sua resolução aritmética. Depois acompanhe a resolução algébrica abaixo e tire suas conclusões.

A soma da minha idade com a de meu irmão é 26. Dentro de 10 anos, meu irmão terá o dobro da idade que tenho hoje.

Quais são as nossas idades?

Resolução

Vamos representar as idades por duas letras.

minha idade ——— **x**

idade de meu irmão ——— **y**

idade de meu irmão daqui a dez anos ——— $y + 10$

Agora, escrevemos duas equações relacionando os dados do problema:

$x + y = 26$ ——— A soma é 26.

$y + 10 = 2x$ ——— Dentro de dez anos, a idade de meu irmão será o dobro da idade que tenho hoje.

Essas duas equações formam um sistema de duas equações de 1º grau com duas variáveis. As soluções desse sistema são as soluções do problema dado. Resolvendo-o, teremos $x = 12$ e $y = 14$, ou seja, "eu tenho 12 anos e meu irmão tem 14 anos".

Comentários e resolução de atividades

Desafio – Salada de frutas (p. 202)

Esse desafio envolve cinco variáveis que estão relacionadas entre si.

x ——— número representado pela maçã

y ——— número representado pelo morango

z ——— número representado pelo abacaxi

u ——— número representado pela uva

b ——— número representado pela banana

Resolução

Temos:

✓ na primeira linha, $3 \cdot x = 9$ ——— $x = 3$;

✓ na quarta linha, 2 ; $x + y = 8$ ——— $2 \cdot 3 + y = 8$ ——— $y = 2$;

✓ na terceira linha, $x = y + z = 10$ ——— $3 + 2 + z = 10$ ——— $z = 5$;

✓ na quinta linha, $y = u + z = 11$ ——— $2 + u + 5 = 11$ ——— $u = 4$;

✓ na segunda linha, $y + z + b = 8$ ——— $2 + 5 + b = 8$ ——— $z = 1$.

Portanto, a maçã representa o número 3, o morango, 2 , o abacaxi, 5, a uva, 4, e a banana, 1.

Investigue e explique (p. 206)

Essa atividade possibilita aos alunos investigarem e analisarem contextos reais e próximos ao cotidiano deles. Oriente-os a encontrar ofertas nos vários meios de comunicação e completar o problema com os dados encontrados e, em seguida, resolvê-lo.

Resolução

Supondo que o fogão custe R$ 680,00 e um aparelho de TV, R$ 2 450,00.

m ——— **salário da moça**

20% do salário da moça ——— $0{,}2 \cdot m$

r ——— **salário do rapaz**

30% do salário do rapaz ——— $0{,}3 \cdot r$

Equações:

✓ 20% do salário da moça mais 30% do salário do rapaz dá o preço do fogão:
$0{,}2 \cdot m + 0{,}3 \cdot r = 680$ **(1)**

✓ Salário da moça mais o salário do rapaz dá o preço da TV:
$m + r = 2450{,}00$ **(2)**
(1) e (2) formam um sistema. Resolvendo o sistema, tem-se a solução do problema.

$$\begin{cases} 0{,}2 \cdot m + 0{,}3 \cdot r = 680 \\ m + r = 2\,450 \end{cases}$$

$m = 2450 - r$ ———— $0{,}2 \cdot (2450 - r) + 0{,}3 \cdot r = 680$

$490 - 0{,}2 \cdot r + 0{,}3 \cdot r = 680$ ———— $0{,}1 \cdot r = 680 - 490$

$0{,}1 \cdot r = 190$ ———— $\mathbf{r = 1900}$

$m = 2450 - r$ ———— $m = 2450 - 1900$ ———— $\mathbf{m = 550}$

Roberta ganha R$ 550,00 e Henrique, R$ 1900,00.

Troquem ideias e resolvam (p. 208)

Resolução

Considerando duas pessoas jogando par ou ímpar:

- Cada participante não mostra os dedos, ou, ainda, "mostra zero dedos"; a menor soma que poderá ocorrer é zero.
  Cada pessoa mostra 5 dedos; a maior soma que poderá ocorrer é 10.
- Cada pessoa poderá mostrar 0, 1, 2, 3, 4 ou 5 dedos.
  Sendo zero o primeiro elemento do par ordenado: (0, 0), (0, 2) e (0, 4);
  Sendo 1 o primeiro elemento do par ordenado: (1, 1), (1, 3) e (1, 5);
  Sendo 2 o primeiro elemento do par ordenado: (2, 0), (2, 2) e (2, 4);
  Sendo 3 o primeiro elemento do par ordenado: (3, 1), (3, 3) e (3, 5);
  Sendo 4 o primeiro elemento do par ordenado: (4, 0), (4, 2) e (4, 4);
  Sendo 5 o primeiro elemento do par ordenado: (5, 1), (5, 3) e (5, 5).
- Sendo zero o primeiro elemento do par ordenado: (0, 1), (0, 3) e (0, 5);
  Sendo 1 o primeiro elemento do par ordenado: (1, 0), (1, 2) e (1, 4);
  Sendo 2 o primeiro elemento do par ordenado: (2, 1), (2, 3) e (2, 5);
  Sendo 3 o primeiro elemento do par ordenado: (3, 0), (3, 2) e (3, 4);
  Sendo 4 o primeiro elemento do par ordenado: (4, 1), (4, 3) e (4, 5);
  Sendo 5 o primeiro elemento do par ordenado: (5, 0), (5, 2) e (5, 4).

UNIDADE 9

Razões e proporções

Conteúdos	Expectativas de aprendizagem
1. Razões O que significa razão? **2. Razões especiais e porcentagem** Velocidade média Densidade de um material Densidade demográfica Razões e porcentagem **3. Proporções** Usos da ideia de proporcionalidade O que é proporção? Propriedade fundamental das proporções Resolvendo problemas **4. Aplicações das proporções** Ampliação e redução Escala **5. Estatística e probabilidade** Razões e possibilidades	Espera-se que os alunos: • resolvam problemas que envolvam a ideia de razão e de proporcionalidade, por meio de estratégias como a construção de tabelas de proporção; • reconheçam e utilizem porcentagens como números racionais com significado de razão; • resolvam problemas que envolvam a determinação de chances de sucesso de um experimento, por meio de uma razão; • conceituem algumas razões especiais, como escala, velocidade média e densidade, e identifiquem essas razões em outras situações além daquelas propostas em aulas de Matemática; • ampliem e reduzam figuras planas segundo uma razão.

Orientações didáticas

A proporcionalidade é uma das noções mais utilizadas pela maioria das pessoas, seja em Matemática, seja no dia a dia, ainda que intuitivamente. Em muitas situações, recorremos a ela para fazer estimativas e cálculos e até mesmo para tomar algumas decisões. A análise das regularidades na maneira como ocorre a interdependência entre duas ou mais grandezas leva à noção de proporcionalidade. No estudo de proporcionalidade é importante que os alunos compreendam que, apesar da habitual distinção entre os termos **fração** e **razão**, é comum comparar razões como se elas fossem frações. Nesse caso, o número racional é usado como um índice comparativo entre duas quantidades.

Outro aspecto relevante sobre esse tema é o reconhecimento de que a representação percentual é uma razão de denominador 100, o que explica sua grande aplicação em situações práticas.

O estudo da proporcionalidade também pode ser integrado a outras disciplinas.

Solicite aos alunos, por exemplo, que façam pesquisas sobre a densidade demográfica de seu município ou estado. Trabalhe, também, com assuntos do dia a dia, explorando matérias publicadas em revistas, jornais locais e na internet.

De modo geral, os alunos não costumam apresentar grande dificuldade no estudo de proporcionalidade, por estarem familiarizados com as situações-problema que são propostas.

Em muitas delas, é comum recorrer à intuição, ao raciocínio aritmético e a cálculos simples, deixando de lado as equações. Apresentar situações-problema é um caminho que certamente despertará nos alunos o interesse para o estudo da proporcionalidade.

Texto de aprofundamento

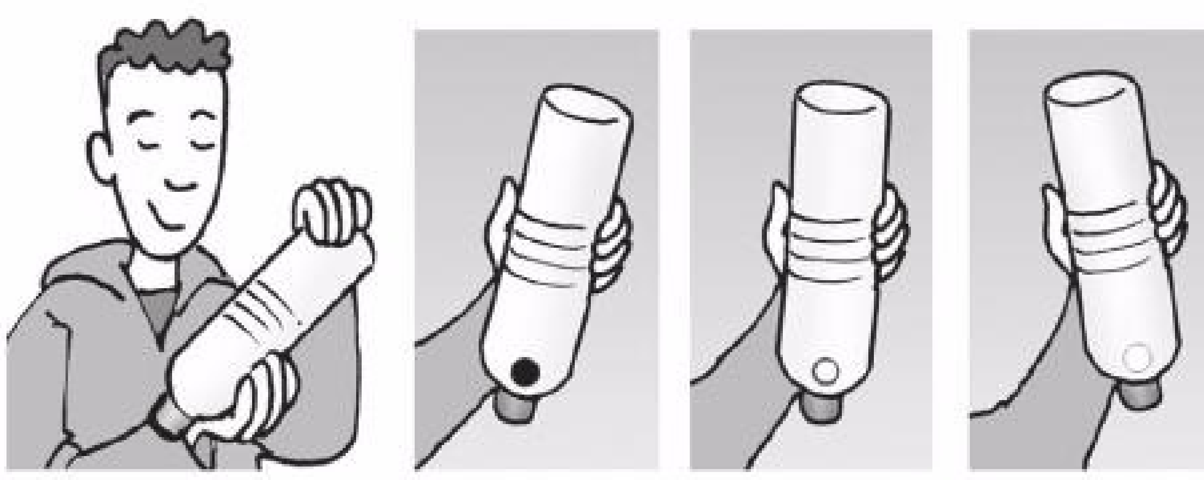
Said Essa

Pegue uma garrafa vazia de plástico "leitoso", dessas que não deixam ver o que elas contêm, e faça um pequeno furo no gargalo, perto da tampa. Também pegue 8 bolinhas de isopor, de mesmo tamanho.

Ilustrações: Francisco Vilachã

Peça para um colega pintar de preto algumas das 8 bolas, mas sem contar para você quantas ele pintou. O colega põe as bolinhas na garrafa, sem que você veja, tampa e passa para você.

Você, muito curioso, logo vira a garrafa. Só consegue ver a cor de uma bola: essa é preta. Você desvira a garrafa, vira de novo e olha: dessa vez é branca. Na terceira vez aparece uma branca.



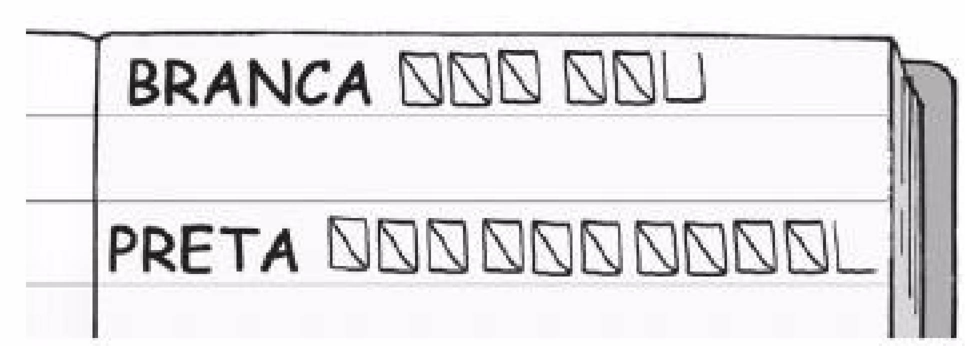
Como você descobrirá quantas das 8 bolas são pretas e quantas são brancas? Claro que não vale destampar a garrafa, cortá-la, perguntar ao colega etc.

O fabuloso detetive Said Essa foi chamado para desvendar o mistério. Afinal, das 8 bolas, quantas seriam pretas e quantas brancas?

Said disse que, por ser simples a questão, até dispensaria seu sofisticado equipamento químico-eletroeletrônico:

— Basta usar proporcionalidade, disse ele.

Puxou sua caderneta, numa linha escreveu "preta" e em outra, "branca". Virou a garrafa, viu uma bola de cor preta e fez um tracinho na linha correspondente. Desvirou a garrafa, chacoalhou-a, virou e anotou de novo. Fez isso muitas outras vezes, num total de 80 observações. Veja como ficaram as anotações:



Said então cumpriu o que prometera: usou a proporcionalidade.

Ele pensou: se em 80 dessas observações vi 28 vezes a cor branca, em 8 bolas, que é o que a garrafa contém, quantas serão brancas?

Mentalmente, Said calculou $28 : 10 = 2{,}8$ e disse:

— A garrafa deve ter 3 bolas brancas e 5 pretas. Como isso é muito provável, mas não é certeza, nem vou cobrar meus honorários. Até a próxima, gente.

Fonte: IMENES; JAKUBO; LELLIS. *Pra que serve Matemática?* – proporções. São Paulo: Atual, 1992.

Comentários e resolução de atividades

Desafio – Cigarro × vida (p. 216)

Esse tema propicia formulação de questões relevantes sobre a saúde dos adolescentes. Incentive a reflexão e discussão em torno dele e avalie a possibilidade de desenvolver um projeto interdisciplinar sobre o assunto.

Antes de iniciar a atividade, peça aos alunos que dirijam a atenção para as informações do quadro que contextualizam o texto. Essas ações antecipam para o leitor uma série de informações sobre o assunto a ser abordado: o tabagismo, um dos maiores problemas de saúde pública da atualidade.

É preciso alertar que um dos grandes problemas do tabagismo são os fumantes passivos, que ficam expostos aos riscos do cigarro mesmo tendo optado por não fumar.

Por ser uma droga socialmente aceita, assim como o álcool, o fumante acaba por não perceber seu grau de dependência. A longo prazo, no entanto, os efeitos começam a aparecer. Além de doenças vasculares e coronarianas, o cigarro é responsável por nada menos do que 90% dos casos de câncer de pulmão. Entre os 10% restantes, um terço é composto por fumantes passivos.

Resolução

- De acordo com o texto, 1 em cada 4 jovens que começam a fumar aos 15 anos pode morrer em decorrência do fumo de cigarro. Essa razão pode ser representada por $\frac{1}{4}$.

Em 2013 no Brasil:

- A razão entre a quantidade de jovens fumantes e o número de fumantes $= \frac{2,5 \times 10^6}{30 \times 10^6} = \frac{2,5}{30} = \frac{25}{300} = \frac{1}{12}$.
- O número de fumantes no Brasil em 2013 era de aproximadamente 30 milhões.
  A população brasileira era de 200 milhões de habitantes.
  A razão entre o número de fumantes e a população brasileira em 2013 era de: $\frac{30 \times 10^6}{200 \times 10^6} = \frac{30}{200} = \frac{3}{20}$.

Troquem ideias e resolvam (p. 220)

O que se pretende nessa atividade é estabelecer, entre outras coisas, relações que envolvam a aplicação do conceito de razões sociais estudados em diversos campos de conhecimentos, por exemplo, Geografia.

Inicie a atividade fazendo um diagnóstico do que os alunos conhecem da cidade em que moram: população, área, aspectos econômicos, políticos, sociais, históricos e geográficos. Se for possível, providencie um mapa da cidade.

Como decorrência desse estudo, proponha um projeto integrado com outras disciplinas, pois o trabalho com razões e proporções permite uma aproximação de ações matemáticas com outros campos de conhecimentos, tais como temas relacionados à, saúde, ao meio ambiente ou respeito à diversidade.

Essa é uma ocasião oportuna para o uso da calculadora. Antes de usá-la, estimule os alunos a realizar estimativas de seus cálculos com o objetivo de criticar os resultados obtidos e não simplesmente aceitar os que são mostrados em seus visores.

Investigue e explique (p. 222)

Nos países de clima tropical, as condições do meio ambiente favorecem o desenvolvimento e a proliferação do mosquito *Aedes aegypti*, que é o principal transmissor do vírus da dengue.

Faça um levantamento dos conhecimentos que os alunos têm da dengue. A partir das respostas deles, pode-se fazer um esquema na lousa e verificar o que eles já sabem. Dessa forma, as informações estarão organizadas.

Se possível, peça que pesquisem na internet informações sobre a virose, os sintomas, os recentes surtos no Brasil, quais as causas, as precauções a serem tomadas e quais ações que cada aluno pode fazer, com os familiares e vizinhos, para eliminar esse mosquito.

Resolução

A mistura recomendada para borrifar plantas e evitar dengue é: 2 mL de água sanitária para 1 L (1 000 mL) de água, ou seja, $\frac{2}{1000}$.

O porcentual de água sanitária nessa mistura é:

$\frac{2}{1000} = \frac{2 : 10}{1000 : 10} = \frac{0,2}{100} = 0,2\%$.

- Helena misturou 0,5 L (500 mL) para 1 L (1000 mL), ou seja, $\frac{500}{1000} \neq \frac{2}{1000}$.
- Se Helena usar 5 litros de água, para manter a mesma razão da mistura recomendada ela deverá usar 5 vezes a quantidade de água sanitária: 5×2 mL $= 10$ mL.

Desafio – Preto, vermelho ou azul? (p. 237)

Nessa atividade, os alunos terão a oportunidade de ampliar os conhecimentos adquiridos sobre problemas de contagem, probabilidades e medida das chances de ocorrência de um evento.

Resolução

✓Total de bolas na caixa ——— 5 bolas

✓Chances de ocorrência em cada retirada:

– da bola vermelha ——— **1** bola em **5** ——— $\frac{1}{5}$

– da bola azul ——— **1** bola em **5** ——— $\frac{1}{5}$

– da bola preta ——— **3** bolas em **5** ——— $\frac{3}{5}$

Como $\frac{3}{5} > \frac{1}{5}$, a bola preta tem maior chance de sair numa retirada ao acaso.

Portanto, a escolha deverá ser bola preta, pois ela tem maiores chances de sair.

Sugestão de atividade complementar

Lígia está fazendo um cachecol de formato retangular que, depois de pronto, terá 25 cm de largura e 1,20 m de comprimento. Ela já gastou 2,5 novelos de lã para tricotar um pedaço com 25 cm de largura e 50 cm de comprimento. Quantos novelos de lã são necessários para terminar o cachecol?

Resposta

3,5 novelos.

UNIDADE 10

Grandezas proporcionais

Conteúdos	Expectativas de aprendizagem
1. Proporcionalidade entre grandezas Grandezas diretamente proporcionais Grandezas inversamente proporcionais **2. Regra de três simples** **3. Regra de três composta** **4. Divisão proporcional** Divisão em partes diretamente proporcionais Divisão em partes inversamente proporcionais	Espera-se que os alunos: • identifiquem grandezas proporcionais e estabeleçam a natureza da proporcionalidade (direta ou inversa) entre elas; • utilizem a linguagem algébrica para expressar a proporcionalidade entre grandezas; • conheçam uma nova ferramenta para a resolução de problemas: a regra de três; • observem a variação entre grandezas, estabeleçam relação entre elas e resolvam problemas que envolvam a proporcionalidade entre grandezas, por meio de tabelas, gráficos, procedimentos aritméticos, regra de três simples e regra de três composta.

Orientações didáticas

Os alunos não costumam apresentar grandes dificuldades no estudo desse tópico. As maiores dificuldades estão relacionadas à identificação da proporcionalidade inversa entre grandezas envolvidas em uma situação-problema e ao equacionamento dessas situações. Explorar situações do dia a dia e resolver aritmeticamente os problemas poderão auxiliar na superação de algumas dessas dificuldades.

Recorrer ao uso de tabelas que permitam a análise dos dados contribui para identificar os casos em que ocorre proporcionalidade direta ou inversa e também para a obtenção de fórmulas que auxiliarão na busca de outras soluções. A regra de três é uma alternativa na resolução de problemas, quando a ideia de proporcionalidade já tiver sido construída.

Assim, proponha inicialmente uma exploração qualitativa da proporcionalidade — "se uma grandeza aumenta, a outra aumenta ou diminui na mesma razão?" — e situações-problema que trabalhem com o seu equacionamento e resolução. Seria interessante dizer aos alunos que, para haver uma relação de proporcionalidade, não basta uma grandeza aumentar e a outra também: é necessário observar a existência de uma razão constante de variação.

Texto de aprofundamento

Teria podido Arquimedes levantar a Terra?

[...] É famosa a história, contada pelo escritor grego Plutarco, de que o genial Arquimedes, ao descobrir as leis das alavancas, afirmara: "Deem-me um ponto de apoio e eu levantarei o mundo".

Propus então tentarmos responder à pergunta: teria podido Arquimedes levantar a Terra?

[...] Foi, na verdade, o escritor russo Yakov Perelman, autor de várias obras de curiosidades científicas, quem fez a provocadora pergunta no seu livro *Física recreativa*.

Todas as alavancas seguem o mesmo princípio:

Zapt

$P \cdot b = R \cdot a$

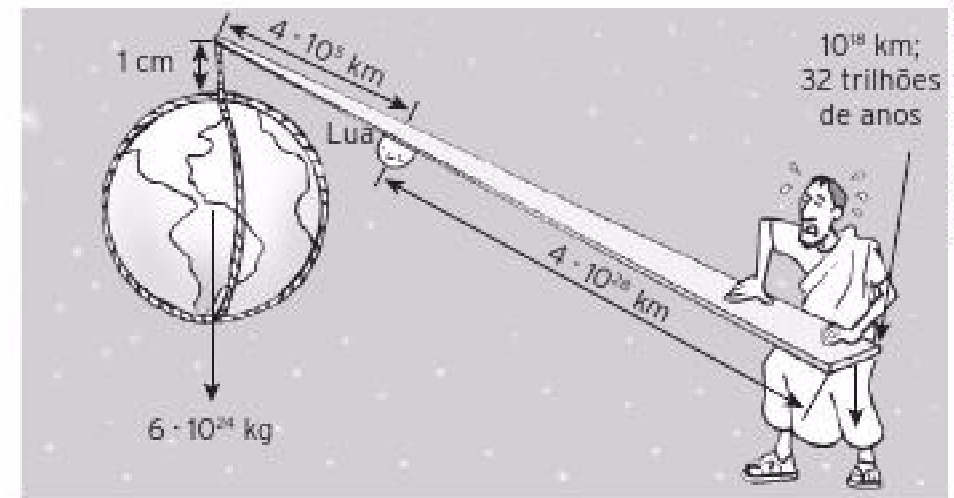
Com uma força **P**, aplicada no braço maior **b**, é possível equilibrar uma força maior **R** que esteja na ponta do braço menor **a**, pois o produto **P** · **b** é igual ao produto **R** · **a**.

[...] sabemos hoje que um corpo com a mesma massa da Terra, se pudesse ser pesado na superfície do nosso planeta, pesaria 6 sextilhões ($6 \cdot 10^{21}$) de toneladas. Supondo-se que o sábio de Siracusa fosse capaz de levantar diretamente do solo um peso de 60 kg, ele iria necessitar de uma imensa alavanca (indeformável) cujo braço maior fosse 10^{23} vezes maior que o menor, ou seja:

100 000 000 000 000 000 000 000 vezes o braço menor.

Apoiando essa alavanca na Lua, que está a cerca de 400 mil ($4 \cdot 10^5$) quilômetros da Terra, Arquimedes teria de ficar na astronômica distância de $4 \cdot 10^{28}$ quilômetros, a partir da Lua ($4 \cdot 10^5 \cdot 10^{23}$), o que é quase 280 mil vezes mais distante que a galáxia mais remota. Mesmo supondo tudo isso possível, seria interessante notar o deslocamento que Arquimedes teria de dar na extremidade mais longa para que o braço menor levantasse o nosso planeta 1 centímetro apenas: cerca de 1 quintilhão (10^{18}) de quilômetros.

[...] "Se supusermos que Arquimedes podia levantar um peso de 60 quilos a 1 metro de altura em 1 segundo – o que é próximo da capacidade de trabalho de um cavalo-vapor –, para levantar a Terra um único centímetro, ele levaria algo por volta de 32 trilhões de anos".



Francisco Vilachã

Fonte: BARCO, Luiz. A alavanca de Arquimedes. *Superinteressante*. São Paulo: Abril, ano 3, n. 16, 1989.

Comentários e resolução de atividades

Investigue e explique (p. 252)

Comente com os alunos que a atividade proposta é uma aplicação em que podemos observar que, na vida cotidiana, alguns problemas se resolvem fazendo estimativas e utilizando proporcionalidade.

Nessa atividade, a estimativa pode ser um método eficaz para se aproximar ao valor exato quando este se faz necessário. A estimativa é útil antes de efetuar a medição, como uma resposta aproximada.

Verifique como os estudantes estimam a altura do garoto. Não se preocupe inicialmente em corrigir as respostas, mas em tecer comentários como "Essa resposta faz sentido?", "Ela deveria ser maior ou menor?".

Resolução

Supondo que um aluno tenha estimado que a altura do garoto é 1,40 m, e tenha escolhido 4 m como a altura de uma casa de dois andares, vamos verificar se essa estimativa chegou a um resultado mais próximo:

✓altura da casa na figura = 5 cm;

✓altura do garoto na figura = 2 cm.

$$\text{escala} = \frac{5\text{ cm}}{4\text{ m}} = \frac{5\text{ cm}}{400\text{ cm}} = \frac{1}{80}$$

$$\frac{1}{80} = \frac{\text{desenho}}{\text{real}} \text{ ——— } \frac{1}{80} = \frac{2}{x} \text{ ——— } x = 160\text{ cm}$$

A altura real do garoto é 1,60 m, que é maior que a altura estimada pelo suposto aluno.

Troquem ideias e resolvam (p. 256)

- Promoção: leve 4 e pague 3 a R$ 2,40 a unidade.
  Assim, 4 pacotes de macarrão custarão 3 × R$ 2,40 = = R$ 7,20.
  Seis pacotes custarão:

$$\underbrace{\text{R\$ 7,20}}_{\text{Preço de 4 pacotes na promoção}} + \underbrace{2 \cdot \text{R\$ 2,40}}_{\text{Preço de 2 pacotes}} = \underbrace{\text{R\$ 12,00}}_{7{,}20\,+\,4{,}80}$$

- O número de pacotes não é proporcional ao preço que deve ser pago por eles porque o preço final de cada pacote varia de acordo com a quantidade comprada. Observe:

4 pacotes —— R$ 7,20

$$\text{preço por pacote} = \frac{7{,}20}{4} = \text{R\$ } 1{,}80$$

6 pacotes —— R$ 12,00

$$\text{preço por pacote} = \frac{12{,}00}{6} = \text{R\$ } 2{,}00$$

$$\frac{4}{1{,}80} = \frac{400}{180} = \underbrace{\frac{20}{9} \qquad \frac{6}{2{,}00} = \frac{600}{200} = 3}_{\text{diferentes}}$$

$$4 \cdot 1{,}80 = \underbrace{7{,}20 \qquad 6 \cdot 2{,}00 = 12{,}00}_{\text{diferentes}}$$

Sugestão de atividade complementar

Existe um tipo de vela, chamada vela de 7 dias, que, uma vez acesa, leva em média 7 dias para queimar até o fim.

- Acendendo ao mesmo tempo 5 velas de 7 dias, quantos dias elas levarão para queimar até o fim?

Resposta

Cerca de 7 dias, pois, independentemente da quantidade de velas, cada uma leva 7 dias para queimar até o fim.

UNIDADE 11 Matemática do comércio e das finanças

Conteúdos	Expectativas de aprendizagem
1. Porcentagem no comércio O que é taxa porcentual? **2. Juro simples** O que é juro simples? Cálculo de juro simples **3. Estatística e probabilidade** Média aritmética ponderada	Espera-se que os alunos: • identifiquem termos da Matemática Financeira; • utilizem noções de porcentagem; • utilizem noções de juro simples; • resolvam problemas que envolvam porcentagem e juro simples.

Orientações didáticas

Se possível, inicie o tema propondo aos alunos uma pesquisa em jornais locais, internet, revistas e anúncios de lojas e supermercados, selecionando situações que dão ideia de juro ou apresentam porcentagem. Promova uma discussão sobre os dados levantados pelos alunos: explore o conhecimento que eles têm sobre porcentagem e juro. Procure diagnosticar esse conhecimento e tomar decisões quanto ao encaminhamento que deverá ser dado para se atingir os objetivos desta unidade.

Não pretendemos que o aluno adquira conhecimentos avançados em finanças, mas esperamos que ele possa analisar e comparar algumas situações reais e aparentes e identificar situações vantajosas e desvantajosas para o consumidor, pois, possivelmente, um dia ele estará em quaisquer dessas situações.

Texto de aprofundamento

A prazo ou à vista... você decide!

Francisco Vilachã

Comprar em dois pagamentos parece ser tentador, não é mesmo?

Então pare, esfrie o entusiasmo e... claro, faça alguns cálculos.

Afinal, a Matemática existe também para nos ajudar em momentos como esse.

Das duas parcelas de R$ 156,00, uma será paga no ato da compra e restará um saldo de R$ 144,00 em relação ao preço do aparelho (preço à vista), sobre o qual incidirão juros:

R$ 300,00 − R$ 156,00 = R$ 144,00

O preço total a prazo é de R$ 312,00. Portanto, os juros em 30 dias pelo financiamento de R$ 144,00 é de R$ 12,00:

R$ 312,00 − R$ 300,00 = R$ 12,00

Isso representa uma taxa de:

$(12 : 144) \cdot 100 = 8{,}33\%$

Se na época que essa "oferta" foi anunciada a inflação estava em torno de 1% ao mês e que as aplicações financeiras estavam pagando cerca de 1,2% ao mês, os juros que a loja estaria cobrando pelo financiamento seriam cerca de 700% maiores que qualquer aplicação financeira.

Logo, comprar à vista será mais vantajoso.

Comentários e resolução de atividades

Desafio – Fazendo negócios (p. 265)

O problema envolve duas situações relativas à venda de produtos. Numa delas Rafael teve lucro e na outra ele teve prejuízo sobre o custo inicial. Pede-se para avaliar se a transação realizada acarretou lucro ou prejuízo, lembrando que o índice utilizado é o mesmo para ambos os casos.

Representando por **x** o custo inicial do *skate* e por **y** o custo inicial da prancha, podemos traduzir as informações do problema pelas seguintes equações:

Preço de venda do *skate* —— lucro de 20% sobre o custo inicial, ou seja:

$$\underbrace{\text{O preço de venda do } \textit{skate}}_{240}\ \underbrace{\text{é igual ao}}_{=}\ \underbrace{\text{custo inicial}}_{x}\ \underbrace{\text{mais}}_{+}\ \underbrace{\text{20\% sobre seu custo inicial.}}_{0{,}20x}$$

$240 = 1{,}20x$ —— $x = \dfrac{240}{1{,}20}$ —— $x = 200$

Portanto, o custo inicial do *skate* foi de R$ 200,00.

Preço de venda da prancha — prejuízo de 20% sobre o custo inicial, ou seja:

$$\underbrace{\text{O preço de venda da prancha}}_{240}\ \underbrace{\text{é igual ao}}_{=}\ \underbrace{\text{custo inicial}}_{y}\ \underbrace{\text{menos}}_{-}\ \underbrace{\text{20\% sobre seu custo inicial.}}_{0{,}20y}$$

$240 = 0{,}80y$ —— $y = \dfrac{240}{0{,}80}$ —— $y = 300$

Portanto, o custo inicial da prancha foi de R$ 300,00.

Rafael gastou R$ 500,00 (R$ 200,00 + R$ 300,00) para comprar o *skate* e a prancha e os vendeu por R$ 480,00 (R$ 240,00 + R$ 240,00). Logo, ele teve um prejuízo de R$ 20,00.

Sugestão de atividade complementar

Quanto por cento perdi sobre o custo de um objeto que comprei por R$ 50,00 e vendi por R$ 42,50?

Resposta

Perdeu 15% do custo do objeto.