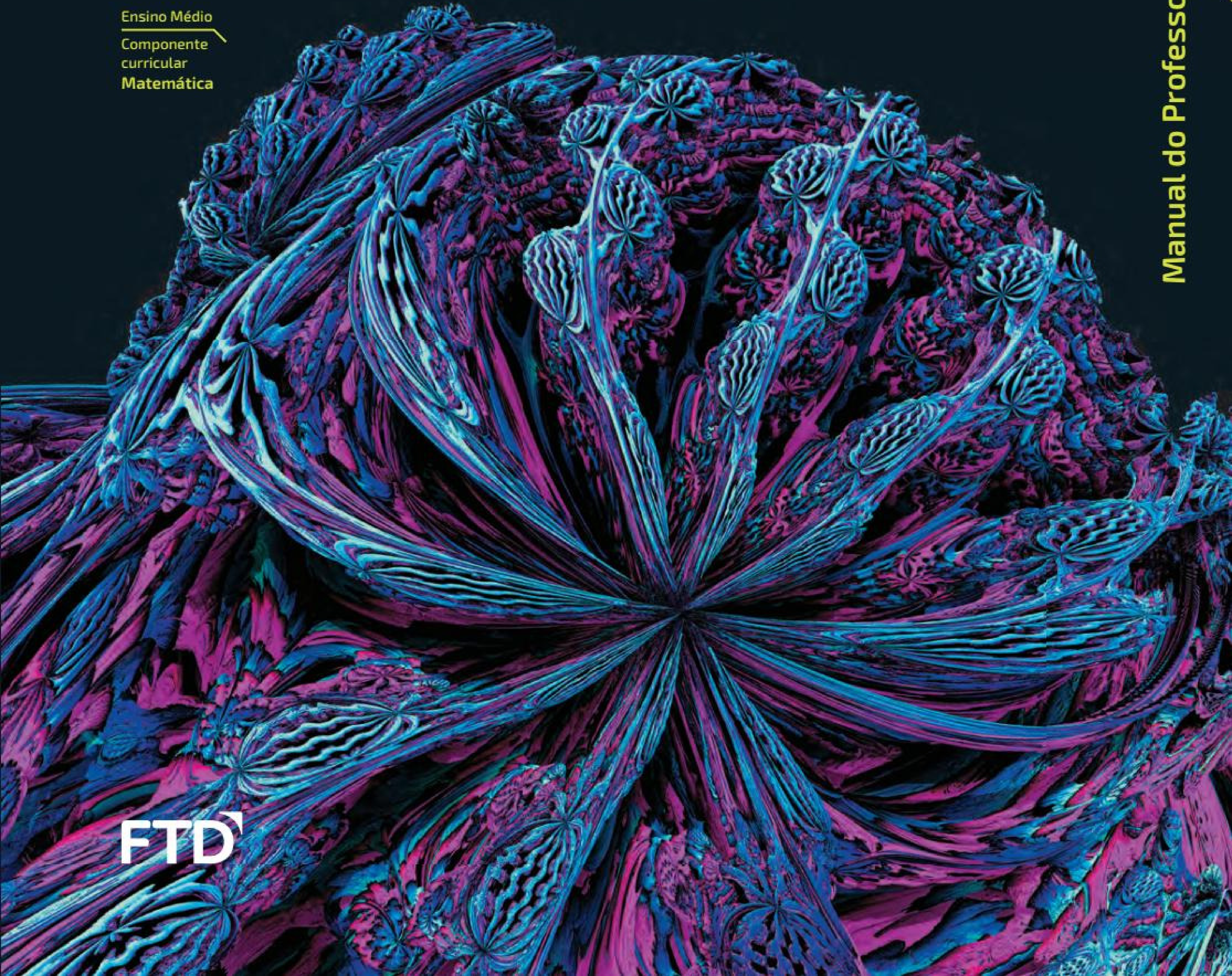
Joamir Souza
Jacqueline Garcia

1

#contato Matemática

Manual do Professor

Ensino Médio
Componente curricular **Matemática**



FTD

#contato Matemática

1

Manual do Professor

Ensino Médio

Componente
curricular
Matemática

Joamir Roberto de Souza

Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL-PR).

Mestre em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL-PR).

Atua como professor de Matemática da rede pública de ensino.

Autor de livros didáticos para os anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio.

Jacqueline da Silva Ribeiro Garcia

Licenciada em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL-PR).

Pós-graduada em Psicopedagogia pela Universidade Estadual de Londrina (UEL-PR).

Atuou como professora na rede particular em Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio no estado do Paraná.

Realiza palestras e assessorias para professores em escolas particulares.

FTD

1ª edição \ São Paulo \ 2016

Diretor editorial	Lauri Cericato
Gerente editorial	Flávia Renata P. A. Fugita
Editora	Cibeli de Oliveira Chibante Bueno
Editor assistente	Marcos Antonio Silva
Gerente de produção editorial	Mariana Milani
Coordenador de produção editorial	Marcelo Henrique Ferreira Fontes
Coordenadora de arte	Daniela Máximo
Coordenadora de preparação e revisão	Lilian Semenichin
Supervisora de preparação e revisão	Izabel Rodrigues
Revisão	Lilian Vismari
Coordenador de iconografia e licenciamento de textos	Expedito Arantes
Surpevisora de licenciamento de textos	Elaine Bueno
Iconografia	Marcia Trindade
Coordenadora de ilustrações e cartografia	Marcia Berne
Diretor de operações e produção gráfica	Reginaldo Soares Damasceno
Produção editorial	Scriba Projetos Editoriais
Edição	Denise Maria Capozzi
Assistência editorial	Marcela M. Bagagini Cardoso, Sheila C. Molina, Karina T. de Melo
Assessoria	Antonio Carlos Saraiva Branco
Projeto gráfico	Laís Garbelini e Hatadani
Capa	Marcela Pialarissi
Imagem de capa	Laguna Design/Getty Images
Edição de ilustrações	Camila Ferreira
Diagramação	Carlos Cesar Ferreira
Tratamento de imagens	José Vitor Elorza Costa
Ilustrações	Angelo Shuman, Camila Ferreira, Davi Augusto, Desenhorama Estúdio, Eduardo C. S., Gilberto Alicio, Mario Henrique, Poliana Garcia, Ronaldo Lucena, Sergio Lima
Cartografia	E. Cavalcante e Renan Fonseca
Revisão	Ana Paula Felippe
Assistência de produção	Paulo Ricardo Mercadante, Daiana Melo e Tamires Azevedo
Autorização de recursos	Erick L. Almeida
Pesquisa iconográfica	Tulio Sanches
Editoração eletrônica	Luiz Roberto L. Correa (Beto)

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Souza, Joamir Roberto de
#Contato matemática, 1º ano / Joamir Roberto de Souza,
Jacqueline da Silva Ribeiro Garcia. – 1. ed. – São Paulo :
FTD, 2016. – (Coleção #contato matemática)

"Componente curricular: matemática"
ISBN 978-85-96-00308-7 (aluno)
ISBN 978-85-96-00309-4 (professor)

1. Matemática (Ensino médio) I. Garcia, Jacqueline da Silva Ribeiro.
II. Título. III. Série.

16-02546 CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:
1. Matemática : Ensino médio 510.7

EDITORA FTD S.A.
Rua Rui Barbosa, 156 – Bela Vista – São Paulo-SP
CEP 01326-010 – Tel. (11) 3598-6000
Caixa Postal 65149 – CEP da Caixa Postal 01390-970
www.ftd.com.br
E-mail: central.atendimento@ftd.com.br

Impresso no Parque Gráfico da Editora FTD S.A.
CNPJ 61.186.490/0016-33
Avenida Antonio Bardella, 300
Guarulhos-SP – CEP 07220-020
Tel. (11) 3545-8600 e Fax (11) 2412-5375

Para conhecer seu livro

Olhar o mundo a nossa volta e compreendê-lo, interagir e participar criticamente dos rumos de nossa sociedade e do meio ambiente, contribuindo para o bem comum, são apenas algumas das atribuições que temos como cidadãos. Nesse sentido, o conhecimento matemático é essencial.

Ler e interpretar criticamente informações, tomar decisões com base em constatações matemáticas e lidar com os recursos tecnológicos são exemplos da importância da Matemática em nossas vidas.

Esta coleção foi elaborada para auxiliá-lo nessa perspectiva e no caminho posterior a essa etapa de ensino, como o ingresso no Ensino Superior e no mercado de trabalho. Para ajudá-lo na compreensão dos assuntos tratados, são apresentados exemplos e atividades resolvidas, seguidos de propostas de atividades que buscam consolidar a aprendizagem, além de seções que tratam do uso do computador e da promoção da cidadania.

Por fim, desejamos que você, aluno ou aluna, desenvolva suas habilidades matemáticas e, com as orientações de seu professor, faça uso desse material com dedicação e entusiasmo.

Os autores.

Nas **Orientações para o professor**, há sugestões que complementam o livro do aluno e podem auxiliar na sua condução, além das resoluções das atividades propostas. Sugerimos que essas orientações sejam consultadas antes do trabalho com os conteúdos em sala de aula, para serem julgadas e utilizadas conforme a sua realidade e possam contribuir no processo ensino-aprendizagem.

Abertura

Na abertura de cada capítulo você terá um contato inicial com os assuntos que serão estudados. Você poderá mostrar o que já sabe e aprimorar seus conhecimentos, trocando ideias com o professor e os colegas sobre diversos temas.

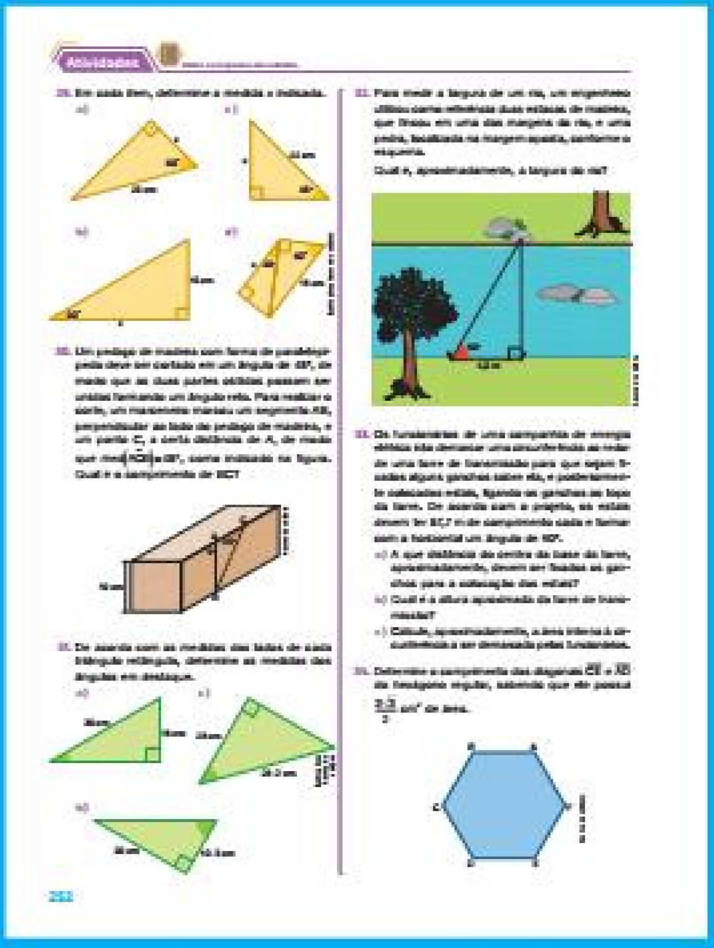
Veja mais informações sobre a classificação dos animais no *site*:
<http://tub.im/ma9u4c>
(acesso em: 29 jan. 2016)

Este quadro traz sugestões de *sites* para você pesquisar e ampliar seus conhecimentos sobre o assunto estudado.

Atividades resolvidas

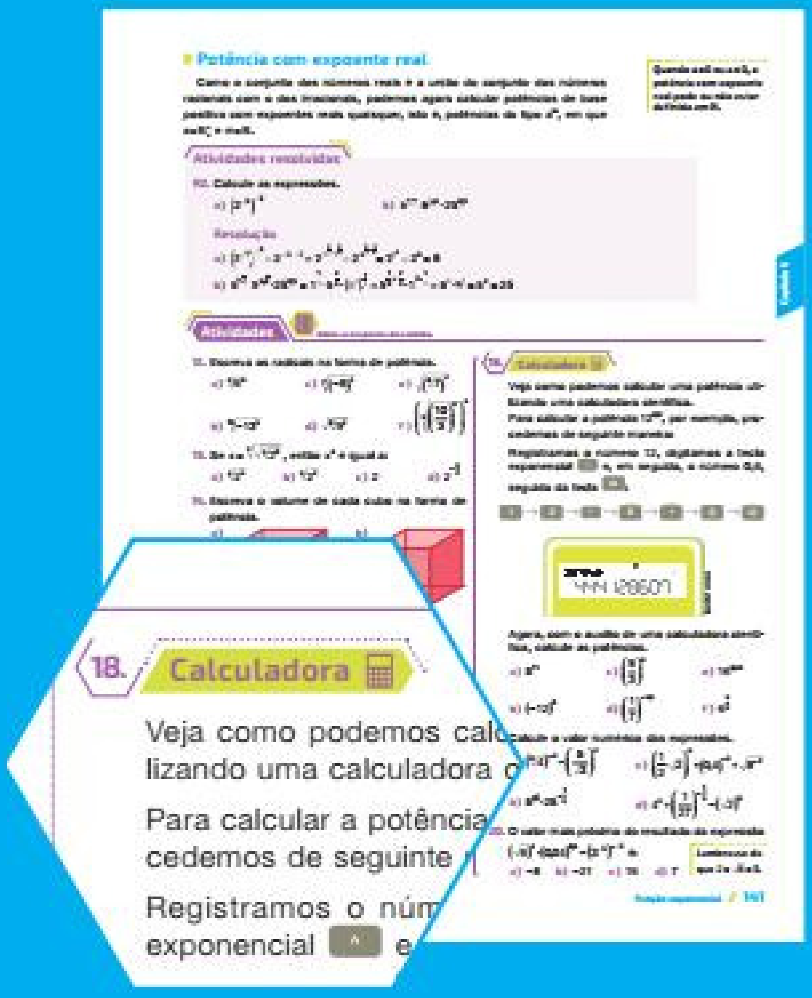
Estas atividades auxiliam a exercitar habilidades e estratégias para resolver todas as outras atividades propostas, favorecendo o desenvolvimento de sua autonomia.

Atividades



Esta seção apresenta atividades diversificadas para você desenvolver as ideias e os conceitos estudados. Várias delas apresentam relações com outras disciplinas e áreas do conhecimento, além de questões aplicadas no Exame Nacional do Ensino Médio (Enem).

Calculadora



18. Calculadora

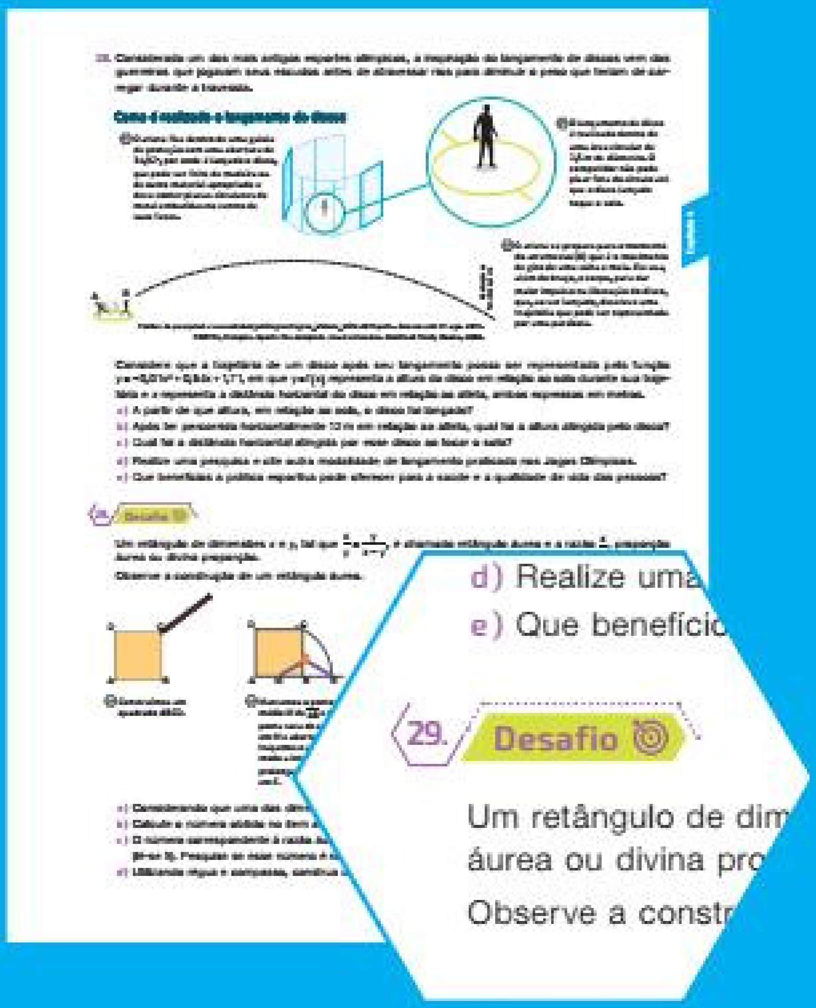
Veja como podemos cal
lizando uma calculadora c

Para calcular a potência
cedemos de seguinte

Registramos o núm
exponencial ^ e

As atividades com a tarja calculadora exploram procedimentos para usar os recursos dessa ferramenta.

Desafio



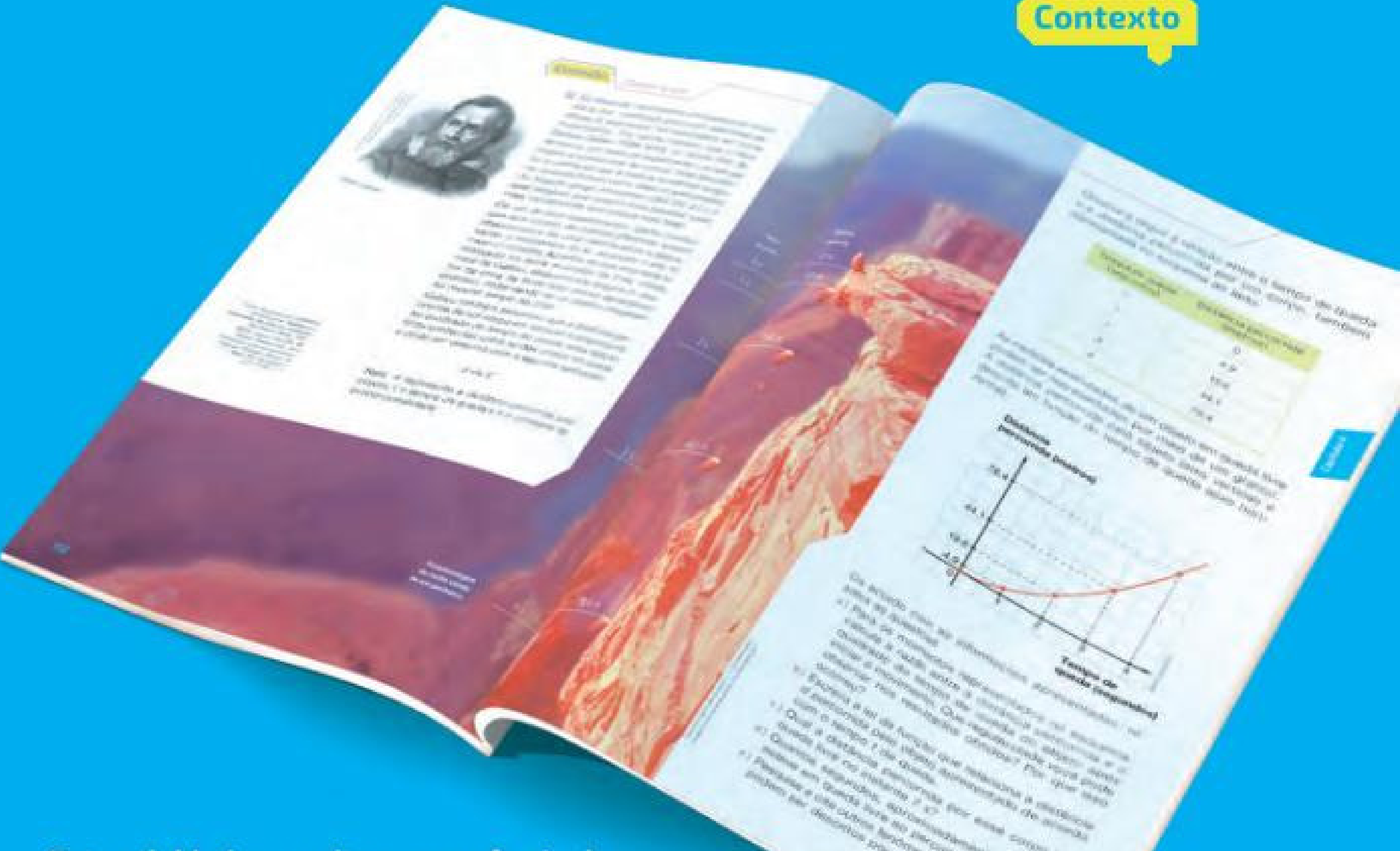
d) Realize uma
e) Que benefício

29. Desafio

Um retângulo de dim
áurea ou divina pro
Observe a constr

As atividades com a tarja desafio possuem caráter desafiador, possibilitando o desenvolvimento de estratégias próprias de resolução.

Contexto



Esta atividade permite que você relacione, de maneira mais expressiva, o conteúdo matemático em estudo com situações do cotidiano, de outras disciplinas ou áreas do conhecimento.

Ser consciente

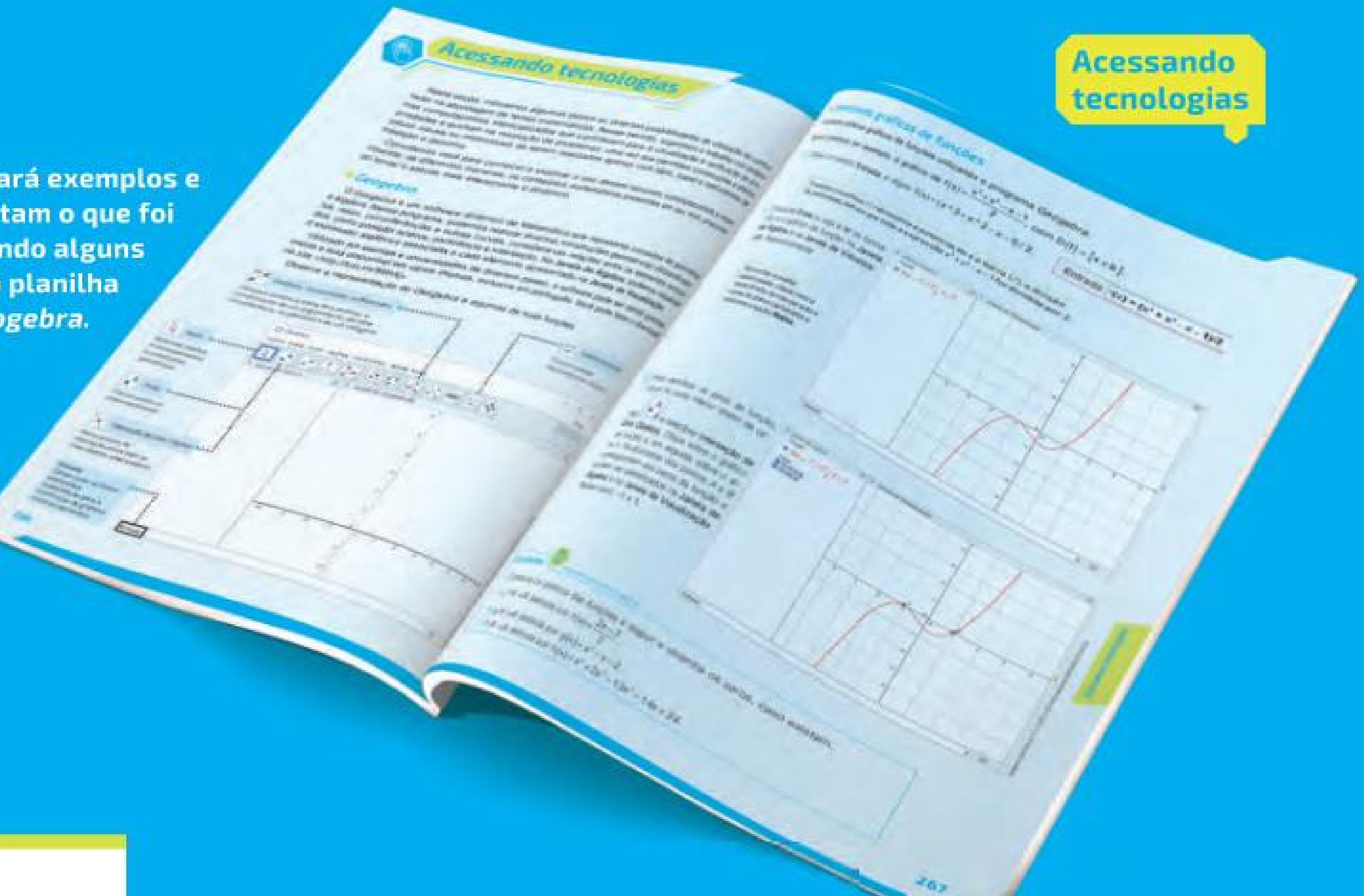
Nesta seção você aplicará os conceitos matemáticos estudados a diferentes assuntos, como ética, educação financeira, cidadania, saúde, entre outros, possibilitando uma reflexão e consciência sobre o tema abordado.

Este ícone indica que as cores utilizadas não correspondem às reais.

Este ícone indica que os elementos apresentados não estão proporcionais entre si.

Acessando tecnologias

Nesta seção você encontrará exemplos e atividades que complementam o que foi estudado nos capítulos, utilizando alguns programas de computador, como planilha eletrônica e *Geogebra*.



Ampliando seus conhecimentos

Esta seção apresenta sugestões de livros e *sites* para você conhecer mais sobre o que foi estudado nos capítulos e ampliar seus conhecimentos.

Sumário


Ian 2010/ Shutterstock.com

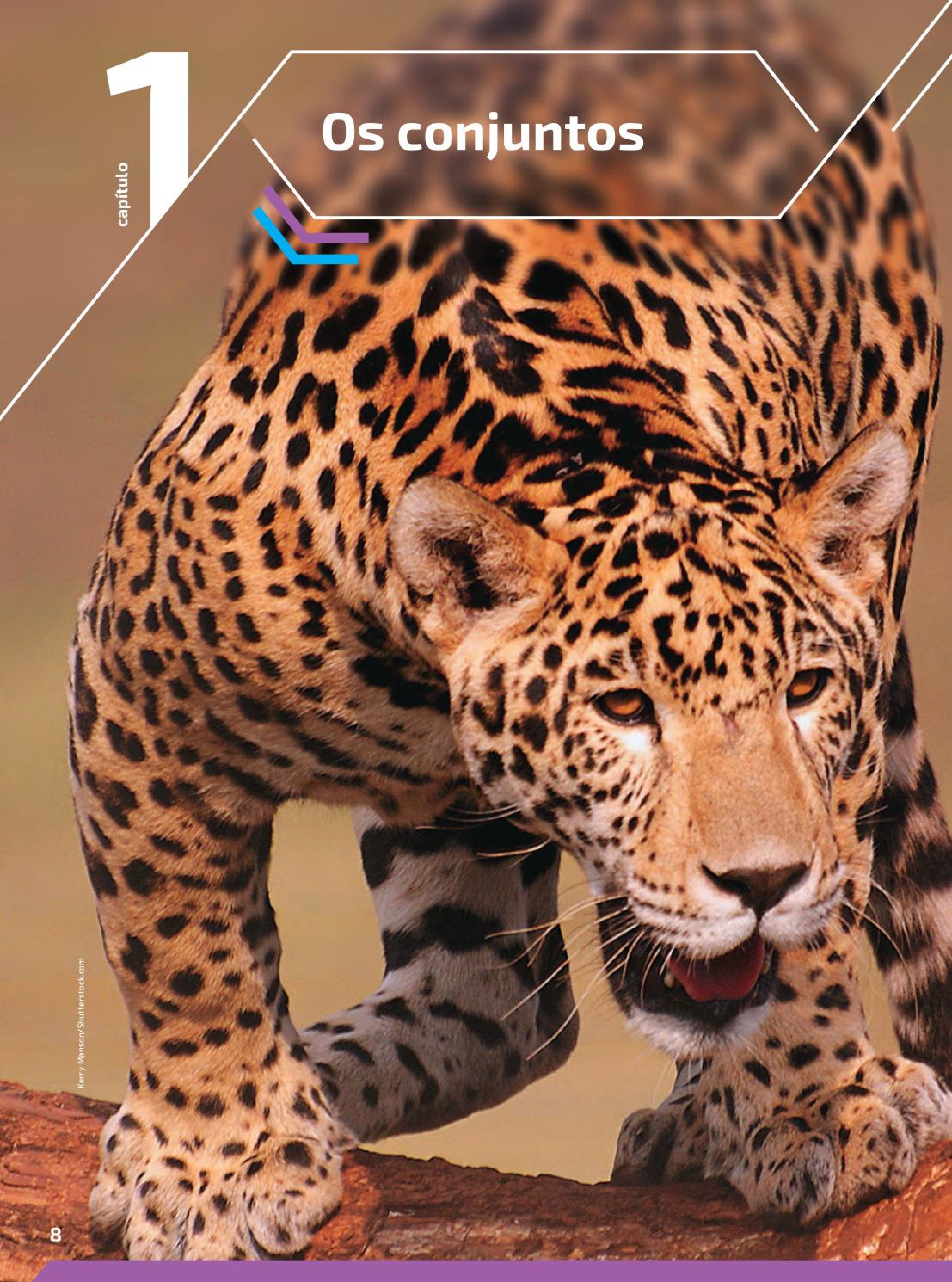
mr.Timmi/Shutterstock.com

MarcelClemens/Shutterstock.com

MarcelClemens/ Shutterstock.com

capítulo 1

Os conjuntos



Kerry Manson/Shutterstock.com

Classificação dos seres vivos

O número de espécies de seres vivos presentes na Terra é incerto, mas sabe-se que milhões delas habitam nosso planeta, e, constantemente, novas espécies são encontradas.

Em razão desse grande número, verificou-se a necessidade da criação de um sistema de classificação dos seres vivos. O sistema de classificação atual agrupa os seres vivos a partir de categorias relacionadas às suas semelhanças. As principais categorias de classificação são: reino, filo, classe, ordem, família, gênero e espécie; de modo que espécies semelhantes se agrupam em gêneros que, a partir de suas semelhanças, se reúnem em famílias, e assim por diante, até que filos semelhantes se agrupem em reinos.

A onça-pintada, que aparece na fotografia maior, o guepardo, o lince e o tigre, que aparecem abaixo, possuem diversas semelhanças e são organizados em uma mesma família, a dos felídeos (Felidae), que por sua vez faz parte da classe dos mamíferos (Mammalia), a qual nós, seres humanos, também pertencemos.

Fonte de pesquisa: PURVES, William K. et al. Vida: a ciência da biologia. Tradução Anapaula Somer Vinagre. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2002. p. 433-436.

Guepardo (*Acinonyx jubatus*)

Eric Isselee/Shutterstock.com

Tigre-de-bengala (*Panthera tigris tigris*)

Dave King/Getty Images

Lince da América do Norte (*Lynx canadensis*)

Erni/Shutterstock.com

Oriente os alunos a escreverem as respostas no caderno.

A) Escreva semelhanças e diferenças entre os animais representados. Algumas possíveis respostas: semelhanças: têm pelos, são mamíferos, apresentam garras e são carnívoros; diferenças: tamanho, cor, massa, *habitat*.

B) Qual dos grupos possui a maior quantidade de seres vivos: a família dos felinos ou a classe dos mamíferos? Justifique sua resposta. Classe dos mamíferos, pois agrupa, além dos felinos, outras famílias.

C) Escolha uma espécie animal e realize uma pesquisa para identificar a que família ela pertence. Algumas possíveis respostas: o cachorro pertence à família dos canídeos (Canidae); o gato, à dos felídeos (Felidae); o coelho, à dos leporídeos (Leporidae).

Ser vivo adulto

Onça-pintada: 1,65 m a 2,55 m de comprimento

Guepardo: 2 m a 2,2 m de comprimento

Lince da América do Norte: 72 cm a 1,2 m de comprimento

Tigre-de-bengala: 2 m a 3,7 m de comprimento

Veja mais informações sobre a classificação dos animais no *site*:

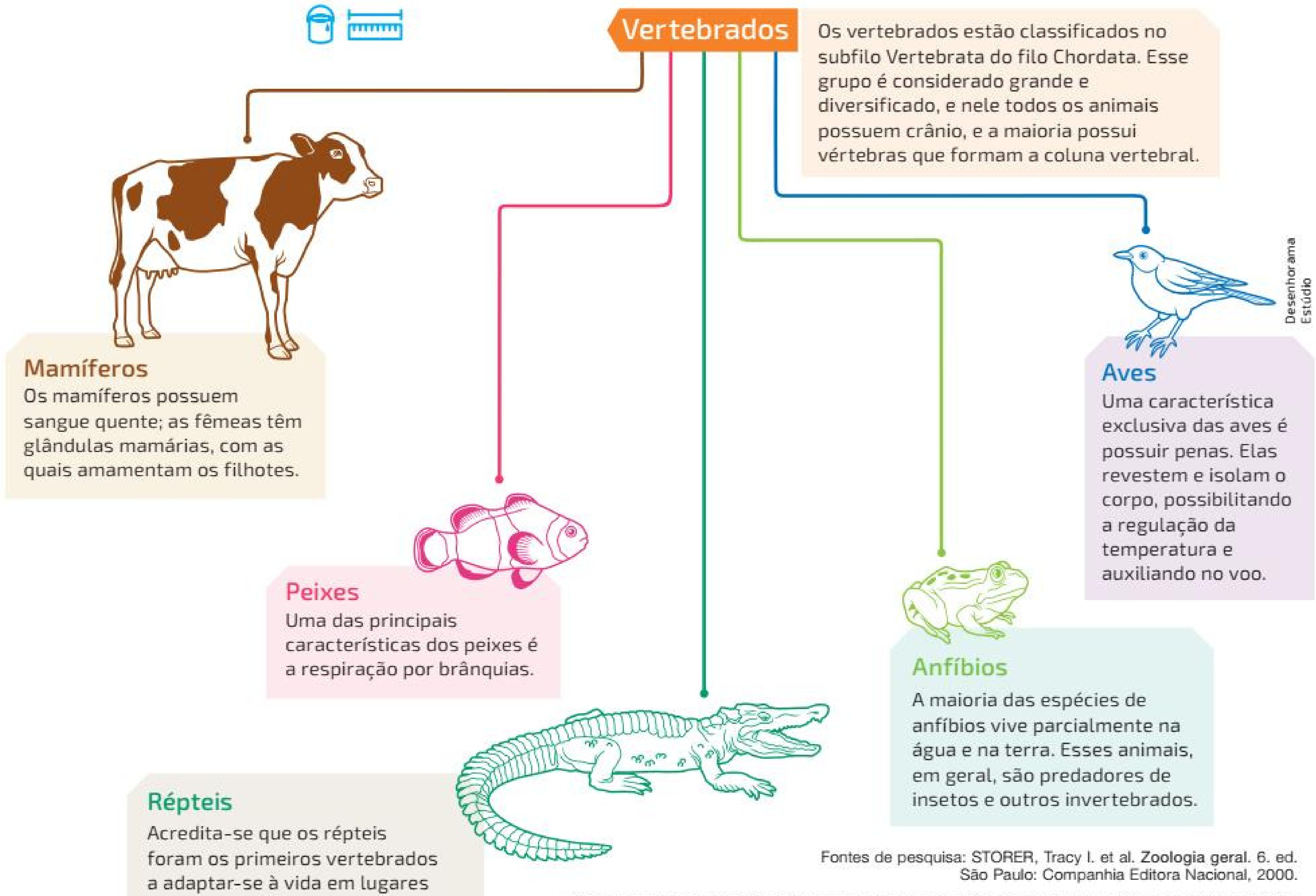
- **<http://tub.im/ma9u4c>**

(acesso em: 29 jan. 2016)

A onça-pintada, cujo nome científico é *Panthera onca*, é um mamífero da ordem dos carnívoros que pertence à família dos felídeos. É o maior felino das Américas e um símbolo da fauna brasileira.

Estudando conjuntos

Ao obter coleções de objetos classificados a partir de certa característica, estamos formando **conjuntos**. Os animais vertebrados, por exemplo, podem ser divididos em cinco classes: peixes, anfíbios, répteis, aves e mamíferos. Cada uma dessas classes de animais forma um conjunto.



Vertebrados

Os vertebrados estão classificados no subfilo Vertebrata do filo Chordata. Esse grupo é considerado grande e diversificado, e nele todos os animais possuem crânio, e a maioria possui vértebras que formam a coluna vertebral.

Mamíferos

Os mamíferos possuem sangue quente; as fêmeas têm glândulas mamárias, com as quais amamentam os filhotes.

Aves

Uma característica exclusiva das aves é possuir penas. Elas revestem e isolam o corpo, possibilitando a regulação da temperatura e auxiliando no voo.

Peixes

Uma das principais características dos peixes é a respiração por brânquias.

Anfíbios

A maioria das espécies de anfíbios vive parcialmente na água e na terra. Esses animais, em geral, são predadores de insetos e outros invertebrados.

Répteis

Acredita-se que os répteis foram os primeiros vertebrados a adaptar-se à vida em lugares secos, no ambiente terrestre.

Desenhorama Estúdio

Fontes de pesquisa: STORER, Tracy I. et al. **Zoologia geral**. 6. ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 2000.
POUGH, F. Harvey; JANIS, Christine M.; HEISER, John B. **A vida dos vertebrados**. São Paulo: Atheneu, 2003.
HICKMAN JR., Cleveland P.; ROBERTS, Larry S.; LARSON, Allan. **Princípios integrados de zoologia**. 11. ed. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan, 2009.

Na Matemática, a ideia de conjunto é fundamental e está presente em diversos conceitos. Podemos formar conjuntos a partir de objetos de diferentes naturezas, tais como pessoas e números.

Cada objeto de um conjunto é denominado **elemento do conjunto**. De maneira geral, os conjuntos são nomeados por letras maiúsculas.

No conjunto *C*, as reticências indicam que, entre os elementos 10 e 96, há outros elementos. Já em *D*, as reticências indicam que há no conjunto outros elementos maiores que 11.

Exemplos

- Conjunto das vogais do nosso alfabeto: $A = \{a, e, i, o, u\}$
- Conjunto dos continentes: $B = \{\text{África, América, Ásia, Europa, Oceania}\}$
- Conjunto dos números pares positivos menores que 100: $C = \{2, 4, 6, 8, 10, \ldots, 96, 98\}$
- Conjunto dos números primos: $D = \{2, 3, 5, 7, 11, \ldots\}$

Lembre aos alunos que um número primo possui apenas dois divisores distintos, 1 e ele mesmo.

Nos exemplos acima, os elementos do conjunto são apresentados entre chaves e separados por vírgula. No caso de números na forma decimal, usaremos ponto e vírgula para não confundir com a vírgula que separa as casas decimais de cada número. Entre os exemplos, *A*, *B* e *C* são **conjuntos finitos**, pois possuem uma quantidade finita de elementos. Já o conjunto *D* é um **conjunto infinito**, pois possui uma infinidade de elementos.

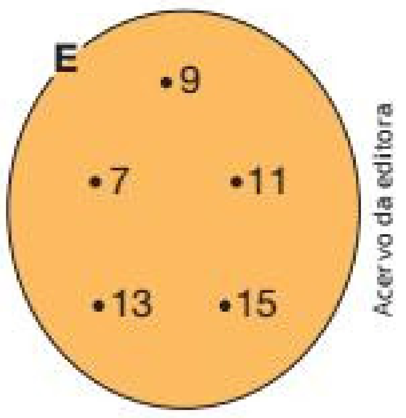
Os elementos de um conjunto também podem ser apresentados pela condição que os definem, denominada **lei de formação** do conjunto.

Exemplo

- $E=\{x \mid x \text{ é um número ímpar maior que 6 e menor que 17}\}$

  lê-se: tal que

Um conjunto também pode ser indicado por meio de uma figura chamada **diagrama de Venn**. Observe o conjunto *E*, representado no diagrama de Venn ao lado.



Acervo da editora

O diagrama de Venn recebe esse nome em homenagem ao lógico inglês John Venn (1834-1923), que utilizou essa maneira de representar conjuntos em um artigo de 1876 e em seu livro **Symbolic Logic**, de 1894.

Quando um objeto é elemento de um conjunto, dizemos que ele **pertence** ao conjunto. De maneira semelhante, quando ele não é elemento do conjunto, dizemos que **não pertence** ao conjunto. Em relação ao conjunto *E*, por exemplo, temos que:

- 7 pertence a *E*: $7 \in E$

  lê-se: pertence

- 8 não pertence a *E*: $8 \notin E$

  lê-se: não pertence

Em relação ao conjunto *E*, temos também:

- $9 \in E$
- $13 \in E$
- $11 \in E$
- $15 \in E$

Podemos indicar o número de elementos do conjunto *E* por $n(E)$. Nesse caso, $n(E)=5$.

Se julgar necessário, relembre os alunos sobre os conjuntos dos números naturais e dos inteiros, frequentemente estudados no **Ensino Fundamental**. Diga a eles que esses conjuntos serão estudados novamente ainda neste capítulo. Relembre-os também de que um número quadrado perfeito é um número inteiro positivo que pode ser escrito como o quadrado de outro número inteiro, por exemplo, 1, 4, 9, 16,...

4. Uma possível resposta:
$A=\{x \mid x \text{ é um dos cinco sentidos humanos}\}$;
$B=\{x \mid x \text{ é um número ímpar entre 2 e 8}\}$;
$C=\{x \mid x \text{ é uma das cores da bandeira do Brasil}\}$

Atividades

Anote as respostas no caderno.

1. Realize uma pesquisa e escreva o nome de três espécies de vertebrados que pertençam ao conjunto: Algumas possíveis respostas:

a) dos mamíferos. gambá, macaco, homem

b) dos peixes. tubarão, cascudo, lambari

c) das aves. arara, papagaio, coruja

d) dos répteis. jacaré, tartaruga, iguana

e) dos anfíbios. cobra-cega, sapo, rã

2. Apresente os elementos de cada conjunto entre chaves e separados por vírgula e classifique-o em finito ou infinito.

a) divisores positivos de 30 $\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$; finito

b) estados brasileiros da região Norte
{Acre, Amapá, Amazonas, Pará, Rondônia, Roraima, Tocantins}; finito

Estados brasileiros da região Norte

E. Cavalcante

Fonte: ATLAS geográfico escolar. 6. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2012.

c) múltiplos positivos de 4 $\{4, 8, 12, 16, \ldots\}$; infinito

d) letras que compõem a palavra CONJUNTO
$\{c, j, n, o, t, u\}$; finito

3. Utilize os símbolos $\in$ e $\notin$ para relacionar cada elemento aos conjuntos $A=\{x \mid x \text{ é par e divisor de } 20\}$ e $B=\{x \mid \sqrt{x} \text{ é um número inteiro}\}$.

a) 4 $4 \in A$; $4 \in B$

b) 6 $6 \notin A$; $6 \notin B$

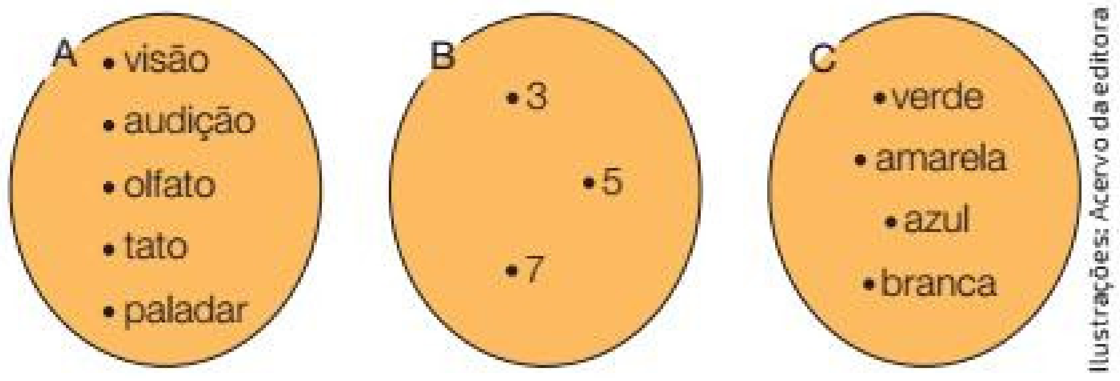
c) 10 $10 \in A$; $10 \notin B$

d) 16 $16 \notin A$; $16 \in B$

e) 25 $25 \notin A$; $25 \in B$

f) 50 $50 \notin A$; $50 \notin B$

4. Determine a lei de formação de cada conjunto.



Ilustrações: Acervo da editora

Agora, elabore dois conjuntos e represente-os por meio do diagrama de Venn. Em seguida, peça a um colega que determine a lei de formação desses conjuntos. Resposta pessoal.

5. O conjunto *D* é formado pelos números quadrados perfeitos ímpares e menores que 150. Quantos elementos tem *D*? $n(D)=6$

6. Considere o número inteiro 5X2Y, em que *X* e *Y* correspondem aos algarismos da centena e da dezena, respectivamente. Quantos elementos tem o conjunto A dos pares ordenados (X, Y) que tornam o número dado divisível por 15? 7 pares ordenados

Lembre-se de que um número é divisível por 15 quando, simultaneamente, é divisível por 3 e 5.

Relembre os alunos de que um número inteiro é divisível por 3 quando a soma dos seus algarismos for divisível por 3, e é divisível por 5 quando o algarismo da unidade for 0 ou 5.

Igualdade de conjuntos

Dois conjuntos *A* e *B* são **iguais** quando eles têm os mesmos elementos. Indicamos essa igualdade por A=B.

> Exemplo

Os conjuntos $A=\{x \mid x \text{ é um número inteiro maior que } -2 \text{ e menor ou igual a } 4\}$ e $B=\{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ têm os mesmos elementos. Assim, os conjuntos *A* e *B* são iguais, ou seja, A=B.

De maneira semelhante, dois conjuntos *C* e *D* são **diferentes**, ou seja, não são iguais, quando algum elemento de um dos conjuntos não é elemento do outro. Indicamos essa desigualdade por $C \neq D$.

> Exemplo

Os conjuntos $C=\{1, 3, 5, 7, 9\}$ e $D=\{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$ são diferentes $(C \neq D)$, pois $2 \in D$ e $2 \notin C$.

Conjuntos unitário, vazio e universo

A seguir estão apresentados alguns conjuntos que possuem características especiais.

- Conjunto unitário

  Um conjunto *A* que tem um único elemento é chamado **conjunto unitário**, assim, $n(A)=1$. Os conjuntos $A=\{7\}$ e $B=\{x \mid x \text{ é um número primo e par}\}$ são exemplos de conjuntos unitários. Lembre os alunos de que o 2 é o único número primo e par.

- Conjunto vazio

  Dizemos que *A* é um **conjunto vazio** quando ele não tem elemento algum, assim, $n(A)=0$. Podemos indicar um conjunto vazio por $\varnothing$ ou $\{\ \}$. O conjunto $A=\{x \mid x \text{ é um número ímpar divisível por } 2\}$ é vazio $(A=\varnothing$ ou $A=\{\ \})$, pois não existe número ímpar que seja divisível por 2.

- Conjunto universo

  Chamamos **conjunto universo**, indicado geralmente por *U*, o conjunto mais amplo que pode ser considerado em determinada situação, ou seja, aquele ao qual pertencem todos os elementos relacionados ao estudo. Mesmo que não expresso, é importante que fique bem estabelecido o conjunto universo em cada situação. A solução da equação $x^2=4$, por exemplo, é apenas o número 2, se o conjunto universo considerado for o dos números naturais. Se o conjunto universo considerado for o dos números inteiros, as soluções são 2 e –2.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

7. Determine quais conjuntos são iguais.
A e G; B e H; C e E; D e F

- $A=\{x \mid x \text{ é um número inteiro maior que } 1\}$
- $B=\{x \mid x \text{ é um número inteiro com } x^2=49\}$
- $C=\{x \mid x \text{ é um número natural negativo}\}$
- $D=\{x \mid x \text{ é um número inteiro com } x^2-5x+6=0\}$
- $E=\{\ \}$
- $F=\{2, 3\}$
- $G=\{2, 3, 4, \dots\}$
- $H=\{-7, 7\}$

Para resolver uma equação do 2º grau na forma $ax^2+bx+c=0$, podemos utilizar a fórmula resolutiva $x=\dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}$, em que $\Delta=b^2-4 \cdot a \cdot c$.

8. Classifique cada afirmação em verdadeira (V) ou falsa (F) e reescreva as falsas, corrigindo-as.

a) Se $A=\{x \mid x \text{ é primo e } 14 \leq x < 17\}$, então *A* é vazio. V

b) Todo conjunto unitário possui mais de um elemento. F Uma possível resposta: todo conjunto unitário possui apenas um elemento.

c) A equação $3x+20=0$ não possui solução no conjunto universo dos números naturais. V

9. Em qual dos conjuntos universo a equação $x^2-2x-3=0$ tem duas soluções? d

a) $U=\{1, 2, 3, 4, 5\}$

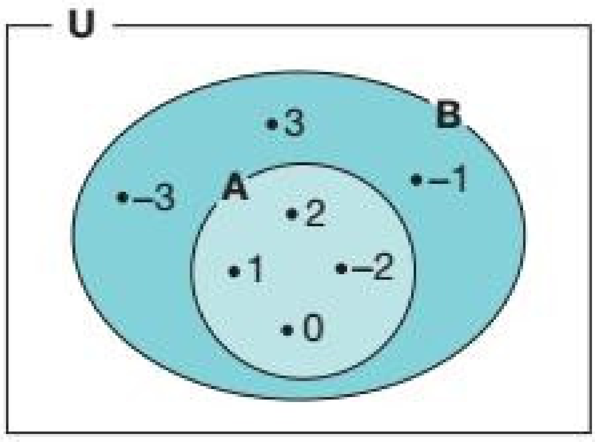
b) $U=\{-5, -4, -3, -2, -1\}$

c) $U=\{-3, -2, 0, 2, 3\}$

d) $U=\{-1, 0, 1, 2, 3\}$

Subconjuntos

Observe em um diagrama de Venn a representação dos conjuntos $A=\{-2, 0, 1, 2\}$ e $B=\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.



Note que todos os elementos do conjunto *A* também são elementos do conjunto *B*. Nesse caso, dizemos que *A* é **subconjunto** de *B*, ou *A* é **parte** de *B*, ou que *A* está **contido** em *B*, indicando por:

$$A \subset B$$

lê-se: está contido

Outra maneira de fazer essa indicação é:

$$B \supset A$$

lê-se: contém

Quando há pelo menos um elemento de um conjunto *C* que não é elemento de um conjunto *D*, dizemos que *C* não é subconjunto de *D*, ou *C* não é parte de *D*, ou *C* não está contido em *D*.

$C \not\subset D$ — lê-se: não está contido

ou

$D \not\supset C$ — lê-se: não contém

Quaisquer que sejam os conjuntos *A*, *B* e *C*, podemos destacar as seguintes propriedades:

- $\varnothing \subset A$

  O conjunto vazio está contido em qualquer conjunto. Essa relação pode ser justificada por redução ao absurdo, ou seja, supondo que $\varnothing \not\subset A$ e obtendo uma contradição na conclusão. Nesse caso, existiria um elemento *x* pertencente a $\varnothing$ e não pertencente a *A*. Contudo, isso é um absurdo, pois por definição o conjunto $\varnothing$ não possui elementos. Dessa forma, $\varnothing \subset A$.

- Propriedade reflexiva: $A \subset A$

  Todo conjunto está contido em si mesmo.

- Propriedade antissimétrica: se $A \subset B$ e $B \subset A$, então $A = B$

  A propriedade antissimétrica é muito utilizada quando se quer demonstrar que dois conjuntos *A* e *B* são iguais. Para isso, demonstra-se inicialmente que $A \subset B$ e, em seguida, que $B \subset A$.

- Propriedade transitiva: se $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \subset C$

  A propriedade transitiva também é conhecida por ser um tipo de **silogismo** e é constantemente empregada em deduções lógicas. O desenvolvimento do silogismo é atribuído a Aristóteles (384-322 a.C.), um dos grandes pensadores da Grécia Antiga. Atualmente, o silogismo é estudado em diversas áreas do conhecimento, como na Filosofia e no Direito. Nessas deduções, em geral, são propostas duas premissas e, por meio do silogismo, obtém-se uma conclusão.

Séc. II a.C. Busto de mármore. Palácio Altemps, Museu Nacional Romano, Roma (Itália). Foto: DeAgostini/Getty Images

busto de Aristóteles

Exemplos

- **Premissa I**:

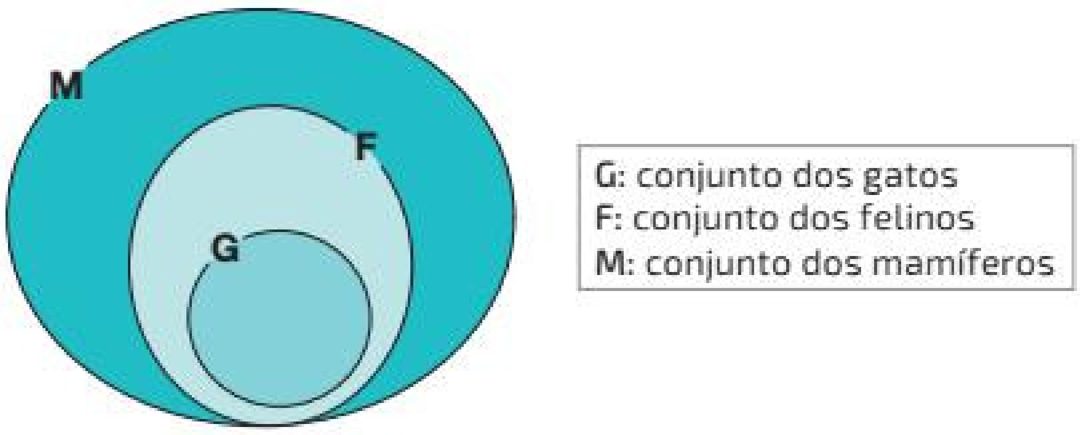
  Os gatos (G) são felinos (F): $G \subset F$

- **Premissa II**:

  Todo felino é um mamífero (M): $F \subset M$

Conclusão:

Por silogismo, os gatos são mamíferos: $G \subset M$

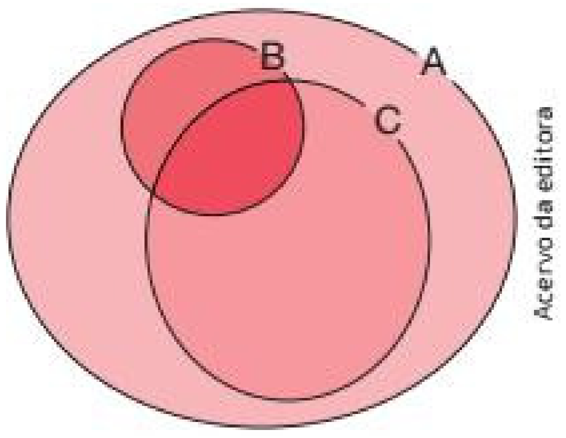


Ilustrações: Acervo da editora

Atividades

Anote as respostas no caderno.

10. De acordo com o diagrama, qual afirmativa é a correta? b



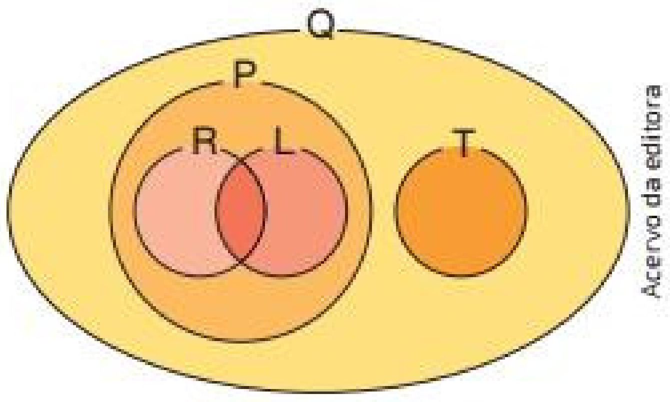
a) $A \subset B, B \subset C$ e $C \subset A$

b) $A \supset B, B \not\subset C$ e $C \subset A$

c) $A \supset B, B \subset C$ e $C \supset A$

d) $A \subset B, B \not\subset C$ e $C \supset A$

11. De acordo com o diagrama de Venn, classifique cada sentença em verdadeira (V) ou falsa (F).



Q: conjunto dos quadriláteros
P: conjunto dos paralelogramos
R: conjunto dos retângulos
L: conjunto dos losangos
T: conjunto dos trapézios

a) $P \subset Q$ V

b) $Q \subset \varnothing$ F

c) $L \not\subset R$ V

d) $P = T$ F

e) $R \supset P$ F

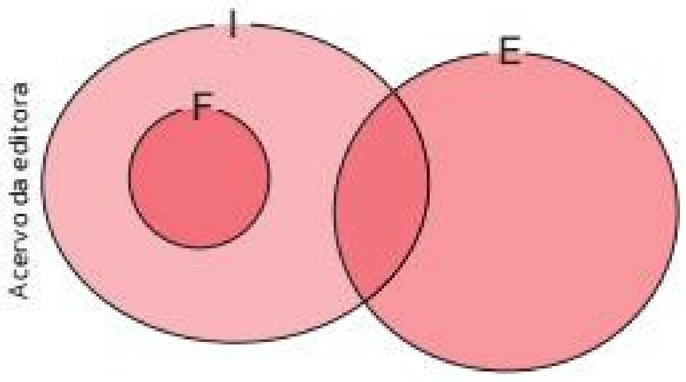
f) $Q \supset T$ V

g) $L \neq P$ V

h) $P \not\subset L$ V

Lembre aos alunos as características dos paralelogramos, retângulos, losangos e trapézios.

12. Observe o diagrama.



I: fala inglês
F: fala francês
E: fala espanhol

Qual das frases a seguir pode ser representada pelo diagrama? c

a) Em um congresso, todos os palestrantes que falam francês também falam inglês e espanhol.

b) Em uma escola, os alunos podem optar por aprender um único idioma: francês, inglês ou espanhol.

c) Em uma empresa, todo funcionário que fala francês fala inglês, e alguns que falam espanhol também falam inglês.

d) Em uma entrevista de emprego, todos os candidatos que falam espanhol sabem falar ou inglês ou francês.

13. Identifique qual das sentenças a seguir é verdadeira e indique a propriedade que justifica sua resposta. b; propriedade transitiva

a) $A \subset C$ e $B \subset C$, então $B \subset A$

b) $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \subset C$

c) $B \subset A$ e $C \subset A$, então $C \subset B$

d) $C \subset B$ e $A \subset B$, então $A \subset C$

14. Seja o conjunto $A = \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$. Identifique as afirmativas corretas. a; b; c; e

a) $1 \in A$

b) $9 \in A$

c) $2 \notin A$

d) $4 \subset A$

e) $\varnothing \subset A$

f) $\{1, 2\} \subset A$

15. Escreva na forma de diagrama de Venn os silogismos. Respostas no final do livro.

a) Corrida é um esporte.
Praticar esportes é saudável.
Logo, praticar corrida é saudável.

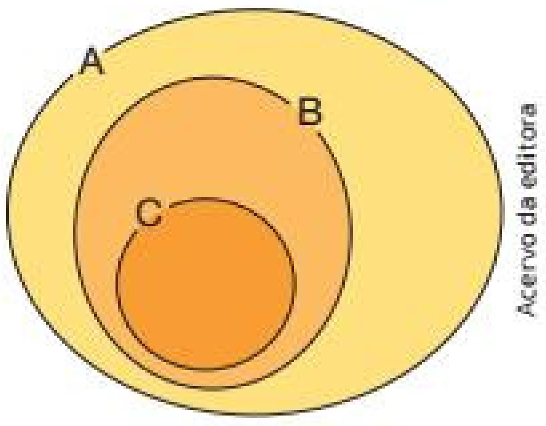
b) O beija-flor é uma ave.
Toda ave é um animal.
Então, o beija-flor é um animal.

Oriente os alunos a definirem inicialmente as letras correspondentes a cada conjunto para compor o diagrama.

c) Potiguar é quem nasce no estado do Rio Grande do Norte.
Marcos é potiguar.
Portanto, Marcos nasceu no estado do Rio Grande do Norte.

d) Todo poliedro é uma forma geométrica espacial.
A pirâmide é um poliedro.
Logo, a pirâmide é uma forma geométrica espacial.

16. Junte-se a um colega e elaborem um silogismo a partir do diagrama. Resposta pessoal.



17. Determine todos os subconjuntos de $X = \{a, b, c, d\}$ de exatamente:

a) 1 elemento $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}$

b) 2 elementos $\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}$

c) 3 elementos $\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}$

d) 4 elementos $\{a, b, c, d\}$

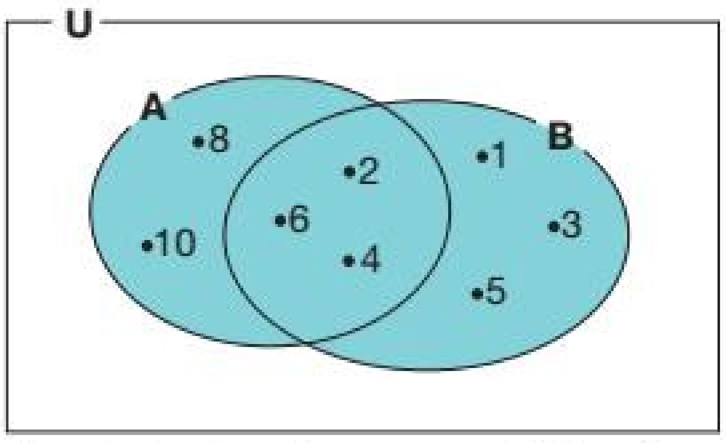
18. Considere o conjunto $A = \{x \mid x$ é um divisor positivo de $10\}$. Escreva todos os subconjuntos de A de apenas três elementos. $\{1, 2, 5\}, \{1, 2, 10\}, \{1, 5, 10\}, \{2, 5, 10\}$

Operações com conjuntos

União de conjuntos

Considere os conjuntos $A=\{2, 4, 6, 8, 10\}$ e $B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Podemos escrever um conjunto *C* formado por todos os elementos de *A* ou de *B*, ou seja, $C=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10\}$. Nomeamos o conjunto *C* de **união** dos conjuntos *A* e *B* e indicamos por:

$$\underset{\uparrow \text{ lê-se: união}}{A \cup B = C}$$



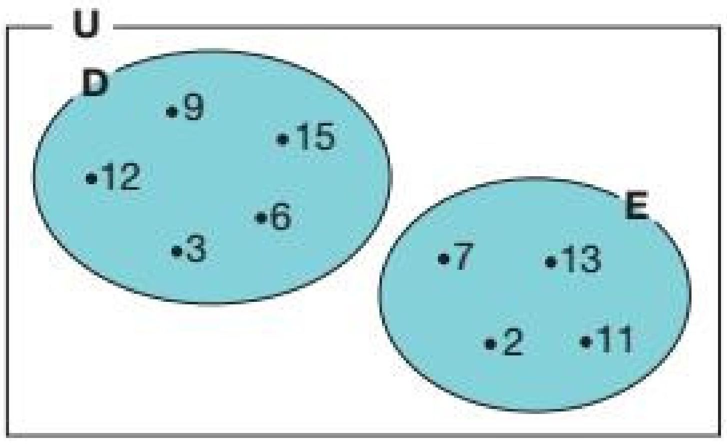
A parte destacada corresponde à união dos conjuntos *A* e *B*, ou seja, $A \cup B$.

Na definição de união de conjuntos, a palavra "ou" não tem o mesmo sentido de exclusão que costuma ser empregado na linguagem habitual (por exemplo: dentro "ou" fora, azul "ou" amarelo). Em união de conjuntos, a palavra "ou" significa que, para um objeto pertencer à união de *A* e *B*, ele tem de pertencer apenas a *A*, apenas a *B* ou pertencer a *A* e a *B* simultaneamente.

Dados os conjuntos *A* e *B*, chamamos de união de *A* e *B* $(A \cup B)$ o conjunto *C*, tal que $x \in C$ se e somente se $x \in A$ ou $x \in B$.

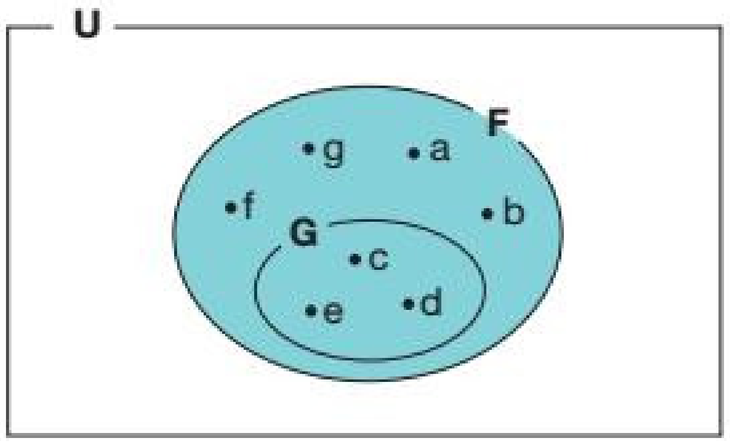
Exemplos

- $D=\{3, 6, 9, 12, 15\}$ e $E=\{2, 7, 11, 13\}$



$D \cup E=\{2, 3, 6, 7, 9, 11, 12, 13, 15\}$

- $F=\{a, b, c, d, e, f, g\}$ e $G=\{c, d, e\}$



$F \cup G=\{a, b, c, d, e, f, g\}$

Note que os conjuntos *D* e *E* não têm elementos comuns. Nesse caso, dizemos que esses conjuntos são **disjuntos**. Note também que o conjunto *G* é subconjunto de *F*. Nesse caso, $F \cup G=F$.

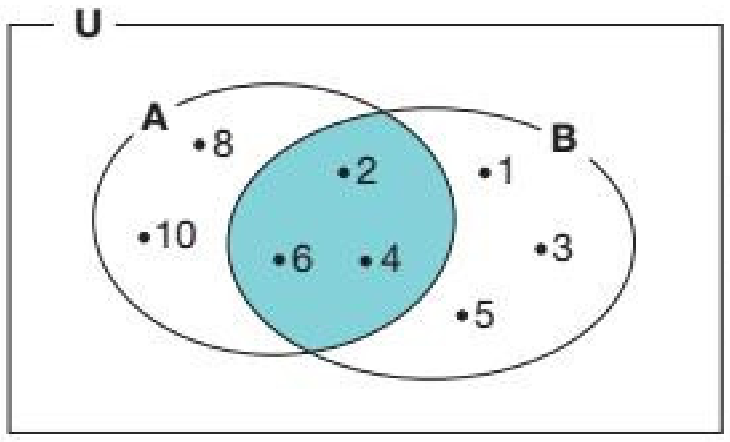
Na união de conjuntos, podemos destacar algumas propriedades, para quaisquer que sejam os conjuntos *A*, *B* e *C*.

- Elemento neutro: $A \cup \varnothing = A$
- Propriedade idempotente: $A \cup A = A$
- Propriedade comutativa: $A \cup B = B \cup A$
- Propriedade associativa: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

Interseção de conjuntos

Considere os conjuntos $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Podemos escrever um conjunto *C* formado por todos os elementos que pertencem a *A* e a *B* simultaneamente, ou seja, $C=\{2, 4, 6\}$. Nomeamos o conjunto *C* de **interseção** (ou intersecção) dos conjuntos *A* e *B* e indicamos por:

$$\underset{\uparrow \text{ lê-se: interseção}}{A \cap B = C}$$



Ilustrações: Acervo da editora

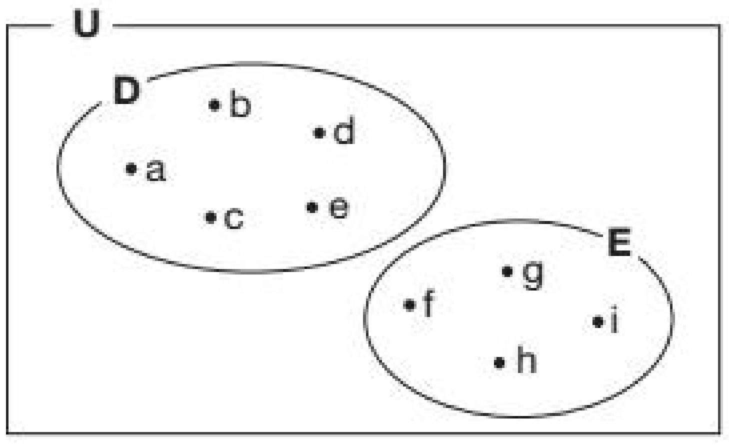
A parte destacada corresponde à interseção dos conjuntos *A* e *B*, ou seja, $A \cap B$.

Dados os conjuntos *A* e *B*, chamamos de interseção de *A* e *B* $(A \cap B)$ o conjunto *C*, tal que $x \in C$ se e somente se $x \in A$ e $x \in B$.

Note que os conjuntos *D* e *E* são disjuntos. Nesse caso, a interseção de *D* e *E* é o conjunto vazio. Note também que o conjunto *G* é subconjunto de *F*. Nesse caso, $F\cap G=G$.

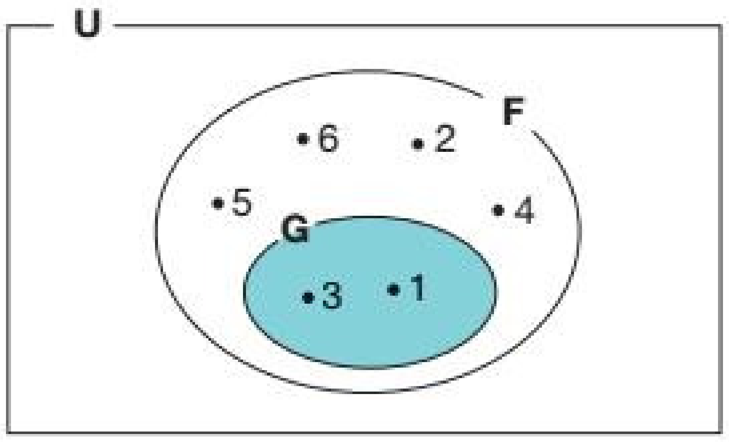
Exemplos

- $D=\{a, b, c, d, e\}$ e $E=\{f, g, h, i\}$



$D\cap E=\varnothing$

- $F=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $G=\{1, 3\}$



$F\cap G=\{1, 3\}$

Na interseção de conjuntos, podemos destacar algumas propriedades, para quaisquer que sejam os conjuntos *A*, *B* e *C*.

- Elemento neutro: $A\cap U=A$
- Propriedade idempotente: $A\cap A=A$
- Propriedade comutativa: $A\cap B=B\cap A$
- Propriedade associativa: $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

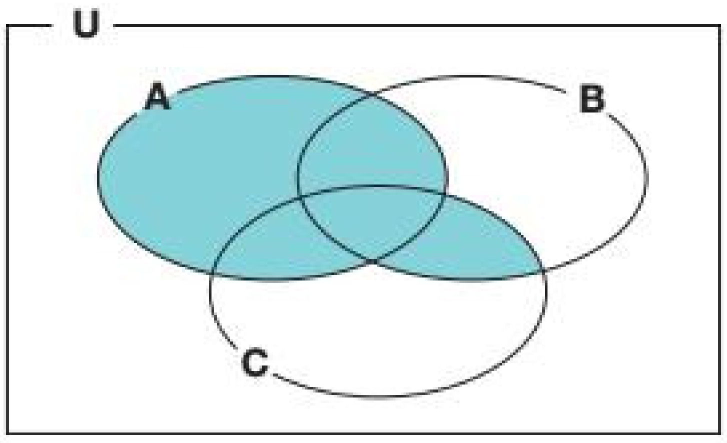
Propriedades da união e da interseção de conjuntos

Em relação à união e à interseção de conjuntos, podemos destacar algumas propriedades, para quaisquer que sejam os conjuntos *A*, *B* e *C*.

Ao final da apresentação dessas propriedades, proponha aos alunos que realizem uma verificação com base em três conjuntos dados, por exemplo: $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{3, 4, 5\}$ e $C=\{3, 6, 9\}$.

- Distributividade da união em relação à interseção

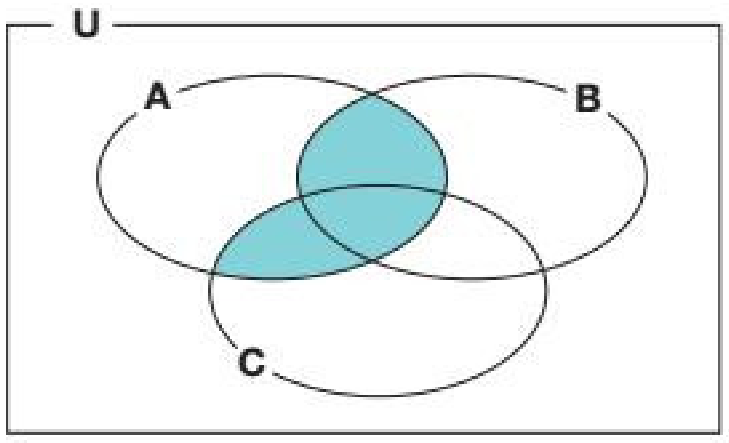
$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$



A parte destacada corresponde a $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

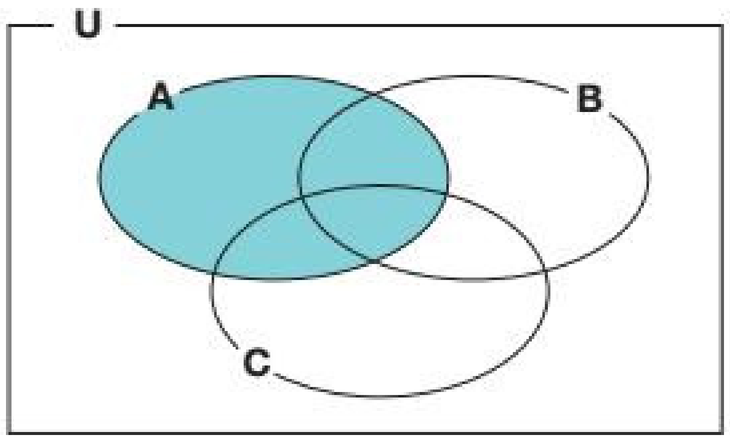
- Distributividade da interseção em relação à união

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$



A parte destacada corresponde a $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

- $A\cup(A\cap B)=A\cap(A\cup B)=A$

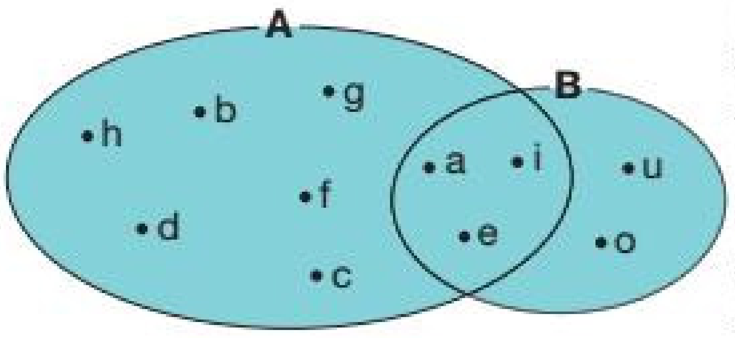


A parte destacada corresponde a $A\cup(A\cap B)=A\cap(A\cup B)=A$.

Quantidade de elementos da união de dois conjuntos

Dados os conjuntos $A=\{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ e $B=\{a, e, i, o, u\}$, temos que:

- $A\cup B=\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, o, u\}$
- $A\cap B=\{a, e, i\}$
- $n(A)=9$
- $n(B)=5$
- $n(A\cup B)=11$
- $n(A\cap B)=3$



De acordo com as informações acima, note que $\underbrace{n(A\cup B)}_{11}=\underbrace{n(A)}_{9}+\underbrace{n(B)}_{5}-\underbrace{n(A\cap B)}_{3}$.

Ilustrações: Acervo da editora

De maneira geral, dados os conjuntos *A* e *B* finitos, temos que $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

Quando dois conjuntos *A* e *B* são disjuntos, ou seja, $A \cap B = \varnothing$, temos que $n(A \cap B) = 0$. Nesse caso, $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$.

Atividades resolvidas

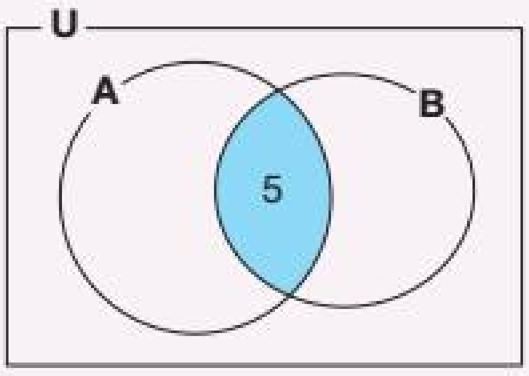
R1. Considere os conjuntos *A* e *B* com 17 e 12 elementos, respectivamente. Quantos elementos pertencem à união de *A* e *B*, sabendo que eles possuem 5 elementos em comum?

Resolução

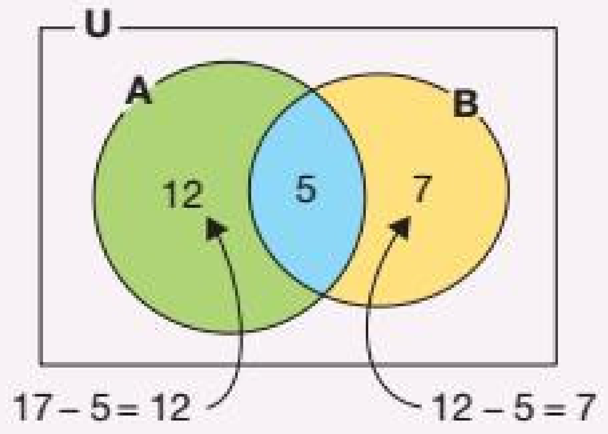
Do enunciado, temos que $n(A) = 17$ e $n(B) = 12$. Como *A* e *B* possuem 5 elementos em comum, segue que $n(A \cap B) = 5$. Assim, temos: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 17 + 12 - 5 = 24$. Portanto, 24 elementos pertencem à união de *A* e *B*.

Também podemos resolver a atividade utilizando o diagrama de Venn.

1º) Construímos o diagrama e indicamos a quantidade de elementos de $A \cap B$.



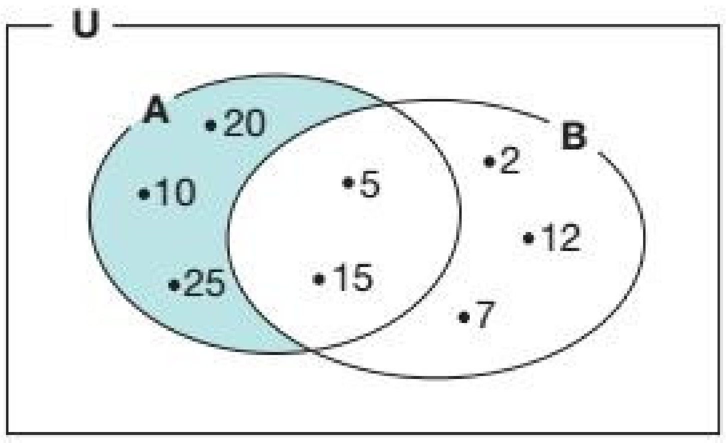
2º) Calculamos e indicamos a quantidade de elementos que pertencem apenas a *A* e apenas a *B*.



Assim, $n(A \cup B) = 12 + 5 + 7 = 24$.

Diferença de conjuntos

Considere os conjuntos $A = \{5, 10, 15, 20, 25\}$ e $B = \{2, 5, 7, 12, 15\}$. Podemos escrever um conjunto *C* formado por todos os elementos que pertencem a *A* e não pertencem a *B*, ou seja, $C = \{10, 20, 25\}$. Nomeamos o conjunto *C* de **diferença** entre os conjuntos *A* e *B* e indicamos por $A - B = C$.

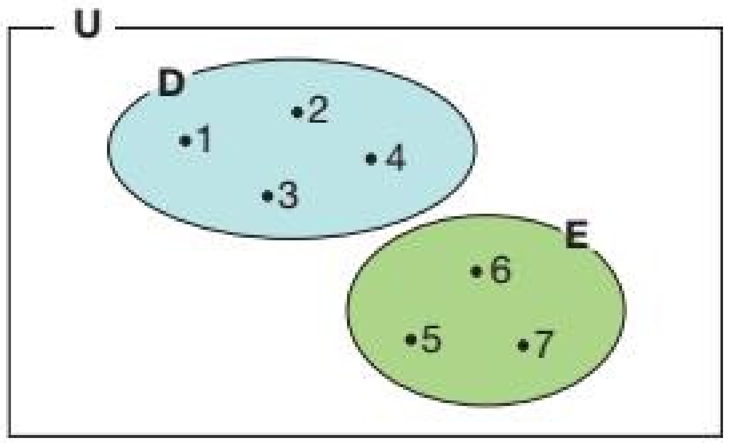


A parte destacada corresponde à diferença entre os conjuntos *A* e *B*, ou seja, $A - B$.

Dados os conjuntos *A* e *B*, chamamos de diferença entre *A* e *B* $(A - B)$ o conjunto *C*, tal que $x \in C$ se e somente se $x \in A$ e $x \notin B$.

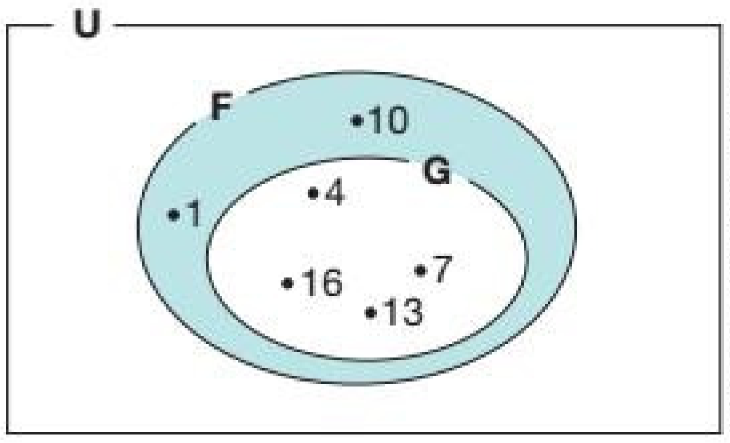
Exemplos

- $D = \{1, 2, 3, 4\}$ e $E = \{5, 6, 7\}$



$D - E = \{1, 2, 3, 4\}$ e $E - D = \{5, 6, 7\}$

- $F = \{1, 4, 7, 10, 13, 16\}$ e $G = \{4, 7, 13, 16\}$



Ilustrações: Acervo da editora

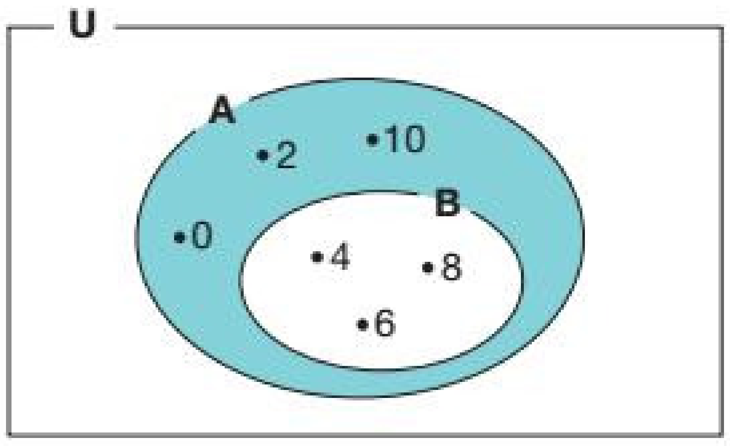
$F - G = \{1, 10\}$ e $G - F = \varnothing$

Note que os conjuntos *D* e *E* são disjuntos. Nesse caso, $D - E = D$ e $E - D = E$.

Note que o conjunto *G* é subconjunto de *F*, ou seja, todo elemento de *G* também é elemento de *F*. Dessa forma, $G - F = \varnothing$.

Complementar de um conjunto

Considere o conjunto $A=\{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ e seu subconjunto $B=\{4, 6, 8\}$. Denominamos **complementar** de *B* em relação a *A* o conjunto $C=A-B$, ou seja, *C* é formado por todos os elementos que pertencem a *A* e não pertencem a *B*. Nesse caso, $C=\{0, 2, 10\}$.

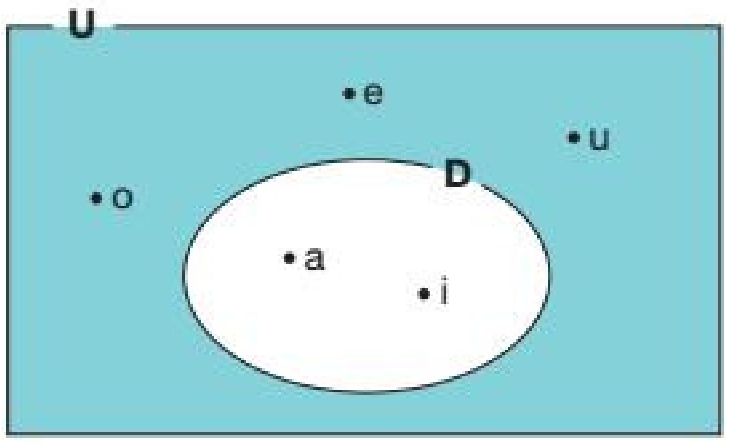


A parte destacada corresponde ao complementar de *B* em relação a *A*.

Dados os conjuntos *A* e *B*, com $B \subset A$, chamamos de complementar de *B* em relação a *A* o conjunto *C* tal que $C=A-B$, o qual é indicado por $\complement_A^B$.

Exemplo

- $U=\{a, e, i, o, u\}$ e $D=\{a, i\}$



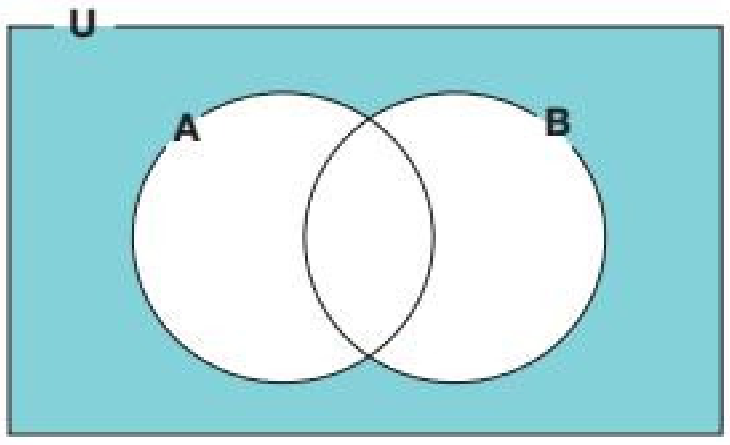
A parte destacada corresponde ao complementar de *D* em relação a *U*.

$\complement_U^D = U-D=\{e, o, u\}$

No exemplo ao lado, o complementar de *D* em relação ao conjunto universo *U* também pode ser indicado por D' ou $\overline{D}$ ou $D^{\complement}$.

Em relação ao complementar de um conjunto, podemos destacar as seguintes propriedades:

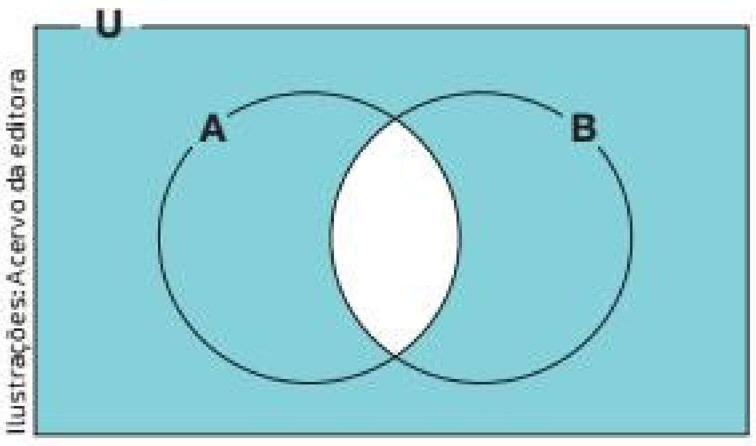
- $(A \cup B)^{\complement} = A^{\complement} \cap B^{\complement}$



A parte destacada corresponde a $(A \cup B)^{\complement} = A^{\complement} \cap B^{\complement}$.

As propriedades $(A \cup B)^{\complement} = A^{\complement} \cap B^{\complement}$ e $(A \cap B)^{\complement} = A^{\complement} \cup B^{\complement}$ também são conhecidas como **leis de De Morgan**, em homenagem ao matemático britânico Augustus De Morgan (1806-1871).

- $(A \cap B)^{\complement} = A^{\complement} \cup B^{\complement}$



Ilustrações: Acervo da editora

A parte destacada corresponde a $(A \cap B)^{\complement} = A^{\complement} \cup B^{\complement}$.

- $(A^{\complement})^{\complement} = A$
- $A \subset B \Rightarrow B^{\complement} \subset A^{\complement}$

Atividades

Anote as respostas no caderno.

20. a) Algumas possíveis respostas: espelho, café, famosa, abóbora, música, ideia.

19. Considerando os conjuntos $A=\{1, 2, 4\}$, $B=\{1, 3, 4, 5\}$ e $C=\{5, 6, 7, 8\}$, determine:

a) $A\cup B$ $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

b) $A\cup C$ $\{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8\}$

c) $B\cup C$ $\{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

d) $A\cap B$ $\{1, 4\}$

e) $A\cap C$ $\varnothing$ ou $\{\ \}$

f) $B\cap C$ $\{5\}$

g) $(A\cup B)\cap C$ $\{5\}$

h) $(A\cap C)\cup B$ $\{1, 3, 4, 5\}$

20. Sendo *A* o conjunto composto por todas as palavras da língua portuguesa que são acentuadas e *B* o conjunto composto por todas as palavras paroxítonas, escreva:

a) 6 elementos de $A\cup B$

b) 5 elementos de $A\cap B$
Algumas possíveis respostas: lápis, bônus, imóvel, tênis, táxi.

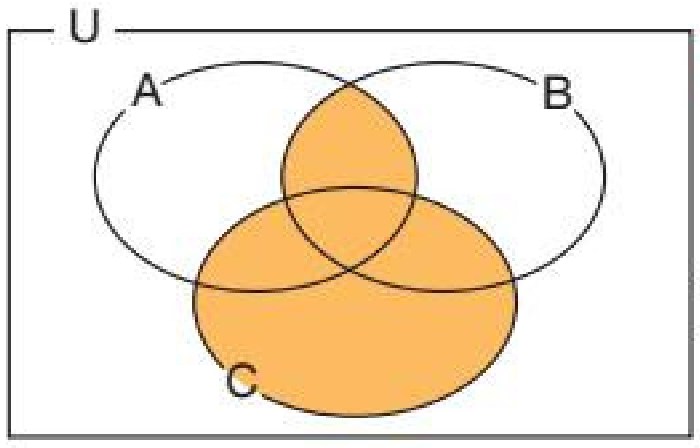
c) 3 elementos de $B-A$
Algumas possíveis respostas: enjoo, velho, escola.

d) 2 elementos de $A-B$
Algumas possíveis respostas: próximo, dominó.

Uma palavra é paroxítona quando a sílaba tônica é a penúltima.

Na resolução da atividade 20, traga à sala de aula alguns dicionários para que os alunos consultem, se necessário.

21. Utilize os símbolos $\cup$ e $\cap$ para representar a parte destacada no diagrama.



Acervo da editora

$C\cup(A\cap B)$

22. Se o conjunto *A* é formado pelos divisores positivos de 18, *B* possui 5 elementos e $n(A\cap B)=3$, quantos elementos possui o conjunto $A\cup B$?
8 elementos

23. Sejam os conjuntos $X=\{3, 6, 9, 14, 18, 20\}$,

$Y=\{x|x \text{ é múltiplo positivo de } 3\}$ e

$Z=\{x|x \text{ é divisor positivo de } 12\}$, determine:

a) $X-Y$ $\{14, 20\}$

b) $X-Z$ $\{9, 14, 18, 20\}$

c) $Z-Y$ $\{1, 2, 4\}$

d) $(X\cup Z)-Y$ $\{1, 2, 4, 14, 20\}$

e) $Z-(Y\cap X)$ $\{1, 2, 4, 12\}$

f) $(Z\cap Y)-(X\cap Z)$ $\{12\}$

24. Sabendo que $A\cap B=\{a, c\}$, $A\cup B=\{a, b, c, d, e, f\}$ e $A-B=\{b, d, e\}$, quantos elementos possui o conjunto *A*? E o conjunto *B*? 5 elementos; 3 elementos

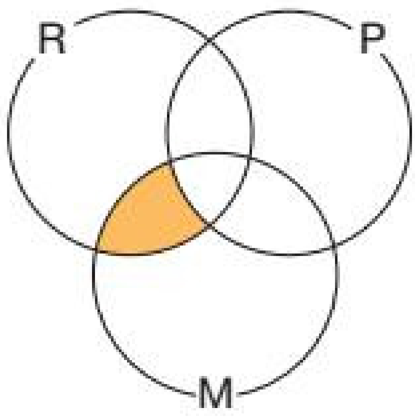
25. Sendo *U* o conjunto universo dos números inteiros, determine:

a) $A^\complement$, com $A=\{x|x \text{ é um número ímpar}\}$
$A^\complement=\{x|x \text{ é um número par}\}$

b) $B^\complement$, com $B=\{x|x \text{ é um número positivo}\}$
$B^\complement=\{x|x \text{ é um número negativo ou } x=0\}$

26. Devido à grande quantidade de informações disponíveis na internet, as chamadas ferramentas de busca oferecem opções para refinar uma pesquisa. Em uma dessas ferramentas, ao utilizarmos o sinal de menos "-", por exemplo, e pesquisarmos as palavras **água consumo -mundo**, obteremos como resultado *sites* contendo os termos **água e consumo**, sem conter o termo **mundo**.

A parte destacada do diagrama a seguir representa os *sites* indicados por essa ferramenta de busca após uma pesquisa.



Acervo da editora

R: *sites* com o termo **reciclagem**
P: *sites* com o termo **papel**
M: *sites* com o termo **metal**

Qual dos itens a seguir apresenta a maneira como os termos da pesquisa foram indicados na ferramenta de busca? b

a) reciclagem papel metal

b) reciclagem metal -papel

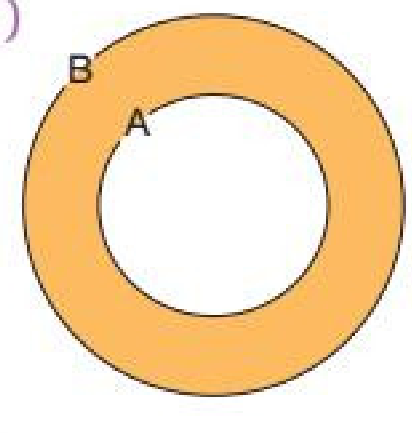
c) reciclagem papel -metal

d) reciclagem -papel -metal

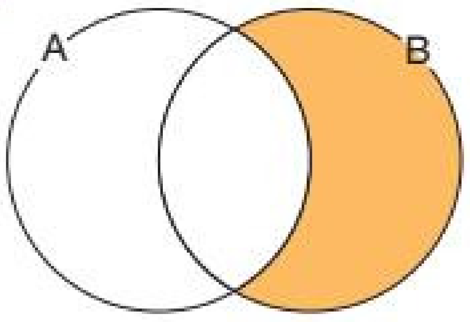
Realize um experimento em uma ferramenta de busca na internet a fim de simular uma pesquisa semelhante à sugerida nessa atividade.

27. Em qual item a parte destacada representa $\complement_B^A$. a

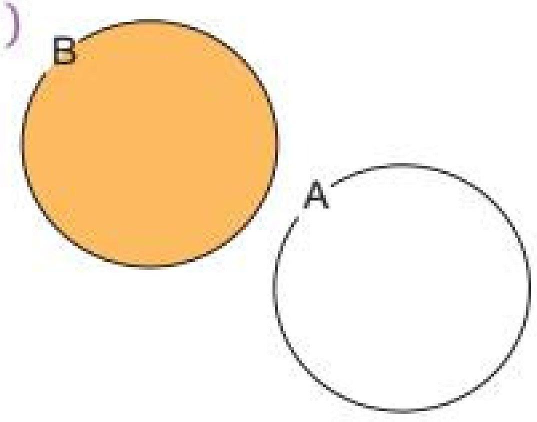
a)



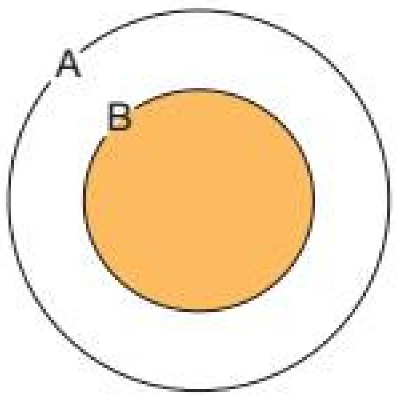
b)



c)



d)



Ilustrações: Acervo da editora

28. Dado o conjunto universo $U=\{a, b, c, d, e\}$, defina dois subconjuntos *A* e *B* e verifique a validade das leis De Morgan. Resposta pessoal.

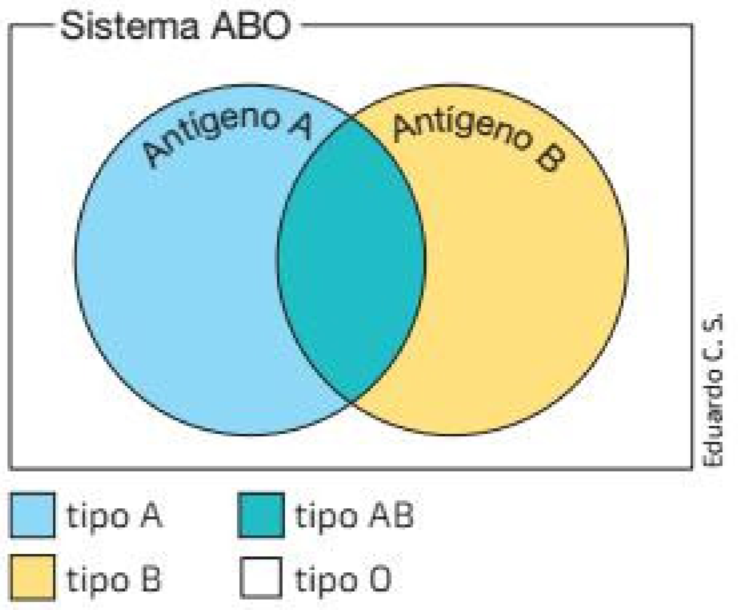
Contexto Sistema ABO

29. O sangue desempenha diversas funções importantes em nosso organismo, como o transporte de substâncias e oxigênio, regulação da temperatura corporal e proteção contra infecções. Assim, muitas pessoas, que sofrem de determinadas doenças ou que perderam muito sangue em acidentes ou cirurgias, precisam fazer sua reposição. Por isso, dependem da doação de voluntários.

Entre os sistemas de grupos sanguíneos que podem ser identificados nos seres humanos, destaca-se o sistema ABO, do qual fazem parte os grupos sanguíneos A, B, AB e O.

A classificação do tipo sanguíneo de um indivíduo em um desses grupos é realizada com base nos antígenos A e B que podem estar presentes em suas hemácias. O indivíduo que possui apenas antígeno A apresenta o tipo sanguíneo A, o que possui apenas antígeno B apresenta o tipo B, aquele que possui antígenos A e B apresenta o tipo AB e o indivíduo que não possui antígeno A nem antígeno B apresenta tipo sanguíneo O.

Esquematicamente, o sistema sanguíneo ABO pode ser representado por meio de um diagrama de Venn, como mostrado ao lado.



Eduardo C. S.

Antígenos: substâncias ou microrganismos que ao penetrar no corpo de um indivíduo desencadeiam a produção de anticorpos.

Hemácias: células sanguíneas cuja função principal é transportar oxigênio dos pulmões aos tecidos.

Fontes de pesquisa:
MARCONDES, Lucilia. **O sangue**. São Paulo: Ática, 1996.
TORTORA, Gerard J. **Corpo humano**: fundamentos de anatomia e fisiologia. Tradução Cláudia L. Zimmer et al. 4. ed. Porto Alegre: Artmed, 2000. p. 334-335.
<www.prosangue.sp.gov.br/artigos/requisitos_basicos_para_doacao>. Acesso em: 21 jul. 2015.
<www.hemominas.mg.gov.br/doacao/aprenda/fracionamento>. Acesso em: 21 jul. 2015.

Para ser doador é preciso:

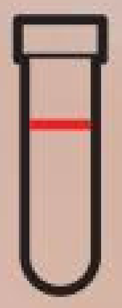
- Apresentar boas condições de saúde.
- Ter entre 16 e 67 anos.
- Pesar no mínimo 50 kg.
- Não estar tomando medicamento e nem ter feito cirurgia recentemente.
- Estar descansado e alimentado; dentre outras.

O caminho do sangue doado

Observe no esquema algumas etapas, desde a doação até a transfusão de sangue.

⟨1⟩ Doador

O doador realiza um cadastro no balcão de atendimento.
O atendente verifica se ele possui as condições necessárias para realizar a doação.



⟨2⟩ Triagem e coleta

A triagem consiste basicamente na análise de uma pequena amostra de sangue, na verificação dos sinais vitais e da massa e em uma entrevista confidencial. São coletados cerca de 450 mL de sangue e amostras para testes.

⟨3⟩ Fracionamento

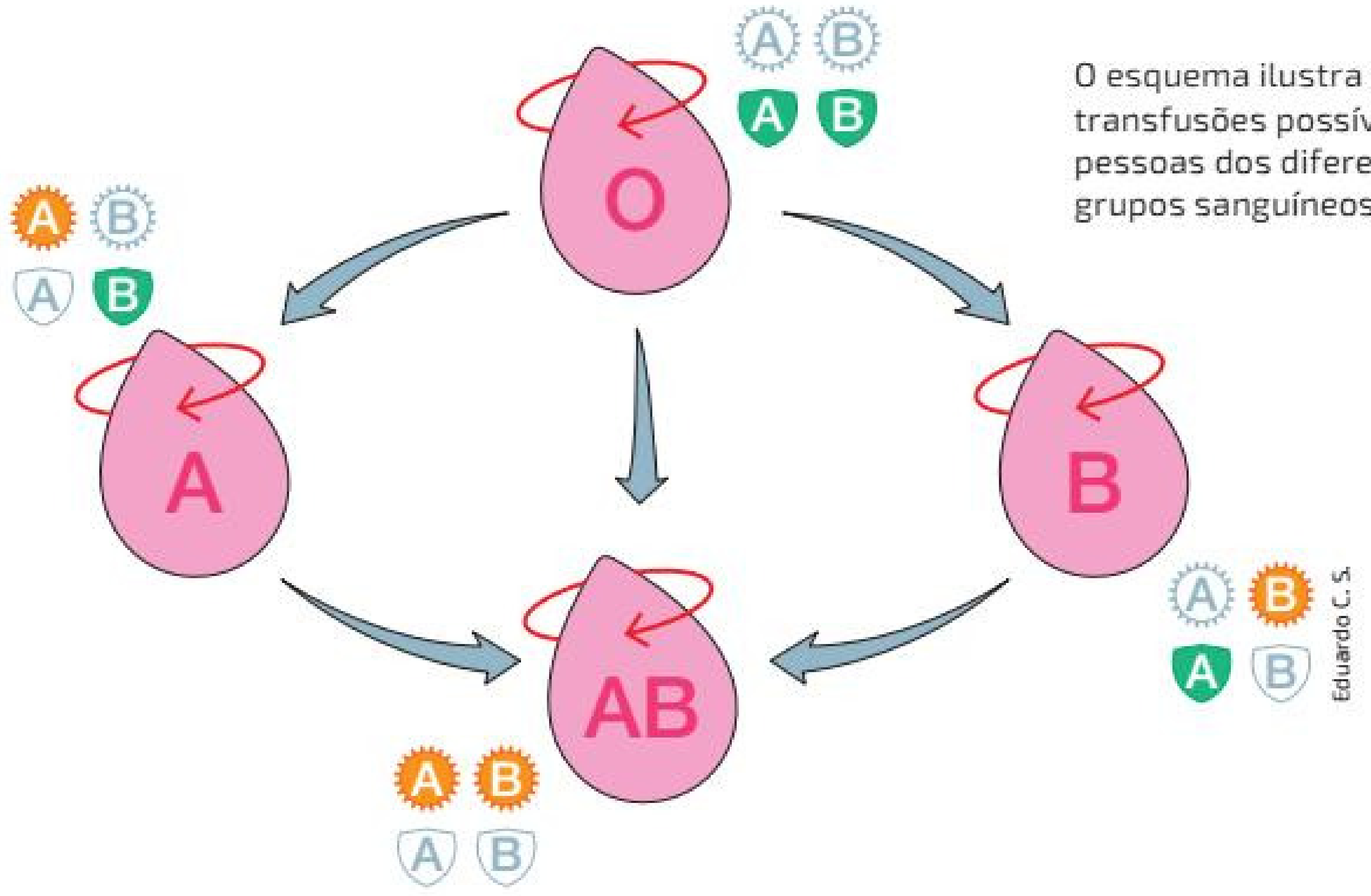
O sangue coletado é separado nos seguintes componentes: hemácias, plasma, plaquetas e crioprecipitado. Simultaneamente, realizam-se exames nas amostras de sangue, dentre os quais é possível determinar a classificação do tipo sanguíneo e identificar doenças infecciosas.

Doar sangue é um ato de solidariedade e cidadania, uma vez que o sangue de um único doador pode ajudar muitas pessoas.

Além de determinar o tipo sanguíneo de um indivíduo, a presença de antígenos em suas hemácias estimula a produção de anticorpos no plasma sanguíneo.

Os anticorpos são produzidos contra os antígenos que o sangue não possui. Portanto, em uma transfusão sanguínea, o indivíduo não pode receber sangue com antígenos diferentes dos que estão presentes em suas hemácias. Observe o esquema abaixo.

Anticorpos: proteínas sanguíneas cuja função é reconhecer os antígenos e ligar-se a eles de modo a auxiliar o sistema imunológico do organismo a destruí-los.



O esquema ilustra as transfusões possíveis entre pessoas dos diferentes grupos sanguíneos.

c) Porque aqueles que possuem o tipo sanguíneo AB não têm presença de anticorpos A ou B, o que lhes permite receber qualquer tipo de sangue; já os que possuem o tipo O não têm a presença de antígenos A ou B, o que lhes permite doar para qualquer um.

Ilustrações: Eduardo Carriça

4 Armazenamento

Os componentes são armazenados de diferentes maneiras.

- Hemácias: em geladeira com temperatura entre 2 °C e 5 °C, por um período de até 35 dias.
- Plasma e crioprecipitado: em *freezer* com temperatura de 18 °C negativos ou menos, por até um ano;
- Plaquetas: em temperatura ambiente controlada, sob agitação constante, por até 5 dias.

5 Transfusão

Por ser fracionado, o sangue da doação de uma pessoa poderá ajudar vários pacientes. Por exemplo: o concentrado de hemácias pode ser utilizado em casos de anemias agudas causadas por hemorragias em acidentes ou cirurgias; e o de plaquetas, em casos de diminuição do número de plaquetas, como ocorrem em leucemias.

Fotomontagem de José Vitor E. C. formada pelas imagens Lisa S./Shutterstock.com e weedezign/Shutterstock.com

De acordo com as informações apresentadas, resolva as questões.

a) Em sua opinião, por que é importante a doação de sangue? Resposta pessoal.

b) O sistema ABO é composto por quais grupos sanguíneos? A, B, AB e O

c) Explique por qual motivo os indivíduos do grupo sanguíneo AB são considerados **receptores universais** e os indivíduos do grupo sanguíneo O, **doadores universais**?

d) Uma pessoa com tipo sanguíneo B pode receber transfusão de que tipo sanguíneo? tipo B ou tipo O

e) Construa um diagrama de Venn semelhante ao apresentado no enunciado, destacando as partes que representam os tipos sanguíneos de indivíduos cujas hemácias: Respostas no final do livro.

I) possuem antígeno B.

II) possuem apenas antígeno A.

III) possuem antígenos A e B.

IV) não possuem antígenos A nem B.

f) Converse com os seus pais ou responsáveis sobre o seu tipo sanguíneo em relação ao sistema ABO e escreva de quais tipos você pode receber sangue e para quais pode doar sangue em uma transfusão. Resposta pessoal.

Problemas envolvendo conjuntos

Utilizando as operações com conjuntos, podemos resolver diversos problemas. Observe a seguir a resolução de alguns deles.

Atividades resolvidas

R2. Conforme estudamos na atividade **29**, os tipos sanguíneos no sistema ABO são definidos de acordo com a presença dos antígenos A e B nas hemácias. Os indivíduos que possuem apenas o antígeno A têm sangue do tipo A; os que possuem apenas o antígeno B, têm do tipo B; os que possuem ambos os antígenos, têm do tipo AB; e os que não possuem antígeno algum, têm do tipo O.

Em exames realizados em 100 amostras de sangue, identificou-se o antígeno A em 72 amostras, o antígeno B em 55 e ambos os antígenos em 34. Quantas amostras são de sangue do tipo O?

Resolução

Seja *U* o conjunto de todas as amostras, *A* o conjunto das amostras com antígeno A e o conjunto *B* das amostras com antígeno B. Logo: $n(A) = 72$, $n(B) = 55$ e $n(A \cap B) = 34$. Assim, o número de amostras com antígenos A ou B é dado por:

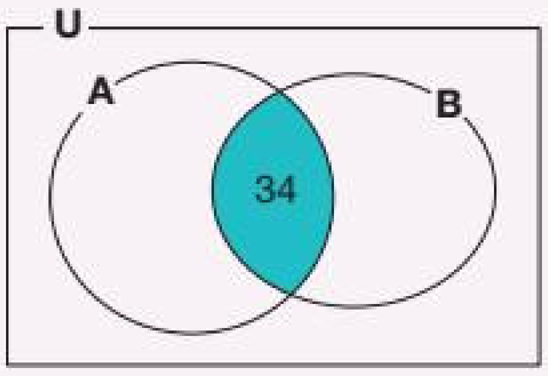
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 72 + 55 - 34 = 93$$

Como as amostras do tipo sanguíneo O são aquelas que não possuem antígenos A nem B, temos que o número de amostras de sangue do tipo O é dado por:

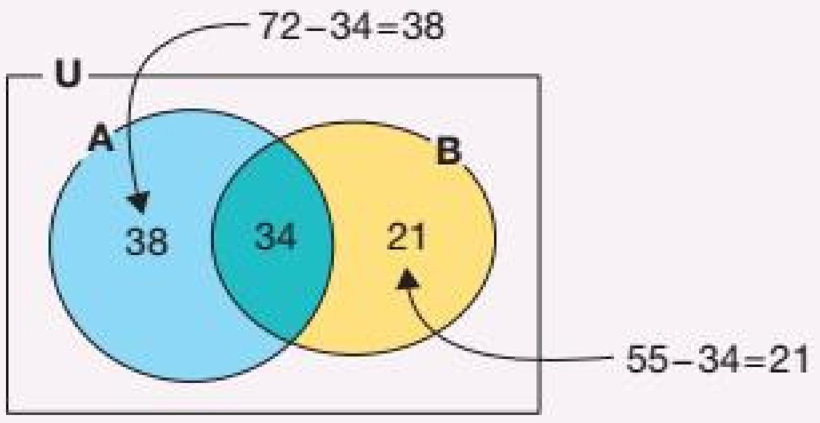
$$(A \cup B)^{C} = 100 - 93 = 7 \rightarrow \boxed{\text{7 amostras}}$$

Outra maneira de resolver essa atividade é construir um diagrama de Venn representando os conjuntos *U*, *A* e *B* e preenchê-lo em etapas, conforme segue.

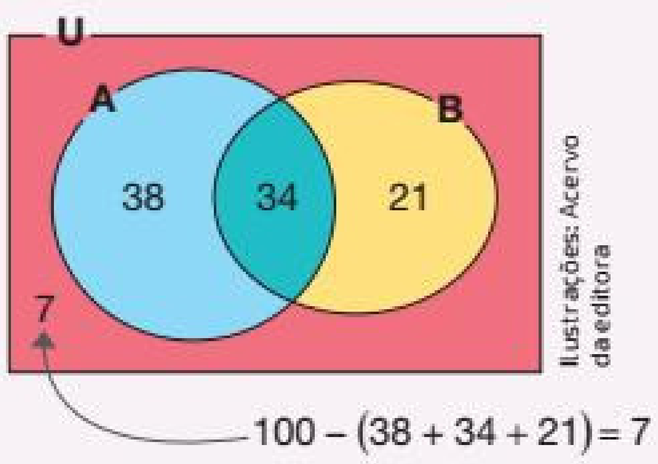
1º) Construímos o diagrama e indicamos a quantidade de amostras que possuem ambos antígenos.



2º) Calculamos e indicamos as quantidades de amostras que possuem apenas um dos antígenos.



3º) Por fim, calculamos e indicamos a quantidade de amostras que não possuem antígeno algum.



Ilustrações: Acervo da editora

Note que, nos diagramas de Venn apresentados nesta atividade resolvida, os valores indicados correspondem a quantidades de elementos dos conjuntos e não aos elementos dos conjuntos, como tratado até o momento. Assim, o número 34, que aparece nos diagramas, por exemplo, indica a quantidade de elementos de A∩B, e não que o número 34 pertence a esse conjunto.

Portanto, 7 amostras correspondem ao tipo sanguíneo O.

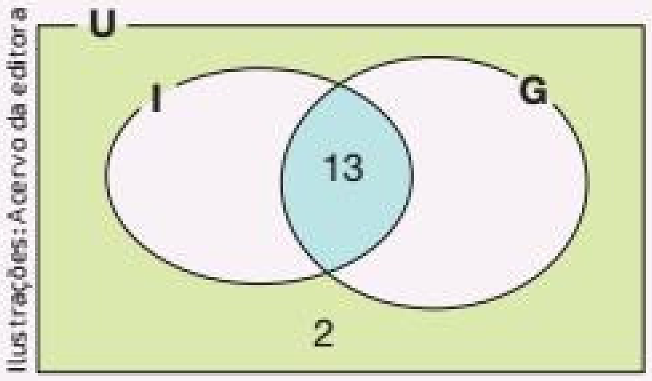
Explique aos alunos que, nessa coleção, nos diagramas de Venn, quando um valor for indicado com marcador (bolinha), esse corresponde a um elemento do conjunto. Contudo, quando o valor for indicado sem o marcador, esse indica a quantidade de elementos do conjunto.

R3. Um professor de literatura sugeriu aos alunos de uma turma a leitura dos livros **Iracema** e **O Guarani**, de José de Alencar (1829-1877). O professor verificou que 24 alunos leram **Iracema**, 18 leram **O Guarani** e 13 leram os dois livros. Sabendo que 2 alunos não leram nenhum dos livros, quantos alunos há na turma?

Resolução

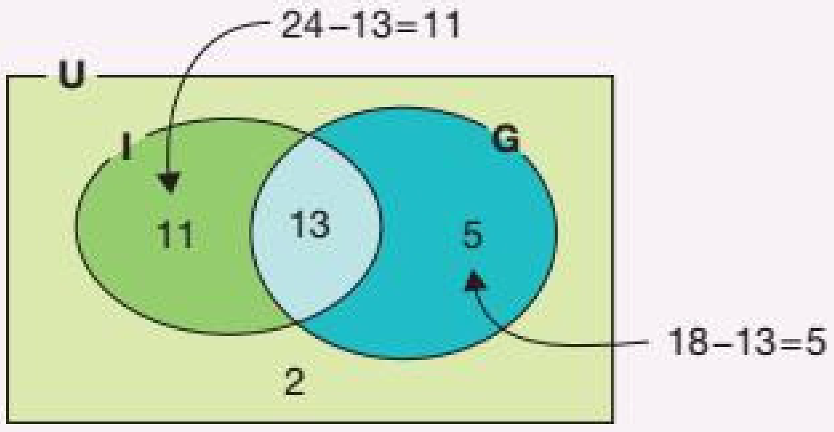
Inicialmente, consideramos os conjuntos *I* dos alunos que leram **Iracema** e *G* dos alunos que leram **O Guarani**.

1º) Representamos em um diagrama o número de alunos que leram os dois livros e os que não leram nenhum livro.



Ilustrações: Acervo da editora

2º) Calculamos e indicamos as quantidades de alunos que leram apenas um dos livros.



Portanto, há 31 alunos na turma, pois $11+13+5+2=31$.

R4. (Enem-MEC) Um fabricante de cosméticos decide produzir três diferentes catálogos de seus produtos, visando a públicos distintos. Como alguns produtos estarão presentes em mais de um catálogo e ocupam uma página inteira, ele resolve fazer uma contagem para diminuir os gastos com originais de impressão. Os catálogos C1, C2 e C3 terão, respectivamente, 50, 45 e 40 páginas. Comparando os projetos de cada catálogo, ele verifica que C1 e C2 terão 10 páginas em comum; C1 e C3 terão 6 páginas em comum; C2 e C3 terão 5 páginas em comum, das quais 4 também estarão em C1.

Efetuando os cálculos correspondentes, o fabricante conclui que, para a montagem dos três catálogos, necessitará de um total de originais de impressão igual a:

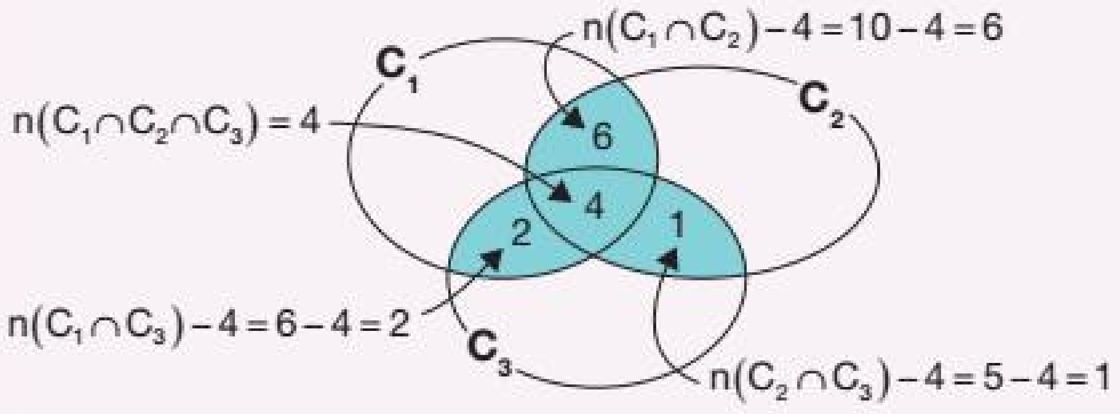
a) 135 b) 126 c) 118 d) 114 e) 110

Resolução

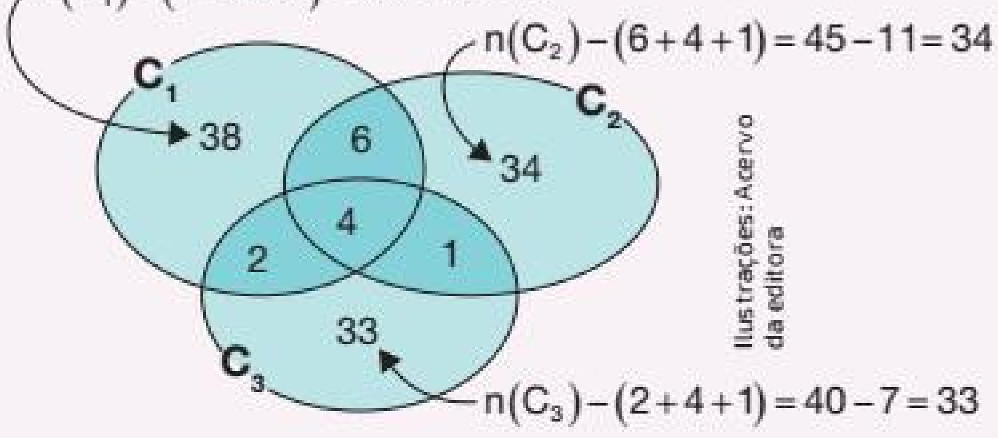
Inicialmente, denominamos C_1, C_2 e C_3 os conjuntos das páginas dos catálogos C1, C2 e C3, respectivamente, ou seja:

- $n(C_1)=50$
- $n(C_2)=45$
- $n(C_3)=40$
- $n(C_1 \cap C_2)=10$
- $n(C_1 \cap C_3)=6$
- $n(C_2 \cap C_3)=5$
- $n(C_1 \cap C_2 \cap C_3)=4$

1º) Indicamos no diagrama o número de páginas comuns aos três catálogos e o de páginas comuns a apenas dois catálogos.



2º) Por fim, indicamos no diagrama o número de páginas exclusivas de cada catálogo.



Ilustrações: Acervo da editora

Calculamos o total de páginas necessárias para a montagem dos três catálogos:

$$n(C_1 \cup C_2 \cup C_3)=38+6+34+2+4+1+33=118$$

Portanto, o fabricante necessitará de um total de 118 originais de impressão, ou seja, a alternativa correta é **c**.

30. De acordo com as leis brasileiras de trânsito, existem diferentes tipos de veículos, e para cada um deles há uma habilitação específica. Por exemplo, uma pessoa que possua habilitação na categoria A pode conduzir um veículo motorizado com até 3 rodas, como motocicletas e triciclos. Já a habilitação na categoria B não permite a condução de veículos descritos para a categoria A, mas permite a condução de veículos motorizados que não excedam 3 500 kg e cuja lotação não ultrapasse 8 passageiros, como os carros de passeio.

Fonte de pesquisa: <www.denatran.gov.br/faq.htm#16. Quais são as categorias de habilitação>. Acesso em: 5 nov. 2015.

Certa empresa possui 26 funcionários, todos com algum tipo de habilitação: A, B ou AB (possui as duas habilitações A e B). Veja a quantidade de funcionários de acordo com o tipo de habilitação.

Categoria	Número de funcionários
A	19
B	12

Quantos funcionários possuem habilitação na categoria:

a) A? 19 funcionários
b) B? 12 funcionários
c) A e B? 5 funcionários
d) somente A? 14 funcionários
e) somente B? 7 funcionários

31. Um levantamento realizado com 36 alunos de uma turma constatou que 25 alunos acessam a internet nos fins de semana, 12 acessam de segunda-feira a sexta-feira e 5 alunos não acessam a internet. Quantos alunos acessam a internet durante toda a semana? 6 alunos

32. Certa clínica realizou uma pesquisa acerca do histórico de cirurgias plásticas de seus pacientes. Nessa pesquisa, constatou-se que 20% haviam feito apenas cirurgia plástica reparadora a fim de corrigir algum problema congênito, 54 pacientes fizeram somente cirurgia plástica para fins estéticos, 9% fizeram cirurgia plástica reparadora e estética e 44% nunca fizeram qualquer tipo de cirurgia plástica.

a) Qual o número de pacientes entrevistados? 200 pacientes
b) Quantos pacientes nunca fizeram qualquer tipo de cirurgia plástica? 88 pacientes

| **Congênito:** que se manifesta desde ou antes do nascimento.

33. (UEL-PR) Um instituto de pesquisas entrevistou 1 000 indivíduos, perguntando sobre sua rejeição aos partidos A e B. Verificou-se que 600 pessoas rejeitavam o partido A; que 500 pessoas rejeitavam o partido B e que 200 pessoas não rejeitavam nenhum partido. O número de indivíduos que rejeitavam os dois partidos é: d

a) 120 pessoas
b) 200 pessoas
c) 250 pessoas
d) 300 pessoas
e) 800 pessoas

34. (Udesc-SC) No final do primeiro semestre deste ano, 40 acadêmicos participaram de uma pesquisa que objetivou analisar a frequência com que estes utilizaram o atendimento extraclasse do professor e/ou do monitor de uma determinada disciplina. Obteve-se o seguinte resultado: 20% dos acadêmicos procuraram atendimento tanto do professor quanto do monitor; 30% dos acadêmicos procuraram somente o atendimento do monitor; 15% dos acadêmicos não opinaram e 4 acadêmicos não procuraram atendimento do professor nem do monitor. Então o número de acadêmicos que procurou o atendimento somente do professor é igual a: d

a) 24 b) 18 c) 8 d) 10 e) 20

35. Uma escola oferta quatro oficinas para os 175 alunos do 1º ano do Ensino Médio: Informática e Fotografia no primeiro semestre e Artesanato e Culinária no segundo. Ao final do ano, cada aluno deverá ter realizado exatamente duas dessas oficinas. No primeiro semestre, inscreveram-se 80 alunos para Informática e 67 para Fotografia.

Sabendo que no primeiro semestre 35 alunos optaram pelas duas oficinas, quantos alunos deverão, no segundo semestre, participar de:

a) duas oficinas? 63 alunos
b) apenas uma oficina? 77 alunos
c) nenhuma oficina? 35 alunos

36. De acordo com o IBGE, a projeção da população brasileira para 2030 é de aproximadamente 110 milhões de homens e 113 milhões de mulheres.

Fonte de pesquisa: <www.ibge.gov.br/home/estatistica/populacao/projecao_da_populacao/2013/default_tab.shtm>. Acesso em: 10 jul. 2015.

Considerando essa projeção e sendo *H* o conjunto formado pelos homens e *M*, o formado pelas mulheres, responda:

a) Quantos são os elementos de $H \cap M$? Como podemos classificar a relação entre esses conjuntos?
nenhum elemento; Resposta esperada: disjuntos.
b) Quantos são os elementos de $H \cup M$?
223 milhões de elementos

37. Uma pesquisa, sobre doces preferidos, realizada com 100 clientes de uma doceria obteve o resultado mostrado no quadro a seguir.

Preferência	Número de clientes
Somente bolo	10
Somente torta	30
Somente pudim	15
Bolo e torta	8
Bolo e pudim	5
Torta e pudim	6
Bolo, torta e pudim	4

Quantos clientes não preferem nenhum dos três doces? 34 clientes

38. A quantidade de alunos matriculados em uma escola de idiomas está indicada a seguir.

	Inglês	Francês	Espanhol	Inglês e Francês	Inglês e Espanhol
Quantidade de alunos	72	28	57	18	36

Sabe-se que nenhum desses alunos estuda francês e espanhol ou os três idiomas simultaneamente.

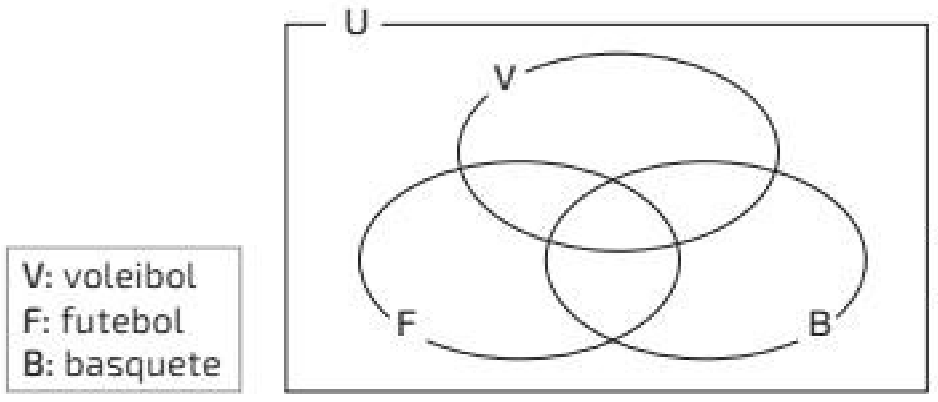
a) Qual o número de alunos matriculados para apenas um idioma? 49 alunos

b) Qual o total de alunos matriculados? 103 alunos

39. **Desafio**

Em uma cidade com 50 000 habitantes, a população tem acesso a 3 jornais, sendo que 40% da população lê o jornal *A*, 28% o jornal *B*, 58% o jornal *C*, 20% lê somente o jornal *A*, 12% lê somente o jornal *B*, 35% lê somente o jornal *C* e 11% lê somente os jornais *A* e *C*. Considerando que *A*, *B* e *C* possuem leitores em comum, e que sempre existem leitores em comum a dois jornais, determine o número de habitantes que leem mais de um jornal. 13 500 habitantes

40. A partir do diagrama a seguir, elabore uma atividade envolvendo operações de conjuntos. Em seguida, troque essa atividade com um colega e resolva. Ao final, verifiquem se as resoluções estão corretas. Resposta pessoal.

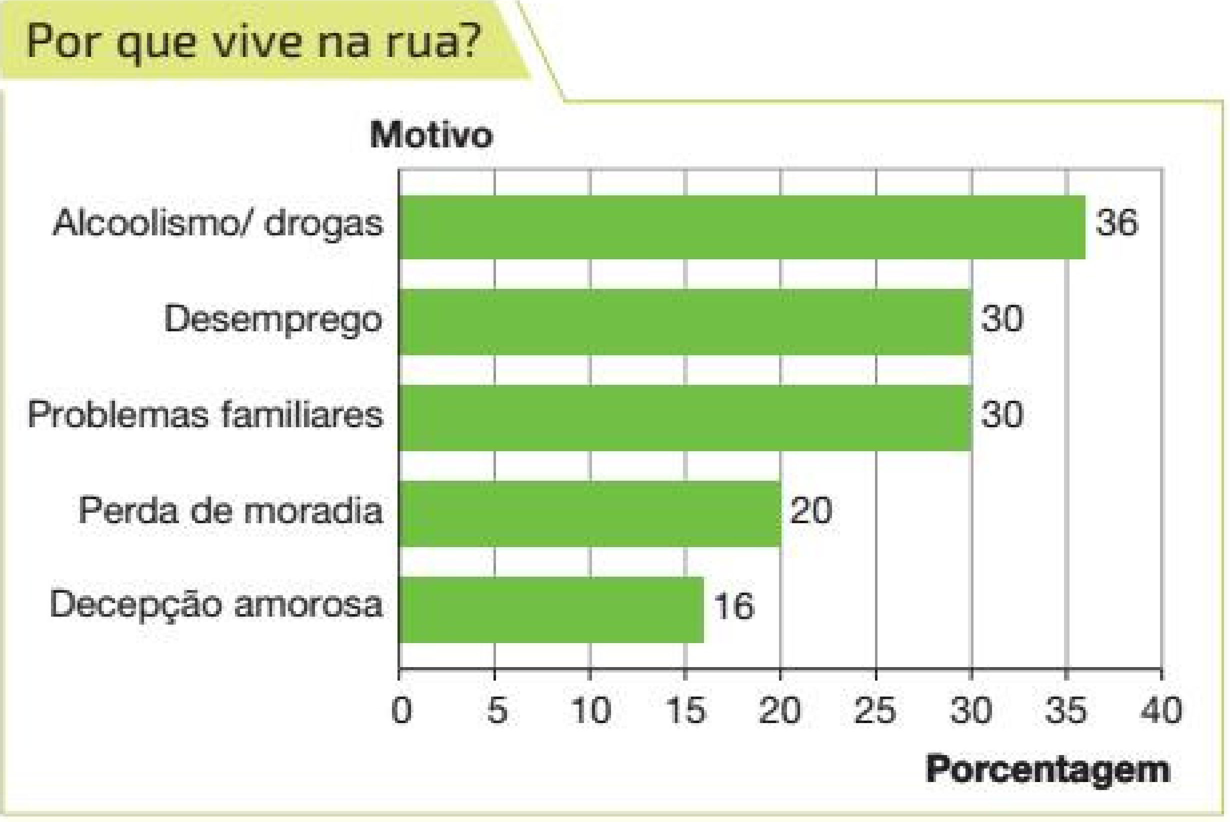


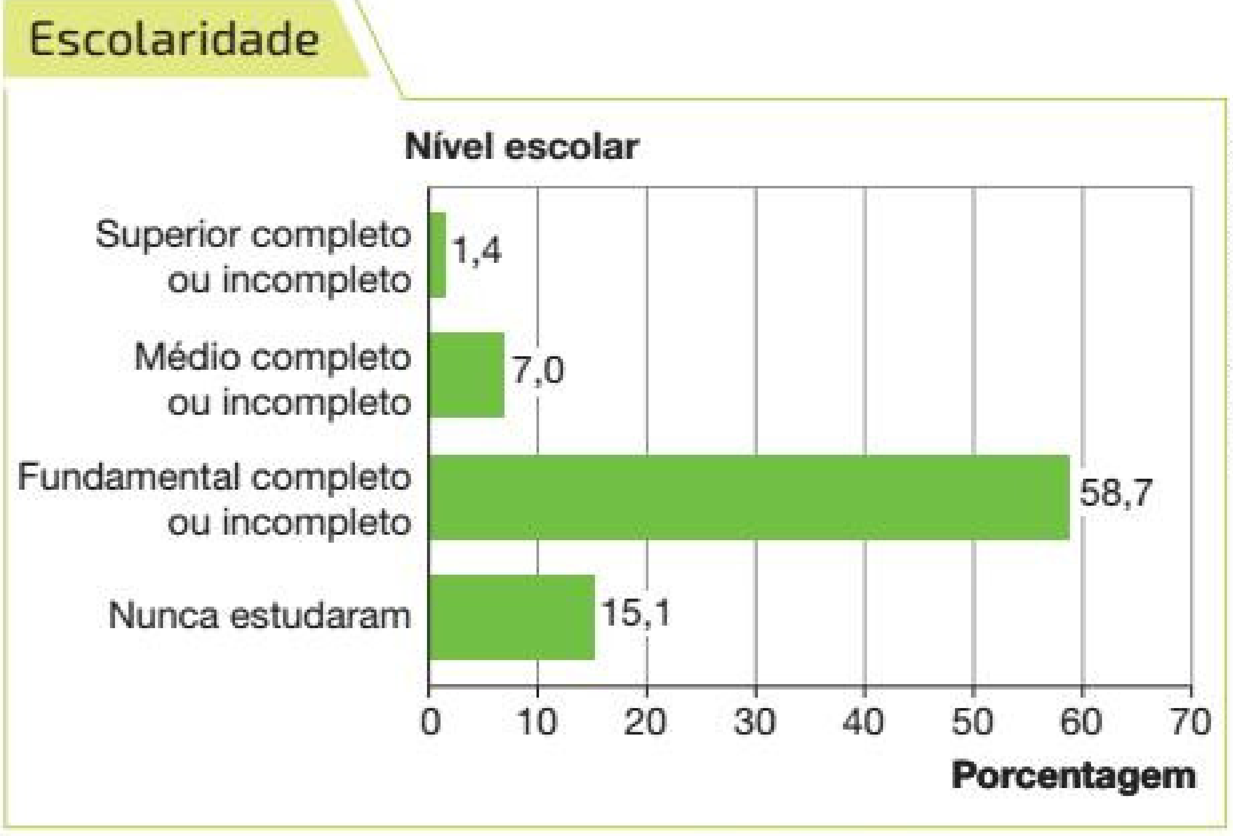
Acervo da editora

41. (Enem-MEC)

A vida na rua como ela é

O Ministério do Desenvolvimento Social e Combate à Fome (MDS) realizou, em parceria com a ONU, uma pesquisa nacional sobre a população que vive na rua, tendo sido ouvidas 31 922 pessoas em 71 cidades brasileiras. Nesse levantamento, constatou-se que a maioria dessa população sabe ler e escrever (74%), que apenas 15,1% vivem de esmolas e que, entre os moradores de rua que ingressaram no ensino superior, 0,7% se diplomou. Outros dados da pesquisa são apresentados abaixo.


Por que vive na rua?


Escolaridade

Ilustrações: Acervo da editora

IstoÉ, 7/2008, p. 21 (com adaptações).

No universo pesquisado, considere que *P* seja o conjunto das pessoas que vivem na rua por motivos de alcoolismo/drogas e *Q* seja o conjunto daquelas cujo motivo para viverem na rua é a decepção amorosa. Escolhendo-se ao acaso uma pessoa no grupo pesquisado e supondo-se que seja igual a 40% a probabilidade de que essa pessoa faça parte do conjunto *P* ou do conjunto *Q*, então a probabilidade de que ela faça parte do conjunto interseção de *P* e *Q* é igual a: a

a) 12%

b) 16%

c) 20%

d) 36%

e) 52%

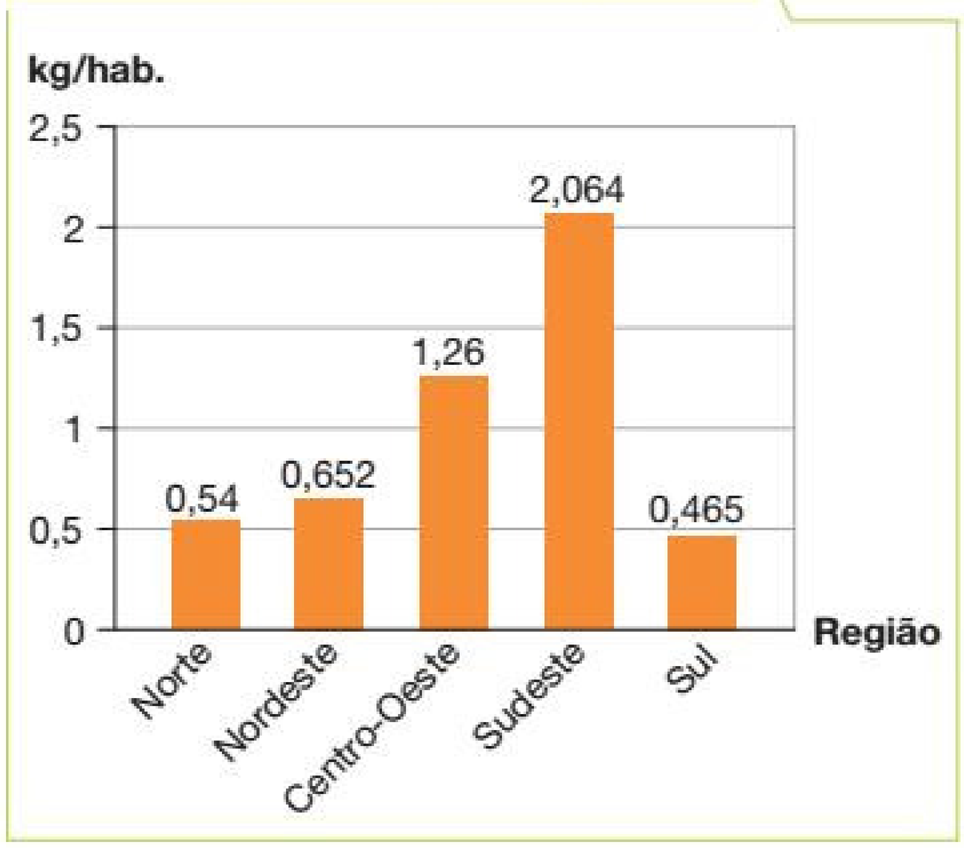
Conjuntos numéricos

Conhecer e compreender os diferentes tipos de números é importante, por exemplo, para entendermos diversas situações do dia a dia, como as apresentadas a seguir.

No gráfico ao lado, o número 0,652, por exemplo, indica que no ano de 2013 na região Nordeste foi coletado, em média por habitante, aproximadamente 0,652 quilograma de resíduos produzidos por estabelecimentos de serviço de saúde, como hospitais e consultórios odontológicos.

Na tabela abaixo, o número −633 217, por exemplo, indica que houve uma redução de 633 217 alunos matriculados no Ensino Fundamental no Brasil em 2013, em relação a 2012.

Coleta municipal de resíduos de serviço de saúde em 2013



Acervo da editora

Fonte: <www.abrelpe.org.br/Panorama/panorama2013.pdf>. Acesso em: 22 jul. 2015.

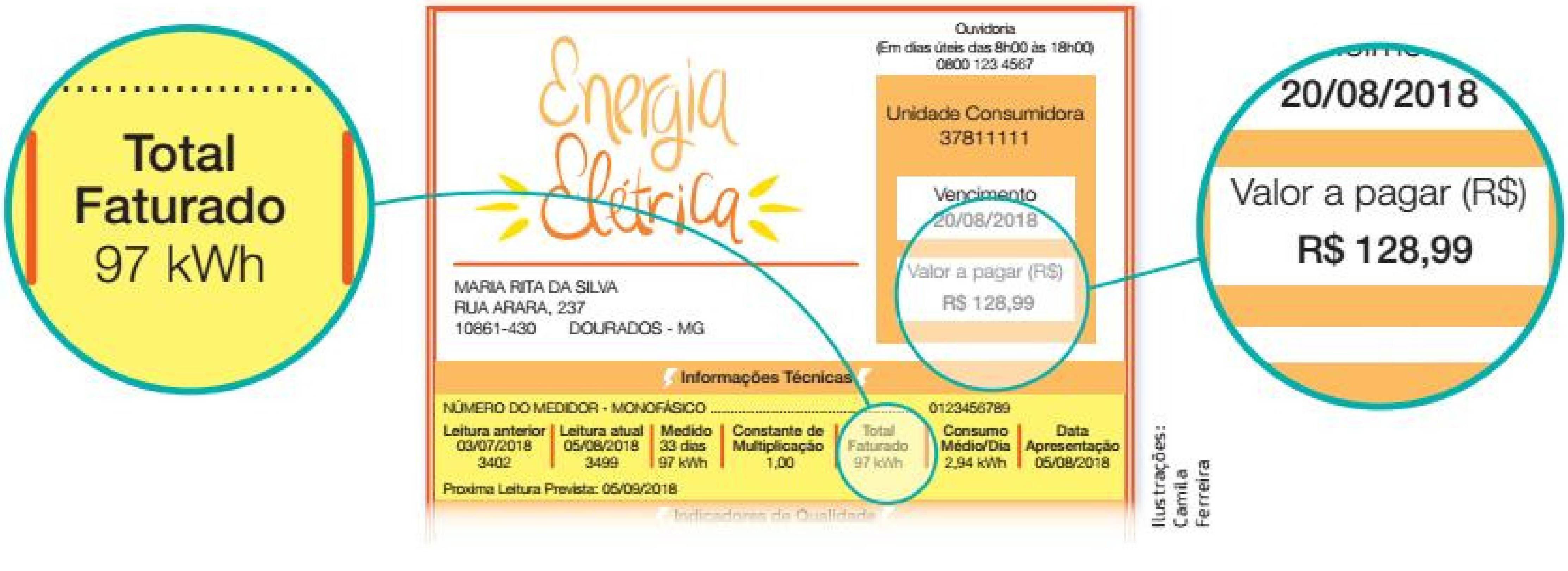
Evolução do número de alunos matriculados na educação básica no Brasil

Etapa/Modalidade de ensino	2012	2013	Variação 2012/2013
Educação Infantil	7 295 512	7 590 600	295 088
Ensino Fundamental	29 702 498	29 069 281	−633 217
Ensino Médio	8 376 852	8 312 815	−64 037
Educação de Jovens e Adultos	3 906 877	3 772 670	−134 207
Educação Especial*	199 656	194 421	−5 235
Educação Profissional	1 063 655	1 102 661	39 006
Total	50 545 050	50 042 448	−502 602

Fonte: <www.inep.gov.br>. Acesso em: 22 jul. 2015.

*O número de matrículas referente à Educação Especial contempla apenas as matrículas em classes especiais e escolas exclusivas, visto que as matrículas dos alunos com necessidades educacionais especiais incluídos em classes comuns já estão distribuídas nas modalidades de ensino regular ou Educação de Jovens e Adultos.

Já na fatura de energia elétrica a seguir, nas partes em destaque, o número 97 indica o consumo em quilowatts-hora, e o número 128,99 indica o valor em reais da fatura.



Energia Elétrica

Ouvidoria
(Em dias úteis das 8h00 às 18h00)
0800 123 4567

Unidade Consumidora
37811111

Vencimento
20/08/2018

Valor a pagar (R$)
R$ 128,99

MARIA RITA DA SILVA
RUA ARARA, 237
10861-430 DOURADOS - MG

Informações Técnicas

NÚMERO DO MEDIDOR - MONOFÁSICO 0123456789

Leitura anterior	Leitura atual	Medido	Constante de Multiplicação	Total Faturado	Consumo Médio/Dia	Data Apresentação
03/07/2018 3402	05/08/2018 3499	33 dias 97 kWh	1,00	97 kWh	2,94 kWh	05/08/2018

Proxima Leitura Prevista: 05/09/2018

Indicadores de Qualidade

Ilustrações: Camila Ferreira

Neste tópico, serão retomados e aprofundados alguns conceitos relacionados aos conjuntos numéricos estudados em anos anteriores.

Conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$)

Por mais que atualmente nos pareça simples a prática de contar elementos de uma coleção, isso nem sempre foi assim na história da humanidade. Nossos antepassados, quando deixaram de ser nômades e passaram a criar animais e organizar pequenas comunidades, por exemplo, utilizavam-se de associações "um a um" para quantificar os rebanhos e os membros da tribo.

Acervo da editora

No chifre de animal ao lado, datado de cerca de 15 000 a.C., os riscos possivelmente indicam registros de quantidades. Outras maneiras utilizadas para contar eram, por exemplo, o uso dos dedos das mãos e dos pés ou o agrupamento de pedras em um monte.

Podemos dizer que dessa necessidade de contar surgiram os números que, posteriormente, formaram o **conjunto dos números naturais**: $\mathbb{N}=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$.

Na tabela a seguir, os números naturais expressam ideias de quantidade e de ordem.

Quadro de medalhas dos Jogos Pan-Americanos de Toronto em 2015

Posição	País	Ouro	Prata	Bronze	Total
1º	Estados Unidos	103	81	81	265
2º	Canadá	78	69	70	217
3º	Brasil	41	40	60	141
4º	Cuba	36	27	34	97

Fonte: <http://results.toronto2015.org/IRS/es/general/conteo-de-medallas.htm>. Acesso em: 27 jul. 2015.

Vanesa Carvalho/Brazil Photo Press/LatinContent/Getty Images

Nos Jogos Pan-Americanos de Toronto, no Canadá, a atleta Etiene Medeiros tornou-se a primeira mulher brasileira a conquistar uma medalha de ouro, na prova de natação 100 m costas, em Jogos Pan-Americanos. A fotografia acima apresenta Etiene Medeiros com a medalha de ouro conquistada nessa prova, em 17 de julho de 2015.

Podemos destacar um subconjunto de $\mathbb{N}$ formado por todos os números naturais com exceção do zero, o qual indicamos por $\mathbb{N}^*$.

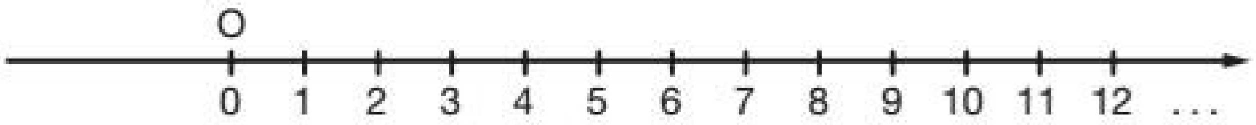
$$\mathbb{N}^*=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$$

A sequência dos números naturais pode ser representada em uma reta orientada chamada **reta numérica**. Para isso, marcamos um ponto *O*, denominado **origem** e correspondente ao natural zero, e, a partir dele, no sentido da orientação escolhido na reta, marcamos sucessivamente pontos equidistantes.

O primeiro corresponderá ao número 1 (sucessor do 0); o segundo, ao número 2 (sucessor do 1), e assim por diante. Dessa maneira, para todo número natural n definimos o seu **sucessor** como sendo o natural $n+1$ e, se n for positivo, definimos o **antecessor** de n como sendo $n-1$. O zero não possui antecessor natural.

Assim, temos, por exemplo, que 30 é sucessor de 29 e que 29 é antecessor de 30.

Dizemos também que dois ou mais números naturais são **consecutivos** quando eles vêm um imediatamente após o outro, na sequência dos números naturais. Os números 12, 13 e 14, por exemplo, são consecutivos.



Acervo da editora

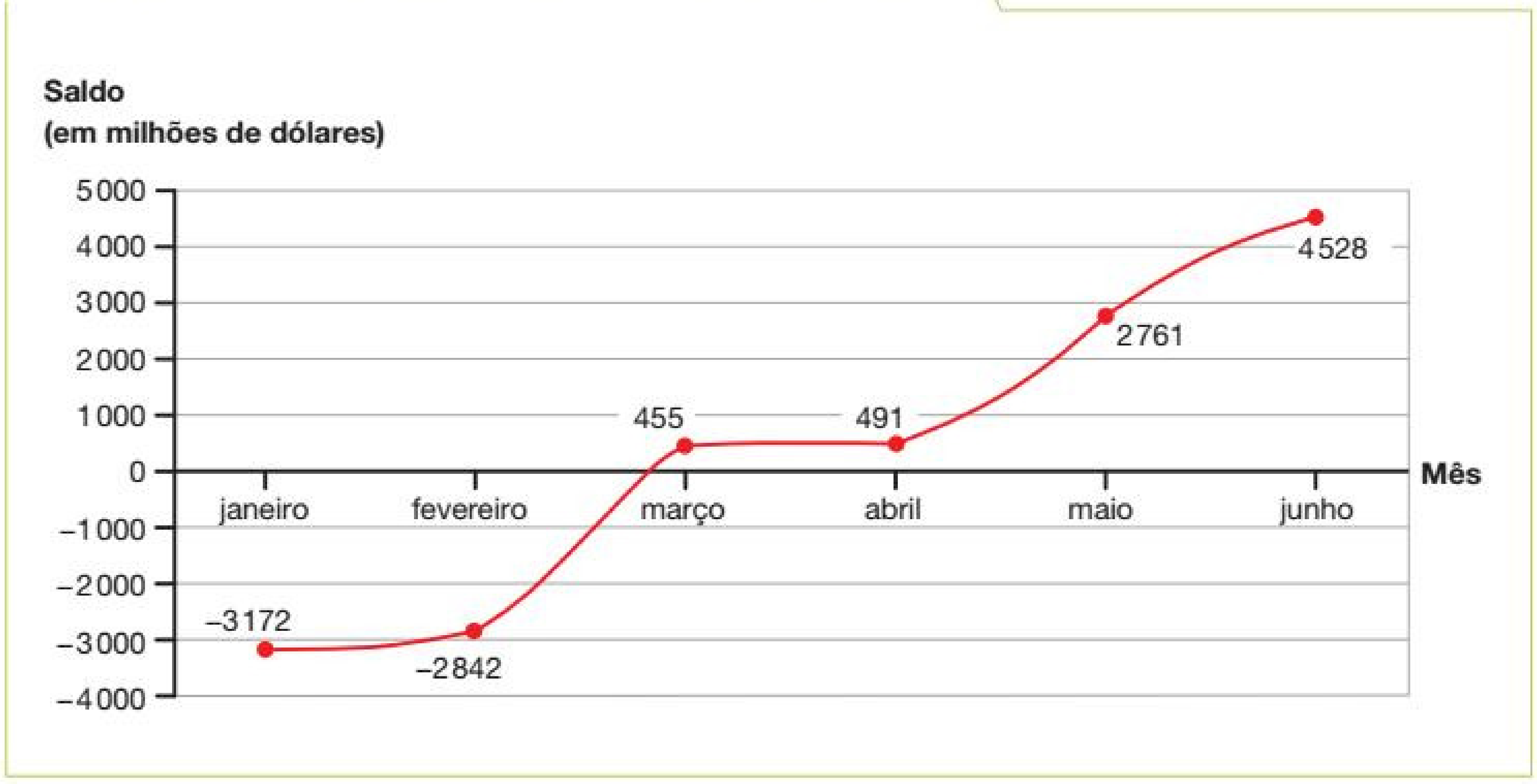
O conjunto dos números naturais é infinito e ordenado, no sentido de que dados quaisquer dois números naturais distintos *a* e *b*, temos que $a>b$ ou $a<b$.

Conjunto dos números inteiros $(\mathbb{Z})$

Observe o gráfico.

Explique aos alunos que os primeiros registros dos símbolos + e **–** são atribuídos ao alemão Johann Widman (nascido c. 1460), em uma publicação de 1489. Widman utilizou esses símbolos para indicar, respectivamente, excesso e deficiência. Acredita-se que o símbolo + provenha da contração da palavra latina *et*, utilizada na época para indicar adições. Já o símbolo **–** provavelmente tem origem na abreviação $\overline{m}$, de menos.

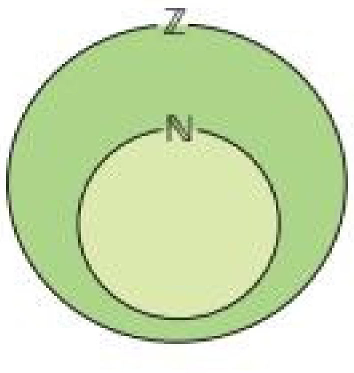
Balança comercial brasileira no 1º semestre de 2015



Fonte: <www.desenvolvimento.gov.br/sitio/interna/interna.php?area=5&menu=567>. Acesso em: 24 jul. 2015.

Note que em janeiro de 2015, por exemplo, a balança comercial brasileira ficou negativa, pois nesse mês as exportações no Brasil foram menores que as importações. Em situações como essa, ao longo da história, os números naturais não foram capazes de suprir as necessidades que o ser humano teve de expressar diferenças $a - b$, quando $a < b$. Desse tipo de necessidade surgiram os números inteiros negativos, que, com os números naturais, formam o **conjunto dos números inteiros**:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$



Como todos os números naturais também são números inteiros, temos que $\mathbb{N}$ é subconjunto de $\mathbb{Z}$, ou seja, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

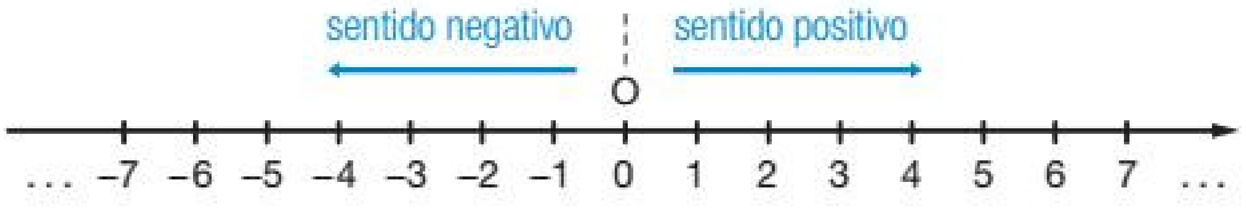
Podemos destacar outros subconjuntos de $\mathbb{Z}$:

- conjunto dos números inteiros não nulos:
  $\mathbb{Z}^* = \{\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\} = \mathbb{Z} - \{0\}$
- conjunto dos números inteiros não negativos: $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\} = \mathbb{N}$
- conjunto dos números inteiros positivos: $\mathbb{Z}_+^* = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\} = \mathbb{N}^*$
- conjunto dos números inteiros não positivos: $\mathbb{Z}_- = \{\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0\}$
- conjunto dos números inteiros negativos: $\mathbb{Z}_-^* = \{\ldots, -5, -4, -3, -2, -1\}$

O conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros, assim como $\mathbb{N}$, é infinito e ordenado.

Cada número inteiro tem um antecessor e um sucessor. Em relação ao número –7, qual é o antecessor? E o sucessor? **–**8; **–**6

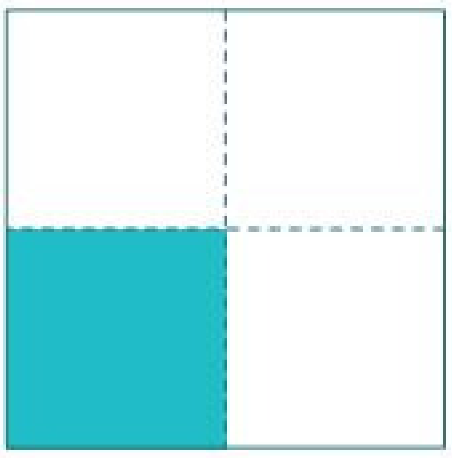
Para representar os números inteiros em uma reta numérica, marcamos um ponto *O* como origem e, a partir dele, marcamos pontos equidistantes à direita e à esquerda. Associamos a esses pontos os números inteiros positivos, à direita de *O*, e os negativos, à esquerda de *O*.



Ilustrações: Acervo da editora

Conjunto dos números racionais $(\mathbb{Q})$

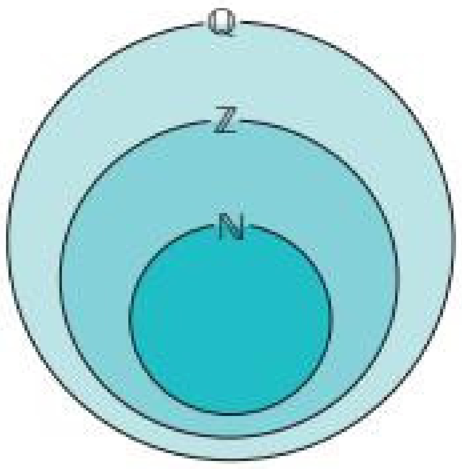
Ao realizarmos uma medição de massa, comprimento, temperatura, superfície etc., estamos comparando a quantidade a ser medida a uma unidade tomada como padrão. Se considerarmos, por exemplo, a área do quadrado maior a seguir como uma unidade de área (1 u. a.), temos que a parte destacada corresponde a $\frac{1}{4}$ u. a.



Para expressarmos medidas como essa, utilizamos os números racionais, ou seja, aqueles que podem ser escritos na forma $\frac{a}{b}$, com $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$. Esses números formam o **conjunto dos números racionais:** $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^*\right\}$.

O conjunto $\mathbb{Q}$ também é infinito e ordenado.

Os números naturais e os inteiros também são racionais, ou seja, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.



Ilustrações: Acervo da editora

Podemos destacar outros subconjuntos de $\mathbb{Q}$:

- conjunto dos números racionais não nulos: $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$
- conjunto dos números racionais não negativos: $\mathbb{Q}_+$
- conjunto dos números racionais positivos: $\mathbb{Q}_+^* = \mathbb{Q}_+ - \{0\}$
- conjunto dos números racionais não positivos: $\mathbb{Q}_-$
- conjunto dos números racionais negativos: $\mathbb{Q}_-^* = \mathbb{Q}_- - \{0\}$

São exemplos de números racionais:

- $-\frac{3}{7}$
- $\frac{12}{51}$
- 33
- −8
- 0,25
- −1,3

Para expressar um número racional na forma de uma fração por meio de um número decimal, podemos dividir o numerador da fração pelo denominador. É possível demonstrar que um número decimal obtido pode ser classificado em **decimal exato** ou **dízima periódica**. Observe os exemplos.

- $\frac{7}{4} = 1{,}75 \rightarrow$ o número 1,75 é um decimal exato
- $\frac{5}{3} = 1{,}6666\ldots = 1{,}\overline{6} \rightarrow$ o número $1{,}\overline{6}$ é uma dízima periódica

Junto com os alunos, realize na lousa as divisões 7 : 4 e 5 : 3.

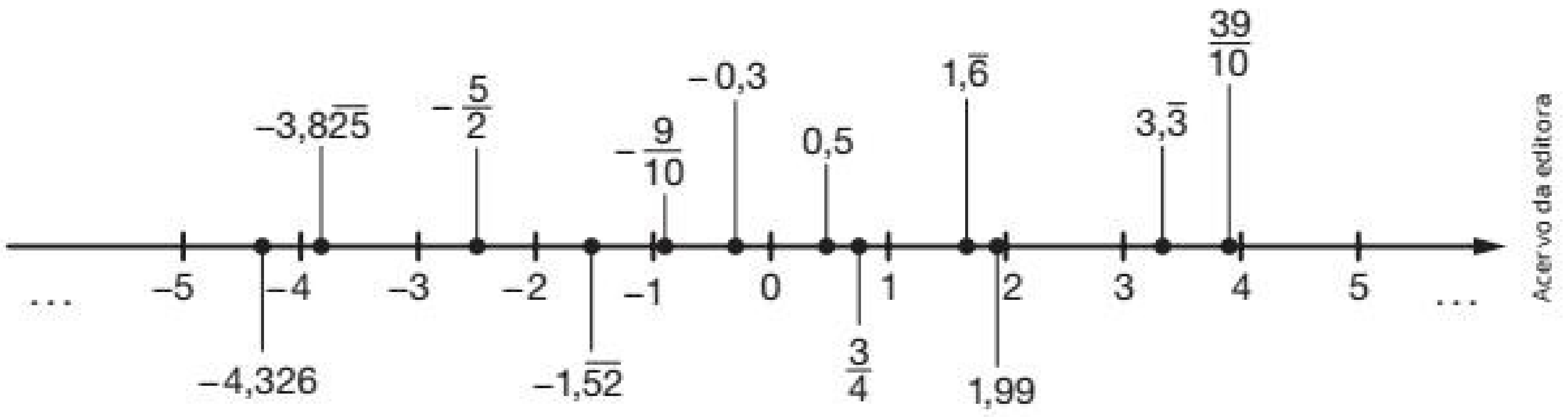
Nas dízimas periódicas indicamos com um traço o algarismo ou o grupo de algarismos que se repetem infinitamente, chamado **período**. Já a fração correspondente à dízima periódica é chamada **fração geratriz.** Em relação à dízima periódica $1{,}\overline{6}$, temos que o período é 6 e a fração geratriz é $\frac{5}{3}$.

O período de uma dízima periódica pode ser formado por mais de um algarismo. A dízima periódica correspondente à fração $\frac{3}{11}$, por exemplo, tem período 27 e pode ser indicada por $0{,}\overline{27}$.

Exemplos de dízimas periódicas:

- $\frac{5}{33} = 0,\overline{15}$
- $-\frac{13}{6} = -2,1\overline{6}$
- $\frac{236}{37} = 6,\overline{378}$

Observe na reta numérica a representação de alguns números racionais.



Um experimento que os alunos podem realizar para obter um número racional entre outros dois dados é o cálculo da média aritmética desses.

Em $\mathbb{Q}$, sempre é possível determinar um número racional entre dois outros diferentes quaisquer. Entre os números 0 e 1 existe, por exemplo, o 0,9; entre 0,9 e 1 existe, por exemplo, o 0,99; entre 0,99 e 1 existe, por exemplo, o 0,999; e assim sucessivamente.

Atividades resolvidas

R5. Escreva cada item a seguir na forma fracionária.

a) 1,725 b) $0,\overline{84}$ c) $5,3\overline{27}$

Resolução

a) Seja $x = 1,725$. Logo:

$$1000 \cdot x = 1,725 \cdot 1000$$
$$1000x = 1725$$
$$x = \frac{1725}{1000} = \frac{69}{40}$$

Portanto, $1,725 = \frac{69}{40}$.

b) Seja $x = 0,\overline{84}$. Logo:

$$100 \cdot x = 0,\overline{84} \cdot 100$$
$$100x = 84,\overline{84}$$
$$100x = 84 + \underbrace{0,\overline{84}}_{x}$$
$$100x = 84 + x$$
$$99x = 84$$
$$x = \frac{84}{99} = \frac{28}{33}$$

Portanto, $0,\overline{84} = \frac{28}{33}$.

c) Seja $x = 5,3\overline{27}$. Logo:

$$10 \cdot x = 5,3\overline{27} \cdot 10$$
$$10x = 53,\overline{27} \quad \text{(I)}$$
$$100 \cdot 10x = 53,\overline{27} \cdot 100$$
$$1\,000x = 5\,327,\overline{27} \quad \text{(II)}$$

Subtraindo **I** de **II**, temos:

$$1\,000x - 10x = 5\,327,\overline{27} - 53,\overline{27}$$
$$990x = 5\,274$$
$$x = \frac{5\,274}{990} = \frac{293}{55}$$

Portanto, $5,3\overline{27} = \frac{293}{55}$.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

42. Leia a tirinha.

GONSALES, Fernando. **Níquel Náusea**: botando os bofes para fora. São Paulo: Devir, 2002.

a) Qual conjunto numérico o personagem utiliza para fazer a contagem das estrelas? $\mathbb{N}^*$

b) Na tirinha, a afirmação feita no 2º quadro é verdadeira? Justifique. sim; Uma possível resposta: para cada estrela é possível associar um número pertencente a $\mathbb{N}^*$, mesmo que sejam infinitas.

43. Determine a qual conjunto, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$, pertencem os números que constam em cada imagem.

a)

Camila Ferreira

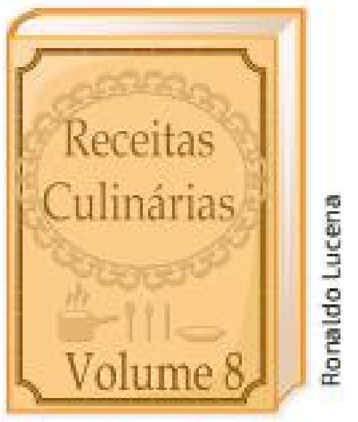
$-3 \in \mathbb{Z}$; $-3 \in \mathbb{Q}$

c)

Camila Ferreira

$-50{,}82 \in \mathbb{Q}$

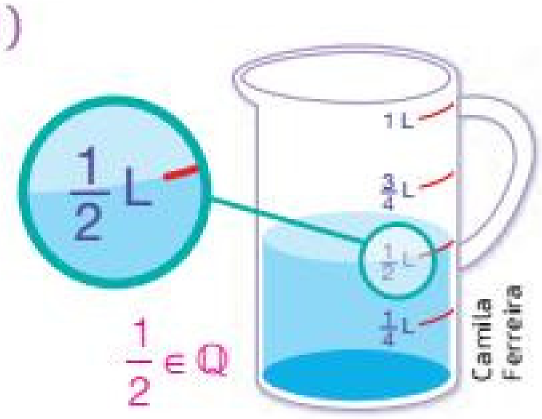
b)



Ronaldo Lucena

$8 \in \mathbb{N}$; $8 \in \mathbb{Z}$; $8 \in \mathbb{Q}$

d)



Camila Ferreira

$\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$

44. A porcentagem, que indicamos pelo símbolo %, corresponde à parte considerada de um total de 100 partes. Quando dizemos, por exemplo, que 33% de uma população tem acesso à internet, significa que 33 em cada 100 pessoas dessa população têm acesso à internet. Dessa maneira, podemos representar uma porcentagem como uma fração de denominador 100. A fração $\frac{9}{25}$, por exemplo, corresponde a 36%, pois:

$$\frac{9}{25}=\frac{9\cdot 4}{25\cdot 4}=\frac{36}{100}=36\%$$

De maneira prática, podemos obter o número decimal correspondente à fração e multiplicar o resultado por 100%. Veja o exemplo:

$$\frac{9}{25}=0{,}36 \rightarrow 0{,}36\cdot 100\%=36\%$$

Escreva a porcentagem correspondente a cada fração.

a) $\frac{4}{5}$ 80%

c) $\frac{9}{20}$ 45%

e) $\frac{12}{5}$ 240%

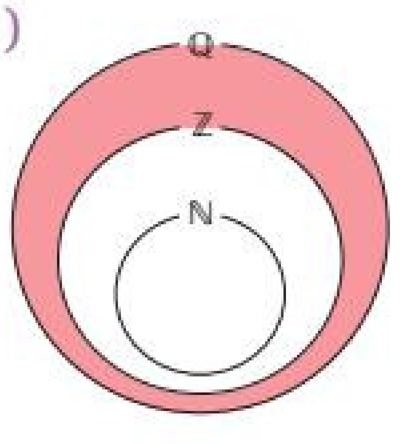
b) $\frac{3}{4}$ 75%

d) $\frac{7}{8}$ 87,5%

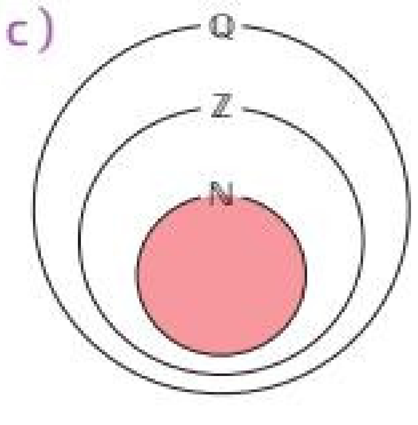
f) $\frac{21}{16}$ 131,25%

45. Em qual dos diagramas a parte destacada representa $\mathbb{Q}-(\mathbb{Z}-\mathbb{N})$? b

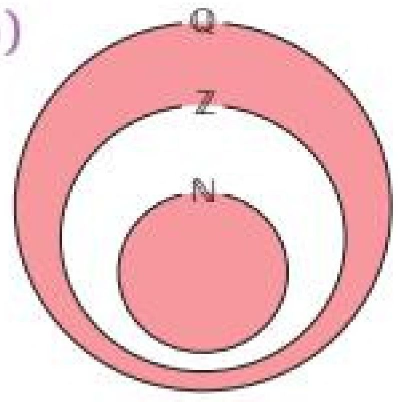
a)



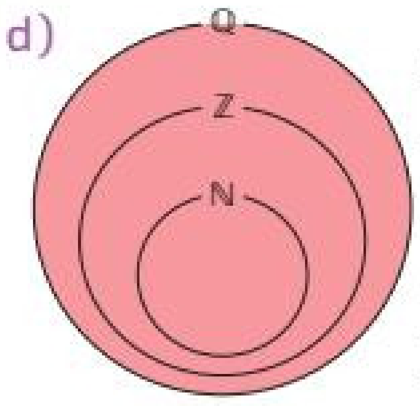
c)



b)



d)



Ilustrações: Acervo da editora

46. Represente cada conjunto escrevendo seus elementos entre chaves.

a) $A=\{x \in \mathbb{N} \mid 5<x\leq 12\}$ $A=\{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

b) $B=\{x \in \mathbb{Z}^* \mid -8\leq x\leq 1\}$ $B=\{-8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 1\}$

c) $C=\{x \mid x=5\cdot k, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$

d) $D=\{x \in \mathbb{Q}_-^* \mid x\cdot(2x-7)=0\}$ $D=\varnothing$

46. c) $C=\{\dots, -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, \dots\}$

47. Qual número é maior: $\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{5}$? Escreva um número racional, na forma decimal, que na reta numérica seja representado entre esses dois números. $\frac{1}{4}$; Algumas possíveis respostas: 0,21; 0,22; 0,23; 024.

48. Utilizando o símbolo >, escreva em ordem decrescente os números: $0{,}6\overline{19}$; $\frac{2}{3}$; $\left(\frac{8}{10}\right)^2$; $\frac{5}{8}$; 0,6928; $\frac{9}{13}$. $0{,}6928>\frac{9}{13}>\frac{2}{3}>\left(\frac{8}{10}\right)^2>\frac{5}{8}>0{,}6\overline{19}$

49. Ao representar no diagrama os números indicados no quadro, quais constarão na parte:

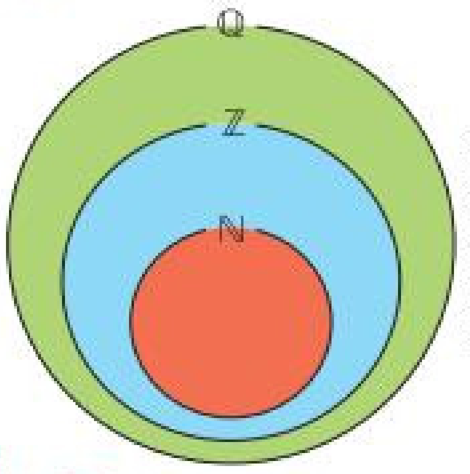
a) azul?

b) verde?

c) vermelha?

-258; $-\frac{732}{12}$; -6

0; 15; $\frac{64}{16}$; 1002



Acervo da editora

49. b) $-64{,}\overline{3}$; $-1{,}5$; $\frac{4}{5}$; $3{,}\overline{17}$; 17,9

$\frac{64}{16}$	$-1{,}5$	$-\frac{732}{12}$	$-64{,}\overline{3}$
-6	1002	$3{,}\overline{17}$	-258
$\frac{4}{5}$	17,9	15	0

50. Qual o maior número natural *A* que torna verdadeira a desigualdade $-\frac{16}{7}<-\frac{A}{11}$? $A=25$

51. Escreva a fração geratriz correspondente aos seguintes números racionais:

a) 36,8 $\frac{184}{5}$

c) 0,9375 $\frac{15}{16}$

e) $7{,}5\overline{81}$ $\frac{417}{55}$

b) $1{,}\overline{65}$ $\frac{164}{99}$

d) $0{,}\overline{843}$ $\frac{281}{333}$

f) $12{,}3\overline{2}$ $\frac{1109}{90}$

52. Represente na forma decimal as seguintes frações:

a) $\frac{65}{80}$ 0,8125

c) $\frac{255}{15}$ 17

e) $\frac{205}{11}$ $18{,}\overline{63}$

b) $\frac{174}{45}$ $3{,}8\overline{6}$

d) $\frac{1547}{26}$ 59,5

f) $\frac{961}{333}$ $2{,}\overline{885}$

Conjunto dos números irracionais ($\mathbb{I}$)

Como estudamos anteriormente, os números racionais estão diretamente relacionados à necessidade humana de realizar medições. É verdade que até certo momento da história acreditava-se que esses números eram suficientes para expressar qualquer medida. Contudo, os pitagóricos mostraram em seus estudos que nem toda medida pode ser expressa por um número na forma $\frac{a}{b}$, com $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$. Em particular, esses estudiosos provaram que a medida da diagonal de um quadrado cujo lado mede uma unidade não corresponde a um número racional.

Pitagóricos: Seguidores do matemático grego Pitágoras de Samos (cerca de 585 a.C.-500 a.C.), os pitagóricos fundaram a chamada escola pitagórica, onde se estudava Matemática, Filosofia e Ciências Naturais.

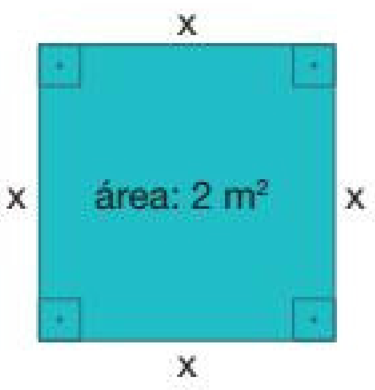
André Thévet, c. 1584. Gravura. Biblioteca Nacional da França, Paris

Pitágoras de Samos

Exemplo

- Vamos calcular a medida *x* do lado de um quadrado com área igual a 2 m².

$$x^2 = 2$$
$$x = \sqrt{2}$$



Como não é um número racional, a representação decimal de $\sqrt{2}$ possui infinitas casas decimais não periódicas, ou seja, não é um número decimal exato ou uma dízima periódica. Assim, $\sqrt{2}$ não pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$, com $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$.

Utilizando uma calculadora ou um computador, podemos obter $\sqrt{2}$ com algumas casas decimais de aproximação.

$$\sqrt{2} = 1{,}41421356237309504880168872420\ldots$$

Números com essas características formam o **conjunto dos números irracionais**, indicado por $\mathbb{I}$. A raiz quadrada de um número natural não quadrado perfeito é irracional. De maneira semelhante, toda raiz cúbica de um número natural não cúbico perfeito também é irracional. Veja alguns exemplos de números irracionais:

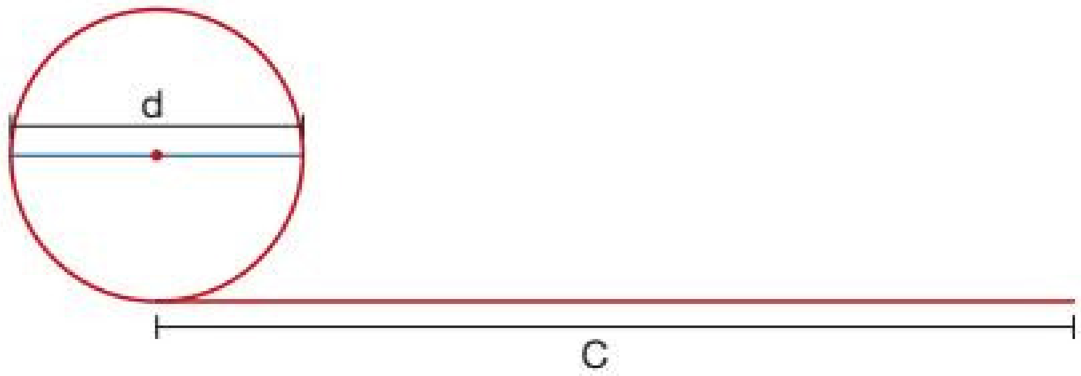
- $\sqrt{3} = 1{,}7320508\ldots$
- $-\sqrt{8} = -2{,}8284271\ldots$
- $\frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}7071067\ldots$
- $\frac{4}{\sqrt{7}} = 1{,}5118578\ldots$

O conjunto $\mathbb{I}$ também é infinito e ordenado.

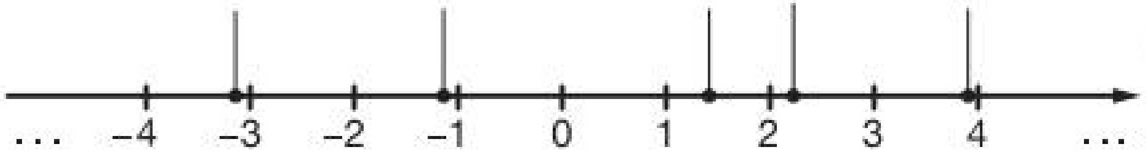
Explique aos alunos que um número quadrado perfeito apresenta como raiz quadrada um número natural; um número cubo perfeito apresenta como raiz cúbica um número natural.

O número π (lê-se "pi"), que corresponde à razão entre o comprimento e o diâmetro de uma circunferência, também é um número irracional.

$$\pi = \frac{C}{d} = 3{,}14159265\ldots$$



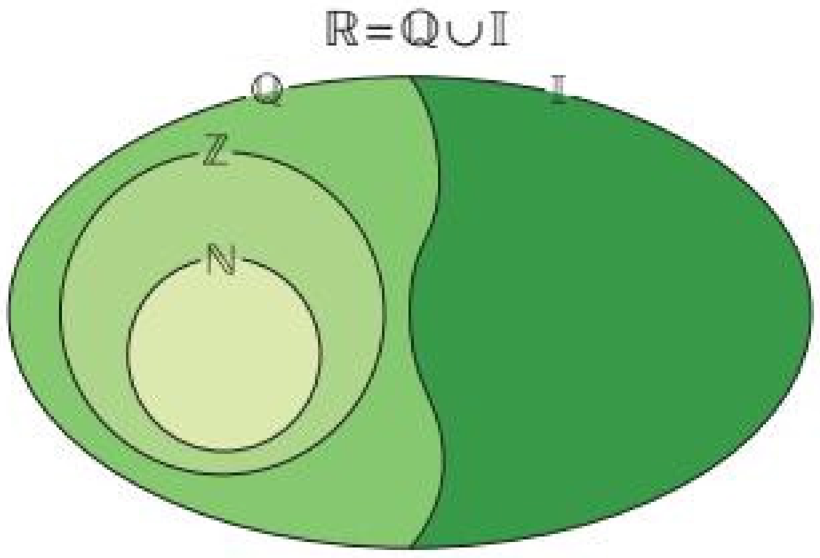
Observe a representação dos números irracionais $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{11}$, $\frac{\sqrt{61}}{2}$, $-\pi$ e $-\frac{2\sqrt[3]{5}}{3}$ em uma reta numérica.



Ilustrações: Acervo da editora

Conjunto dos números reais $(\mathbb{R})$

Ao reunirmos o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ e o conjunto dos números irracionais $\mathbb{I}$, obtemos o **conjunto dos números reais**, indicado por $\mathbb{R}$. Dessa maneira, temos que todo número natural, inteiro, racional e irracional é um número real.



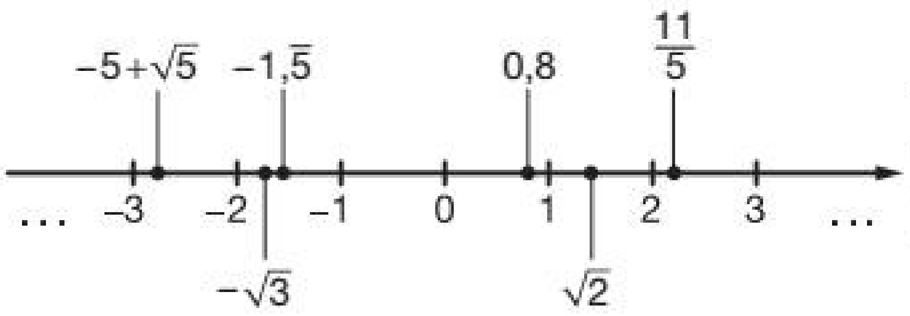
Alguns subconjuntos de $\mathbb{R}$ são:

- conjunto dos números reais não nulos: $\mathbb{R}^*=\mathbb{R}-\{0\}$
- conjunto dos números reais não negativos: $\mathbb{R}_+$
- conjunto dos números reais positivos: $\mathbb{R}_+^*=\mathbb{R}_+-\{0\}$
- conjunto dos números reais não positivos: $\mathbb{R}_-$
- conjunto dos números reais negativos: $\mathbb{R}_-^*=\mathbb{R}_--\{0\}$

É possível associar a cada número real um ponto da reta numérica e, a cada ponto da reta numérica, associar um número real. A reta numérica que representa os números reais é denominada **reta real**.

Observe a reta e alguns números reais indicados.

O conjunto $\mathbb{R}$ também é infinito e ordenado.



Ilustrações: Acervo da editora

Atividades

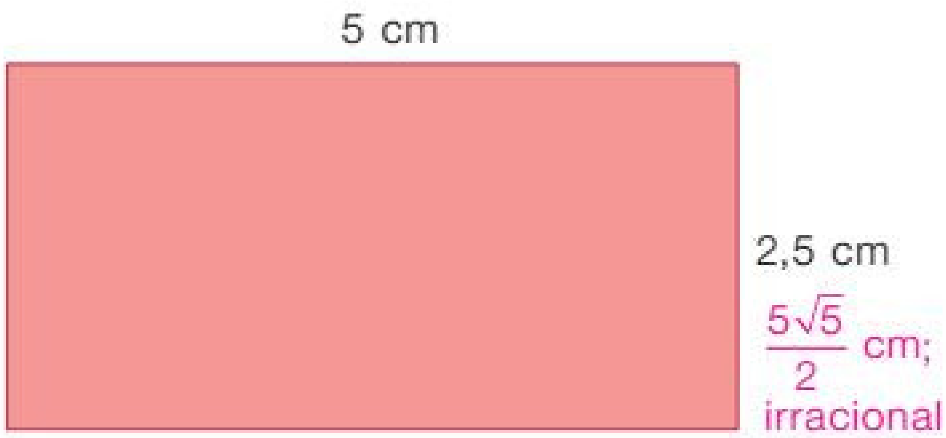
Anote as respostas no caderno.

53. Calcule a medida da diagonal de cada retângulo e classifique o valor obtido em racional ou irracional.

a)

6 cm; racional

b)



$\frac{5\sqrt{5}}{2}$ cm; irracional

c)

$\sqrt{23}$ cm; irracional

Ilustrações: Acervo da editora

54. Dizemos que o número positivo *n* é raiz quadrada de *p* se $n^2=p$. Veja como podemos determinar um valor aproximado para $\sqrt{10}$ com uma casa decimal.

Inicialmente, verificamos entre quais números naturais encontra-se $\sqrt{10}$.

$1^2=1$ $\quad 2^2=4$ $\quad 3^2=9$ $\quad 4^2=16$

Como $3^2<10<4^2$, temos que $3<\sqrt{10}<4$.

Em seguida, verificamos qual número com uma casa decimal, entre 3 e 4, é mais próximo de $\sqrt{10}$.

$3,1^2=9,61$ $\quad 3,2^2=10,24$

Como $9,61<10<10,24$, temos que $3,1^2<n^2<3,2^2$.

Note que $3,2^2=10,24$ é o valor mais próximo de 10, ou seja, $\sqrt{10}\simeq 3,2$.

Sem utilizar a calculadora, determine o valor aproximado de:

a) $\sqrt{20}$ com uma casa decimal 4,5

b) $\sqrt{88}$ com duas casas decimais 9,38

c) $\sqrt{134}$ com três casas decimais 11,576

55. **Calculadora** Ao apresentar aos alunos o cálculo aproximado de $\sqrt{20}$ pelo método de Herão, calcule com eles o valor aproximado utilizando uma calculadora e depois comparem os resultados obtidos.

*

Herão de Alexandria, que viveu em algum período entre 150 a.C. e 250 d.C., propôs em sua obra **A métrica** um método para calcular a raiz quadrada aproximada de um número natural *n* não quadrado perfeito. Nesse método, se $n = a \cdot b$, então $\sqrt{n} \simeq \frac{a+b}{2}$. Como $20 = 4 \cdot 5$, por exemplo, pelo método de Herão, temos: $\sqrt{20} \simeq \frac{4+5}{2} = 4{,}5$.

Utilizando o método de Herão, determine uma aproximação para cada raiz quadrada. Em seguida, com uma calculadora, obtenha uma aproximação com quatro casas decimais e compare os resultados.

Algumas possíveis respostas:

a) $\sqrt{8}$ 3; 2,8284

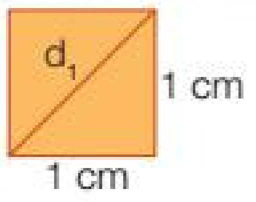
b) $\sqrt{6}$ 2,5; 2,4495

c) $\sqrt{12}$ 3,5; 3,4641

d) $\sqrt{24}$ 5; 4,8990

56. Para obter geometricamente um segmento com $\sqrt{2}$ cm, desenhamos um quadrado com 1 cm de lado e, utilizando o Teorema de Pitágoras, calculamos a medida da diagonal (d_1) desse quadrado.

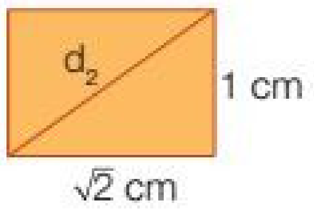
Explique aos alunos que mesmo que os cálculos indiquem uma medida irracional para a diagonal dos retângulos ao realizar uma medição na prática, seja com uma régua simples ou com um instrumento mais preciso, não é possível identificar tal número irracional, e sim uma aproximação racional apenas.



$$(d_1)^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow \boxed{d_1 = \sqrt{2}\text{ cm}}$$

Para obter um segmento com $\sqrt{3}$ cm, desenhamos um retângulo com lados 1 cm e $\sqrt{2}$ cm.

Ilustrações: Acervo da editora



$$(d_2)^2 = (\sqrt{2})^2 + 1^2 \Rightarrow (d_2)^2 = 2 + 1 \Rightarrow \boxed{d_2 = \sqrt{3}}$$

Junte-se a um colega e obtenham geometricamente segmentos com $\sqrt{5}$ cm e $\sqrt{6}$ cm.
Resposta no final do livro.

57. Diversos elementos da natureza, como o número de espirais de sementes que formam o miolo de um girassol, podem ser representados por números de uma sequência denominada sequência de Fibonacci, nome dado em homenagem ao matemático que a formulou, o italiano Leonardo de Pisa (também conhecido por Leonardo Fibonacci) (c. 1175-1250).

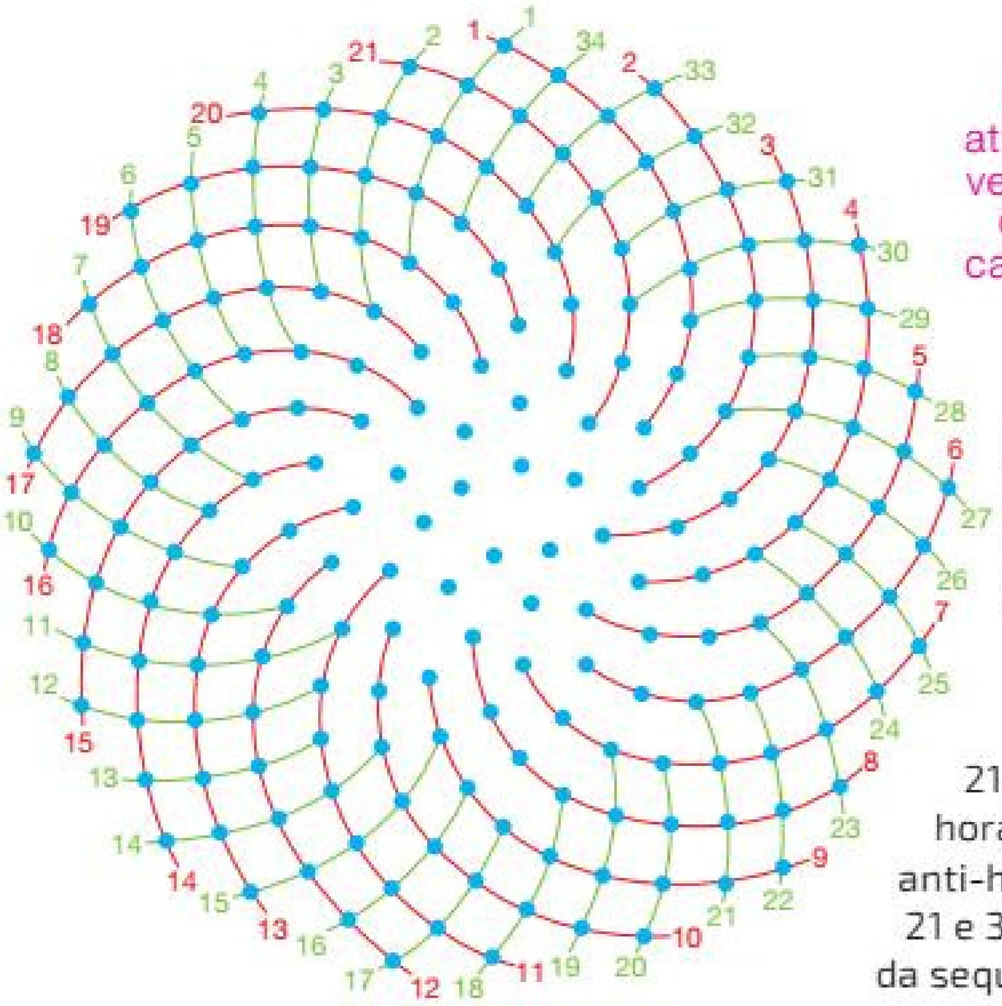
Nessa sequência, cada termo, a partir do 3º, é igual à soma dos dois anteriores.

*Caso não haja calculadoras para todos os alunos, reúna-os em grupos para que possam realizar a atividade ou, então, veja a possibilidade de trazer algumas calculadoras para a sala de aula.

$$1 \quad 1 \quad \underset{1+1}{2} \quad \overset{1+2}{3} \quad \underset{2+3}{5} \quad \overset{3+5}{8} \quad \underset{5+8}{13} \quad \overset{8+13}{21} \quad \underset{13+21}{34} \quad \overset{21+34}{55} \ \ldots$$

Ian 2010/Shutterstock.com

girassol



Acervo da editora

Nesse caso, há 21 espirais no sentido horário e 34 no sentido anti-horário. Os números 21 e 34 são consecutivos da sequência de Fibonacci.

Outra propriedade interessante dessa sequência é que a partir do 2º termo, ao dividirmos um termo qualquer pelo imediatamente anterior a ele, obtemos valores aproximados para o número irracional ϕ (lê-se "fi"), também chamado número de ouro. Quanto maior a posição dos termos da sequência, mais próximo de ϕ está essa razão. Observe algumas aproximações de ϕ:

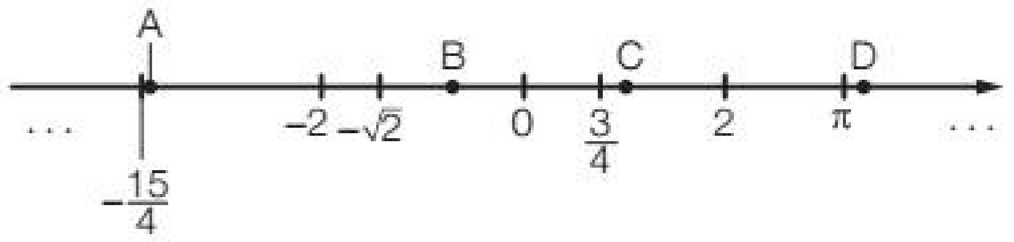
- $\phi \simeq \frac{1}{1} = 1$
- $\phi \simeq \frac{2}{1} = 2$
- $\phi \simeq \frac{3}{2} = 1{,}5$
- $\phi \simeq \frac{5}{3} = 1{,}\overline{6}$

a) Com base nos termos da sequência de Fibonacci apresentados, escreva os próximos três. 89, 144 e 233

b) O número ϕ pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$, na qual $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$? Justifique.
Não, pois ϕ é um número irracional.

c) Utilizando a sequência de Fibonacci, escreva três outras aproximações para o número ϕ.
Algumas possíveis respostas: 1,6; 1,625; 1,615; 1,619; 1,618. Após os alunos realizarem o item **c**, explique que $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

58. Estime qual dos três números apresentados corresponde a cada ponto na reta numerada.



Acervo da editora

- A: $-\sqrt{3}$; $-\frac{16}{5}$ ou $-\frac{11}{3}$ $-\frac{11}{3}$
- C: 0,5; 1 ou $\sqrt{2}$ 1
- B: $-\frac{7}{10}$; $-0{,}1$ ou $\frac{1}{2}$ $-\frac{7}{10}$
- D: $\frac{8}{3}$; 3 ou $3{,}\overline{3}$ $3{,}\overline{3}$

59. Substitua cada ■ pelo símbolo $\subset$ ou $\not\subset$.

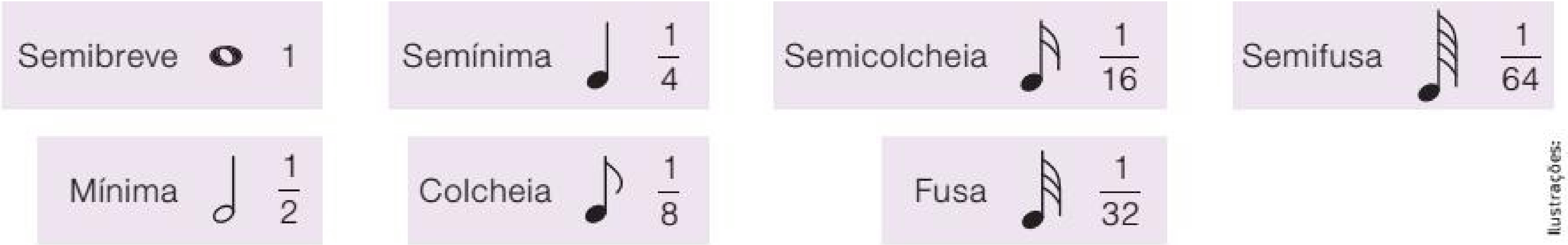
a) $\mathbb{Z}_+$ ■ $\mathbb{N}$ $\subset$　b) $\mathbb{I}$ ■ $\mathbb{R}^*$ $\subset$　c) $\mathbb{Z}$ ■ $\mathbb{Z}_+$ $\not\subset$　d) $\mathbb{R}_-$ ■ $\mathbb{Q}_-$ $\not\subset$　e) $\mathbb{R}^*$ ■ $\mathbb{R}$ $\subset$　f) $\mathbb{Z}^*_-$ ■ $\mathbb{I}_-$ $\not\subset$

60. Vimos anteriormente que a raiz quadrada de um número natural quadrado perfeito é racional e de um número natural não quadrado perfeito é irracional. Por exemplo, $\sqrt{4} \in \mathbb{Q}$ e $\sqrt{5} \in \mathbb{I}$, pois 4 é quadrado perfeito e 5 não é.

Com base nessas informações mostre, por meio de exemplos, que o produto de dois números irracionais pode também ser irracional ou pode ser um número racional.

61. Desafio

(Enem-MEC) A música e a matemática se encontram na representação dos tempos das notas musicais, conforme a figura seguinte.



Ilustrações: Acervo da editora

Um compasso é uma unidade musical composta por determinada quantidade de notas musicais em que a soma das durações coincide com a fração indicada como fórmula do compasso. Por exemplo, se a fórmula de compasso for $\frac{1}{2}$, poderia ter um compasso ou com duas semínimas ou uma mínima ou quatro colcheias, sendo possível a combinação de diferentes figuras.

Um trecho musical de oito compassos, cuja fórmula é $\frac{3}{4}$, poderia ser preenchido com: d

a) 24 fusas
b) 3 semínimas
c) 8 semínimas
d) 24 colcheias e 12 semínimas
e) 16 semínimas e 8 semicolcheias

Intervalos

Além dos subconjuntos de $\mathbb{R}$ já estudados, outros de grande importância na Matemática são aqueles definidos por desigualdades, chamados **intervalos reais**.

Para observarmos os diferentes tipos de intervalos reais, consideramos os números reais **a** e **b**, tal que a<b.

- intervalo fechado: $[a, b]$ ou $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

- intervalo aberto: $]a, b[$ ou $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

- intervalo fechado à esquerda e aberto à direita: $[a, b[$ ou $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

- intervalo aberto à esquerda e fechado à direita: $]a, b]$ ou $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

Ilustrações: Acervo da editora

Na representação geométrica de um intervalo real, utilizamos uma "bolinha vazia" para indicar que a extremidade do intervalo não pertence ao conjunto e uma "bolinha cheia" para indicar que a extremidade pertence ao conjunto.

60. Uma possível resposta: temos que 2 e 3 são números naturais não quadrados perfeitos, de maneira que $\sqrt{2} \in \mathbb{I}$ e $\sqrt{3} \in \mathbb{I}$. Assim, segue que $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{4} = 2 \in \mathbb{Q}$ e $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6} \in \mathbb{I}$.

O símbolo $-\infty$ indica que o intervalo decresce infinitamente, e $+\infty$, que cresce infinitamente.

Existem também os intervalos reais ilimitados. De maneira geral, utilizamos os símbolos $-\infty$ (lê-se "menos infinito") e $+\infty$ (lê-se "mais infinito") para indicar um intervalo ilimitado.

- intervalo ilimitado à esquerda e fechado à direita: $]-\infty, a]$ ou $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$

- intervalo ilimitado à esquerda e aberto à direita: $]-\infty, a[$ ou $\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$

- intervalo fechado à esquerda e ilimitado à direita: $[a, +\infty[$ ou $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$

- intervalo aberto à esquerda e ilimitado à direita: $]a, +\infty[$ ou $\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$

Ilustrações: Acervo da editora

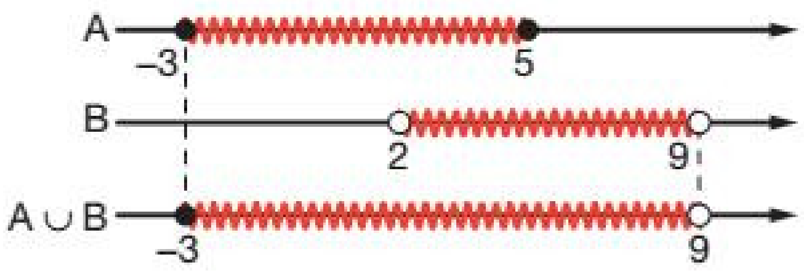
Operações com intervalos

Estudamos em tópicos anteriores que algumas operações podem ser realizadas com conjuntos. Como os intervalos reais são subconjuntos de $\mathbb{R}$, também podemos realizar operações com intervalos.

Exemplos

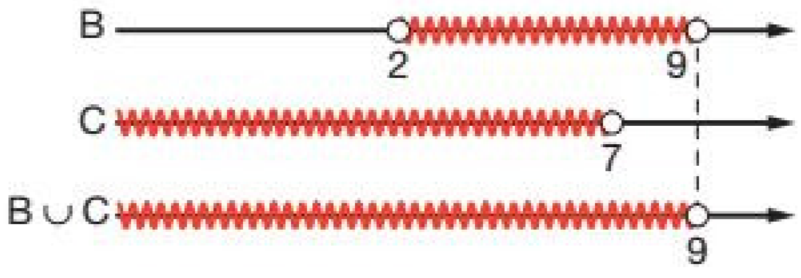
Dados os conjuntos $A = [-3, 5]$, $B =]2, 9[$, $C =]-\infty, 7[$ e $D = [4, +\infty[$, vamos determinar $A \cup B$, $B \cup C$, $A \cap B$ e $C \cap D$.

- $A \cup B$



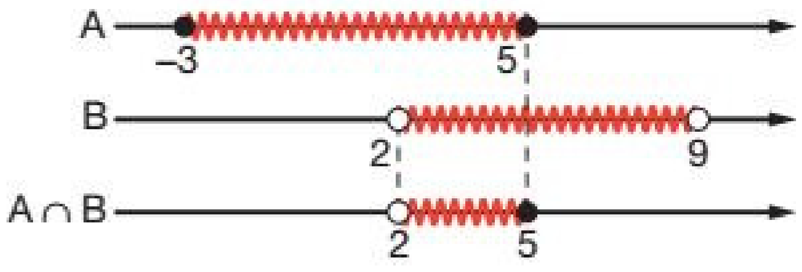
$A \cup B = [-3, 9[$ ou $A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < 9\}$

- $B \cup C$



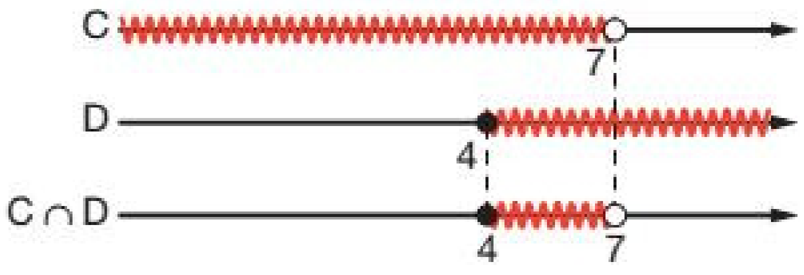
$B \cup C =]-\infty, 9[$ ou $B \cup C = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 9\}$

- $A \cap B$



$A \cap B =]2, 5]$ ou $A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leq 5\}$

- $C \cap D$



$C \cap D = [4, 7[$ ou $C \cap D = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 \leq x < 7\}$

Ilustrações: Acervo da editora

Atividades

Anote as respostas no caderno.

62. Represente geometricamente: Respostas no final do livro.

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 13\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{R}^* \mid -8 \leq x \leq 5\}$

c) $C =]-\infty, 2[$

d) $D = [-15, 3[$

e) $E = [-7, -1]$

f) $F =]-\infty, +\infty[$

63. Classifique cada sentença em verdadeira (V) ou falsa (F).

a) $-\frac{18}{4} \in [4, 5]$ F

b) $\frac{25}{3} \notin [-1, 8[$ V

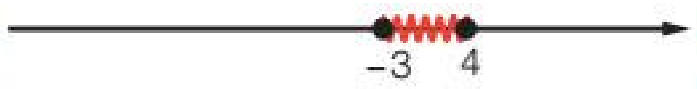
c) $\pi \in]0, 2\pi[$ V

d) $]-\infty, -4[\subset \mathbb{Z}$ F

e) $[2, 5[\supset]3, 5[$ V

f) $]-8, 2[\subset]-7, 4]$ F

64. Escreva o intervalo correspondente a cada representação geométrica.

a)


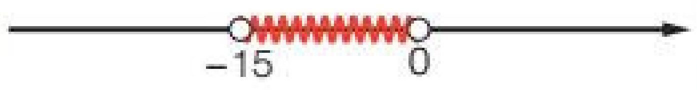
$[-3, 4]$

b)


$]-\infty, 10]$

c)


$]2, 11]$

d)


$]-15, 0[$

e)


$[-23, -5[$

f)


$]-6, +\infty[$

Ilustrações: Acervo da editora

65. Observe os produtos. Os nomes dos produtos que aparecem nesta página são fictícios.

Ilustrações: Ronaldo Lucena

65. a) iogurte: $[1, 10]$; requeijão: $[5, 8]$; sorvete: $]-\infty, -18]$; *pizza*: $[-18, -12]$

a) Escreva o intervalo real correspondente à temperatura, em graus Celsius, indicada para a conservação de cada produto.

b) Quais produtos podem ser armazenados a uma temperatura de:

- 5,3 °C? iogurte e requeijão
- 10 °C? iogurte
- −16,1 °C? *pizza*
- −25,8 °C? sorvete

66. Para cada item, determine $A \cup B$ e $A \cap B$.

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -11 \le x \le 4\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x < 9\}$
$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid -11 \le x < 9\}$; $A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x \le 4\}$

b) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -8 < x < -1\}$ e $B =]-\infty, -5]$
$A \cup B =]-\infty, -1[$; $A \cap B =]-8, -5]$

c) $A = [-3, 5]$ e $B = [-1, 1]$ $A \cup B = [-3, 5]$; $A \cap B = [-1, 1]$

d) $A = [-10, 6[$ e $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 < x \le 6\}$ $A \cup B = [-10, 6]$; $A \cap B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

e) $A =]-15, -2]$ e $B =]-2, 3[$ $A \cup B =]-15, 3[$; $A \cap B = \varnothing$

67. Dados os intervalos reais $A = [-4, 6[$, $B =]-5, 5]$ e $C =]-6, 2[$, represente graficamente: Respostas no final do livro.

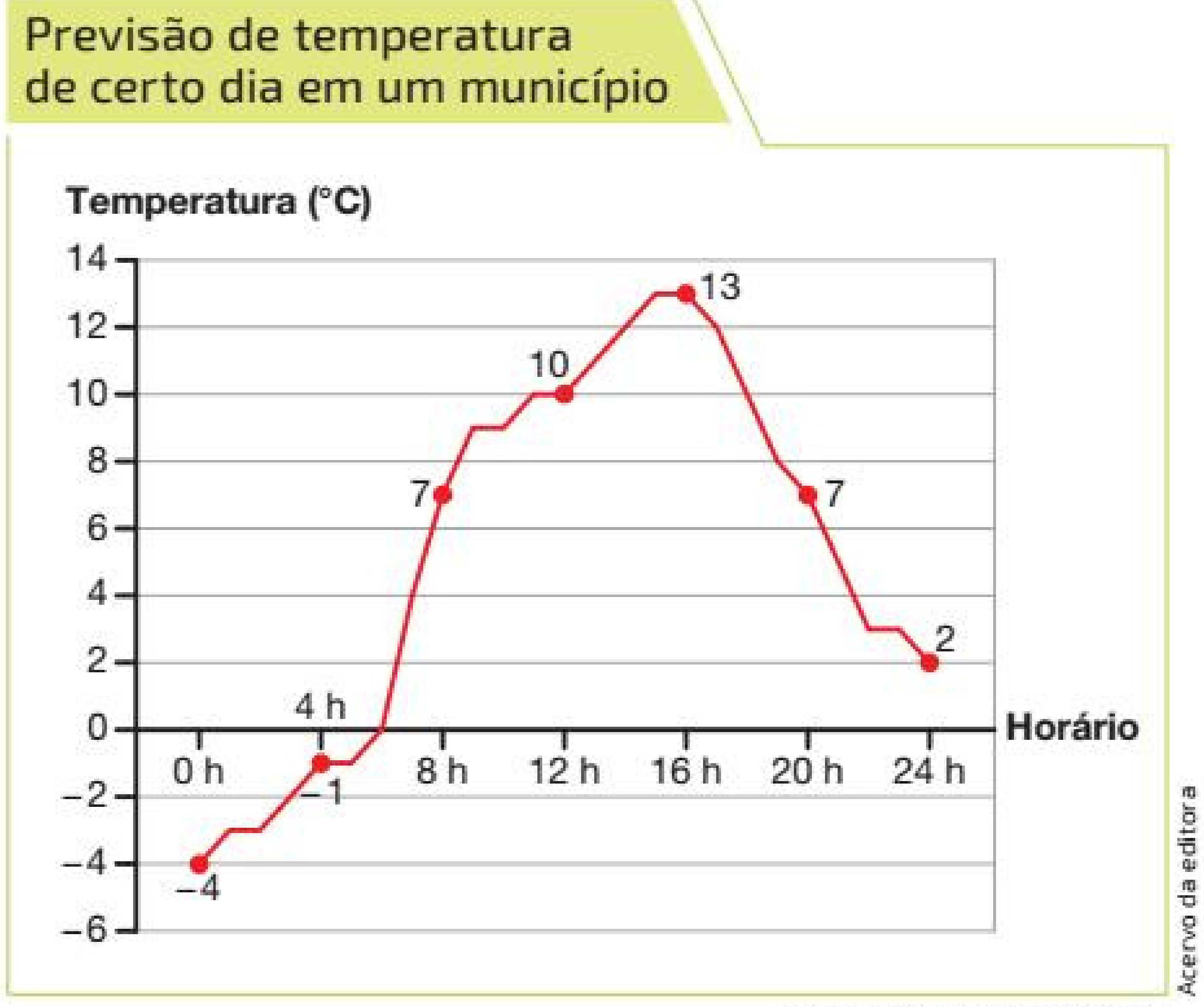
a) $(A \cup C) \cup B$

b) $(B \cap A) \cap C$

c) $(C \cup B) \cap A$

d) $(A \cup B) \cap C$

68. Observe o gráfico.



Acervo da editora

Fonte: *Site* de meteorologia.

As informações apresentadas no gráfico são fictícias.

a) Represente a variação de temperatura prevista para esse dia utilizando um intervalo real, de maneira que a menor e a maior temperatura correspondam, respectivamente, ao menor e ao maior elemento pertencente a esse intervalo. $[-4, 13]$ ou $\{x \in \mathbb{R} \mid -4 \le x \le 13\}$

b) O intervalo que você representou no item **a** é fechado ou aberto? fechado

*

69. Escreva dois intervalos *A* e *B*, tais que:
Algumas possíveis respostas:

a) $A \cup B = [-6, 3]$ e $A \cap B =]-3, 2[$ $A = [-6, 2[$ e $B =]-3, 3]$

b) $A \cup B =]-\infty, 2]$ e $A \cap B =]-6, -4[$ $A =]-\infty, 2]$ e $B =]-6, -4[$

c) $A \cup B = \{x \mid x \in \mathbb{R}^*\}$ e $A \cap B = \varnothing$ $A =]0, +\infty[$ e $B =]-\infty, 0[$

d) $A \cup B = [0, 4[$ e $A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \le x < 3\}$
$A = [0, 3[$ e $B = [1, 4[$

70. Em uma competição de natação foram realizadas duas etapas eliminatórias na prova dos 100 m livres. Em uma das eliminatórias, os tempos, em segundos, pertenciam ao intervalo $A = [51, 64]$; na outra eliminatória, pertenciam ao intervalo $B = [53, 67]$.

a) Sabendo que se classificam diretamente para a prova final os atletas que obtêm tempo pertencente a *A* e não pertencente a *B*, e participam da repescagem aqueles cujos tempos pertencem ao intervalo $A \cap B$, determine o intervalo que indica os tempos dos atletas:

- classificados diretamente para a prova final; $[51, 53[$
- que participam da repescagem. $[53, 64]$

b) Um atleta que obteve o tempo de 52,8s nas eliminatórias classificou-se diretamente para a final? Justifique. Sim, pois $52{,}8 \in [51, 53[$.

c) Escreva um tempo que, se obtido por um atleta na prova eliminatória, o classificaria para a repescagem. Qualquer tempo *x*, em segundos, com $x \in [53, 64]$.

*Após realizar a atividade **68**, sugira aos alunos que pesquisem na internet a previsão de temperatura em certo dia para o município em que moram e representem a variação na forma de intervalo real. Em seguida, peça-lhes que comparem com os colegas os intervalos obtidos.

Ser consciente

A inclusão na ponta do dedo

De acordo com Censo 2010, o Brasil possuía naquele ano cerca de 530 mil pessoas totalmente incapazes de enxergar.

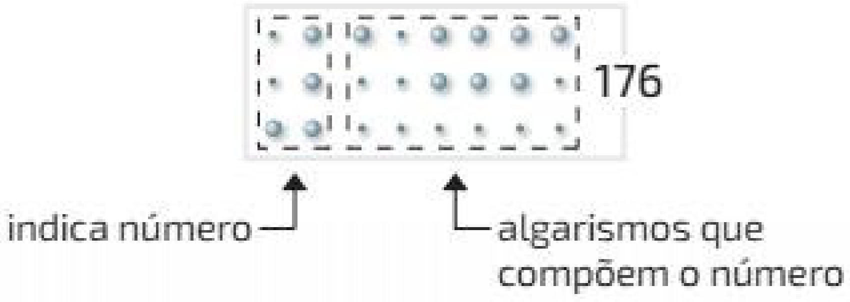
Não poder usufruir da visão pode parecer um grande limitador, porém, na prática, esse obstáculo costuma ser superado pela dedicação, pelo estudo e pelo aprimoramento dos demais sentidos. Com o tato, por exemplo, pessoas podem, utilizando o método braille, ler com agilidade. Esse método foi publicado pela primeira vez em 1829 pelo seu autor, o francês Louis Braille, que ficou cego aos 5 anos de idade e utilizou diferentes métodos de leitura e escrita para que pudesse estudar.

Utilizando células com seis pontos, alguns em alto relevo, organizados em duas colunas de três pontos cada, esse método permite representar 63 símbolos, entre letras, algarismos e outros caracteres. Para a leitura dos símbolos, é necessário passar a ponta dos dedos sobre eles.

Os algarismos de 1 a 9 são representados por um símbolo especial que indica número, seguido de outro símbolo que também representa as letras de **a** até **i**, respectivamente. O zero é representado pelo símbolo especial, seguido daquele que também representa a letra **j**.

Explique aos alunos que nas representações dos símbolos braille que aparecem nesta página, as bolinhas maiores indicam os pontos em alto relevo.

Em um número formado por dois ou mais algarismos, apenas o primeiro é precedido pelo símbolo especial. Observe o exemplo.



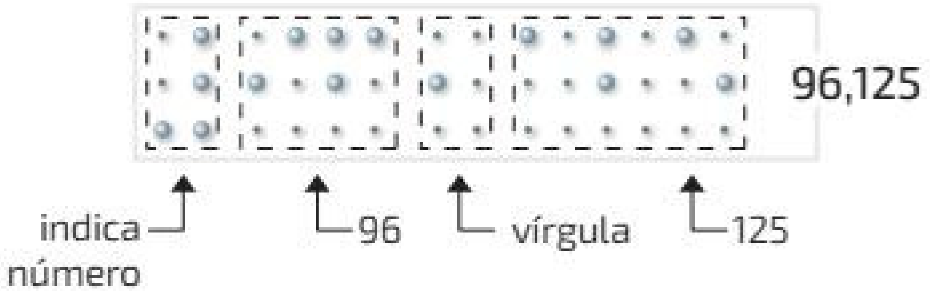
Ilustrações: Acervo da editora

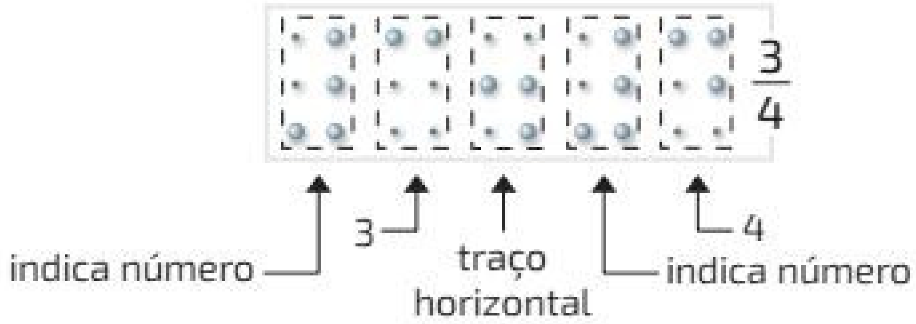
Fontes de pesquisa: <www.sac.org.br/APR_BR2.htm>. Acesso em: 7 dez. 2015.
<www.fundacaodorina.org.br/deficiencia-visual>. Acesso em 7 dez. 2015.

Convívio social

Agir com naturalidade é a receita para o convívio com deficientes visuais. Contudo, algumas ações simples podem ser convenientes, como as indicadas no esquema.

Por meio da utilização de outros símbolos, como os que representam a vírgula e um traço horizontal, podemos escrever números decimais e frações, como nos exemplos abaixo.





Enfim, o método braille permite que as pessoas cegas possam ler, escrever e até mesmo realizar cálculos.

*Promova uma discussão com toda a turma a fim de que os alunos expressem informações sobre o convívio deles com pessoas com deficiência visual. Verifique se os alunos compreenderam que as pessoas com deficência visual devem ser tratadas com naturalidade e respeito.

Analisando com cidadania

a) Você conhece alguma pessoa com deficiência visual? Converse com o professor e os colegas sobre como é seu convívio com ela. Resposta pessoal.*

b) Diversos produtos, como medicamentos por exemplo, apresentam em sua embalagem informações em braille. Pesquise e traga para sala de aula algumas dessas embalagens e procure identificar, apenas com o tato, números representados em braille. Ao final, escreva as sensações que teve durante essa experiência. Resposta pessoal.**

**Na realização desse item, verifique a possibilidade de trazer para a sala de aula embalagens com indicações em braille, a fim de que os alunos manipulem-nas. Nas embalagens de remédio, por exemplo, costuma-se indicar a data de validade também em braille. Procure identificar as possíveis dificuldades encontradas por eles na leitura dos símbolos em braille.

Analisando com Matemática

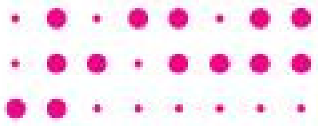
c) Quais números estão representados a seguir? A que conjunto numérico esses números pertencem: ℕ, ℤ, ℚ ou 𝕀? ℚ

5,28


$\frac{1}{4}$


Ilustrações: Acervo da editora

d) Represente o maior número natural de três algarismos distintos por meio de símbolos do método braille.



A resposta do item d representa o número novecentos e oitenta e sete (987).

e) Utilizando símbolos em braille, represente: Respostas pessoais.
- sua idade;
- sua altura, em metros;
- sua massa, em quilogramas.

Veja mais informações sobre o método braille e a decifiência visual nos *sites*:
- <http://tub.im/9x54wd>
- <http://tub.im/zkpj2p>

(acesso em: 29 jan. 2016)

Caso oriente uma pessoa com deficiência visual, procure utilizar comandos precisos, como “direita” e “esquerda”, evitando os termos “ali” e “lá”.

Algumas pessoas têm o hábito de falar mais alto com pessoas cegas, o que não faz sentido. Procure conversar normalmente.

Davi Augusto

capítulo

2

As funções

David Pereiras/Shutterstock.com

Mesmo com a expectativa de vida dos brasileiros aumentando a cada ano, a taxa de fecundidade vem se reduzindo constantemente, provocando um ritmo de crescimento populacional menor do que o registrado até então. Com isso, espera-se para as próximas décadas o início da redução populacional brasileira.

Veja mais informações sobre estimativa populacional no *site*:
- <http://tub.im/b2vvof> (acesso em: 2 fev. 2016)

Estimativa populacional

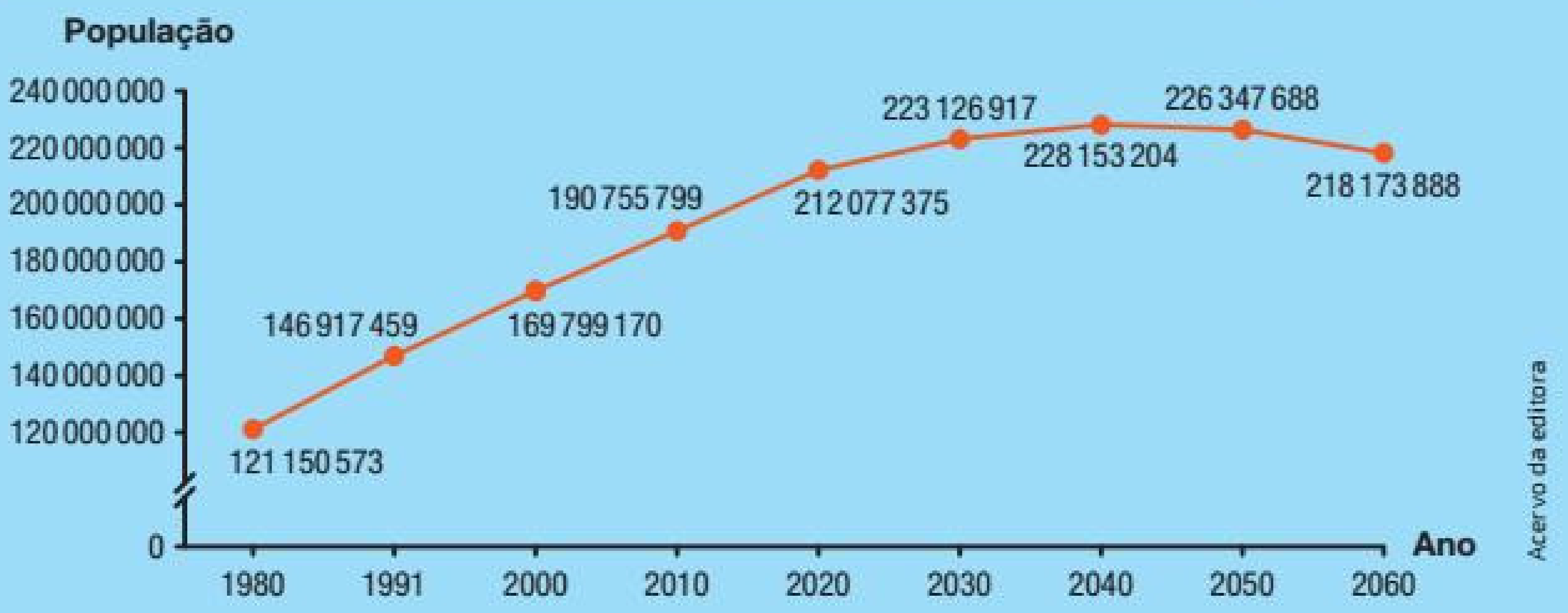
Determinar uma fórmula que expresse a relação entre grandezas variáveis tem sido uma atividade desenvolvida não apenas por matemáticos. Outros profissionais, como engenheiros, biólogos, geógrafos e médicos, buscam compreender ou resolver determinados problemas por meio de fórmulas.

Neste sentido, a Modelagem Matemática pode ser utilizada para representar, em termos matemáticos, situações que surgem em diferentes áreas. Com base em um conjunto de dados referentes a um problema definido, busca-se, por exemplo, a representação deles por meio de fórmulas e gráficos a fim de serem interpretados e o problema resolvido.

O Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística – IBGE, por exemplo, realiza estimativas populacionais por meio de fórmulas obtidas com base em dados estatísticos. Essas estimativas são importantes tanto para o cálculo de indicadores sociodemográficos e econômicos nos períodos entre dois censos quanto para auxiliar Ministérios e Secretarias Estaduais e Municipais na formulação, implementação e avaliação de seus programas de desenvolvimento e na distribuição de recursos aos Estados e Municípios.

Observe no gráfico a população brasileira em alguns censos (1980 a 2010) e a estimativa populacional para as próximas décadas (2020 a 2060).

Estimativa da população brasileira, segundo os censos e a projeção populacional realizados pelo IBGE



Fonte: <www.sidra.ibge.gov.br/bda/popul/default.asp?t=3&z=t&o=25&u1=1&u2=1&u3=1&u4=1&u5=1&u6=1>. Acesso em: 29 out. 2015.

Fonte: <ftp://ftp.ibge.gov.br/Projecao_da_Populacao/Projecao_da_Populacao_2013/nota_metodologica_2013.pdf>. Acesso em: 29 out. 2015.

Oriente os alunos a escreverem as respostas no caderno.

A Com que intenção profissionais de diversas áreas do conhecimento determinam fórmulas que expressam relações entre grandezas variáveis? Resposta esperada: com o intuito de compreender ou resolver determinado problema de sua área.

B No gráfico apresentado, quais grandezas estão relacionadas? ano e população

C Entre dois anos indicados no gráfico estima-se que a população brasileira começará a diminuir. Quais são esses anos? entre 2040 e 2050

Noção intuitiva de função

Ao final do estudo deste capítulo podem ser trabalhados o exemplo e a atividade da página **267** da seção **Acessando tecnologias**.

A. Lorgna. Séc. XVIII. Gravura. Biblioteca Smithsonian, Washington (EUA)

O suíço Leonhard Euler foi um dos maiores e mais produtivos matemáticos de sua época. No estudo de funções, ele contribuiu, por exemplo, com algumas das notações que utilizamos atualmente.

Em diversas situações do dia a dia é possível perceber grandezas que, de certa maneira, estão relacionadas. Nas páginas **40** e **41**, descrevemos uma relação entre determinados anos e a população brasileira correspondente. Outro exemplo ocorre quando abastecemos um veículo, uma vez que as grandezas "quantidade de combustível" e "quantia a pagar" estão diretamente relacionadas.

Muitas dessas relações podem ser descritas por um conceito matemático denominado **função**. O conceito de função é relativamente novo, visto que a maior parte de seu desenvolvimento ocorreu nos séculos XVIII e XIX, com contribuições de matemáticos como: Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), Isaac Newton (1642-1727), Leonhard Euler (1707-1783) e Joseph Fourier (1768-1830).

Observe exemplos de situações que envolvem funções.

Exemplo 1

O biodiesel é um tipo de biocombustível obtido a partir de gorduras animais e de plantas oleaginosas, como o algodão, o girassol, a mamona e a soja. Entre as vantagens na utilização desse combustível, pode-se destacar a menor emissão de gases poluentes na atmosfera, se comparado ao *diesel* comum, aquele obtido a partir do petróleo.

Fonte de pesquisa: <www.embrapa.br/busca-de-publicacoes/-/publicacao/936241/conhecendo-um-pouco-os-biocombustiveis>. Acesso em: 1º fev. 2016.

Observe a relação entre a quantidade de mamona e a de biodiesel produzidas.

Quantidade de mamona (em t)	Quantidade de biodiesel (em L)
1	560
2	1 120
3	1 680
4	2 240
...	...
x	$560 \cdot x$

Ser vivo adulto

Mamoneiro: 2 m a 3,5 m de altura

Ricardo de Paula Ferreira/Shutterstock.com

Por ser uma planta que pode ser cultivada mesmo em regiões inóspitas, como no semiárido brasileiro, e sua semente apresentar alto teor de óleo, a mamona é uma das oleaginosas utilizadas para a produção de biodiesel. Fotografia de 2015.

Note que existe uma relação entre as grandezas "quantidade de mamona" (x) e "quantidade de biodiesel" (q) produzida. Essa relação é um exemplo de função. Para determinarmos quantos litros de biodiesel são produzidos a partir de certa quantidade de mamona, podemos utilizar a seguinte fórmula:

$$\overset{\text{quantidade de biodiesel (em L)}}{q} = \underset{\text{quantidade de biodiesel produzida com 1 t de mamona}}{560}\,\underset{\text{quantidade de mamona (em t)}}{x}$$

Podemos calcular, por exemplo, quantos litros de biodiesel são produzidos a partir de 12,5 t de mamona:

$$q = 560 \cdot 12{,}5 = 7\ 000 \longrightarrow 7\ 000 \text{ L}$$

No exemplo **1**, dizemos que a "quantidade de biodiesel" produzida está em função da "quantidade de mamona", ou seja, a produção de biodiesel depende da quantidade de mamona.

Exemplo 2

Uma estamparia cobra uma taxa fixa, referente ao trabalho de desenvolvimento da estampa padrão, mais um valor por peça de roupa estampada. Para estampar camisetas de certa encomenda, o orçamento calculado estabelecia uma taxa fixa de R$ 75,00 mais R$ 9,00 por camiseta.

Observe:

Quantidade de camisetas	1	2	10	20	50	...	x
Valor cobrado (R$)	$\underbrace{84,00}_{75+9}$	$\underbrace{93}_{75+9\cdot 2}$	$\underbrace{165}_{75+9\cdot 10}$	$\underbrace{255}_{75+9\cdot 20}$	$\underbrace{525}_{75+9\cdot 50}$	...	$75+9\cdot x$

A relação entre a quantidade de camisetas e o valor cobrado é descrita por uma função, cuja fórmula é dada por:

valor cobrado

quantidade de camisetas

$$v = 75 + 9x$$

valor por camiseta

taxa fixa

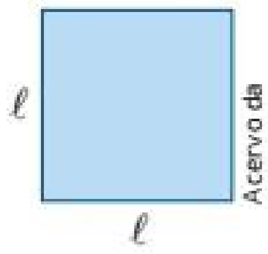
Nesse caso, o valor cobrado está expresso em função da quantidade de camisetas. Assim, dizemos que o "valor cobrado" (v) é a **variável dependente** e a "quantidade de camisetas" (x), a **variável independente** da função.

Volte ao exemplo **1** e identifique a variável dependente e a variável independente da função.

variável dependente: quantidade de biodiesel (q); variável independente: quantidade de mamona (x)

Exemplo 3

Para calcular a área de um quadrado, pode ser utilizada a fórmula $A = \ell^2$.



Acervo da editora

área do quadrado

$$A = \ell^2$$

medida do lado do quadrado

A cada valor que atribuímos à medida do lado do quadrado está associado um valor correspondente à área desse quadrado.

ℓ	$A = \ell^2$	Área
1 cm	$A = 1^2 = 1$	1 cm^2
2 cm	$A = 2^2 = 4$	4 cm^2
2,5 cm	$A = 2{,}5^2 = 6{,}25$	6,25 cm^2
$\sqrt{10}$ cm	$A = \left(\sqrt{10}\right)^2 = 10$	10 cm^2
5 cm	$A = 5^2 = 25$	25 cm^2

Nesse caso, a área do quadrado está expressa em função da medida de seu lado. Assim, a "área do quadrado" (A) é a variável dependente e a "medida do lado do quadrado" (ℓ), a variável independente da função.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

1. No decorrer do século passado a população brasileira foi praticamente multiplicada por 10. Atualmente, segundo o IBGE, o Brasil possui mais de 200 milhões de habitantes. *

Evolução da população brasileira entre 1900 e 2010

Ano	População (em milhões de habitantes)
1900	17,4
1920	30,6
1940	41,2
1960	71
1970	94,5
1980	121,2
1991	146,9
2000	169,6
2010	190,8

Fonte: <www.sidra.ibge.gov.br>. Acesso em: 21 jul. 2015.

Ismar Ingber/Pulsar

O Censo 2010 contou com a contratação de mais de 190 mil pessoas, chamadas de recenseadores. Na fotografia podemos observar uma recenseadora do IBGE na cidade do Rio de Janeiro (RJ), em 2010.

a) Na tabela, quais as variáveis que se relacionam? ano e população

b) Qual era a população brasileira no ano de 1980? 121,2 milhões de habitantes

c) A cada ano apresentado na tabela está associada mais de uma quantidade de habitantes? não

2. Em cada item está descrita uma relação entre duas variáveis. Determine, em cada caso, a variável independente e a variável dependente. Respostas no final do livro.

a) A altura de um prédio e o tempo necessário para uma pessoa subir pela escada até o último andar.

b) O custo de seis pães e o preço por quilograma de pão.

c) O tempo de viagem e a distância entre as cidades de origem e destino.

d) O valor mensal da fatura de água e a quantidade de metros cúbicos consumidos no mês.

e) A massa de um objeto e a força necessária para colocá-lo em movimento.

*Nesta atividade, se julgar conveniente, retome o trabalho com as informações apresentadas nas páginas 40 e 41 deste capítulo.

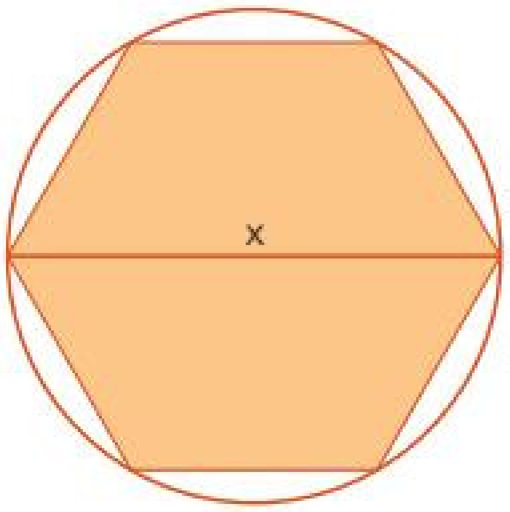
3. Uma locadora de automóveis anuncia uma promoção de aluguel de veículos na qual o locatário deve pagar uma taxa fixa de R$ 79,90 mais uma quantia proporcional à quantidade d de quilômetros rodados. Nessa promoção, para calcular a quantia Q a ser paga pelo aluguel de um veículo, utiliza-se a fórmula $Q = 79{,}90 + 0{,}88d$.

a) Na fórmula $Q = 79{,}90 + 0{,}88d$, qual é a variável dependente? E a independente? quantia a pagar (Q); quantidade de quilômetros rodados (d)

b) Nessa locadora, qual o preço por quilômetro rodado? R$ 0,88

c) Quanto pagará uma pessoa que alugar um veículo e percorrer 230 km? R$ 282,30

4. Um hexágono regular está inscrito em uma circunferência de diâmetro x.



Acervo da editora

**

a) Escreva uma fórmula que represente o perímetro P do hexágono em função de x. $P = 6 \cdot \frac{x}{2}$ ou $P = 3x$

b) A partir da fórmula obtida no item **a**, calcule o perímetro do hexágono quando:

- $x = 2$ m 6 m
- $x = 12$ m 36 m

c) Qual deve ser o valor de x para que o perímetro P do hexágono seja:

- 21 m? 7 m
- 10,2 m? 3,4 m

5. (Enem-MEC) Uma professora realizou uma atividade com seus alunos utilizando canudos de refrigerantes para montar figuras, onde cada lado foi representado por um canudo. A quantidade de canudos (C) de cada figura depende da quantidade de quadrados (Q) que formam cada figura. A estrutura de formação das figuras está representada a seguir.

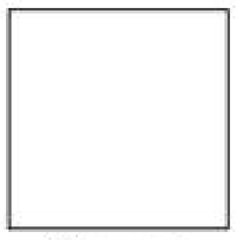


Figura I

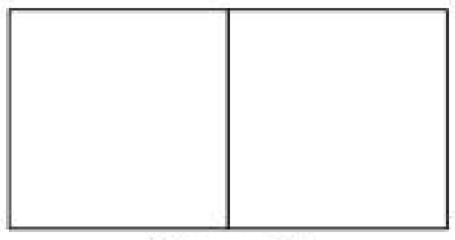


Figura II

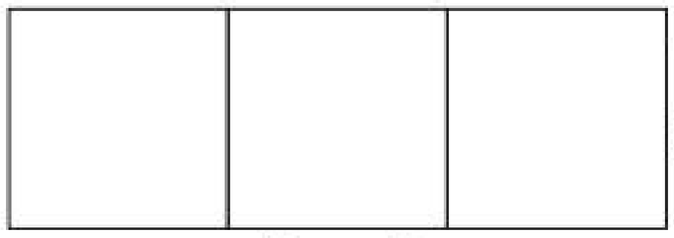


Figura III

Ilustrações: Acervo da editora

Que expressão fornece a quantidade de canudos em função da quantidade de quadrados de cada figura? b

a) $C = 4Q$

b) $C = 3Q + 1$

c) $C = 4Q - 1$

d) $C = Q + 3$

e) $C = 4Q - 2$

**Explique aos alunos que, como o hexágono regular está inscrito na circunferência, então as medidas do raio dessa circunferência e do lado do hexágono são iguais.

6. [...]

A geração de resíduos cresce com o aumento do consumo – e as embalagens são o maior indicador desse crescimento. Quanto maior o consumo, maior a produção de embalagens. E embalagem é algo pelo que você paga, leva para casa e joga fora. O consumo consciente de embalagens é levar em conta que toda embalagem que vai de carona em nossas compras tem um impacto na natureza – seja na sua fabricação ou no seu descarte.

[...]

BRASIL. Ministério do Meio Ambiente. Consumo consciente de embalagens – o que é isso? Disponível em: <www.mma.gov.br/responsabilidade-socioambiental/producao-e-consumo-sustentavel/consumo-consciente-de-embalagem/item/7581>. Acesso em: 22 jul. 2015.

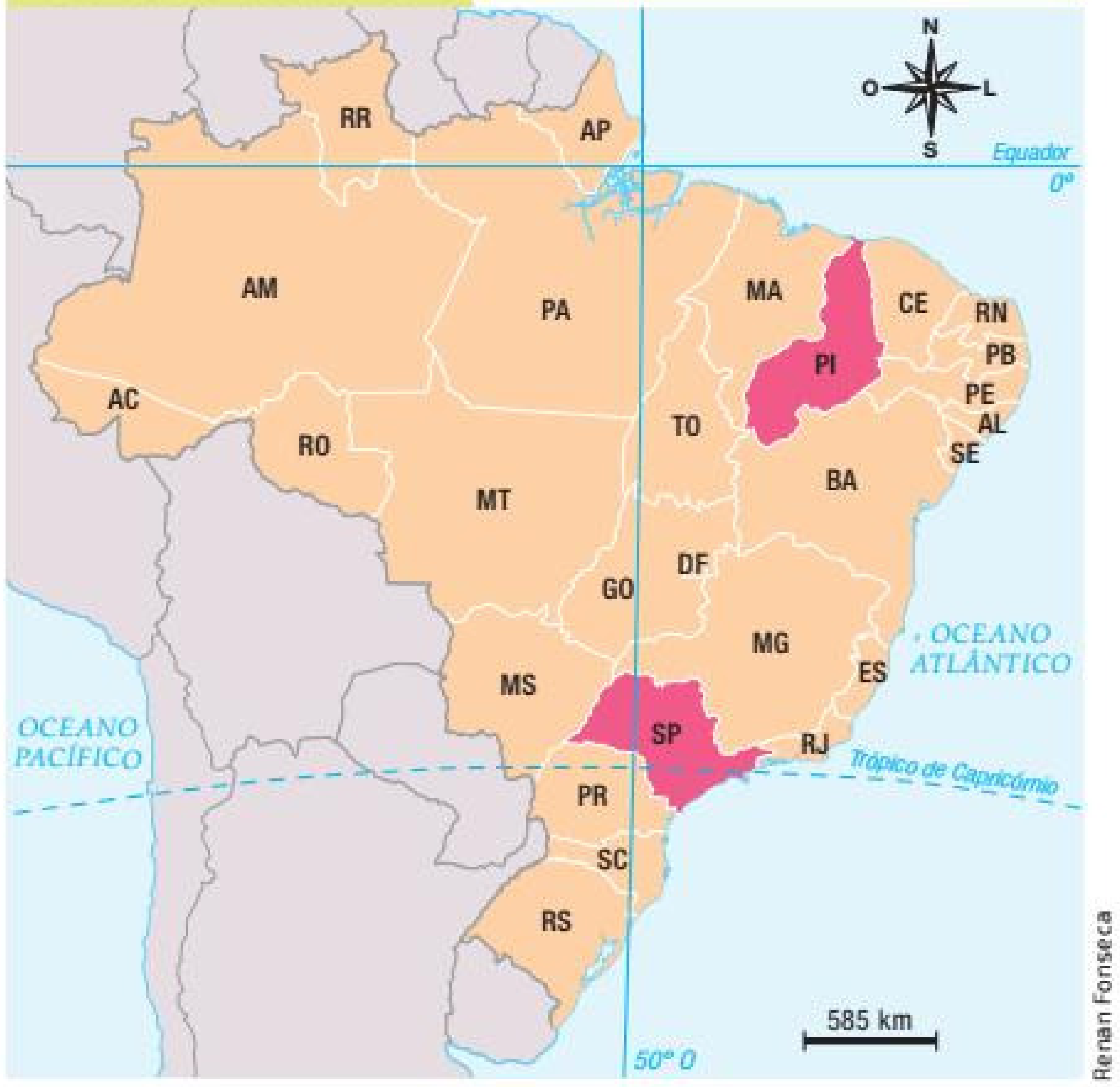
Com base nas informações acima e em pesquisa já realizadas, é possível constatar que, quanto mais urbanizada for uma região, maior será a sua produção *per capita* de lixo. Observe a tabela.

Quantidade média de lixo produzida por dia/habitante em 2013

Número de pessoas	Quantidade de lixo (em kg)	
	São Paulo	Piauí
1	1,3	0,6
2	2,6	1,2
3	3,9	1,8
8	10,4	4,8
20	26	12
50	65	30
100	130	60
500	650	300

Fonte: <www.abrelpe.org.br/Panorama/panorama2013.pdf>. Acesso em: 22 jul. 2015.

Estados brasileiros



Fonte: ATLAS geográfico escolar. 6. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2012.

a) Qual das fórmulas representa a quantidade L de lixo produzido diariamente, em quilogramas, por um número:

- s de paulistas? IV

I) $L = 0,6s$ II) $L = 650s$ III) $1,3L = s$ IV) $L = 1,3s$

- p de piauienses? III

I) $L = 1,3p$ II) $L = 300p$ III) $L = 0,6p$ IV) $0,6L = p$

b) Em 2013, quantos quilogramas de lixo foram produzidos diariamente, em média, por uma família composta por seis pessoas, que mora:

- em São Paulo? 7,8 kg
- no Piauí? 3,6 kg

c) Sabendo que certa família paulista produziu em 2013, em média, aproximadamente 55 kg de lixo semanalmente, estime o número de pessoas dessa família. 6 pessoas

d) Considerando uma produção média diária de 0,9 kg de lixo por pessoa, pesquise o número de habitantes do município em que você mora e estime quantos quilogramas de lixo, em média, são produzidos diariamente nesse município. Resposta pessoal.

7. (UFG-GO) A seguir, é descrita uma brincadeira popular para se descobrir a idade de alguém. É pedido a uma pessoa, com idade inferior a 100 anos, que multiplique por dois o número do mês de seu aniversário, adicione 5 ao resultado e, em seguida, multiplique por 50 o valor obtido. Depois, ela deve adicionar a própria idade ao número obtido e informar o resultado. Subtraindo-se 250 desse resultado, obtém-se um número X, com o qual se descobre facilmente o mês de nascimento e a idade da pessoa.

Nessas condições, se o número do mês de nascimento é N, e a idade é I:

a) obtenha uma expressão matemática de X em função de N e de I; $X = 100N + I$

b) descubra o valor de N e de I, se o número obtido for $X = 819$. $N = 8; I = 19$

Produto cartesiano

Neste capítulo, já estudamos que uma função pode associar elementos de diferentes grandezas por meio de uma regra.

Antes de continuarmos o estudo das funções e fazermos a definição formal, vejamos alguns conceitos associados a esse estudo. Um desses conceitos é o de **produto cartesiano**.

Dados dois conjuntos *A* e *B* não vazios, denominamos produto cartesiano de *A* por *B*, indicado por $A \times B$, o conjunto cujos elementos são todos os pares ordenados (x, y), em que a 1ª coordenada pertence a *A* e a 2ª, a *B*:

$$\underbrace{A \times B}_{\text{lê-se } A \text{ cartesiano } B \text{ ou produto cartesiano de } A \text{ por } B} = \{(x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$$

O número de elementos de um produto cartesiano $A \times B$ é dado por $n(A) \cdot n(B)$.

Exemplo

Dados os conjuntos $A = \{1, 2\}$ e $B = \{2, 3, 4\}$, temos que:

- $A \times B = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4)\}$
- $B \times A = \{(2,1), (2,2), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2)\}$

Relações

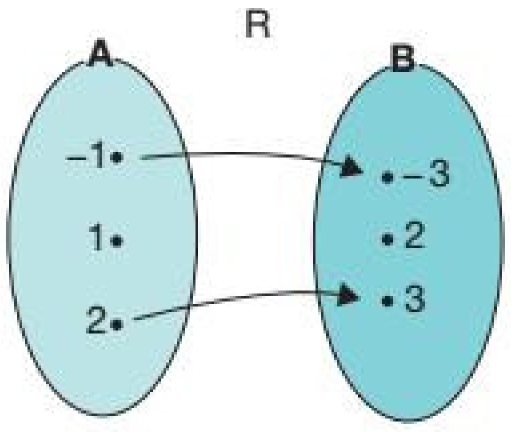
Dado um produto cartesiano $A \times B$, denomina-se **relação** de *A* em *B* qualquer subconjunto de $A \times B$.

Exemplo

Considere, por exemplo, os conjuntos $A = \{-1, 1, 2\}$ e $B = \{-3, 2, 3\}$, e a relação *R* de *A* em *B*, definida por $y = 2x - 1$, com $x \in A$ e $y \in B$. Substituindo os valores de *x* na lei da relação, temos:

x	$y = 2x - 1$	(x, y)
−1	$y = 2 \cdot (-1) - 1 = -2 - 1 = -3$	$(-1, -3)$
1	$y = 2 \cdot 1 - 1 = 2 - 1 = 1$	$(1, 1)$
2	$y = 2 \cdot 2 - 1 = 4 - 1 = 3$	$(2, 3)$

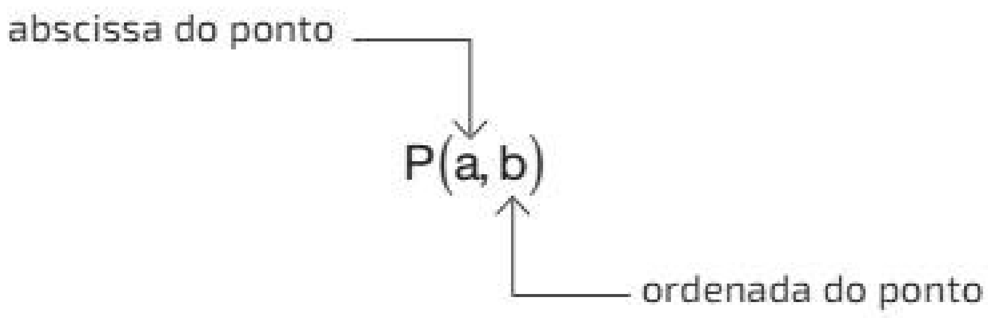
Como $A \times B = \{(-1, -3), (-1, 2), (-1, 3), (1, -3), (1, 2), (1, 3), (2, -3), (2, 2), (2, 3)\}$, temos que $(-1, -3)$ e $(2, 3)$ pertencem a $A \times B$. Já $(1, 1)$ não pertence a $A \times B$. Como *R* tem de ser subconjunto de $A \times B$, temos $R = \{(-1, -3), (2, 3)\}$.



As relações podem ser representadas por uma figura denominada **diagrama de flechas**. Para o exemplo acima, podemos construir o diagrama ao lado.

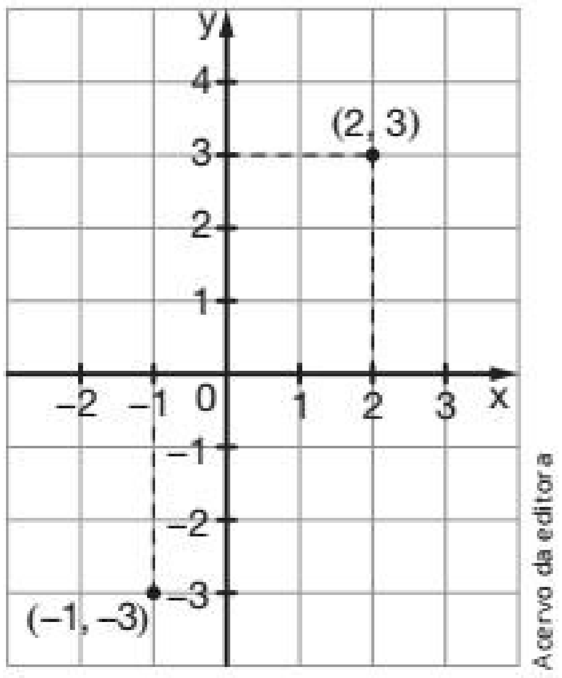
Outra maneira de representar uma relação é por meio do **plano cartesiano ortogonal**, que consiste em um plano com dois eixos perpendiculares, *x* e *y*. O horizontal *x* é denominado **eixo das abscissas** e o vertical *y*, **eixo das ordenadas**.

Os eixos *x* e *y* se cruzam em um ponto denominado origem. Esses eixos dividem o plano cartesiano em quatro regiões (quadrantes). Para localizar um ponto *P* nesse sistema, utilizamos coordenadas cartesianas. Essas coordenadas correspondem a um par ordenado (a, b), com $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$, em que *a* é a abscissa e *b*, a ordenada do ponto.



Ilustrações: Acervo da editora

Representando em um plano cartesiano ortogonal a relação $R = \{(-1, -3), (2, 3)\}$, temos:



Acervo da editora

O plano cartesiano recebe esse nome em homenagem ao matemático e filósofo francês René Descartes (1596-1650). Em um dos apêndices de **Discurso sobre o método**, sua obra mais famosa, Descartes propôs um método de localizar pontos em um sistema de eixos, introduzindo assim a noção de coordenadas. Posteriormente esse método foi aperfeiçoado, resultando no que atualmente denominamos sistema cartesiano ortogonal.

Frans Hals. Séc. XVII. Óleo sobre tela, 78 x 69 cm. Museu do Louvre, Paris (França)

Atividades

Anote as respostas no caderno.

8. Uma escola oferece quatro opções de cursos de idiomas (inglês, espanhol, alemão e mandarim) e três opções de cursos profissionalizantes (porteiro, garçom e segurança).

Sendo *I* o conjunto dos idiomas e *P* o conjunto dos cursos profissionalizantes oferecidos pela escola, responda. Uma possível resposta: possibilidades que uma pessoa

a) O que significa $I \times P$? tem de escolher um curso de idiomas e um profissionalizante nessa escola.

b) Quantos elementos tem $I \times P$? 12 elementos

c) Se uma pessoa escolher aleatoriamente um curso de idiomas e um profissionalizante, qual a chance de serem escolhidos "inglês" e "porteiro"? 1 em 12

9. Dados os conjuntos $P = \{-2, -3, 4\}$ e $T = \{-1, 2, 3\}$, represente no plano cartesiano:

a) $P \times T$ b) $T \times P$ c) $P \times P$

Respostas nas **Orientações para o professor**.

10. Dados os conjuntos $E = \{4, 5, 6\}$ e $F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, represente por meio de um diagrama de flechas a relação *R* de *E* em *F*, com $x \in E$ e $y \in F$, definida por: Respostas no final do livro.

a) $y < x$ b) $y = \frac{60}{x} - 9$ c) $y = 2x - 2$

11. Considere a relação *R* de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$, definida por $2x - y = 1$.

Qual dos conjuntos está contido em *R*? C

- $A = \{(1, 1), (3, 5), (3, 4)\}$
- $B = \{(2, 3), (3, 2), (5, 9)\}$
- $C = \{(1, 1), (2, 3), (3, 5)\}$
- $D = \{(3, 2), (4, 7), (9, 5)\}$

12. Considere $A = \{x \in \mathbb{R} | 3 \leq x \leq 7\}$ e $B = \{y \in \mathbb{R} | 2 \leq y \leq 6\}$. A representação de $A \times B$ em um plano cartesiano corresponde a qual polígono? quadrado

13. Dados os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{Z} | -4 < x \leq 3\}$ e $B = \{2, 4, 6, 8\}$, e a relação $R = \{(x, y) \in A \times B | y \geq x + 7\}$, classifique cada afirmativa em verdadeira (V) ou falsa (F). verdadeiras: IV e V; falsas: I, II, III e VI

I) $R = A \times B$

II) *R* tem um único elemento

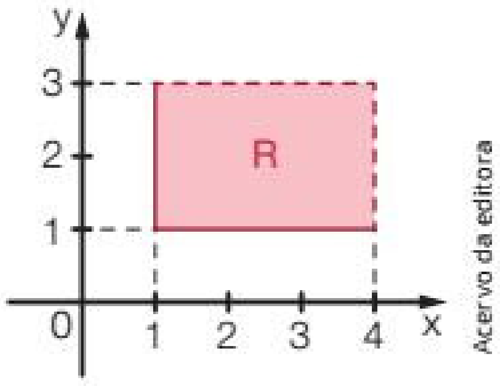
III) *R* tem apenas três elementos

IV) *R* tem 9 elementos

V) $R \subset A \times B$

VI) As cinco afirmações acima são falsas

14. (UFMS-MS) O conjunto *S* que melhor representa a região *R* do gráfico é: e



Acervo da editora

a) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | 1 \leq x \leq 4 \text{ e } 1 \leq y \leq 3\}$

b) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | 1 \leq x < 4 \text{ e } 1 \leq y \leq 3\}$

c) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | 1 \leq x \leq 4 \text{ e } 1 \leq y < 3\}$

d) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | 1 < x \leq 4 \text{ e } 1 < y \leq 3\}$

e) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | 1 \leq x < 4 \text{ e } 1 \leq y < 3\}$

Conceito de função

Autor desconhecido. Séc. XVIII. Gravura. Coleção particular

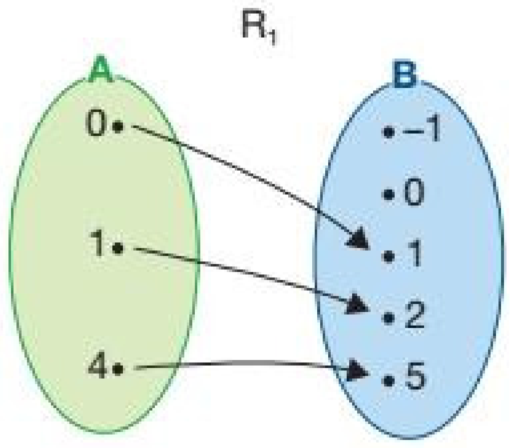
Gottfried Wilhelm Leibniz

Acredita-se que o termo **função** tenha sido introduzido na Matemática por Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) para, inicialmente, expressar a associação entre quantidades e curvas. A noção que temos atualmente de função deve-se às considerações feitas posteriormente por Leonhard Euler (1707-1783).

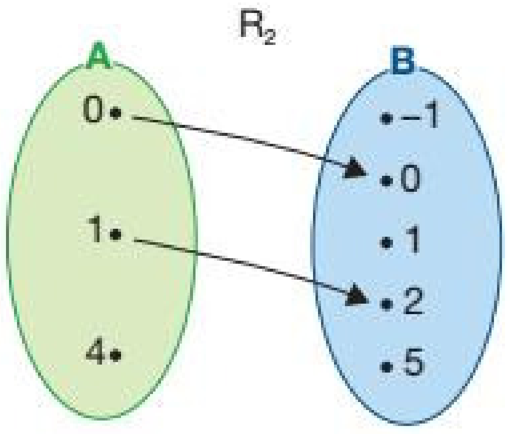
Conforme estudamos nos exemplos de noção intuitiva de função, a ideia básica é que temos dois conjuntos não vazios *A* e *B* e um mecanismo que associa elementos de *A* aos elementos de *B*. Entretanto, é preciso associar a cada elemento de *A* um único elemento de *B* para que possa ser caracterizada como "função de *A* em *B*". Observe.

Considere os conjuntos $A=\{0, 1, 4\}$ e $B=\{-1, 0, 1, 2, 5\}$ e as seguintes relações de *A* em *B*:

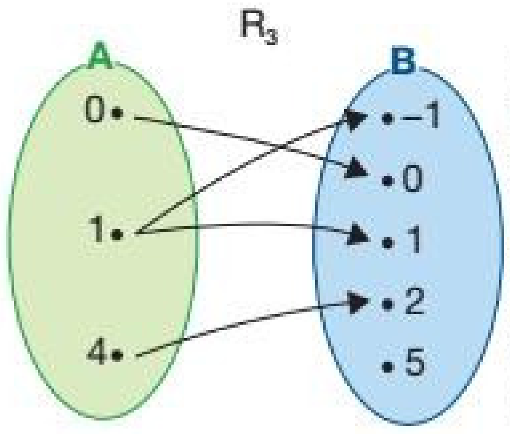
- $R_1=\{(x, y)\in A\times B \mid y=x+1\}$
- $R_2=\{(x, y)\in A\times B \mid y=2x\}$
- $R_3=\{(x, y)\in A\times B \mid y^2=x\}$



$R_1=\{(0, 1), (1, 2), (4, 5)\}$



$R_2=\{(0, 0), (1, 2)\}$



$R_3=\{(0,0),(1,-1),(1,1),(4,2)\}$

Ilustrações: Acervo da editora

- R_1 é função, pois a cada elemento de *A* corresponde um único elemento de *B*.
- R_2 não é função, pois existe elemento de *A* que não tem correspondente em *B*.
- R_3 não é função, pois existe elemento de *A* que tem dois correspondentes em *B*.

> Sejam os conjuntos *A* e *B* não vazios, uma relação *f* de *A* em *B* é uma **função** quando associa a cada elemento *x*, do conjunto *A*, um único elemento *y*, de *B*. Essa função pode ser indicada por:
>
> $f: A \to B$ ou $A \xrightarrow{f} B$ (lê-se "função *f* de *A* em *B*")
>
> O conjunto *A* é denominado **domínio** (D(f)) e o conjunto *B*, **contradomínio** (CD(f)) da função *f*. Cada elemento *y* de *B* que possui correspondente *x* em *A* é chamado **imagem** de *x* pela função *f*. O conjunto formado por todas as imagens é denominado **imagem da função** (Im(f)).

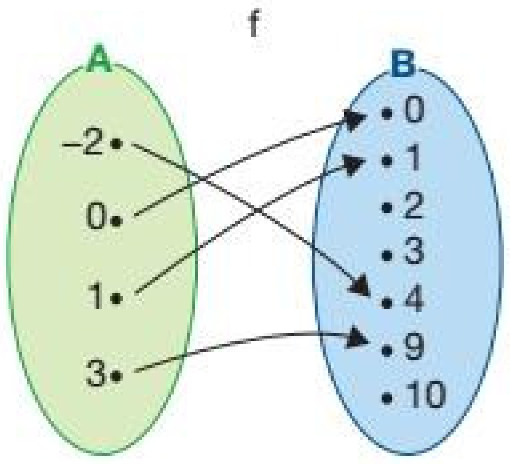
De maneira geral, indicamos uma função por letras minúsculas, como *f*, *g* e *h*.

Exemplo

Uma função *f* de *A* em *B*, com $A=\{-2, 0, 1, 3\}$ e $B=\{0, 1, 2, 3, 4, 9, 10\}$, que associa cada elemento *x* de *A* ao seu quadrado *y* em *B*, pode ser indicada pela fórmula (lei de formação) $y=x^2$ ou $f(x)=x^2$.

Utilizando a fórmula $f(x)=x^2$, podemos determinar a imagem *y* de cada elemento *x* de *A*:

- $f(-2)=(-2)^2=4$; a imagem de −2 é 4
- $f(0)=0^2=0$; a imagem de 0 é 0
- $f(1)=1^2=1$; a imagem de 1 é 1
- $f(3)=3^2=9$; a imagem de 3 é 9



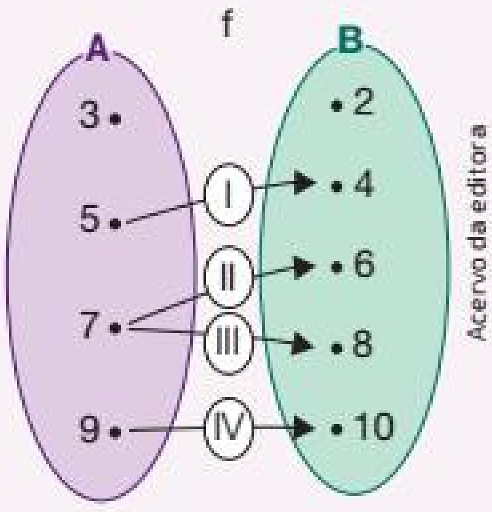
Acervo da editora

Na função *f*, temos $D(f)=A$, $CD(f)=B$ e $Im(f)=\{0, 1, 4, 9\}$.

Verifique se os alunos perceberam que, de acordo com a definição, em uma função pode ocorrer de mais de um elemento do domínio ter a mesma imagem no contradomínio.

Atividades resolvidas

R1. O esquema representa uma relação *f* de *A* em *B*. Para que *f* seja uma função, qual elemento e qual seta devem ser retirados?



Resolução

Para *f* ser uma função, cada elemento de *A* deve ter uma única imagem em *B*. Note que o elemento 3 de *A* não tem imagem em *B*. Além disso, o elemento 7 de *A* possui duas imagens em *B*, no caso, 6 e 8.

Portanto, devemos retirar o elemento 3 de *A* e a seta **II** (ou **III**), para que *f* seja uma função.

R2. Dada a função *f* de *A* em *B*, com $A=\{-1, 0, 1\}$ e $B=\{-3, 2, 4\}$, em que $f(x)=5x^2-3$, determine $Im(f)$ e construa um diagrama de flechas que represente essa relação.

Resolução

Temos que:

- $f(-1)=5\cdot(-1)^2-3=5-3=2$
- $f(0)=5\cdot 0^2-3=0-3=-3$
- $f(1)=5\cdot 1^2-3=5-3=2$

Portanto, $Im(f)=\{-3, 2\}$.

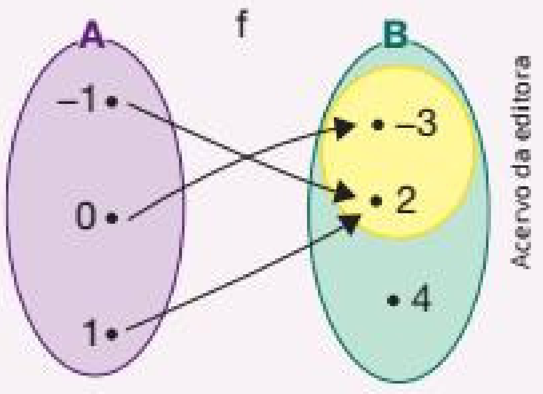


Diagrama de flechas

No diagrama, a parte em amarelo corresponde ao conjunto imagem da função.

R3. Seja a função *f* de *A* em *B*, dada pela lei de formação $f(x)=3+x$. Determine o elemento de *A* cuja imagem é 2.

Resolução

Temos que:

$$f(x)=2 \Rightarrow 2=3+x \Rightarrow x=2-3 \Rightarrow x=-1$$

Portanto, –1 é o elemento de *A* cuja imagem é 2.

R4. Um supermercado vende produtos no atacado e no varejo, sendo que as vendas são consideradas de atacado se o cliente comprar mais de 11 unidades de um mesmo produto. Sabendo que o preço de uma barra de cereal no varejo é R$ 1,99 e no atacado é R$ 1,65, escreva uma função definida por duas sentenças que represente o preço total *y* em função da quantidade *x* dessa barra de cereal. Em seguida, verifique se o preço total é menor ao comprar 10 ou 12 unidades.

Resolução

A função *f* que representa o preço total das barras de cereal em função da quantidade *x* é dada por:

$$f(x)=\begin{cases}1{,}99x, \text{ se } x \leq 11\\ 1{,}65x, \text{ se } x > 11\end{cases}$$

Calculando os preços de 10 e 12 unidades, temos:

- $f(10)=1{,}99\cdot 10=19{,}90 \rightarrow$ R$ 19,90
- $f(12)=1{,}65\cdot 12=19{,}80 \rightarrow$ R$ 19,80

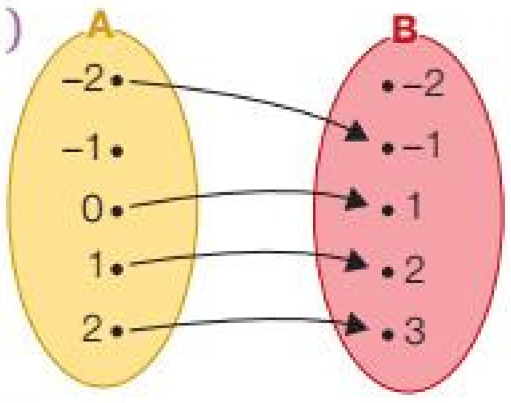
Desse modo, o preço total de 12 unidades é menor que o de 10 unidades.

Atividades

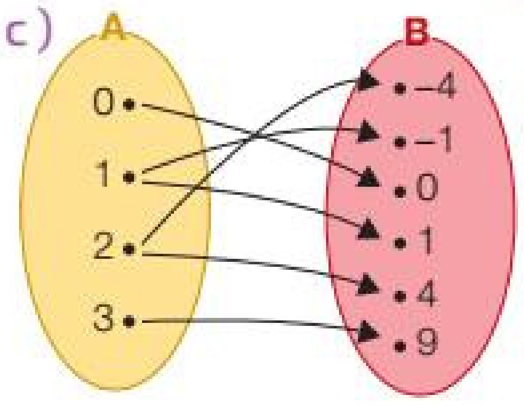
Anote as respostas no caderno.

15. Qual diagrama representa função de *A* em *B*? b

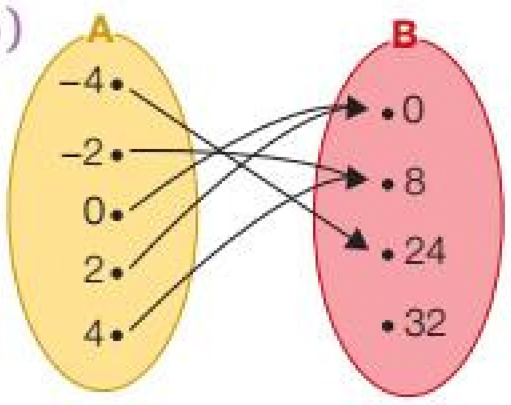
a)



c)



b)



Ilustrações: Acervo da editora

16. Sejam os conjuntos $A=\{1,3,5,7,9\}$ e $B=\{0,2,4,6,8\}$. Represente as relações a seguir por meio de diagramas de flechas e identifique qual delas é uma função de *A* em *B*. Respostas no final do livro.

a) $f=\{(x,y)\in A\times B \mid y=x-1\}$

b) $g=\{(x,y)\in A\times B \mid y=x+1\}$

c) $h=\{(x,y)\in A\times B \mid y=2x-2\}$

d) $i=\{(x,y)\in A\times B \mid y>x+2\}$

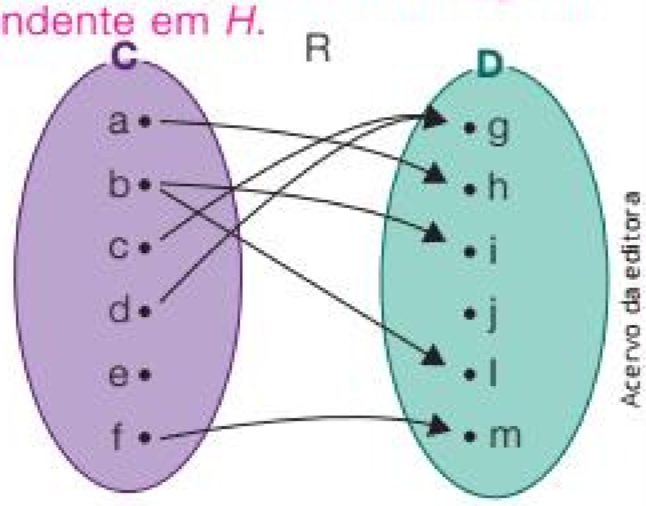
17. a) Sim, pois cada elemento do domínio *G* tem um único correspondente no contradomínio *H*.

17. Dados os conjuntos $G=\{-1,0,1,2\}$ e $H=\{-5,-1,0,1,4,12\}$, e a relação *R* de *G* em *H*, definida por $y=2x^3-3x^2$, responda.

a) A relação *R* é uma função? Justifique.

b) Caso seja acrescentado o elemento 3 ao conjunto *G*, a relação *R* será uma função? Justifique. Não, pois $3\in G$ não teria uma imagem correspondente em *H*.

18. O diagrama representa a relação *R* de *C* em *D*.



Acervo da editora

Para que *R* seja uma função, é necessário apenas que: d

a) exclua-se o elemento *e*.

b) excluam-se os elementos *e* e *j*.

c) exclua-se uma das flechas que partem de *b* e o elemento *j*.

d) exclua-se uma das flechas que partem de *b* e o elemento *e*.

19. Considere uma função *f* de *A* em *B* em que:

- $D(f)=\{3,9,12\}$
- $CD(f)=\{-3,-1,0,5,10,15\}$
- $Im(f)=\{-3,0,10\}$
- $f(3)=-3$
- $f(12)=10$

De acordo com as informações, represente a função *f* por meio de um diagrama de flechas. Resposta no final do livro.

20. Sendo *h* uma função de $A=\{x\in\mathbb{Z} \mid 1\leq x\leq 5\}$ em $\mathbb{Z}$, determine $Im(h)$ quando *h* for definida por:

a) $h(x)=\dfrac{120}{x}$ $Im(h)=\{24,30,40,60,120\}$

b) $h(x)=\dfrac{120}{x+1}$ $Im(h)=\{20,24,30,40,60\}$

c) $h(x)=\dfrac{120}{x}+1$ $Im(h)=\{25,31,41,61,121\}$

d) $h(x)=\dfrac{120}{x}-1$ $Im(h)=\{23,29,39,59,119\}$

21. Observe as fichas utilizadas em certo jogo para dois participantes.

$y=x^2+1$ $y=5x$ $y=x^2+2$

$y=2x-7$ $y=-x+5$

Para resolver essa atividade, peça aos alunos que suponham que o cálculo do valor de *y* em cada rodada seja realizado corretamente.

Nesse jogo, o primeiro participante diz um valor para *x*. O segundo deve escolher uma das funções, mentalmente, depois calcular e dizer o valor correspondente de *y*. Se o primeiro acertar a função escolhida, ganha 1 ponto, caso erre, quem ganha 1 ponto é o segundo participante. A cada rodada as atribuições dos participantes é alterada.

a) Em uma rodada, o valor escolhido para *x* foi 5 e o valor correspondente a *y*, calculado, foi 27. Qual foi a função escolhida? $y=x^2+2$

b) O valor escolhido para *x* em outra rodada foi 2 e o *y* correspondente calculado foi negativo. Qual foi o valor calculado de *y*? −3

c) Junte-se a um colega e, utilizando as fichas acima, realizem seis rodadas desse jogo. Ao final de cada uma delas, verifiquem juntos se os cálculos realizados estão corretos. Resposta pessoal.

22. Seja a função *f* de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=x^2-5x+m$. Sabendo que $f(3)=1$, qual o valor de $f(4)$? $f(4)=3$

23. No mundo, de acordo com a Organização Mundial de Saúde (OMS), morrem por hora cerca de 680 pessoas vítimas de doenças relacionadas ao tabagismo.

Fonte de pesquisa: <www1.inca.gov.br/wps/wcm/connect/agencianoticias/site/home/noticias/2013/cigarro_mata_seis_milhoes_pessoas_mundo_por_ano_diz_oms>. Acesso em: 29 out. 2015.

a) Escreva uma função que expresse o número *p* de pessoas mortas por doenças relacionadas ao tabagismo em função do tempo *t*, em horas. $p(t)=680t$

b) A partir da função que você escreveu no item **a**, calcule e explique o que representa $p(24)$. Resposta no final do livro.

24. O volume *v* de um cilindro é dado pela fórmula $v=\pi r^2 h$, em que π é uma constante, *r* é o raio da base e *h* é a altura do cilindro. Escreva a função que expressa o volume *v* de um cilindro de altura 3 dm em função do raio *r*. Qual é o volume desse cilindro quando o diâmetro da base for 4 dm? $v(r)=3\pi r^2$; 12π dm³

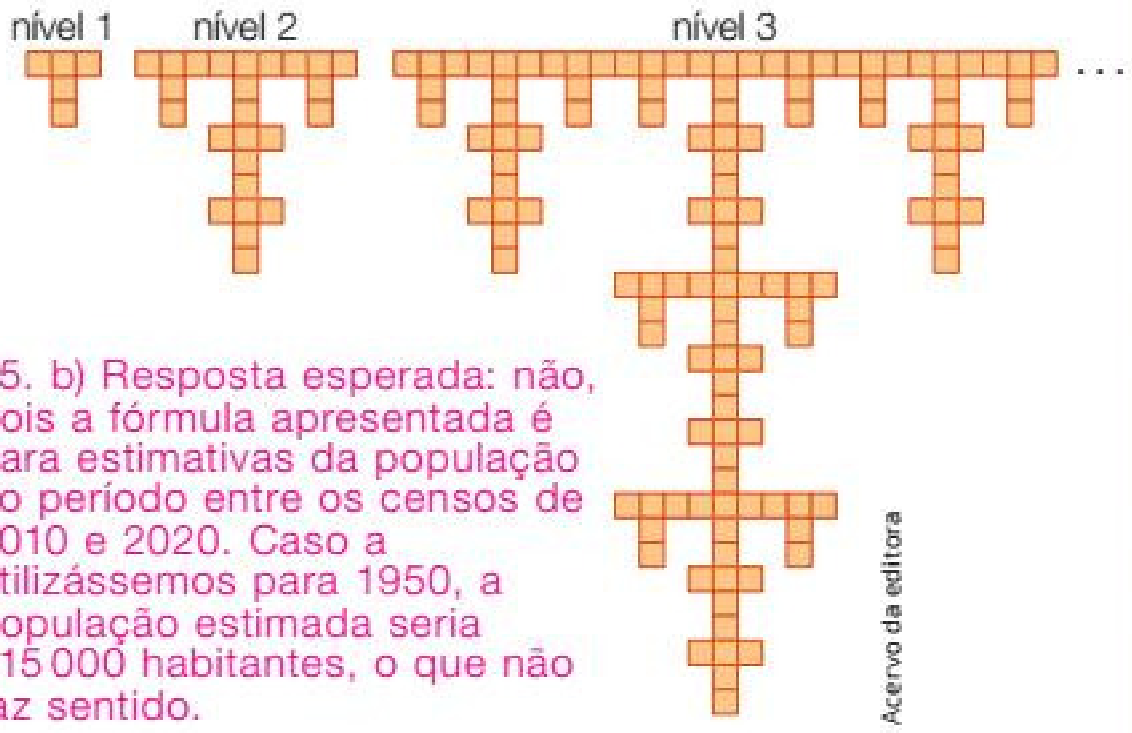
25. Estudamos nas páginas **40** e **41** que o IBGE realiza estimativas da população com diversas finalidades. Suponha, por exemplo, que entre os censos de 2010 e 2020 a população de um município pudesse ser estimada por meio da função $p(t) = 2{,}3t - 4\,500$, na qual *p* representa a quantidade de indivíduos que compõem a população, em milhares de habitantes, no ano *t*.

a) Determine a população estimada desse município em 2013 e em 2019. 2013: 129 900 habitantes; 2019: 143 700 habitantes

b) É adequado estimar a população desse município em 1950 por meio da fórmula apresentada? Por quê?

25. b) Resposta esperada: não, pois a fórmula apresentada é para estimativas da população no período entre os censos de 2010 e 2020. Caso a utilizássemos para 1950, a população estimada seria −15 000 habitantes, o que não faz sentido.

26. Observe a sequência de figuras.



Acervo da editora

Considerando que a figura do nível 1 é formada por 5 quadradinhos, resolva:

a) Qual das funções associa o nível *x* à quantidade *q* de quadradinhos da figura? II

I) $q(x) = 5x$ II) $q(x) = 5^x$ III) $q(x) = x^5$

b) Quantos quadradinhos tem a figura do nível 6? E do nível 10? 15 625 quadradinhos; 9 765 625 quadradinhos

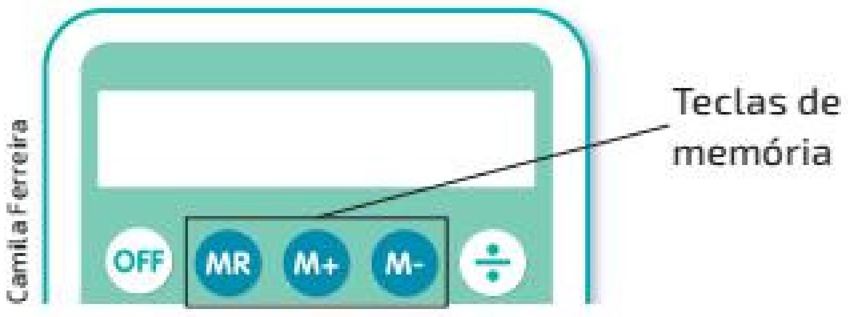
27. O preço *p* de certo terreno, dado em reais, em função do tempo *t* em anos, pode ser descrito por $p(t) = a \cdot b^t$, em que *a* e *b* são constantes reais positivas. Sabe-se que atualmente esse terreno custa R$ 80 000,00 e que daqui a 2 anos custará cerca de R$ 115 200,00. $a = 80\,000$; $b = \frac{6}{5}$

a) Quais são os valores das constantes *a* e *b*?

b) Daqui a 4 anos, quantos reais custará esse terreno? R$ 165 888,00

28. Calculadora

Observe algumas informações sobre as teclas de memória de uma calculadora comum.



Camila Ferreira

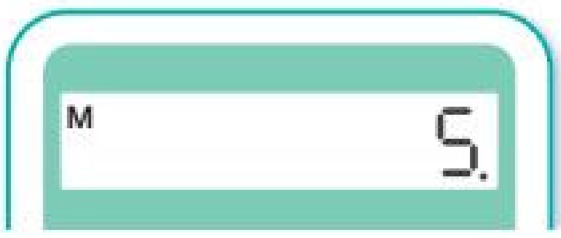
tecla M+: utilizada para armazenar na memória um número digitado ou para adicioná-lo àquele armazenado na memória.

tecla M-: utilizada para subtrair um número daquele armazenado na memória.

tecla MR: resgata o número armazenado na memória. Quando acionada duas vezes, "limpa" a memória.

Veja como podemos resolver $(320:64) - (231:33)$ utilizando a memória de uma calculadora.

- Com a calculadora ligada, efetuamos 320:64 e digitamos a tecla M+.



- Efetuamos 231:33 e digitamos a tecla M-.

- Digitamos a tecla MR e obtemos o resultado −2.

Ilustrações: Camila Ferreira

Observe somas parciais de valores obtidos por meio da função $f(x) = \frac{1}{2^x}$, em que $D(f) = \mathbb{N}$.

x	f(x)	somas parciais de f(0) a f(x)
0	$\frac{1}{2^0} = 1$	1
1	$\frac{1}{2^1} = 0{,}5$	1,5
2	$\frac{1}{2^2} = 0{,}25$	1,75
3	$\frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0{,}125$	1,875
...	...	...

a) Com o auxílio da memória da calculadora, calcule as somas parciais para $x = 4$, $x = 5$, $x = 6$ e $x = 7$. 1,9375; 1,96875; 1,984375; 1,9921875

b) Quando aumentamos o valor de *x*, a soma parcial se aproxima de qual número real? Resposta esperada: 2.

Lembre-se de que as potências naturais de 2 são: $2^0 = 1$, $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, $2^5 = 32$, $2^6 = 64$, $2^7 = 128$, ...

Estudo do domínio de uma função

Estudamos que uma função *f* de *A* em *B* é uma relação que apresenta um domínio (A) e um contradomínio (B). Na função *f* de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{Z}$, definida por $f(x)=2x-10$, por exemplo, temos que o domínio é o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais e o contradomínio é o conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros, ou seja, $D(f)=\mathbb{N}$ e $CD(f)=\mathbb{Z}$.

Porém, em algumas situações, o domínio e o contradomínio de uma função não estão explícitos, sendo apresentada apenas a lei de formação. Nesses casos, consideramos que o domínio seja o maior subconjunto possível dos números reais $(D\subset\mathbb{R})$ para o qual a lei de formação faz sentido, e o contradomínio, o próprio conjunto dos números reais $(CD=\mathbb{R})$.

Exemplos

- Na função $f(x)=\sqrt{x}$, como não existe raiz quadrada de números negativos no conjunto dos números reais, consideramos que o domínio seja o conjunto dos números reais não negativos $\mathbb{R}_+$.

  $D(f)=\mathbb{R}_+$ ou $D(f)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\geq 0\}$

- Na função $g(x)=\frac{1}{x}$, o domínio da função é dado pelo conjunto dos números reais não nulos, pois não está definido em $\mathbb{R}$ frações com denominador zero.

  $D(g)=\mathbb{R}^*$ ou $D(g)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\neq 0\}$

- Na função $h(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$, o domínio da função é dado pelo conjunto dos números reais positivos, pois não está definido em $\mathbb{R}$ frações com denominador zero e raiz quadrada de números negativos.

  $D(h)=\mathbb{R}_+^*$ ou $D(h)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x>0\}$

Atividades resolvidas

R5. Qual o domínio da função $f(x)=\begin{cases}\frac{2}{x-3}, \text{ se } x<0\\ \sqrt{2x-3}, \text{ se } x\geq 0\end{cases}$?

Resolução

Para determinar o domínio da função, estudamos dois casos:

- se $x<0$, temos $f(x)=\frac{2}{x-3}$, então:

  $x-3\neq 0\Rightarrow x\neq 3$

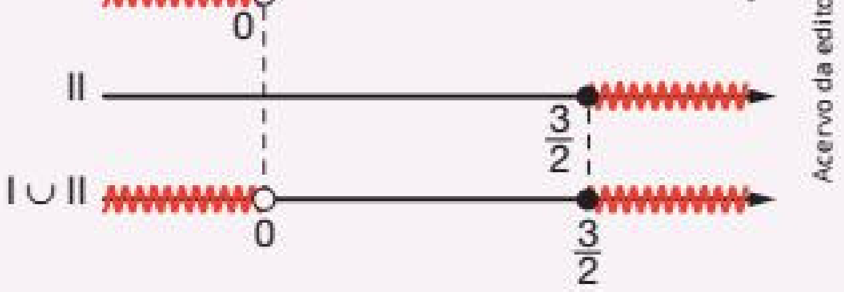
  Como $x<0\Rightarrow x\neq 3$, temos $x<0$ (I).

- se $x\geq 0$, temos $f(x)=\sqrt{2x-3}$, então:

  $2x-3\geq 0\Rightarrow 2x\geq 3\Rightarrow x\geq\frac{3}{2}$

  Como $x\geq\frac{3}{2}\Rightarrow x\geq 0$, temos $x\geq\frac{3}{2}$ (II).

A solução é dada pela união das condições I e II:



Acervo da editora

Assim, $D(f)=\left]-\infty,0\right[\cup\left[\frac{3}{2},+\infty\right[$ ou $D(f)=\left\{x\in\mathbb{R}\,|\,x<0 \text{ ou } x\geq\frac{3}{2}\right\}$.

R6. Determine o domínio da função $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}}$.

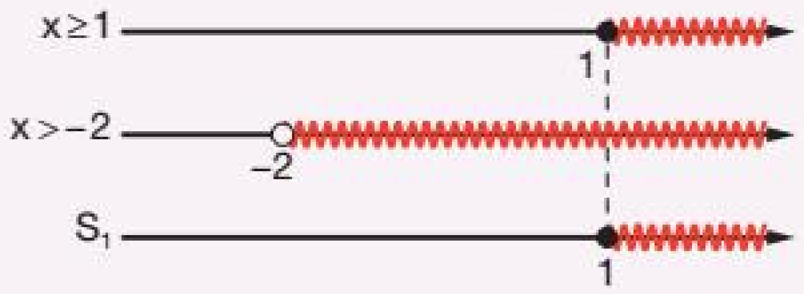
Resolução

Para a condição $\dfrac{x-1}{x+2}\geq 0$, temos duas possibilidades.

- Numerador não negativo e denominador positivo:

$$x-1\geq 0 \Rightarrow x\geq 1$$
$$x+2>0 \Rightarrow x>-2$$

Como as duas inequações devem ser satisfeitas simultaneamente, realizamos a interseção das condições:

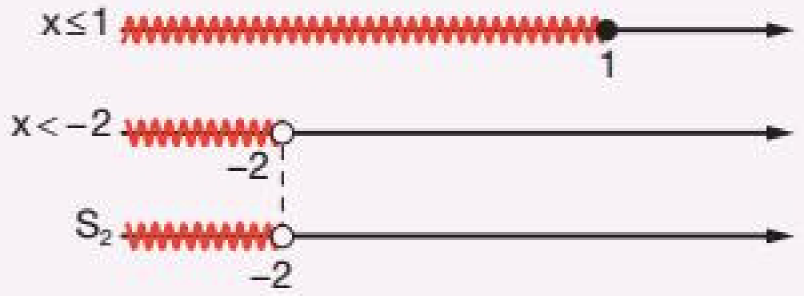


Logo, $x\geq 1$.

- Numerador não positivo e denominador negativo:

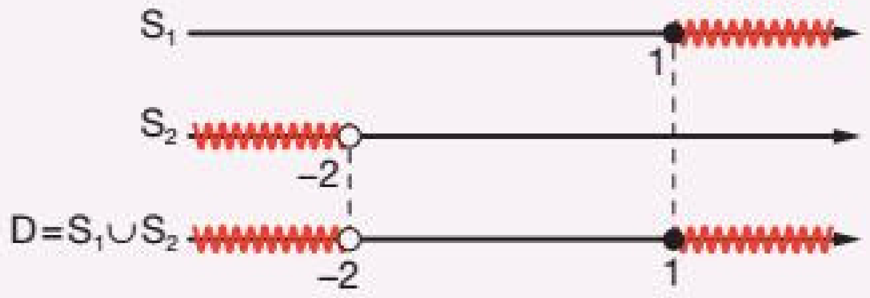
$$x-1\leq 0 \Rightarrow x\leq 1$$
$$x+2<0 \Rightarrow x<-2$$

Como as duas inequações devem ser satisfeitas simultaneamente, realizamos a interseção das condições:



Logo, $x<-2$.

O domínio da função é dado pela união das duas soluções.



Ilustrações: Acervo da editora

Portanto, $D=\{x\in\mathbb{R}\mid x<-2 \text{ ou } x\geq 1\}$.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

29. Determine o domínio das funções: Respostas no final do livro.

a) $f(x)=\dfrac{x+1}{2}$

b) $f(x)=\dfrac{2}{x+1}$

c) $f(x)=\dfrac{\sqrt{5}}{x-7}$

d) $f(x)=\sqrt{12-x}$

e) $f(x)=\dfrac{20-x}{\sqrt{4-x}}$

f) $f(x)=\dfrac{3x^2-2}{\sqrt{3x-6}}$

30. O domínio da função $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+8}}{\sqrt{-4x-16}}$ é: b

a) $]-4,8]$

b) $[-8,-4[$

c) $]-8,-4]$

d) $[-8,-4]$

e) $\mathbb{R}$

31. Uma pequena empresa montadora de bicicletas tem seu custo diário *c*, em reais, determinado pela função $c(b)=-3b^2+72b+450$, em que *c* depende do número *b* de bicicletas montadas no dia. Sabendo que a capacidade máxima de montagem dessa empresa é de 16 bicicletas ao dia, responda:

a) Qual o custo fixo diário dessa empresa? R$ 450,00

b) Qual dos conjuntos a seguir pode representar o domínio de *c*? III

I) $D(c)=\mathbb{Z}$

II) $D(c)=\{b\in\mathbb{N}\mid -1\leq b\leq 16\}$

III) $D(c)=\{b\in\mathbb{Z}\mid 0\leq b\leq 16\}$

IV) $D(c)=\{b\in\mathbb{N}\mid 0<b<16\}$

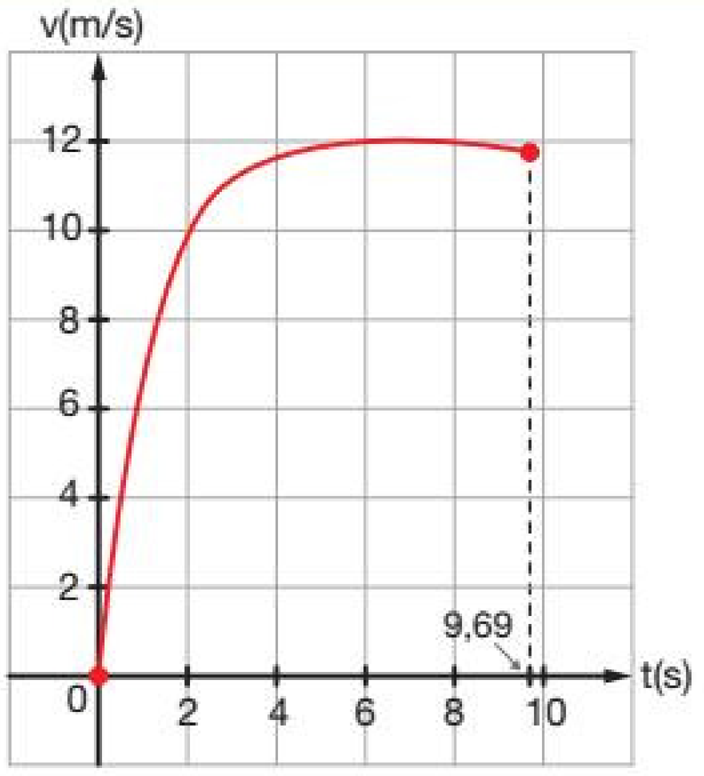
Gráfico de uma função

Os diversos tipos de gráficos serão estudados mais detalhadamente ao longo desta coleção.

Ao lermos uma revista ou um jornal, assistirmos ao noticiário na televisão ou até mesmo acessarmos um *site*, é possível observar diversos tipos de gráficos. Em geral, esses gráficos são utilizados para facilitar a exposição e compreensão de informações, sendo que muitos deles representam funções.

Observe, por exemplo, o gráfico a seguir.

Velocidade em função do tempo do atleta Usain Bolt na corrida de 100 m, nos Jogos Olímpicos de Verão Pequim 2008



Acervo da editora

Fonte: YAMASHITA, M. T. Uma breve análise da física da corrida de 100 metros rasos. **Revista da Biologia**. São Paulo: USP, v.11(1), p. 8-11, jan. 2014.

Vladimir Rys/Bongarts/Getty Images

Nos Jogos Olímpicos de Verão Pequim 2008, o atleta Usain Bolt tornou-se um dos maiores velocistas da história, ao conquistar três medalhas de ouro e quebrar três recordes mundiais. Na fotografia Usain Bolt vence a prova final dos 100 m, em Pequim na China, em 2008.

Esse gráfico representa uma função da velocidade obtida pelo jamaicano Usain Bolt, em cada instante, durante a corrida dos 100 m em que registrou pela primeira vez um recorde olímpico.

Ao analisarmos esse gráfico, podemos notar que:

- o domínio da função é o intervalo real $[0; 9{,}69]$, que corresponde à variação do tempo da corrida, ou seja, de 0 s a 9,69 s;
- a curva é mais acentuada nos primeiros 4 s de prova, o que mostra um aumento mais intenso na velocidade do atleta nessa parte da prova.

De modo geral, o gráfico de uma função *f* é o conjunto de todos os pontos de coordenadas (x, y) no plano cartesiano, com $x \in D(f)$ e $y = f(x)$.

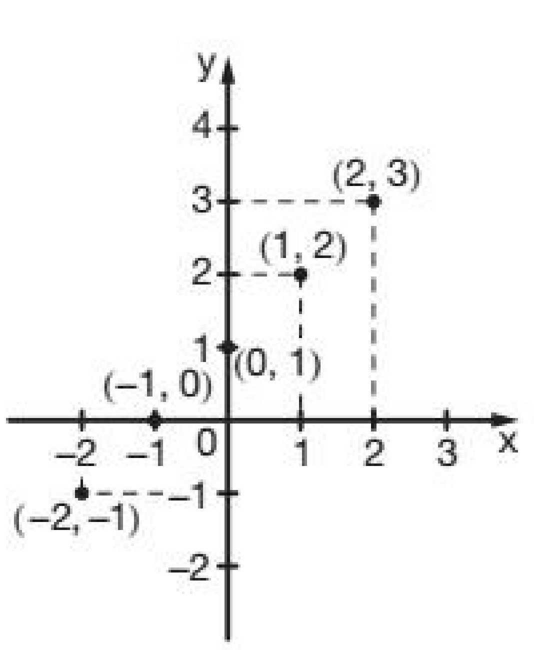
Para que os alunos compreendam melhor a construção dos esboços dos gráficos tratados nos exemplos, proponha a eles a determinação de outros pares ordenados, atribuindo valores a *x* entre os já apresentados. Em seguida, peça que identifiquem, no respectivo gráfico, a localização dos pontos correspondentes aos pares ordenados obtidos.

Exemplo 1

Seja a função *g* de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $g(x) = x + 1$.

Para esboçar o gráfico de *g*, obtemos inicialmente pares ordenados (x, y), para valores arbitrários de *x*, e os representamos em um plano cartesiano.

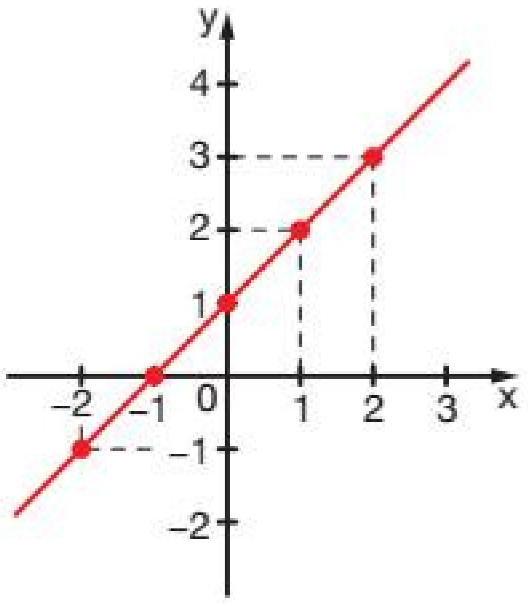
x	$g(x) = x + 1$	(x, y)
-2	$g(-2) = -2 + 1 = -1$	$(-2, -1)$
-1	$g(-1) = -1 + 1 = 0$	$(-1, 0)$
0	$g(0) = 0 + 1 = 1$	$(0, 1)$
1	$g(1) = 1 + 1 = 2$	$(1, 2)$
2	$g(2) = 2 + 1 = 3$	$(2, 3)$



Acervo da editora

A função $g(x) = x + 1$ é um exemplo de função afim, cujo gráfico é uma reta. Estudaremos em mais detalhes esse tipo de função no capítulo **3**.

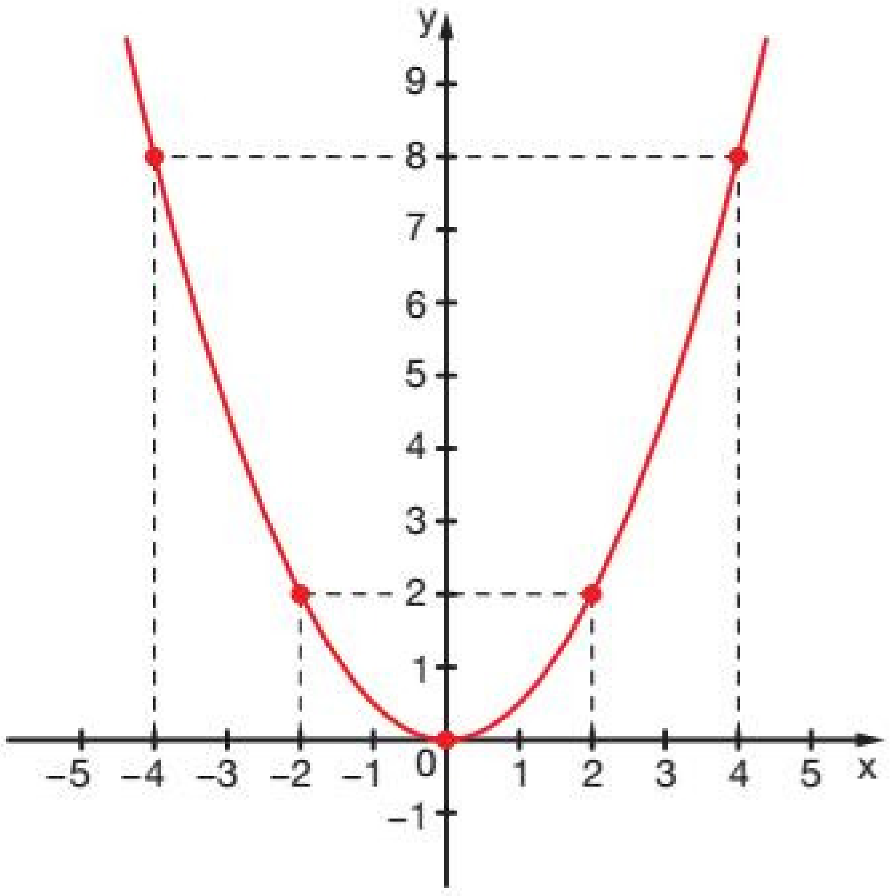
Temos que $D(g)=\mathbb{R}$, ou seja, há infinitos valores para x que podem ser associados a infinitos valores para y. Dessa maneira, no gráfico de g existem infinitos pontos entre os indicados no plano cartesiano da página anterior. Os pontos marcados sugerem que o gráfico de g é uma reta, o que mostraremos ser verdade no capítulo **3**.



Exemplo 2

Função h de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $h(x)=\frac{x^2}{2}$.

x	$h(x)=\frac{x^2}{2}$	(x, y)
−4	$h(-4)=\frac{(-4)^2}{2}=8$	$(-4, 8)$
−2	$h(-2)=\frac{(-2)^2}{2}=2$	$(-2, 2)$
0	$h(0)=\frac{0^2}{2}=0$	$(0, 0)$
2	$h(2)=\frac{2^2}{2}=2$	$(2, 2)$
4	$h(4)=\frac{4^2}{2}=8$	$(4, 8)$



A função $h(x)=\frac{x^2}{2}$ é um exemplo de função quadrática, cujo gráfico é uma curva denominada parábola. Estudaremos em mais detalhes esse tipo de função no capítulo **4**.

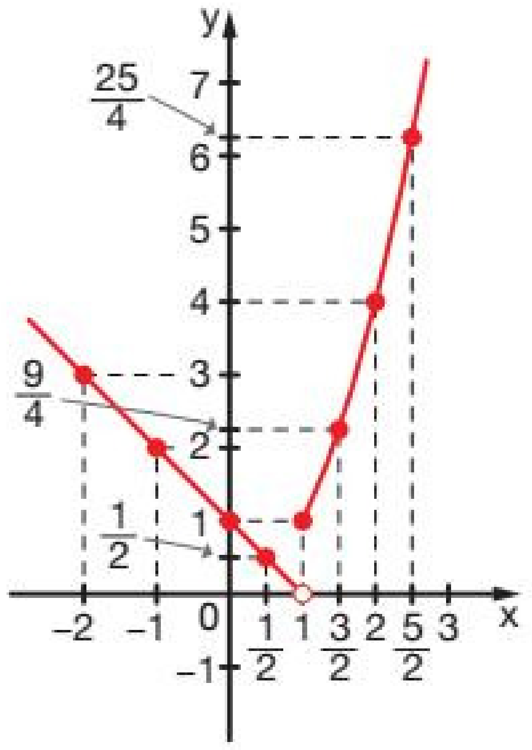
Exemplo 3

Função p de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $p(x)=\begin{cases}1-x, \text{ se } x<1\\ x^2, \text{ se } x\geq 1\end{cases}$.

A função p é definida por duas sentenças, uma para $x<1$ e outra para $x\geq 1$.

$x<1$		
x	$p(x)=1-x$	(x, y)
−2	$p(-2)=1-(-2)=3$	$(-2, 3)$
−1	$p(-1)=1-(-1)=2$	$(-1, 2)$
0	$p(0)=1-0=1$	$(0, 1)$
$\frac{1}{2}$	$p\left(\frac{1}{2}\right)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$x\geq 1$		
x	$p(x)=x^2$	(x, y)
1	$p(1)=1^2=1$	$(1, 1)$
$\frac{3}{2}$	$p\left(\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$	$\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$
2	$p(2)=2^2=4$	$(2, 4)$
$\frac{5}{2}$	$p\left(\frac{5}{2}\right)=\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$	$\left(\frac{5}{2}, \frac{25}{4}\right)$

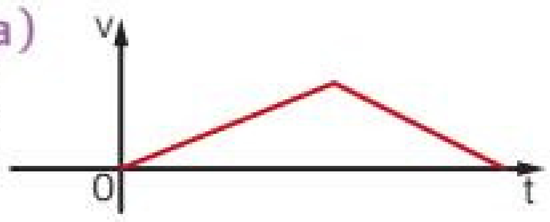


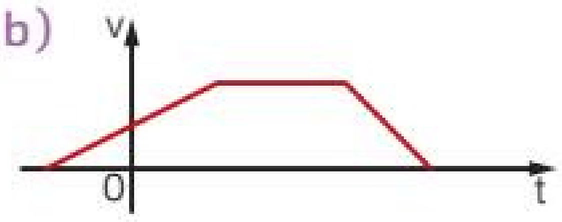
Ilustrações: Acervo da editora

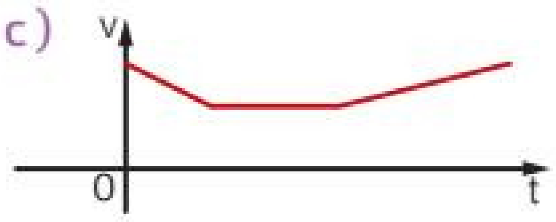
Atividades

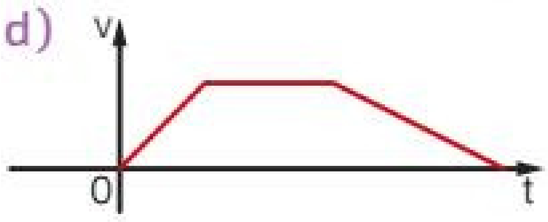
Anote as respostas no caderno.

32. Em certo instante $t=0$, um avião sai do repouso e começa a ganhar velocidade na pista até decolar. Mantém velocidade constante no trajeto e, ao se aproximar do ponto de aterrissagem, reduz a velocidade, pousa e para. O gráfico que melhor representa a velocidade v do avião em função do tempo t é: d

a)


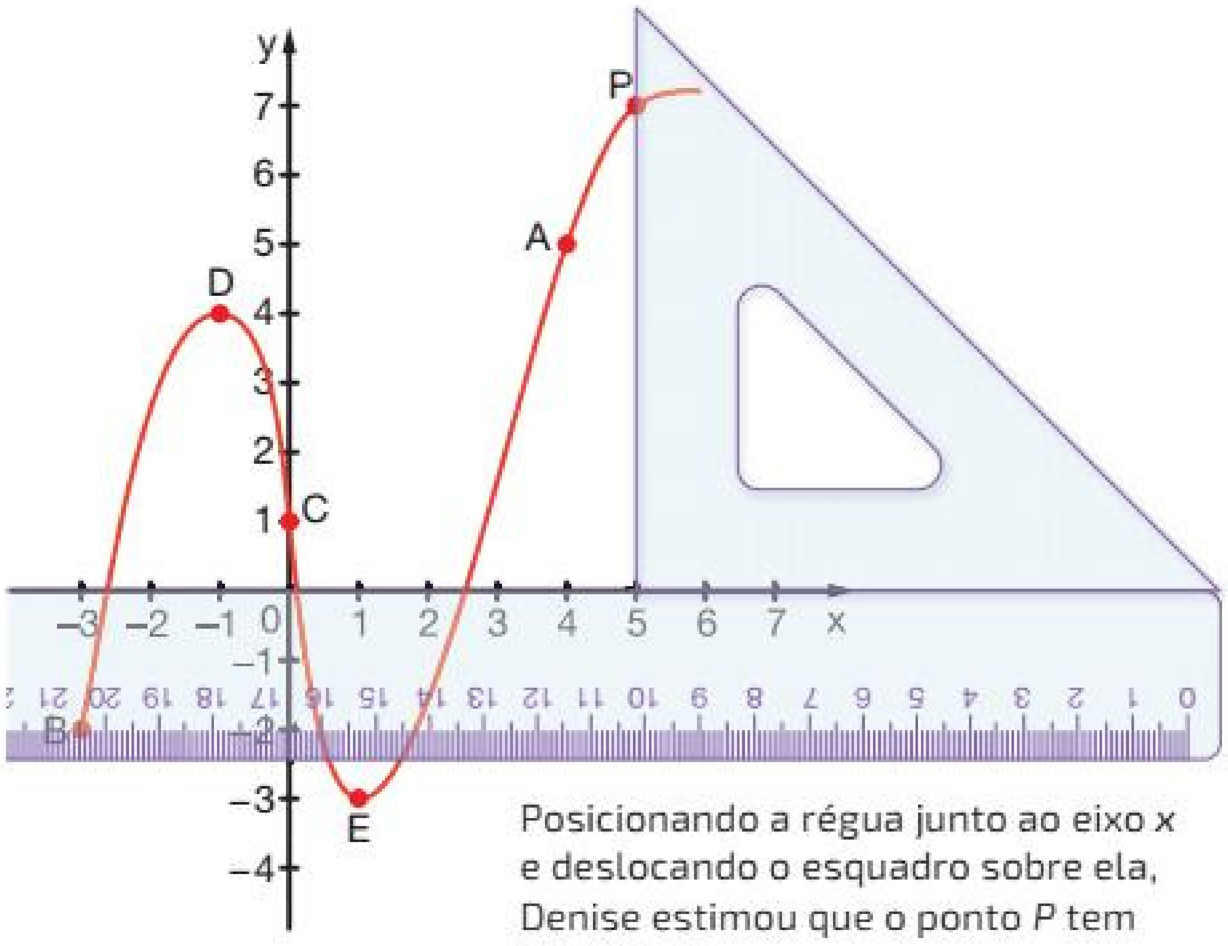
b)


c)


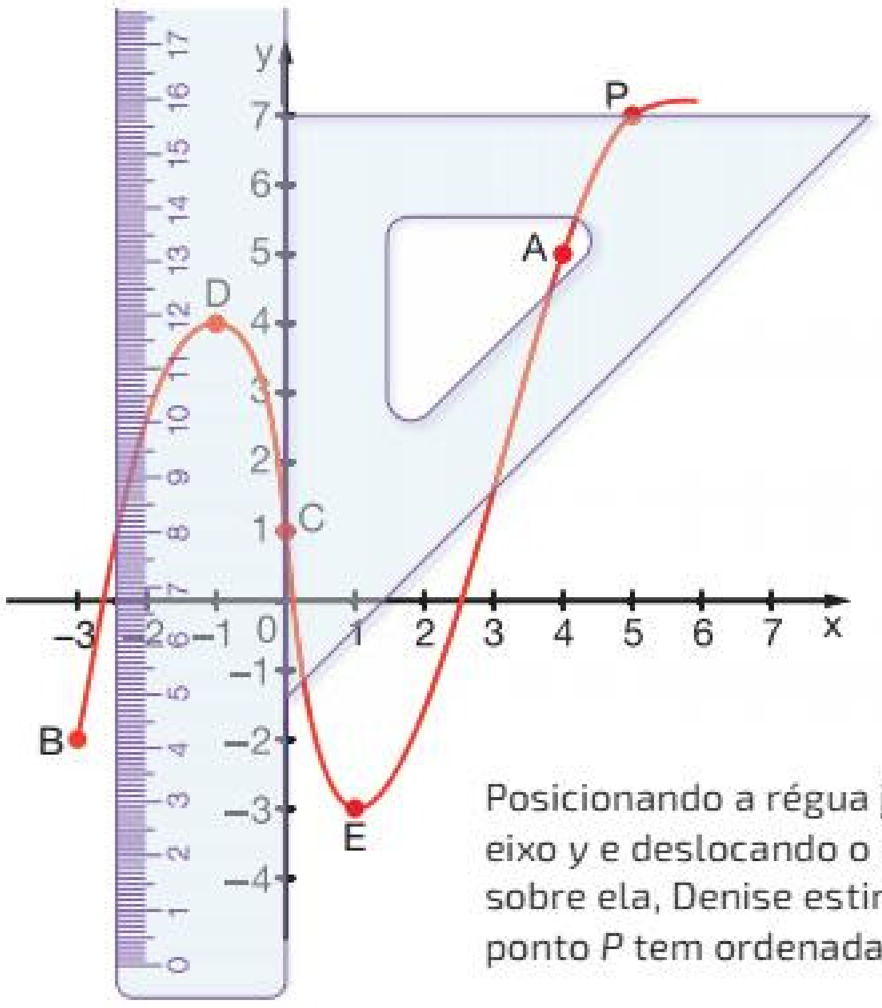
d)


Ilustrações: Acervo da editora

33. Para estimar as coordenadas de um ponto *P* em certo gráfico, Denise utilizou uma régua e um esquadro, conforme segue.



Posicionando a régua junto ao eixo *x* e deslocando o esquadro sobre ela, Denise estimou que o ponto *P* tem abscissa 5.



Posicionando a régua junto ao eixo *y* e deslocando o esquadro sobre ela, Denise estimou que o ponto *P* tem ordenada 7.

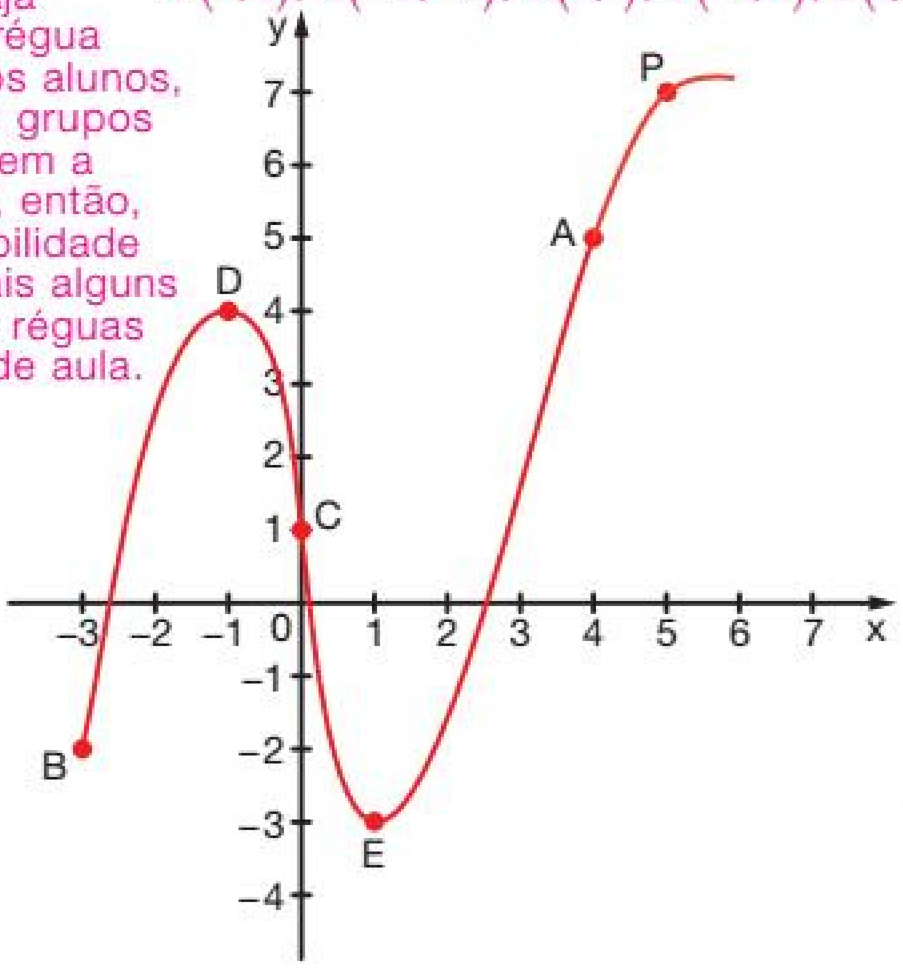
Ilustrações: Camila Ferreira

Assim, Denise estimou que o ponto *P* tem coordenadas (5, 7).

De maneira semelhante, estime as coordenadas dos outros pontos indicados no gráfico a seguir.

A(4, 5), B(−3, −2), C(0, 1), D(−1, 4), E(1, −3)

Caso não haja esquadro e régua para todos os alunos, reúna-os em grupos para realizarem a atividade ou, então, veja a possibilidade de trazer mais alguns esquadros e réguas para a sala de aula.



Acervo da editora

34. Esboce o gráfico de cada função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ a seguir. Respostas nas **Orientações para o professor**.

a) $f(x) = x - 3$

b) $f(x) = -2x + 5$

c) $f(x) = -5x$

d) $f(x) = \begin{cases} 2x-1, \text{ se } x<1 \\ -2x+1, \text{ se } x \geq 1 \end{cases}$

e) $f(x) = \dfrac{x^2}{4}$

35. Dadas as funções *f* de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e *g* de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$, definidas por $f(x) = 3x + 2$ e $g(x) = 3x + 2$, esboce os gráficos de *f* e de *g* em planos cartesianos distintos e escreva qual a diferença entre esses gráficos. Resposta nas **Orientações para o professor**.

36. A água potável está se tornando cada vez mais escassa. Ao reduzir seu consumo em uma residência, além de evitar o desperdício, possibilita aos moradores uma economia financeira, visto que em geral o valor cobrado na tarifa mensal da água depende da quantidade de metros cúbicos consumidos.

Em uma certa companhia de saneamento, o valor da fatura residencial é calculado da seguinte maneira:

- até 10 m³: R$ 42,00;
- acima de 10 m³ e até 30 m³: R$ 42,00 mais R$ 5,90 por metro cúbico excedente a 10 m³;
- acima de 30 m³: R$ 160,00 mais R$ 10,50 por metro cúbico excedente a 30 m³.

a) Escreva algumas medidas que evitam o desperdício de água potável.

b) Para o exemplo apresentado, considere uma função *f* que associa o consumo *x* de metros cúbicos de água ao valor $y = f(x)$ da fatura. Essa função pode ser expressa por qual das fórmulas a seguir? II

36. a) Algumas possíveis respostas: não deixar a torneira pingando; evitar banhos demorados; fechar a torneira enquanto escova os dentes.

I) $f(x) = \begin{cases} 42, \text{ se } 0 \leq x \leq 10 \\ 42 + 5{,}9x, \text{ se } 10 < x \leq 30 \\ 160 + 10{,}5x, \text{ se } x > 30 \end{cases}$

II) $f(x) = \begin{cases} 42, \text{ se } 0 \leq x \leq 10 \\ 42 + 5{,}9(x-10), \text{ se } 10 < x \leq 30 \\ 160 + 10{,}5(x-30), \text{ se } x > 30 \end{cases}$

III) $f(x) = \begin{cases} 42x, \text{ se } 0 \leq x \leq 10 \\ 42x + 5{,}9, \text{ se } 10 < x \leq 30 \\ 160x + 10{,}5, \text{ se } x > 30 \end{cases}$

c) A partir da função indicada no item **b**, determine o valor a ser pago pelo consumo de:

- 7 m³ R$ 42,00
- 30 m³ R$ 160,00
- 34 m³ R$ 202,00

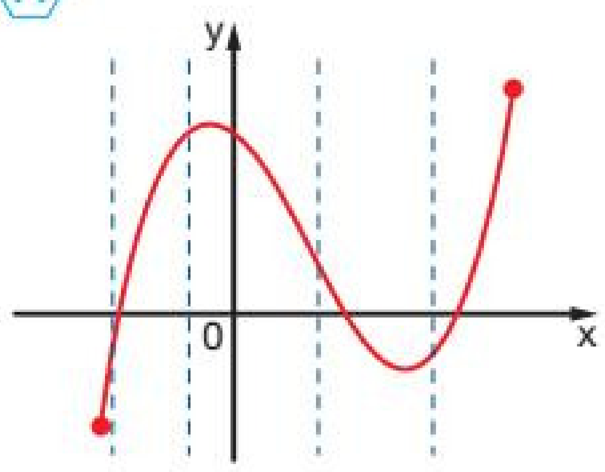
d) Esboce o gráfico da função *f* indicada no item **b**. Resposta nas **Orientações para o professor**.

Para esboçar o gráfico no item **d** desta atividade, uma possibilidade é utilizar um programa de computador, como o *Geogebra*. Para isso, consulte a seção **Acessando tecnologias**.

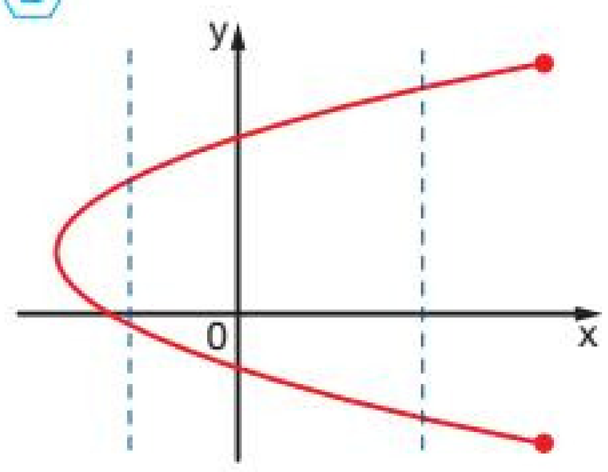
Análise do gráfico de uma função

Estudamos anteriormente que uma relação *f* é função se associa a cada $x \in D(f)$ um único $y \in CD(f)$. A partir dessa característica, podemos verificar se certo gráfico representa uma função. Observe dois gráficos.

A



B

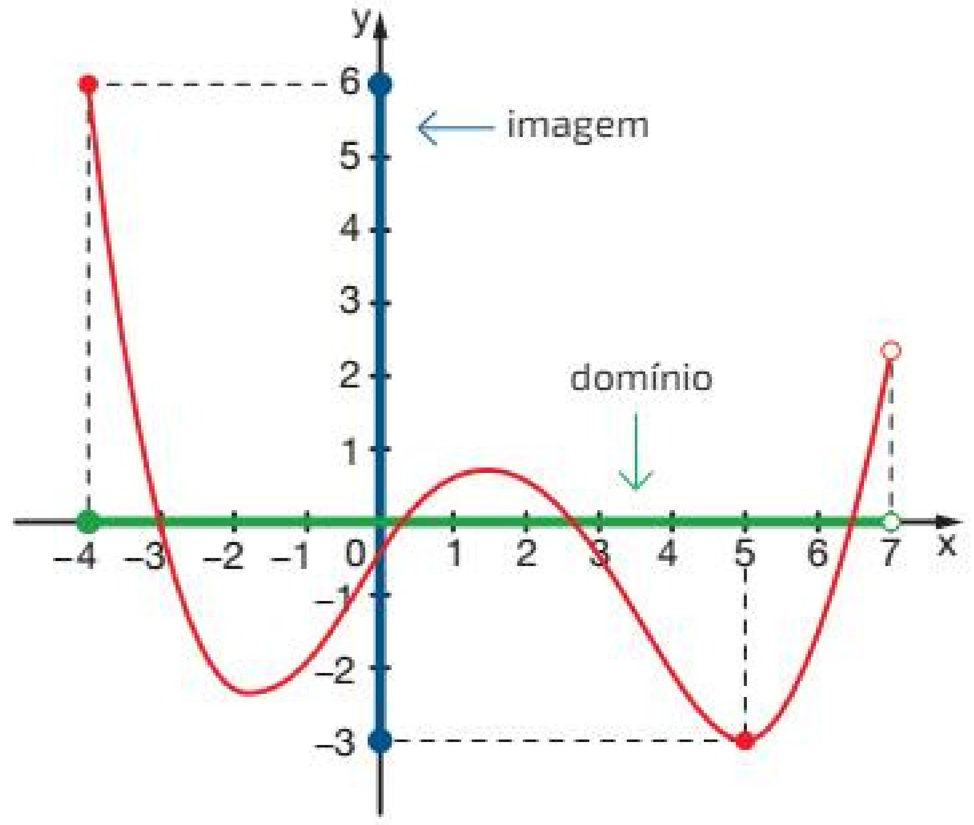


No gráfico *A*, qualquer que seja a reta traçada paralelamente ao eixo *y*, cortará o gráfico em um único ponto, ou seja, não há abscissa *x* associada a mais de uma ordenada *y*. Dizemos então que o gráfico *A* corresponde a uma função.

Já no gráfico *B*, note que podem ser traçadas retas paralelas ao eixo *y* cortando o gráfico em dois pontos distintos, ou seja, existe pelo menos uma abscissa *x* associada a mais de uma ordenada *y*. Nesse caso, dizemos que o gráfico não corresponde a uma função.

Analisando o gráfico de uma função, podemos, em alguns casos, determinar o domínio e a imagem dessa função.

Para determinarmos o domínio e a imagem da função *f*, representada pelo gráfico a seguir, por exemplo, projetamos esse gráfico nos eixos *x* e *y*.



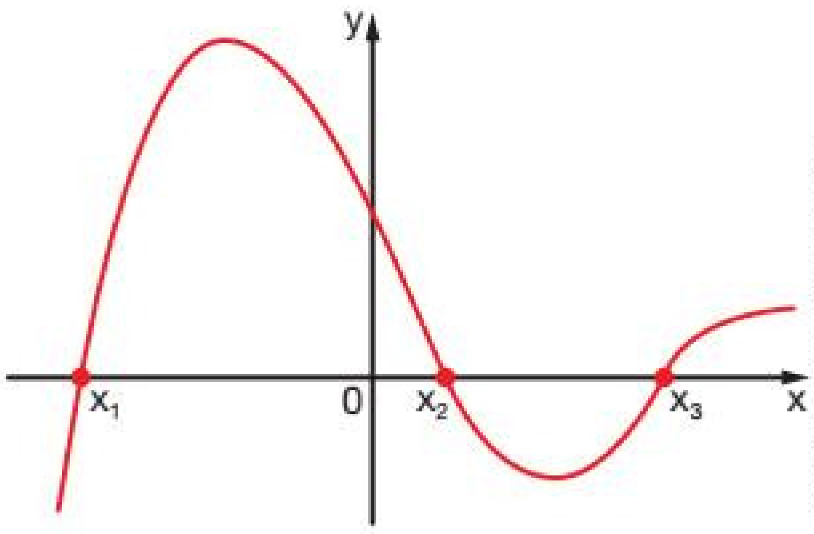
A projeção do gráfico no eixo *x* corresponde ao domínio de *f*; no eixo *y*, à imagem de *f*. Nesse caso:

- $D(f)=[-4, 7[$ ou $D(f)=\{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x < 7\}$
- $Im(f)=[-3, 6]$ ou $Im(f)=\{y \in \mathbb{R} \mid -3 \leq y \leq 6\}$.

Zero de uma função

Em uma função *f*, o valor $x \in D(f)$ tal que $f(x)=0$, é denominado **zero** da função. Graficamente, os zeros da função correspondem às abscissas dos pontos em que o gráfico cruza o eixo *x*.

Na função *f*, cujo gráfico está representado ao lado, temos $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=0$. Logo x_1, x_2 e x_3 são zeros da função.



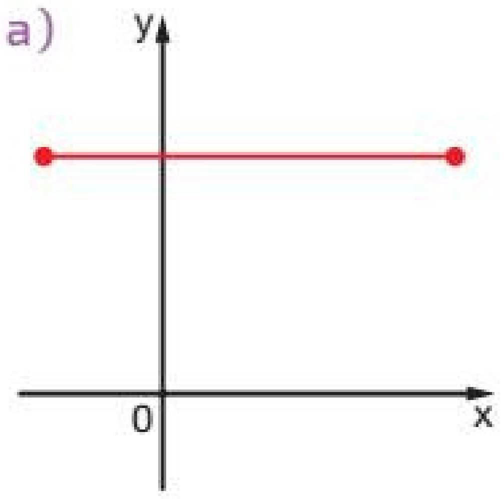
Ilustrações: Acervo da editora

Atividades

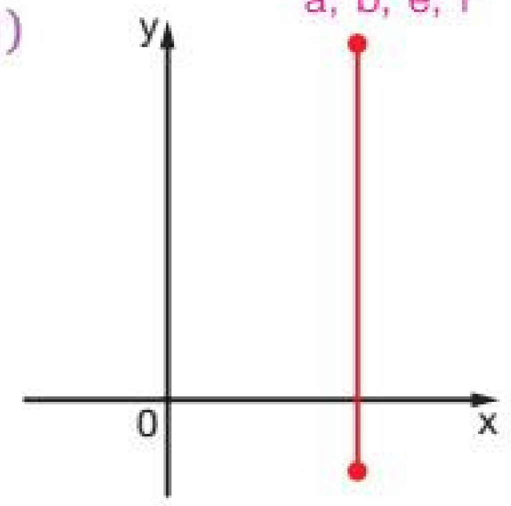
Anote as respostas no caderno.

37. Identifique quais gráficos representam função.
a; b; e; f

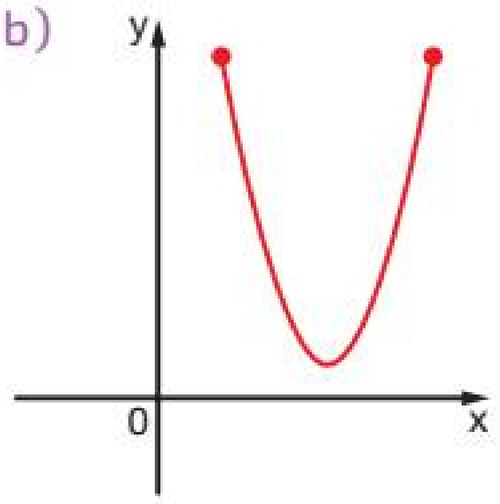
a)



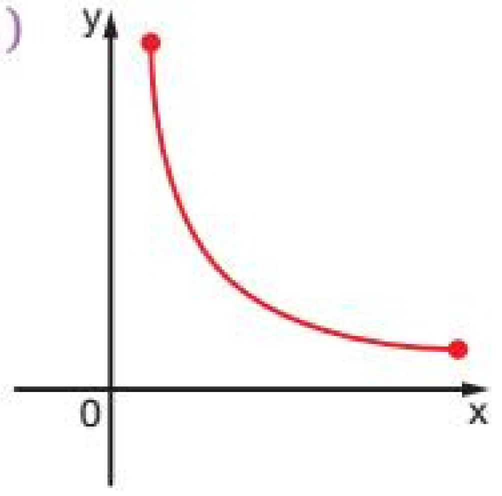
d)



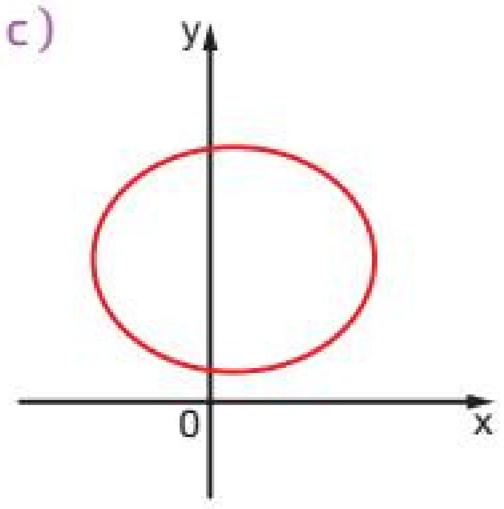
b)



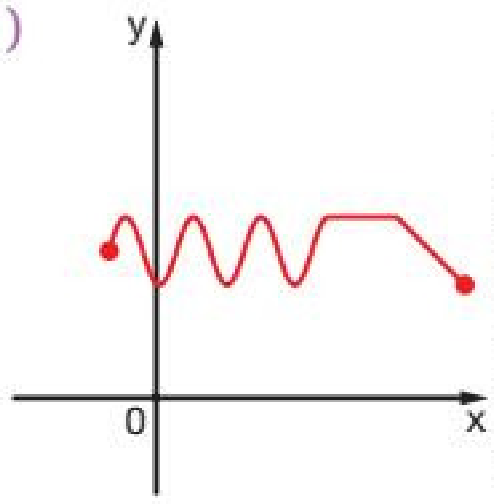
e)



c)



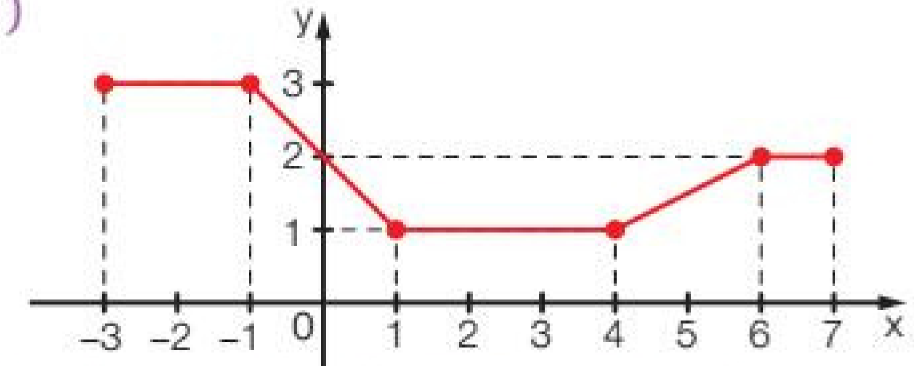
f)



Ilustrações: Acervo da editora

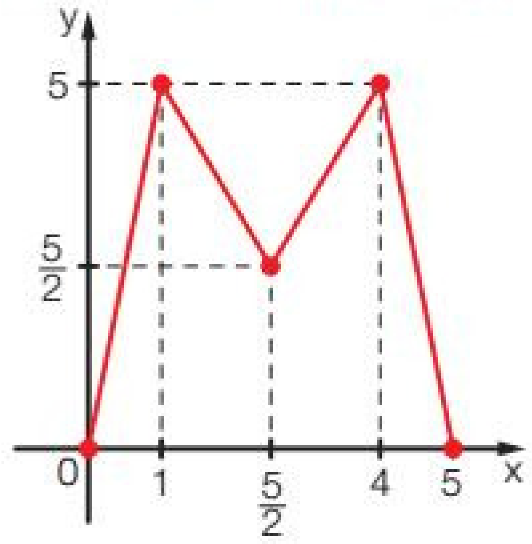
38. Determine o domínio e a imagem das funções representadas em cada gráfico.

a)



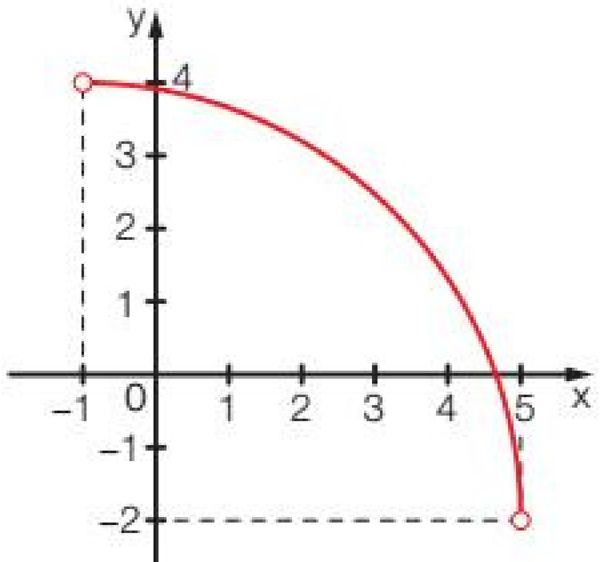
$D=\{x\in\mathbb{R}\mid -3\le x\le 7\}$; $Im=\{y\in\mathbb{R}\mid 1\le y\le 3\}$

b)



$D=\{x\in\mathbb{R}\mid 0\le x\le 5\}$;
$Im=\{y\in\mathbb{R}\mid 0\le y\le 5\}$

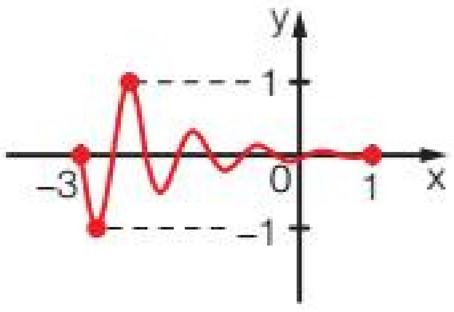
c)



Ilustrações: Acervo da editora

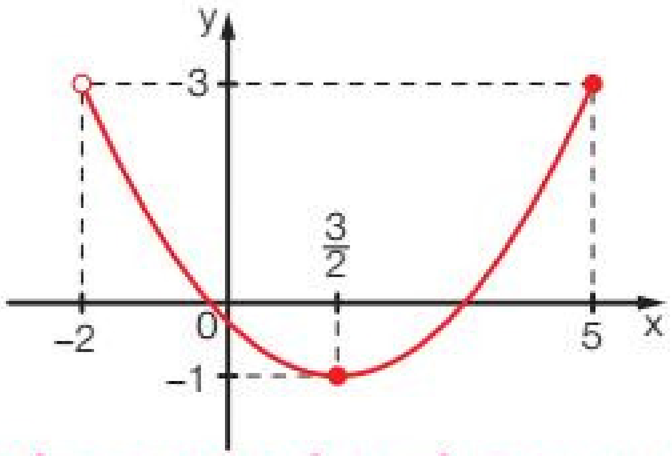
$D=\{x\in\mathbb{R}\mid -1<x<5\}$; $Im=\{y\in\mathbb{R}\mid -2<y<4\}$

d)



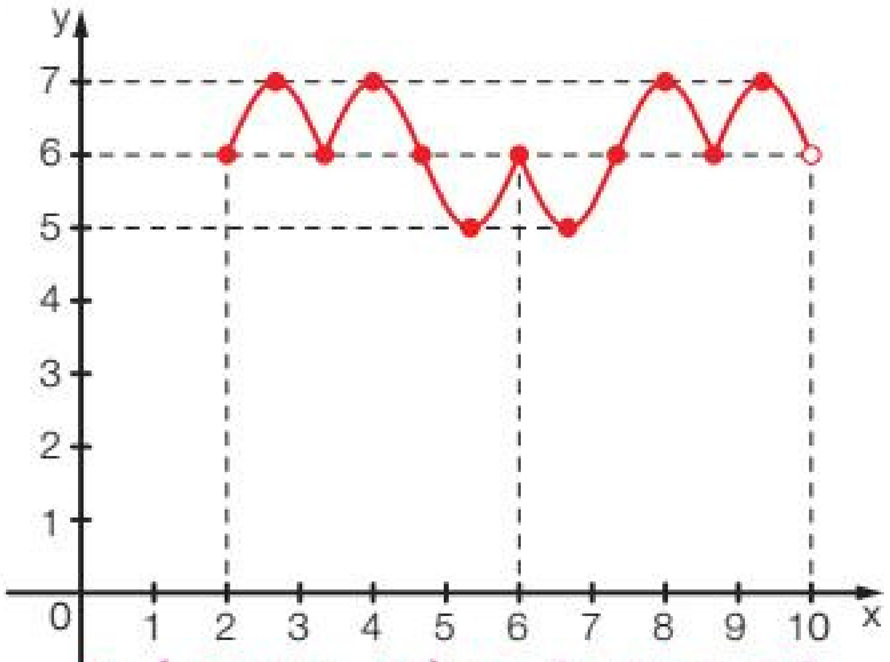
$D=\{x\in\mathbb{R}\mid -3\le x\le 1\}$;
$Im=\{y\in\mathbb{R}\mid -1\le y\le 1\}$

e)



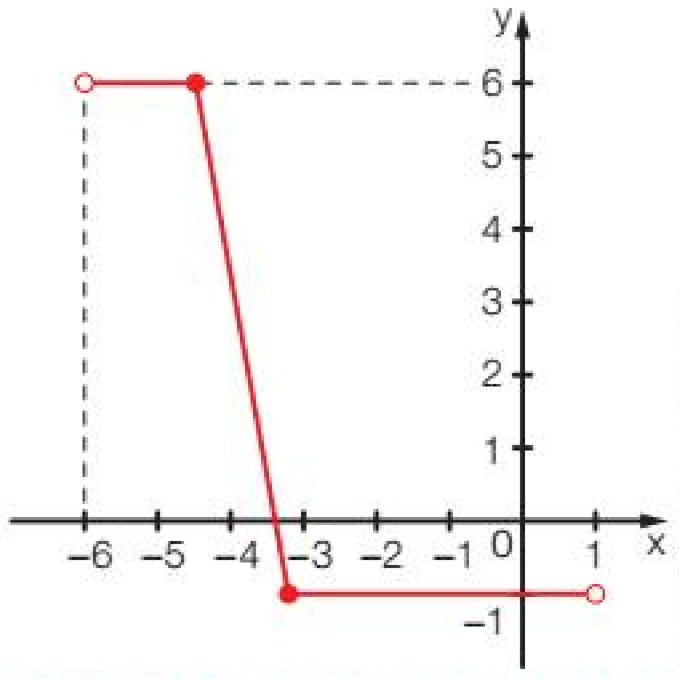
$D=\{x\in\mathbb{R}\mid -2<x\le 5\}$; $Im=\{y\in\mathbb{R}\mid -1\le y\le 3\}$

f)



$D=\{x\in\mathbb{R}\mid 2\le x<10\}$; $Im=\{y\in\mathbb{R}\mid 5\le y\le 7\}$

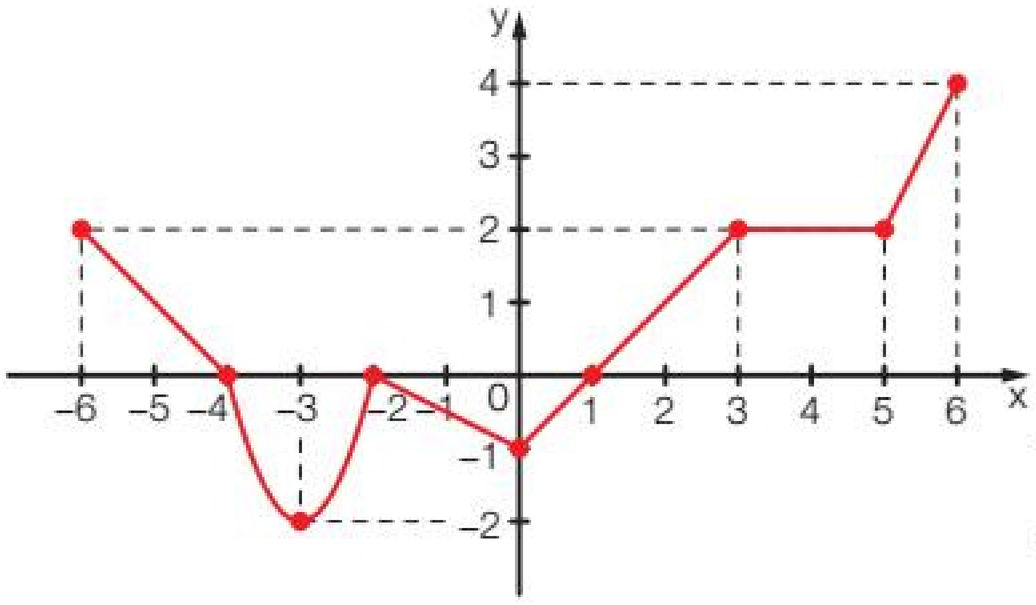
g)



Ilustrações: Acervo da editora

$D=\{x\in\mathbb{R}\mid -6<x<1\}$; $Im=\{y\in\mathbb{R}\mid -1\le y\le 6\}$

39. Observe o gráfico de uma função *f*.



Acervo da editora

a) Qual o valor de $f(4)$? $f(4)=2$

b) Quais são os zeros da função *f*? $x=-4$, $x=-2$ e $x=1$

c) Determine o domínio e a imagem de *f*. $D(f)=\{x\in\mathbb{R}\mid -6\le x\le 6\}$; $Im(f)=\{y\in\mathbb{R}\mid -2\le y\le 4\}$

Funções crescente, decrescente e constante

O Índice de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA) é um índice inflacionário que mede a variação dos preços para as famílias em algumas regiões metropolitanas do Brasil. Esse índice é calculado pelo IBGE e considera nove grupos de consumo: alimentação e bebidas, artigos de residência, comunicação, despesas pessoais, educação, habitação, saúde e cuidados pessoais, transportes e vestuários.

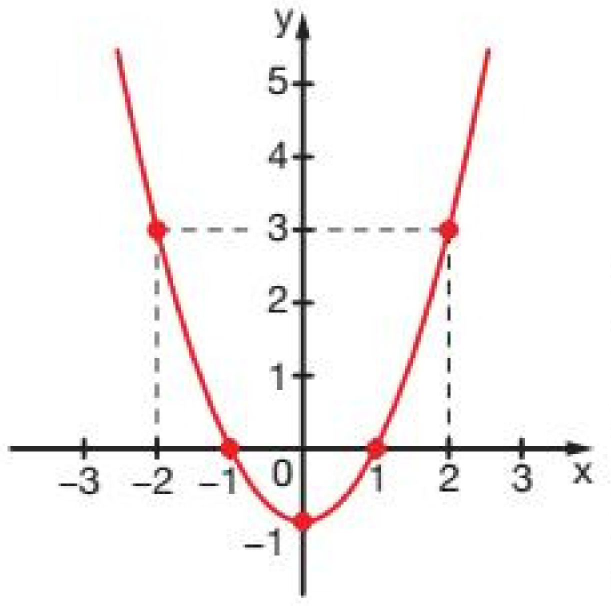
Índice de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA) em 2014

Fonte: <www.ibge.gov.br/home/estatistica/indicadores/precos/inpc_ipca/ipca-inpc_201506caderno.pdf>. Acesso em: 23 jul. 2015.

Observando o gráfico, é possível notar que em 2014:

- de janeiro a março, de julho a setembro e de outubro a dezembro o IPCA aumentou, ou seja, foi crescente;
- de março a julho e de setembro a outubro o IPCA diminuiu, ou seja, foi decrescente.

Pode ser realizada uma análise semelhante à do gráfico acima também para o gráfico de outras funções. Veja, por exemplo, o gráfico da função $f(x) = x^2 - 1$.



Ilustrações: Acervo da editora

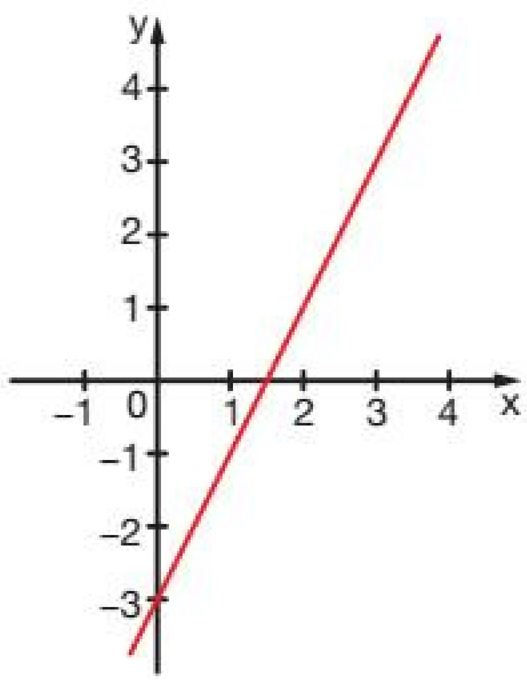
Note que para $x \leq 0$, quando aumentamos o valor de *x*, o valor de $f(x)$ diminui, ou seja, para $x \leq 0$ a função *f* é decrescente. Já para $x \geq 0$, quando aumentamos o valor de *x*, o valor de $f(x)$ também aumenta, ou seja, a função *f* é crescente para $x \geq 0$.

Dizemos que uma função *f* é:

- **decrescente** em um intervalo contido no domínio de *f* se, para todo x_1 e x_2 pertencentes a esse intervalo, com $x_1 > x_2$, temos $f(x_1) < f(x_2)$;
- **crescente** em um intervalo contido no domínio de *f* se, para todo x_1 e x_2 pertencentes a esse intervalo, com $x_1 > x_2$, temos $f(x_1) > f(x_2)$.

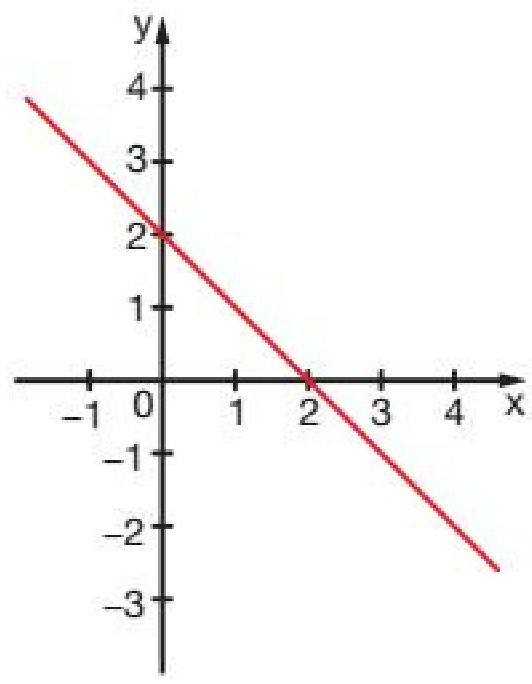
Exemplos

- $f(x)=2x-3$



A função *f* é crescente em todo o domínio. Nesse caso, dizemos que *f* é uma função crescente.

- $g(x)=-x+2$

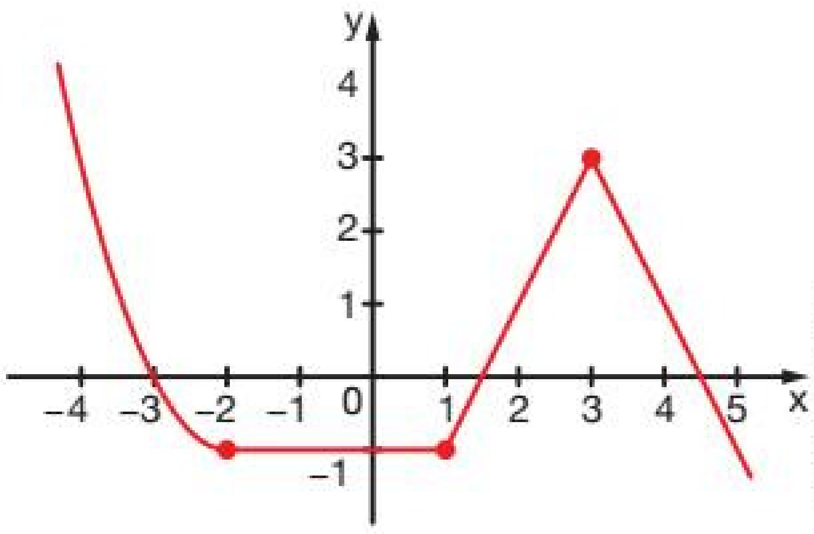


Ilustrações: Acervo da editora

A função *g* é decrescente em todo o domínio. Nesse caso, dizemos que *g* é uma função decrescente.

Uma função *h* também pode ser **constante** em um intervalo contido no domínio. Nesse caso, para qualquer *x* pertencente a esse intervalo, $h(x)=k$, sendo *k* um número real.

Considere uma função *h* cujo gráfico é dado ao lado.



Acervo da editora

Temos que *h* é:

- crescente no intervalo $[1,3]$, ou seja, para $1\leq x\leq 3$;
- decrescente nos intervalos $]-\infty,-2]$ e $[3,+\infty[$, ou seja, para $x\leq -2$ e $x\geq 3$;
- constante no intervalo $[-2,1]$, ou seja, para $-2\leq x\leq 1$.

Note que para $x\in[-2,1]$, temos $f(x)=-1$.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

40. Uma indústria calcula, em horas, o tempo para a entrega de seus pedidos, utilizando a função $t(x)=42+0,2x$, em que *t* indica o tempo para a entrega e *x* a quantidade de peças encomendadas.

a) Qual é o tempo de entrega de uma encomenda de 20 peças? E de 30 peças? 46 h; 48 h

b) Classifique essa função como crescente, descrecente ou constante. Justifique.
Crescente, pois quanto maior for a quantidade de peças encomendadas, maior será o tempo para a entrega.

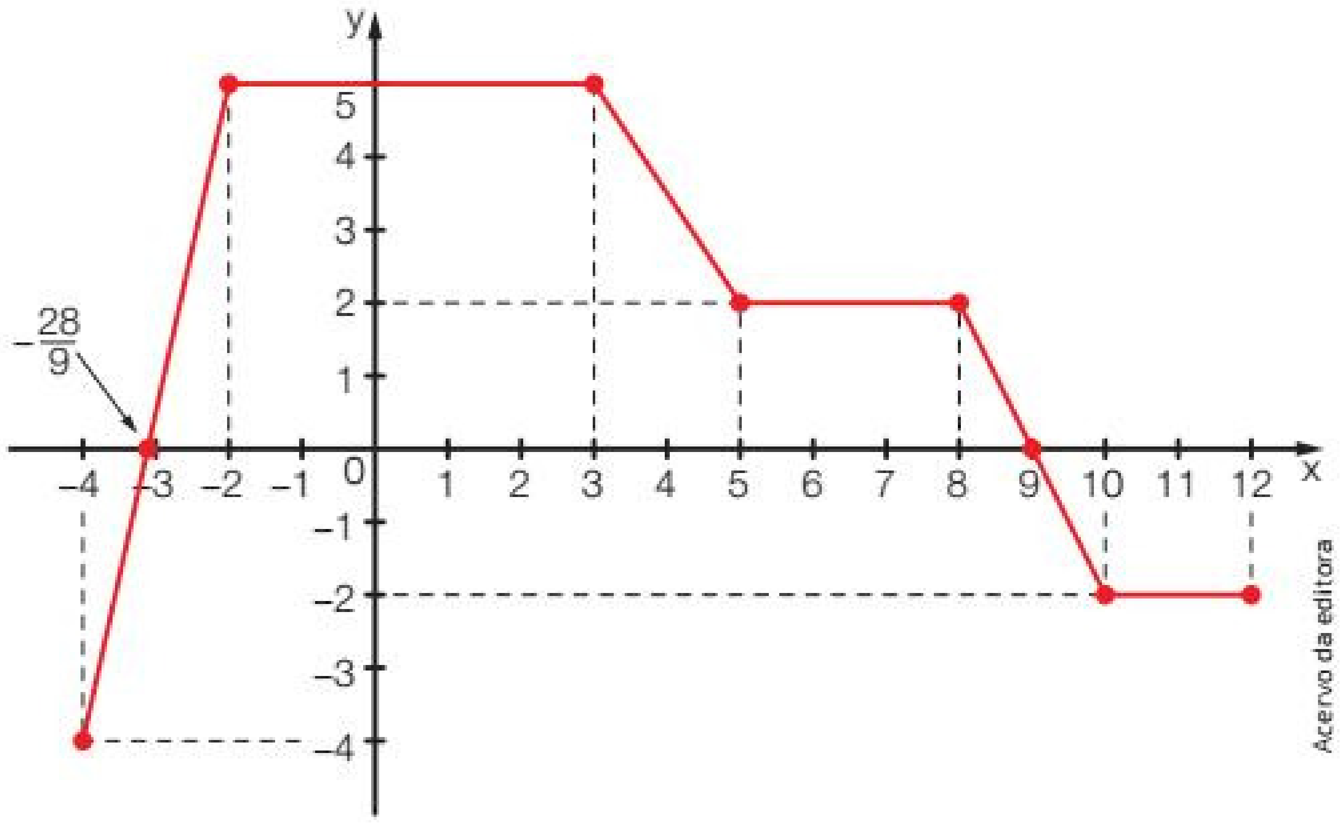
41. A função *f* está representada no gráfico.

a) Qual o domínio e o conjunto imagem de *f*? $D(f)=\{x\in\mathbb{R}\mid -4\leq x\leq 12\}$ e $Im(f)=\{y\in\mathbb{R}\mid -4\leq y\leq 5\}$

b) Determine os intervalos em que a função é:

- decrescente $[3,5]$ e $[8,10]$
- crescente $[-4,-2]$
- constante $[-2,3]$, $[5,8]$ e $[10,12]$

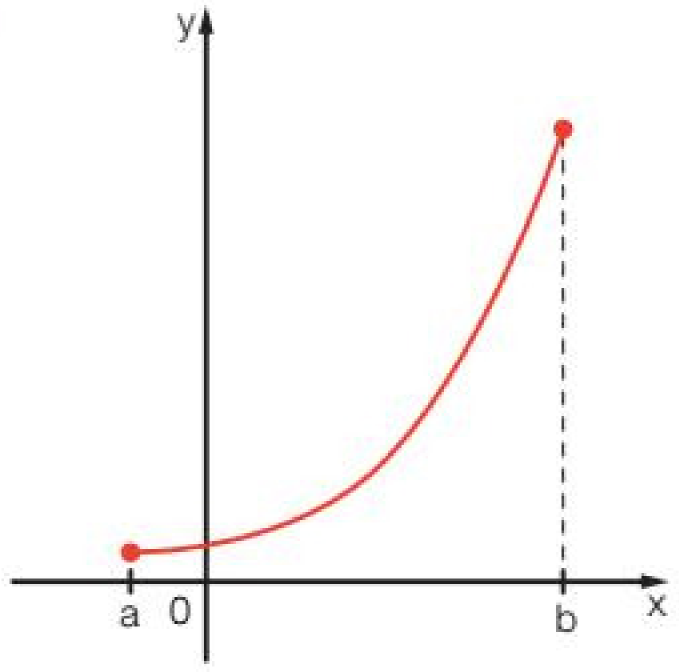
c) Quais os zeros dessa função? $-\frac{28}{9}$ e 9



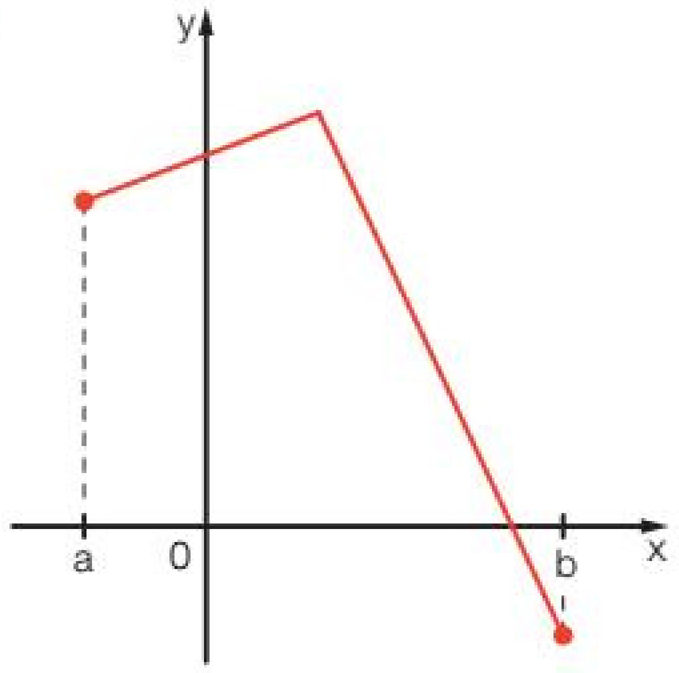
Acervo da editora

42. Qual das funções a seguir é decrescente no intervalo [a,b]? c

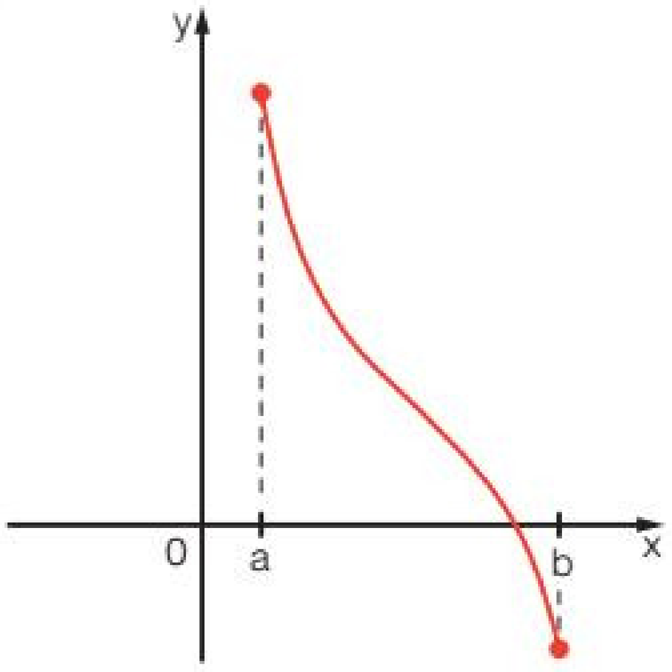
a)



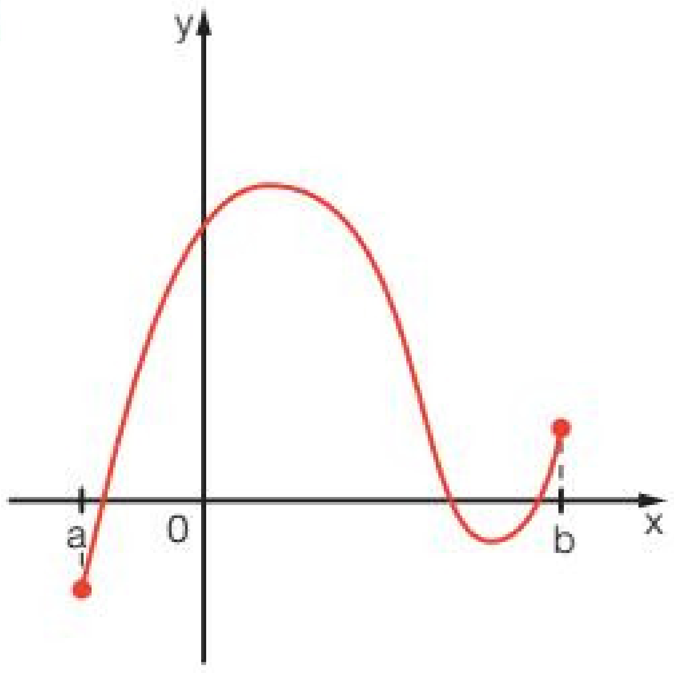
b)



c)



d)

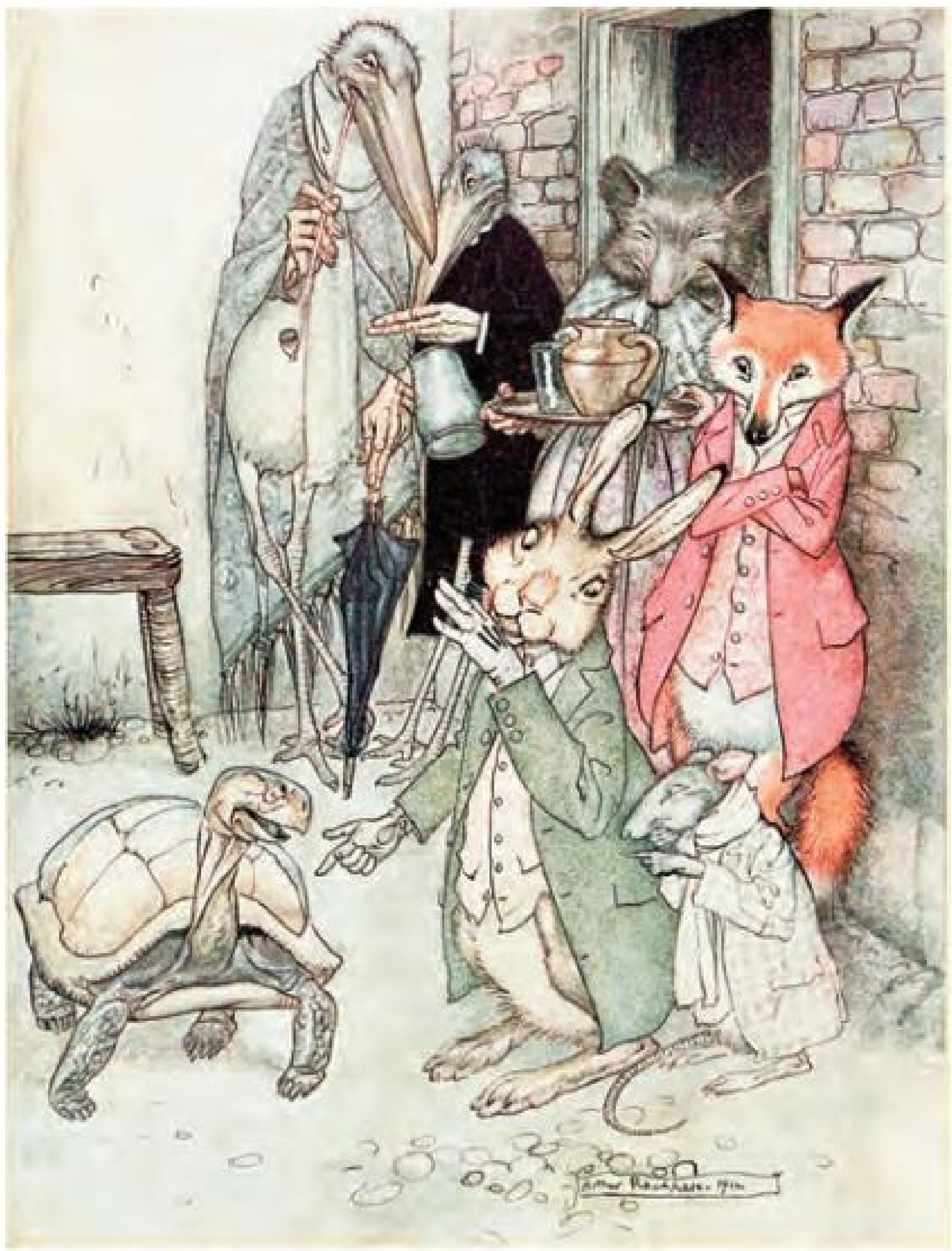


Ilustrações: Acervo da editora

43. A lebre e a tartaruga é uma famosa fábula desses dois animais que disputam uma corrida. Na largada, a lebre, que se achava muito veloz, disparou na frente, enquanto a tartaruga seguia constante e lentamente. A lebre, em determinado momento, ficou tão distante da tartaruga que resolveu descansar um pouco e dormiu. Enquanto isso, a tartaruga vagarosamente passou pela lebre e continuou seu caminho, sem descansar um só minuto. Quando a lebre se deu conta, correu em direção à chegada.

Observe o gráfico que representa essa corrida.

Acervo da editora



Frontispício da fábula **A lebre e a tartaruga**.

Arthur Rackham. 1912. Ilustração. Coleção particular. Foto: AF Fotografie/Alamy Stock Photo/Latinstock

a) No gráfico, em que cor está indicado o deslocamento da tartaruga? Justifique. Verde, pois, como a tartaruga não parou, sua distância em relação à largada foi crescente durante todo o tempo da corrida.

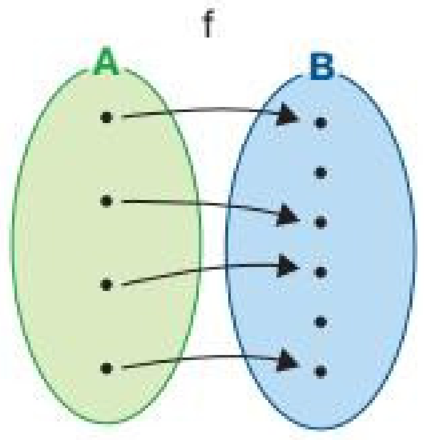
b) A função correspondente ao deslocamento da lebre é crescente em todo domínio? Por quê? Não, pois em certo intervalo, que corresponde ao período em que a lebre permaneceu dormindo, a função é constante.

c) De acordo com o gráfico, quem ganhou a corrida? Que moral você supõe que o autor quis transmitir com essa fábula? tartaruga; Algumas possíveis respostas: quem segue devagar e com constância pode chegar à frente; paciência pode valer mais do que a pressa; nem sempre os mais velozes chegam em primeiro lugar.

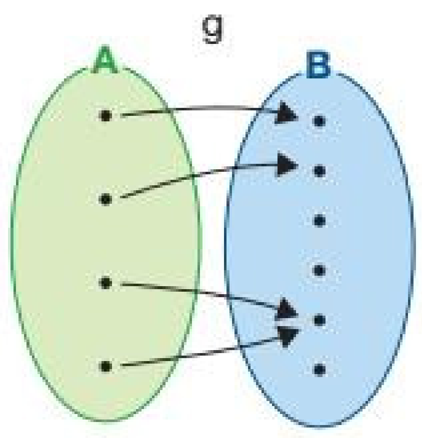
Funções injetiva, sobrejetiva e bijetiva

Função injetiva

Dizemos que uma função *f* é injetiva quando elementos distintos do domínio estão associados a elementos distintos do contradomínio.



f é injetiva



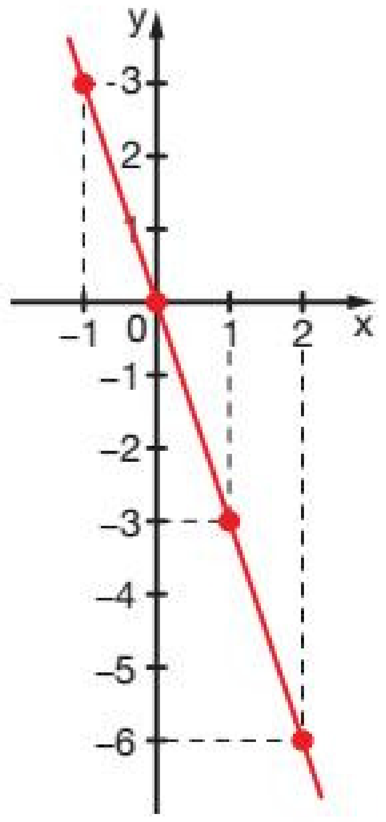
g não é injetiva

Ilustrações: Acervo da editora

Uma função *f* é injetiva se, e somente se, para todo $x_1 \in D(f)$ e $x_2 \in D(f)$, com $x_1 \neq x_2$, tivermos $f(x_1) \neq f(x_2)$.

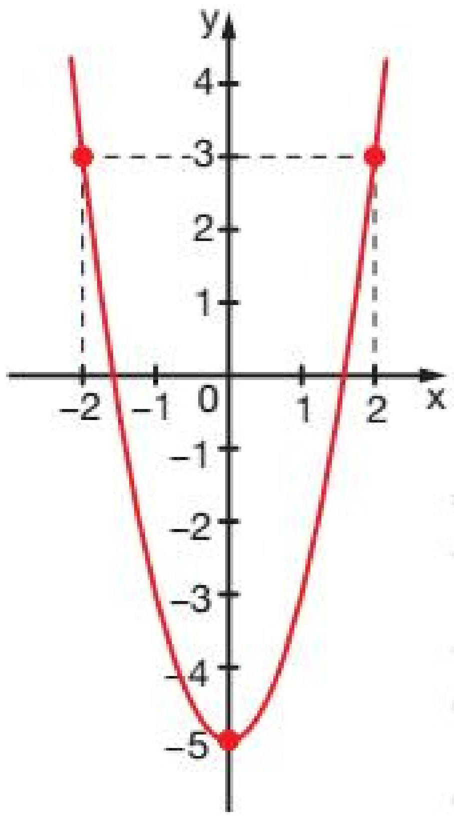
Exemplos

- $f(x) = -3x$



Temos que *f* é injetiva, pois elementos distintos, x_1 e x_2, pertencentes ao domínio, têm imagens $-3x_1$ e $-3x_2$, também distintas.

- $g(x) = 2x^2 - 5$

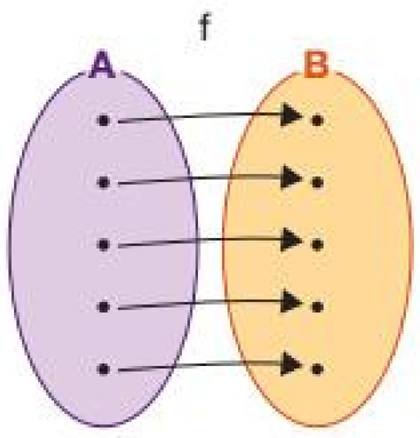


Ilustrações: Acervo da editora

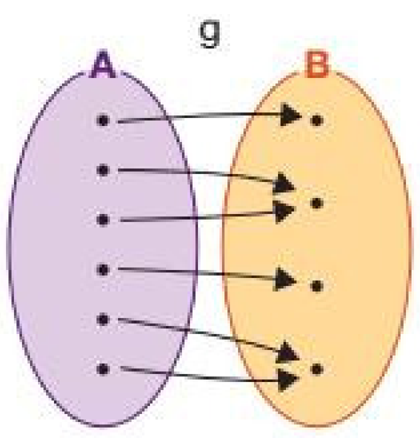
Note, por exemplo, que $g(-2) = 3$ e $g(2) = 3$, ou seja, elementos distintos pertencentes ao domínio (–2 e 2) têm imagens iguais. Assim, a função *g* não é injetiva.

Função sobrejetiva

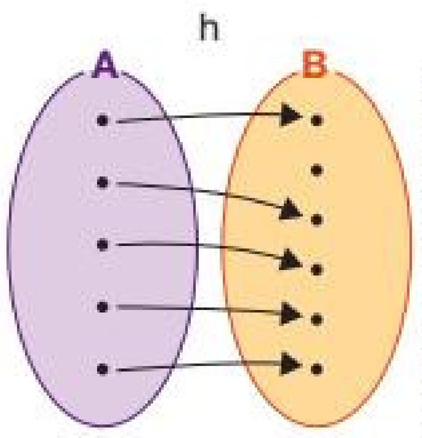
Dizemos que uma função *f* é sobrejetiva quando todos os elementos do contradomínio estão associados com algum elemento do domínio.



f é sobrejetiva



g é sobrejetiva



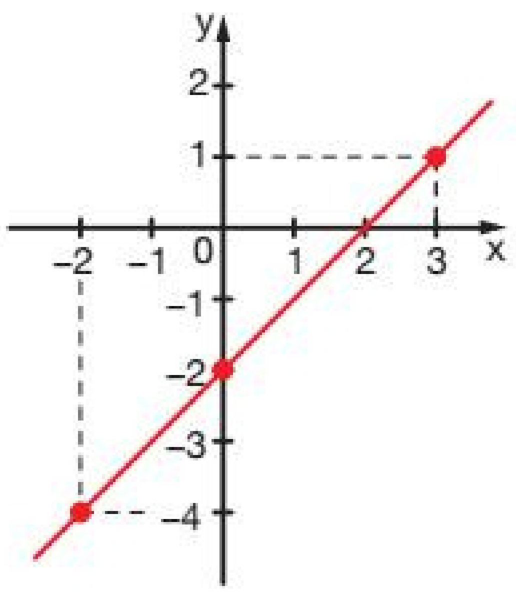
h não é sobrejetiva

Ilustrações: Acervo da editora

Uma função *f* é sobrejetiva se, e somente se, para todo $y \in CD(f)$, existir um $x \in D(f)$, tal que $f(x) = y$. De outra maneira, uma função *f* é sobrejetiva se, e somente se, $CD(f) = Im(f)$.

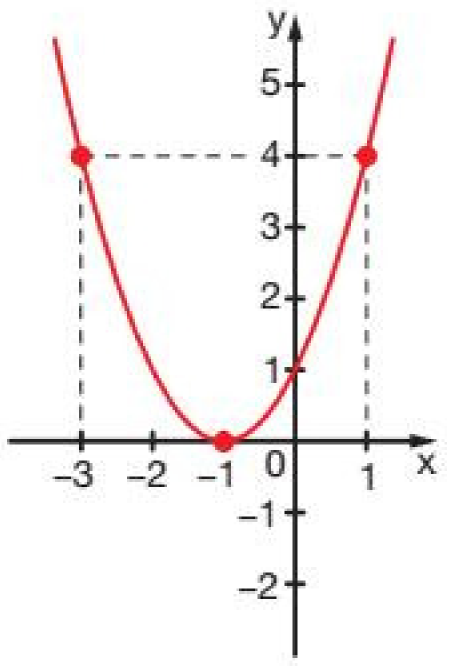
Exemplos

- Seja a função *f* de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = x - 2$



Temos que *f* é sobrejetiva, pois dado $y \in \text{Im}(f)$, temos $y = x - 2$ e, por consequência, $x = y + 2$. Como $y \in \mathbb{R}$, então $(y + 2) \in \mathbb{R}$, ou seja, $x \in \mathbb{R}$. Logo, qualquer que seja $y \in \mathbb{R}$, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $y = f(x)$ e, portanto, $CD(f) = \text{Im}(f) = \mathbb{R}$.

- Seja a função *g* de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $g(x) = x^2 + 2x + 1$

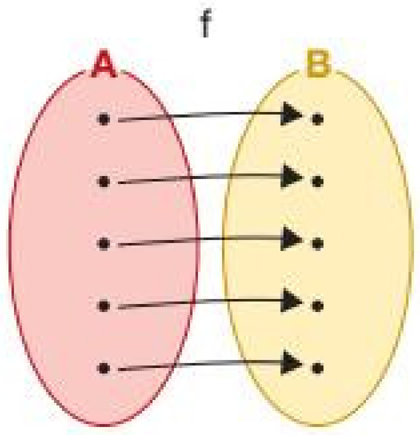


Ilustrações: Acervo da editora

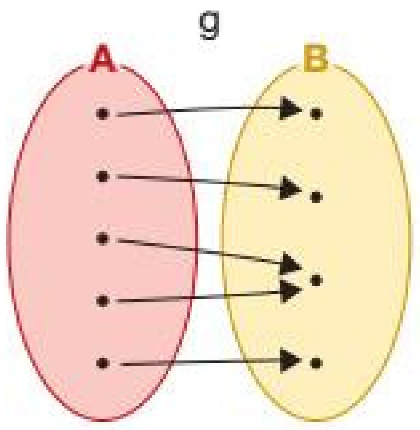
Note, por exemplo, que $-2 \in CD(g)$, mas não está associado a nenhum elemento *x* pertencente ao domínio. Assim, a função *g* não é sobrejetiva.

Função bijetiva

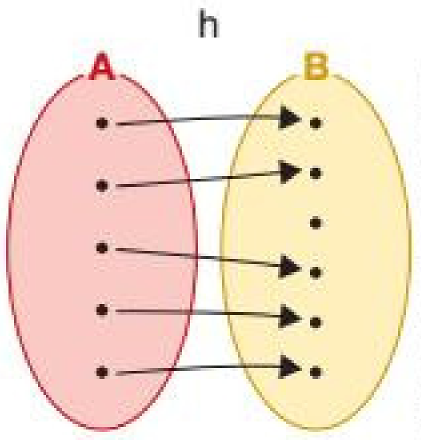
Dizemos que uma função *f* é bijetiva quando *f* é injetiva e sobrejetiva simultaneamente.



f é bijetiva



g não é bijetiva, pois não é injetiva



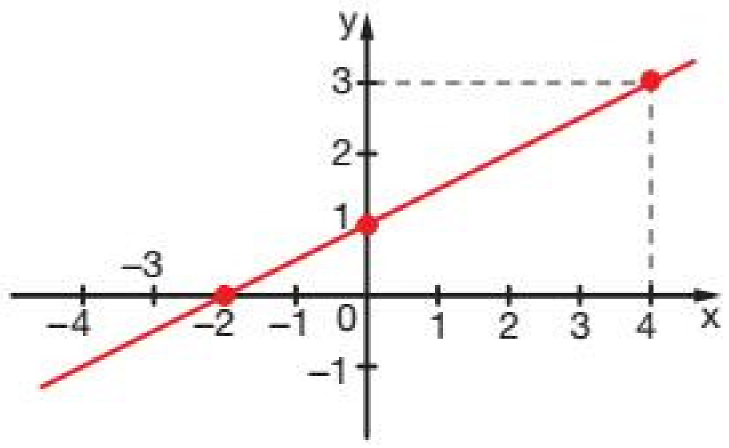
h não é bijetiva, pois não é sobrejetiva

Ilustrações: Acervo da editora

Uma função *f* é bijetiva se, e somente se, para todo $x_1 \in D(f)$ e $x_2 \in D(f)$, com $x_1 \neq x_2$, tivermos $f(x_1) \neq f(x_2)$ e $CD(f) = \text{Im}(f)$.

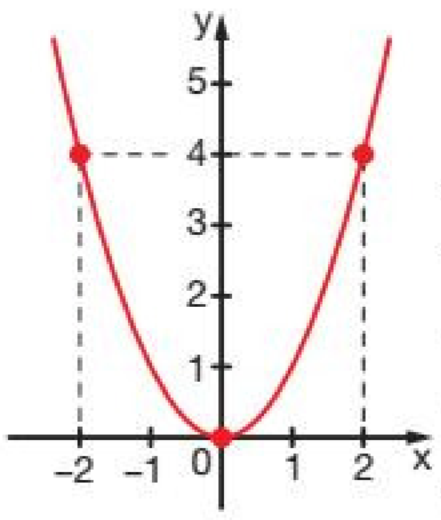
Exemplos

- Seja a função *f* de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$



Temos que *f* é bijetiva, pois é injetiva e sobrejetiva simultaneamente.

- Seja a função *g* de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}_+$ definida por $g(x) = x^2$



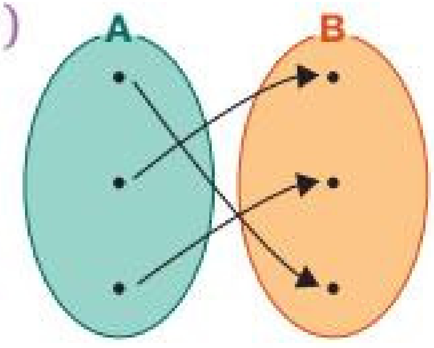
Ilustrações: Acervo da editora

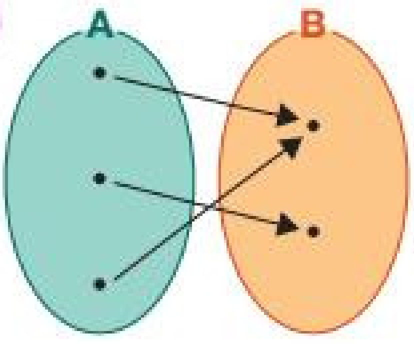
Temos que *g* não é bijetiva, pois, apesar de ser sobrejetiva, ela não é injetiva.

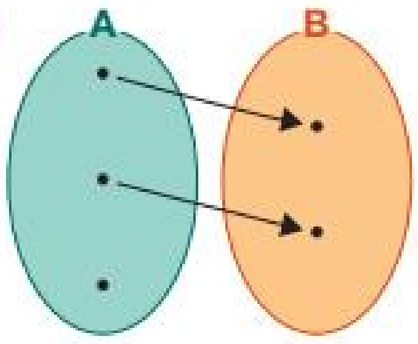
Atividades

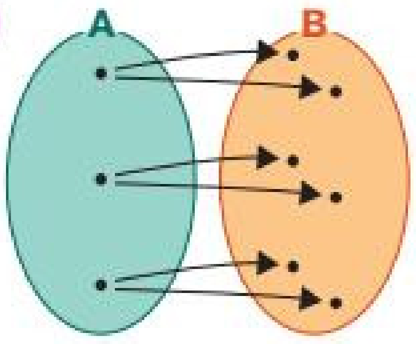
Anote as respostas no caderno.

44. Determine quais dos diagramas representam uma função sobrejetiva de *A* em *B*. a; c

a)


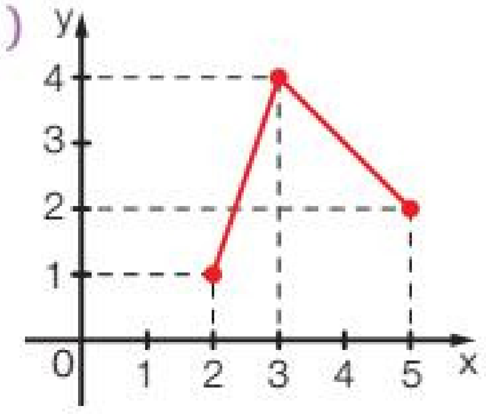
c)


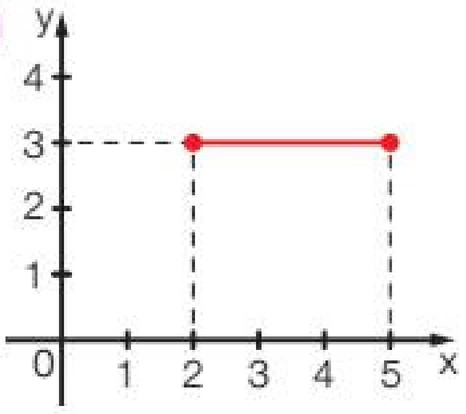
b)


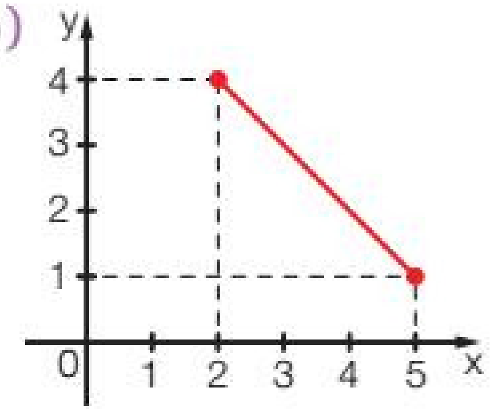
d)


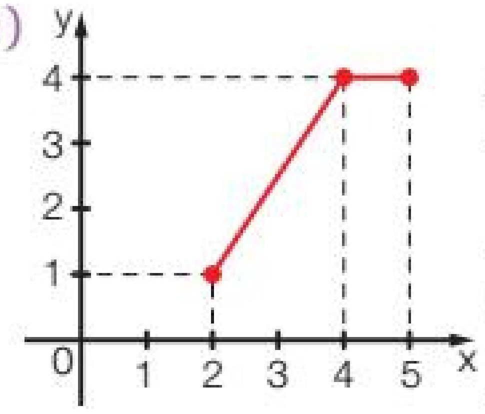
Ilustrações: Acervo da editora

45. Qual dos gráficos representa uma função bijetiva *f* de $[2, 5]$ em $[1, 4]$? b

a)


c)


b)


d)


Ilustrações: Acervo da editora

46. [...]

> A impressão digital é fruto do nosso código genético e se forma no útero materno com a movimentação do feto. Composta por uma série de traços na superfície dos dedos, mantém-se inalterada por toda a vida. [...] E, em cada pessoa, mesmo nos gêmeos, tem características únicas e intransferíveis, as chamadas minúcias. [...]

GRECO, Alessandro. **Impressão digital:** assinatura do crime. Disponível em: <http://guiadoestudante.abril.com.br/aventuras-historia/impressao-digital-assinatura-crime-434121.shtml>. Acesso em: 23 jul. 2015.

Photodisc/Getty Images

impressão digital

A função que associa cada pessoa a sua digital é: c

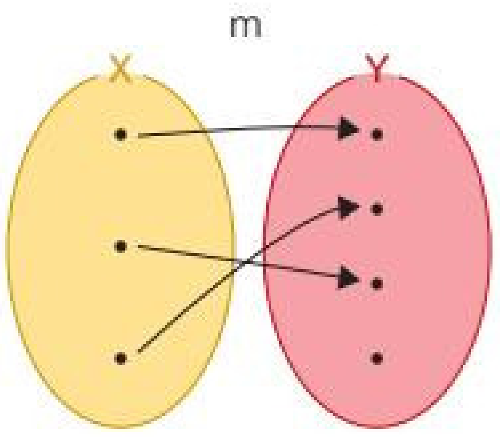
a) injetiva e não sobrejetiva
b) sobrejetiva e não injetiva
c) bijetiva
d) não injetiva e não sobrejetiva

Para resolver esta atividade, diga aos alunos que considerem que o domínio da função seja formado apenas pelas pessoas que possuem digital.

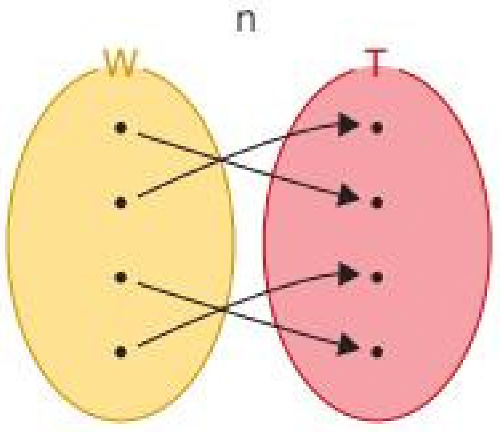
47. Seja uma função *f* de *A* em *B*, em que $A=\{x\in\mathbb{Z}\mid -4\le x\le 2\}$, definida por $f(x)=2x-3$. Qual deve ser o conjunto *B* para que *f* seja bijetiva?
$B=\{-11, -9, -7, -5, -3, -1, 1\}$

48. Observe as funções.

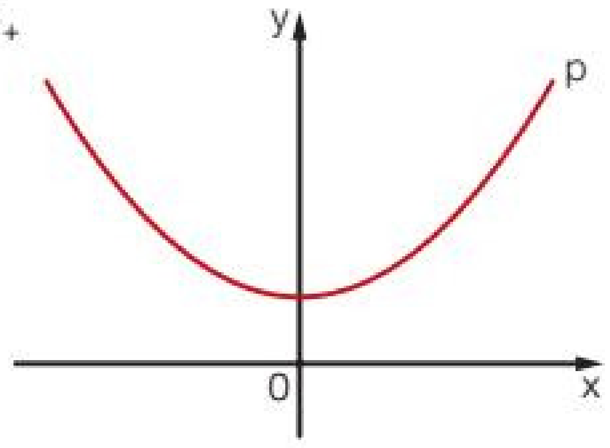
- $f: \mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ definida por $f(x)=5x$
- $g: \mathbb{Q}^*\to\mathbb{Q}^*$ definida por $g(x)=\frac{1}{x}$
- $h: \mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ definida por $h(x)=x^2$
- $m: X\to Y$



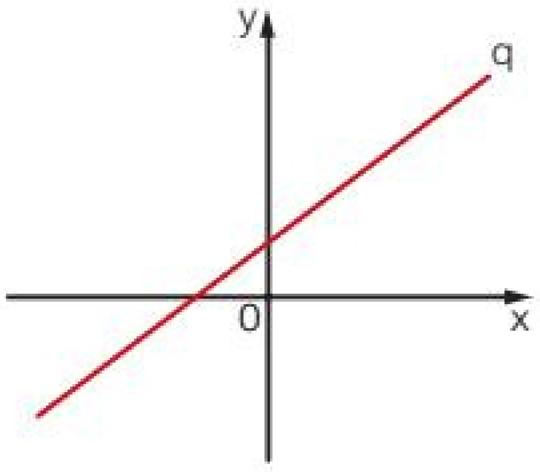
- $n: W\to T$



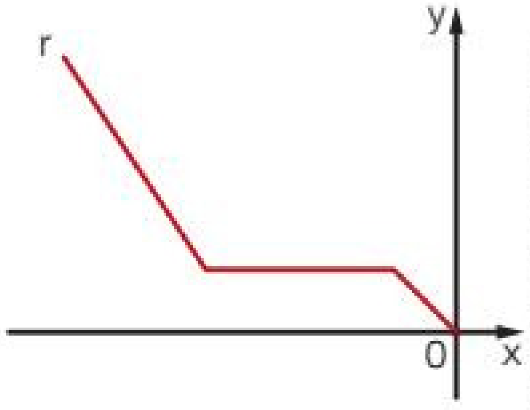
- $p: \mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$



- $q: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$



- $r: \mathbb{R}_-\to\mathbb{R}$



Ilustrações: Acervo da editora

Quais dessas funções são:

a) apenas injetivas? f; m
b) apenas sobrejetivas? h
c) bijetivas? g; n; q
d) nem injetivas, nem sobrejetivas? p; r

Função composta

Para determinar a distância percorrida por um automóvel em certa viagem, pode-se utilizar a função $z=80t$, sendo *z* a distância percorrida (em quilômetros) e *t* o tempo de percurso (em horas). Esse automóvel consome, em média, 0,1 L de combustível por quilômetro percorrido. Dessa forma, podemos escrever a função $y=0{,}1z$ para representar o consumo *y* de combustível (em litros) em função da distância *z* percorrida.

Utilizando essas funções, podemos determinar o consumo de combustível após 1,5 h de percurso da seguinte maneira:

- distância percorrida em 1,5 h: $z=80\cdot 1{,}5=120 \rightarrow 120$ km
- consumo de combustível em 120 km: $y=0{,}1\cdot 120=12 \rightarrow 12$ L

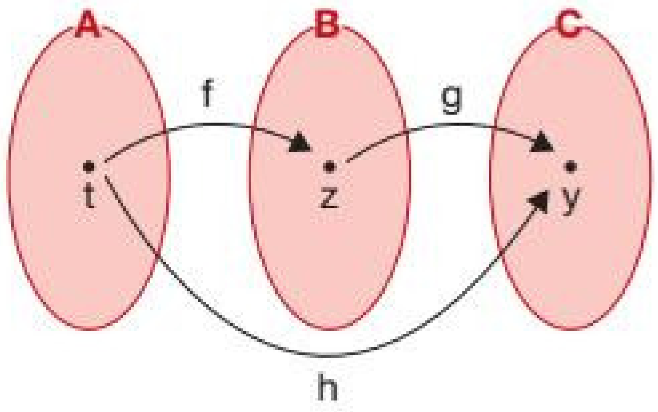
Também é possível escrever uma função que determine o consumo de combustível *y* em função do tempo *t* de viagem. Para isso, fazemos uma composição entre as funções *y* e *z*.

$$y=0{,}1\underbrace{z}_{80t} \Rightarrow y=0{,}1\cdot 80t \Rightarrow y=8t$$

Utilizando $y=8t$, determinamos o consumo de combustível após 1,5 h:

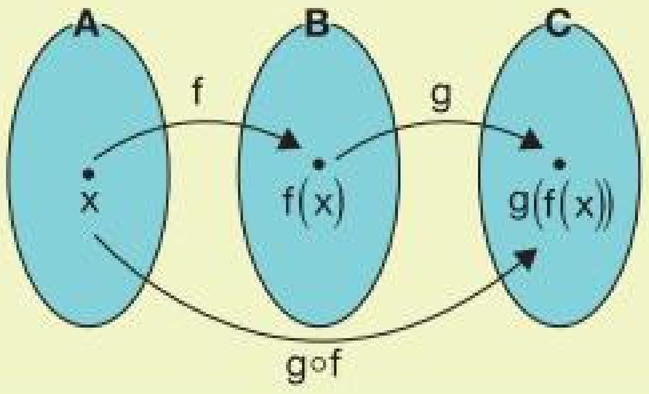
$$y=8\cdot 1{,}5=12 \rightarrow 12\text{ L}$$

Sendo $f(t)=z=80t$, $g(z)=y=0{,}1z$ e $h(t)=y=8t$, temos o seguinte diagrama:



Dizemos que *h*, nesse caso, é a função composta de *g* com *f*. Essa função composta pode ser indicada por $(g\circ f)(x)$ ou $g(f(x))$ (lê-se "*g* composta com *f*").

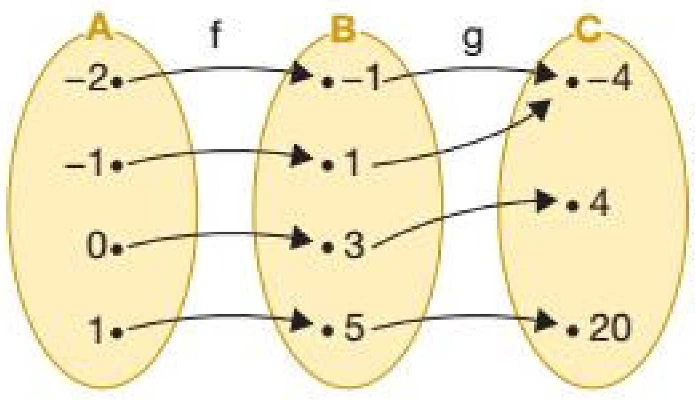
Dadas as funções $f:A\rightarrow B$ e $g:B\rightarrow C$, denominamos função composta de *g* com *f* a função $g\circ f:A\rightarrow C$ definida por $(g\circ f)(x)=g(f(x))$.



Ilustrações: Acervo da editora

Exemplo

Dada a função *f* de *A* em *B* definida por $f(x)=2x+3$ e *g* de *B* em *C* definida por $g(x)=x^2-5$, com $A=\{-2,-1,0,1\}$, $B=\{-1,1,3,5\}$ e $C=\{-4,4,20\}$, temos:



Acervo da editora

- $\begin{cases}f(-2)=-1\\ g(-1)=-4\end{cases} \Rightarrow g(f(-2))=g(-1)=-4$
- $\begin{cases}f(0)=3\\ g(3)=4\end{cases} \Rightarrow g(f(0))=g(3)=4$
- $\begin{cases}f(-1)=1\\ g(1)=-4\end{cases} \Rightarrow g(f(-1))=g(1)=-4$
- $\begin{cases}f(1)=5\\ g(5)=20\end{cases} \Rightarrow g(f(1))=g(5)=20$

De maneira geral, temos:

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=(f(x))^2-5=(2x+3)^2-5=4x^2+12x+4$$

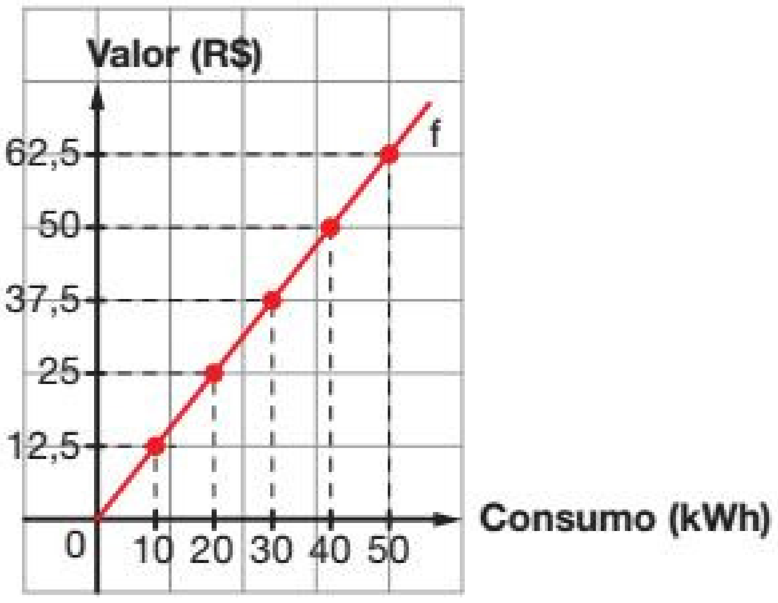
Utilizando $(g\circ f)(x)$:

- $(g\circ f)(-2)=4\cdot(-2)^2+12\cdot(-2)+4=16-24+4=-4$
- $(g\circ f)(0)=4\cdot 0^2+12\cdot 0+4=0+0+4=4$
- $(g\circ f)(-1)=4\cdot(-1)^2+12\cdot(-1)+4=4-12+4=-4$
- $(g\circ f)(1)=4\cdot 1^2+12\cdot 1+4=4+12+4=20$

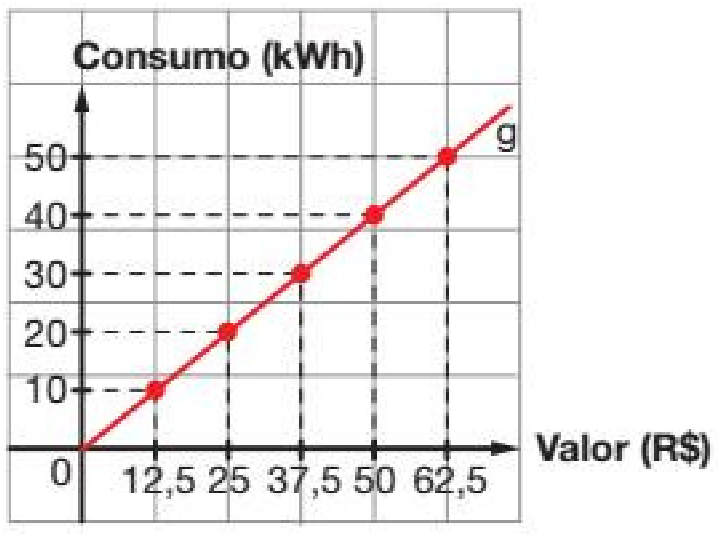
Função inversa

Para calcular o valor de uma fatura residencial, a concessionária de energia elétrica de certa região multiplica o consumo em quilowatt-hora (kWh) por 1,25, obtendo o valor em real. Se o consumo mensal for de 267 kWh, por exemplo, o valor da fatura será R$ 333,75, pois $267 \cdot 1{,}25 = 333{,}75$.

A função $f(x) = 1{,}25x$ associa o consumo em quilowatt-hora ao valor em reais da fatura. Observe o gráfico de *f*.



Podemos também escrever uma função *g*, com objetivo contrário ao de *f*, ou seja, associando o valor da fatura ao consumo mensal. Nesse caso, $g(x) = \dfrac{x}{1{,}25} = 0{,}8x$.

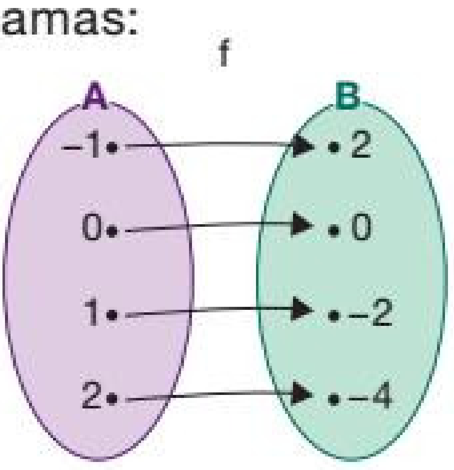


Note que para todo $a \in D(f)$, se $f(a) = b$, então $g(b) = a$. Por exemplo, $f(20) = 25$ e $g(25) = 20$. Dizemos que *g* é a função inversa de *f*.

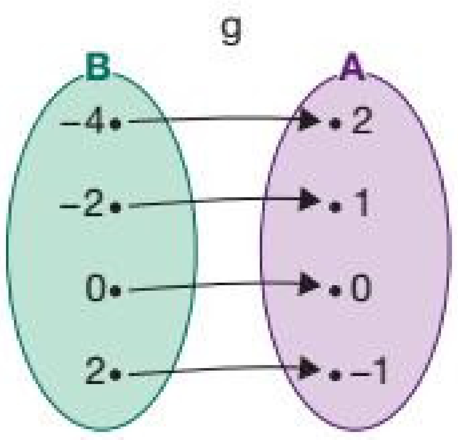
Observe outro exemplo.

Dada a função *f* de *A* em *B* definida por $f(x) = -2x$ e a função *g* de *B* em *A* definida por $g(x) = -\dfrac{x}{2}$, com $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{-4, -2, 0, 2\}$, podemos representá-las pelos seguintes diagramas:

- $f(-1) = 2$
- $f(0) = 0$
- $f(1) = -2$
- $f(2) = -4$



- $g(-4) = 2$
- $g(-2) = 1$
- $g(0) = 0$
- $g(2) = -1$

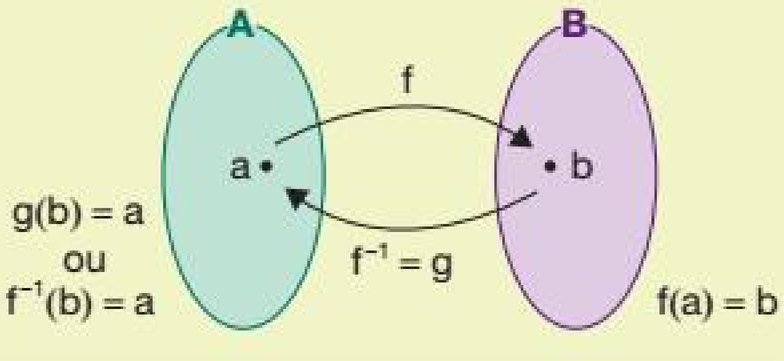


Note que:

- as funções *f* e *g* são bijetivas
- $D(f) = \text{Im}(g)$ e $D(g) = \text{Im}(f)$
- se $(x, y) \in f$, então $(y, x) \in g$

Nessas condições, dizemos que *g* é a função **inversa** de *f*.

Dada uma função bijetiva *f* de *A* em *B*, dizemos que uma função *g* de *B* em *A* é inversa de *f* se, para todo $a \in A$ e $b \in B$ tal que $f(a) = b$, tem-se $g(b) = a$. Em geral, indicamos a função inversa de *f* por f^{-1}, ou seja, $f^{-1} = g$.



Ilustrações: Acervo da editora

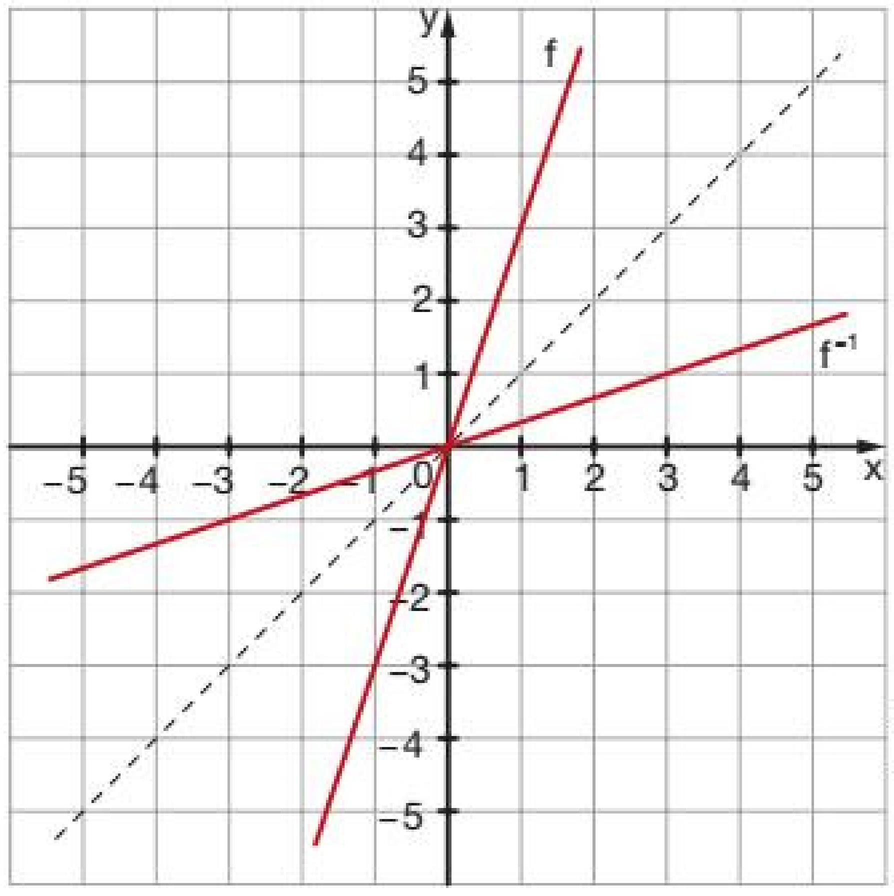
Para determinarmos a inversa da função bijetiva $f(x) = y = 3x$, por exemplo, inicialmente isolamos a variável *x*:

$$y = 3x \Rightarrow x = \frac{y}{3}$$

Como, de maneira geral, quando representamos o gráfico de uma função em um plano cartesiano a variável independente *x* é indicada no eixo das abscissas e a dependente *y* no eixo das ordenadas, é comum permutar as variáveis *x* e *y* para expressar a função f^{-1}, que é a inversa de *f*. Assim, temos:

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{3}$$

Representando os gráficos das funções *f* e f^{-1} em um mesmo plano cartesiano, temos:



Note que os gráficos de *f* e f^{-1} são simétricos em relação à reta tracejada, que corresponde à bissetriz dos quadrantes ímpares do plano cartesiano.

Atividades resolvidas

R7. Em uma fábrica de peças para automóveis, certa máquina produz 14 peças por hora de trabalho. Cada uma dessas peças é vendida às montadoras por R$ 130,00.

a) Escreva uma função que relacione a:
- quantidade *p* de peças produzidas e o tempo *x* em horas;
- quantia *v* arrecadada e a quantidade *p* de peças produzidas.

b) Determine a função composta $(v \circ p)(x)$. O que essa função relaciona?

c) Calcule o valor arrecadado com a venda das peças produzidas em 8 horas de trabalho dessa máquina.

Resolução

a)
- Temos que a máquina produz 14 peças por hora, então a função que relaciona quantidade *p* de peças produzidas e tempo *x* em horas é dada por:

$$p(x) = 14x$$

- Como as peças são vendidas por R$ 130,00 a unidade, a função que relaciona quantia *v* arrecadada e quantidade *p* de peças produzidas é dada por:

$$v(p) = 130p$$

b) $(v \circ p)(x) = v(p(x)) = 130 \cdot p(x) = 130 \cdot 14x = 1\,820x$

A função $(v \circ p)(x) = 1\,820x$ relaciona o valor arrecadado com a venda das peças e o tempo *x* em horas de trabalho da máquina.

c) Calculando $(v \circ p)(8)$, temos:

$$(v \circ p)(8) = 1\,820 \cdot 8 = 14\,560$$

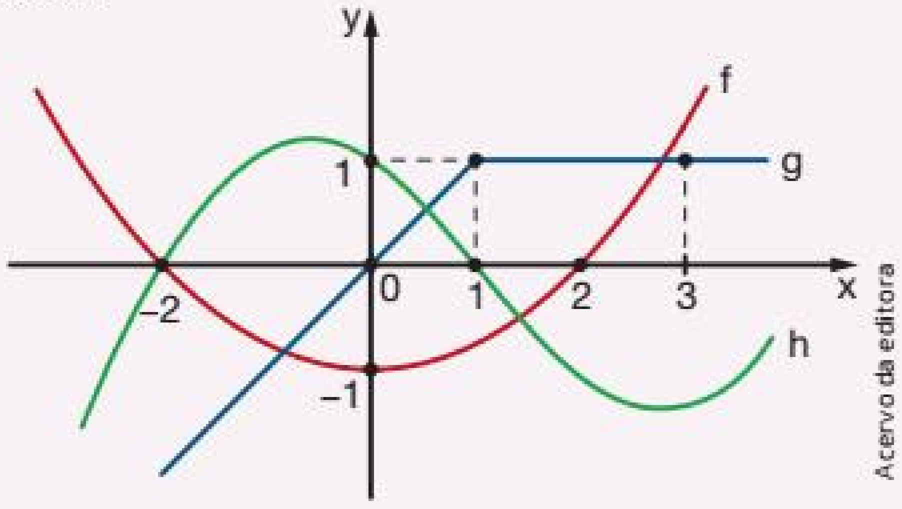
Portanto, o valor arrecadado com a venda das peças produzidas em 8 horas de trabalho dessa máquina é R$ 14 560,00.

R8 A partir dos gráficos das funções *f*, *g* e *h*, esboçados em um mesmo plano cartesiano, calcule:

a) $g(f(-2))+h(g(3))$

b) $h(g(f(2)))$

c) $f(h(g(3)))+f(h(g(1)))$



Acervo da editora

Resolução

a) $g(\underbrace{f(-2)}_{0})+h(\underbrace{g(3)}_{1})=g(0)+h(1)=0+0=$ 0

b) $h(g(\underbrace{f(2)}_{0}))=h(\underbrace{g(0)}_{0})=h(0)=$ 1

c) $f(h(\underbrace{g(3)}_{1}))+f(h(\underbrace{g(1)}_{1}))=f(\underbrace{h(1)}_{0})+f(\underbrace{h(1)}_{0})=f(0)+f(0)=-1-1=$ -2

R9. Uma fábrica utiliza a função $c(n)=\dfrac{1}{1+n^2}$ para calcular o custo de produção de *n* unidades de certo produto.

Determine a função inversa de *c* e interprete seu significado.

Resolução

Nesse caso, devemos isolar a variável *n* para determinar a função inversa de *c*:

$$c=\frac{1}{1+n^2}\Rightarrow 1+n^2=\frac{1}{c}\Rightarrow n^2=\frac{1}{c}-1\Rightarrow n^2=\frac{1-c}{c}\Rightarrow n=\sqrt{\frac{1-c}{c}}$$

Note que, como *n* corresponde ao número de produtos, foram considerados apenas seus valores positivos.

Portanto, $n(c)=\sqrt{\dfrac{1-c}{c}}$ é a função inversa de $c(n)=\dfrac{1}{1+n^2}$ e corresponde ao número aproximado de unidades produzidas do produto, dado um custo.

R10. Dada a função $f(x)=5x+1$, esboce os gráficos de *f* e f^{-1} no mesmo plano cartesiano.

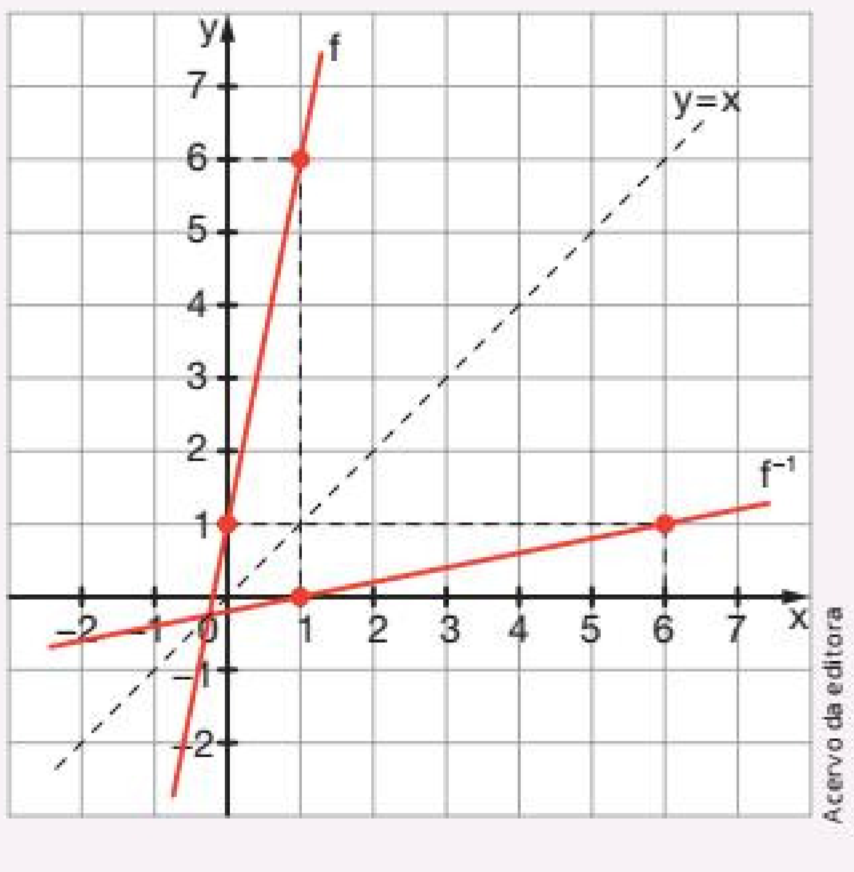
Resolução

Determinamos f^{-1} isolando *x* em $y=f(x)$.

$$y=5x+1\Rightarrow 5x=y-1\Rightarrow x=\frac{y-1}{5}\Rightarrow x=\frac{y}{5}-\frac{1}{5}$$

Permutando as variáveis x e y, temos $f^{-1}(x)=\dfrac{x}{5}-\dfrac{1}{5}$.

Esboçando os gráficos de *f* e f^{-1} em um mesmo plano cartesiano, temos:



Acervo da editora

Em um mesmo plano cartesiano, os gráficos de uma função *f* e de sua inversa f^{-1} são simétricos em relação à reta $y=x$.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

49. Considerando a função $f(x) = 3x - 5$, calcule:

a) $f(5)$ 10

b) $f(f(5))$ 25

c) $f(f(f(5)))$ 70

50. Dadas as funções $f(x)=5x-8$, $g(x)=x^2+4x$ e $h(x)=\frac{2}{x-3}$, determine:

a) $f(g(x))$ $f(g(x))=5x^2+20x-8$

b) $h(g(x))$ $h(g(x))=\frac{2}{x^2+4x-3}$

c) $f(h(x))$ $f(h(x))=\frac{10}{x-3}-8$

d) $h(f(x))$ $h(f(x))=\frac{2}{5x-11}$

e) $g(f(x))$ $g(f(x))=25x^2-60x+32$

f) $f(f(x))$ $f(f(x))=25x-48$

g) $g(g(x))$ $g(g(x))=x^4+8x^3+20x^2+16x$

h) $h(h(x))$ $h(h(x))=\frac{2x-6}{11-3x}$

51. Considere o conjunto $A=\{-1, 0, 1, 2, 3\}$ e as funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g: A \to \mathbb{R}$ dadas, respectivamente, por $f(x) = 6 - x$ e $g(x) = 4x + 2$. Determine a imagem de *g* e de $f \circ g$.
$Im(g) = \{-2, 2, 6, 10, 14\}$ e $Im(f \circ g) = \{-8, -4, 0, 4, 8\}$

52. Em uma fábrica de roupas, o custo para a produção de camisas é calculado a partir de um valor fixo de R$ 480,00 mais R$ 30,00 por unidade produzida. Nessa fábrica são produzidos lotes de, no máximo, 1 000 camisas, sendo vendido cada lote com 30% de lucro sobre o valor de custo. c) $v(c(x))=624+39x$; Resposta esperada: a relação entre o valor de venda do lote e o número de peças produzidas.

a) Escreva uma função:
  - *c*, que relacione o custo de produção e a quantidade *x* de peças produzidas; $c(x)=480+30x$
  - *v*, que relacione o valor de venda de um lote e o custo *c* da produção. $v(c)=1{,}3c$

b) Qual é o custo para a produção de um lote com 600 camisas? Por quantos reais será vendido esse lote? R$ 18 480,00; R$ 24 024,00

c) Determine a função $v(c(x))$. O que representa essa função?

d) Qual é o valor de venda de um lote com:
  - 500 camisas? R$ 20 124,00
  - 835 camisas? R$ 33 189,00

53. Em relação às funções $f(x)=x^2-25$ e $g(x)=\sqrt{x}$, é correto afirmar que: c; e

a) $(f \circ g)(x)=(g \circ f)(x)$

b) $(g \circ g)(x)=(f \circ f)(x)$

c) $(f \circ g)(x)=x-25$

d) $(f \circ g)(x)=x-5$

e) $(g \circ f)(-6) \geq \pi$

f) $(g \circ f)(13) \notin \mathbb{R}$

54. Considerando as funções *f* e *g* apresentadas na atividade anterior, determine o domínio e a imagem de $(f \circ g)(x)$. $D(f \circ g)=\mathbb{R}_+$; $Im(f \circ g)=[-25, +\infty[$

55. Para cada item, esboce o gráfico da função $f(g(x))$.

a) $f(x)=\frac{x}{2}+1$ e $g(x)=4x+6$

b) $f(x)=3x^2-10$ e $g(x)=2\sqrt{x}$

c) $f(x)=x^2-3x$ e $g(x)=5-x$

Respostas nas **Orientações para o professor**.

56. Considerando as funções $f(x)=4x+m$ e $g(x)=2x-6$, determine *m* para que $(f \circ g)=(g \circ f)$. $m=-18$

57. Determine a inversa de cada função bijetiva.
Respostas no final do livro.

a) $f(x)=-4x+1$

b) $f(x)=\sqrt[5]{x+3}$

c) $f(x)=\frac{x}{2}-5$

d) $f(x)=\frac{2}{x-1}$, com $x \neq 1$

e) $f(x)=3x^2+4$, com $x \geq 0$

f) $f(x)=\frac{6x-1}{3x+2}$, com $x \neq -\frac{2}{3}$

58. Qual deve ser o contradomínio de $f(x)=\frac{2-x}{x}$ definida em $\mathbb{R}^*$ para que essa função seja inversível?
$CD(f)=\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1\}$

59. Praticar esportes, desde que com acompanhamento médico, melhora a condição física e auxilia no emagrecimento. A natação, por exemplo, desenvolve a resistência dos músculos dos braços; em 1 h de atividade, são gastas cerca de 500 kcal.

a) Escreva a função *f* que determina o gasto calórico da natação em função do tempo *x* praticado (em horas). $f(x)=500x$

b) Determine a função f^{-1}. O que essa função representa? Resposta no final do livro.

60. Dada a função $f(x)=\frac{2x+1}{x-3}$, com $x \neq 3$, determine:

a) $f^{-1}(x)$

b) $D(f^{-1})$ $\mathbb{R}-\{2\}$

c) $Im(f^{-1})$ $\mathbb{R}-\{3\}$

d) $f^{-1}(-4)$ $\frac{11}{6}$

61. Seja a função bijetiva *f* de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x)=mx+3$, com $f^{-1}(2)=5$. Calcule:

a) o valor de *m* $-\frac{1}{5}$

b) $f(2)$ $\frac{13}{5}$

c) $f(0)$ 3

d) $f^{-1}(-2)$ 25

e) $f^{-1}(4)$ -5

62. Sendo *f* de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ uma função definida por $f(x)=3x-2$, determine as coordenadas do ponto de interseção dos gráficos de *f* e f^{-1}. (1, 1)

63. Represente, em um mesmo plano cartesiano, cada função e sua inversa.
Respostas nas **Orientações para o professor**.

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x)=3x-8$

b) $g: \mathbb{R}_+ \to [-1, +\infty[$ definida por $g(x)=2x^2-1$

c) $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(x)=x^3$

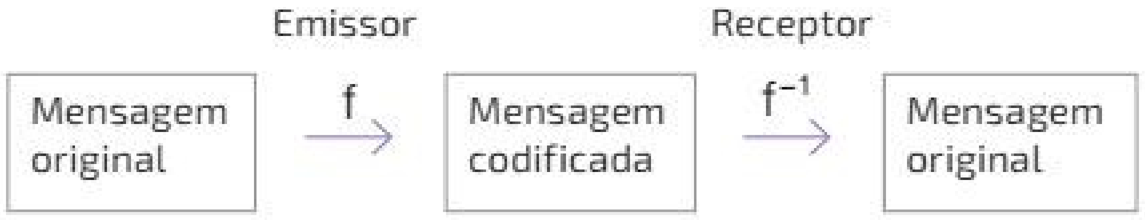
60. a) $f^{-1}(x)=\frac{3x+1}{x-2}$, com $x \neq 2$

Contexto Criptografia

64. Operações de serviços disponíveis na internet, movimentações bancárias e outras transações eletrônicas necessitam da criptografia para comunicação confidencial de dados.

A palavra criptografia tem origem grega (*kripto*: escondido, oculto; *grapho*: grafia) e define a arte ou ciência de escrever mensagens em códigos, de forma que somente pessoas autorizadas possam decifrá-las. A criptografia é tão antiga quanto a própria escrita; já estava presente no sistema de escrita hieroglífica dos egípcios e os romanos utilizavam códigos secretos para comunicar planos de batalha. Contudo, desde aquele tempo, seu princípio básico continua o mesmo: encontrar uma transformação (função) injetiva *f* entre um conjunto de mensagens escritas em um determinado alfabeto (de letras, números ou outros símbolos) para um conjunto de mensagens codificadas. O fato de *f* ser inversível é a garantia de o processo ser reversível e as mensagens poderem ser reveladas pelos receptores.

O grande desafio de um processo criptográfico, portanto, está em ocultar eficientemente os mecanismos (chaves) para a inversão de *f*, de modo que estranhos não possam fazê-lo.



[...]

TAMAROZZI; Antonio Carlos. Codificando e decifrando mensagens. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo: SBM, n. 45, p. 41, 2001.

Máquina enigma

A máquina enigma, que possui um sistema de combinações mecânicas e elétricas, foi utilizada na 2ª Guerra Mundial para criptografar e descriptografar mensagens.

máquina enigma

Fotomontagem de José Vitor E.C. formada pelas imagens c.1940. Coleção particular. Foto: Granger, NYC/Glow Images, HeinSchlebusch/Shutterstock.com e Petrosg/Shutterstock.com

I Teclado
O operador tecla a mensagem a ser criptografada. Consequentemente, o circuito fecha e a corrente elétrica flui pelos rotores até chegar à placa de luzes.

II Rotores
É um conjunto de discos rotativos com movimento contínuo que resulta em diversas combinações na criptografia.

Veja um exemplo de criptografia:

Se você deseja trocar uma mensagem com um colega utilizando esse processo criptográfico, primeiramente associe números às letras do alfabeto e utilize o símbolo # para representar um espaço em branco.

#	A	B	...	J	K	L	...	V	W	X	Y	Z
0	1	2	...	10	11	12	...	22	23	24	25	26

Depois, defina a função por meio da qual a mensagem será criptografada. Suponha que seja *f* de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, cuja lei de formação é $f(x)=3x-1$. Em seguida, escolha a mensagem a ser transmitida e associe cada letra da mensagem ao seu número correspondente. A mensagem ESTUDE MATEMATICA, por exemplo, é representada do seguinte modo:

5	19	20	21	4	5	0	13	1	20	5	13	1	20	9	3	1
E	S	T	U	D	E	#	M	A	T	E	M	A	T	I	C	A

Para transmiti-la ao seu colega, obtenha então a imagem de cada um desses valores por meio da função *f*, ou seja:

14	56	59	62	11	14	−1	38	2	59	14	38	2	59	26	8	2
f(5)	f(19)	f(20)	f(21)	f(4)	f(5)	f(0)	f(13)	f(1)	f(20)	f(5)	f(13)	f(1)	f(20)	f(9)	f(3)	f(1)

Fontes de pesquisa: SINGH, Simon. **O livro dos códigos.** Tradução Jorge Calife. Rio de Janeiro: Record, 2001. p. 143-161.
TAMAROZZI; Antonio Carlos. Codificando e decifrando mensagens. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo: SBM, n. 45, p. 41, 2001.

Ao receber a mensagem, ele terá de determinar, primeiramente, a imagem desses números pela função inversa de *f*, que neste caso é f^{-1} de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por $f^{-1}(x)=\frac{x+1}{3}$, e, em seguida, associar cada número obtido às letras do alfabeto para poder decifrá-la. Por exemplo:

$$f^{-1}(14)=\frac{14+1}{3}=5, \text{ e o número 5 corresponde à letra E.}$$

No fim do processo, ele obterá a mensagem original que você enviou.

Placa de luzes
A luz que acende codifica a letra que foi pressionada no teclado.

Ilustrações: Mario Henrique

b) Ocultar eficientemente os mecanismos (chaves) para a inversão de *f*, de modo que pessoas não autorizadas não possam fazê-lo.

De acordo com as informações apresentadas, resolva as questões.

a) Apresente exemplos de situações que necessitam da criptografia para a comunicação confidencial de informações. Algumas possíveis respostas: compras na internet e movimentações bancárias.

b) Qual o objetivo em um processo criptográfico?

c) Suponha que você esteja recebendo a mensagem abaixo criptografada por meio da função *f* de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, dada por $f(x)=2x+1$, na qual as letras do alfabeto estão associadas conforme apresentado anteriormente. Determine a mensagem original que lhe foi enviada.

VIAGEM SABADO

45 19 3 15 11 27 1 39 3 5 3 9 31

d) Escolha uma mensagem e, considerando a associação para as letras do alfabeto que foi feita no texto, determine uma função por meio da qual ela possa ser criptografada e escreva todos os passos do processo criptográfico. Depois, entregue a um colega a mensagem criptografada e a função utilizada, para que ele determine a função inversa e decifre a mensagem. Resposta pessoal.

capítulo

3

Função afim

Avenida Sumaré, em São Paulo (SP), durante o apagão de 10 de novembro de 2009. Esse apagão atingiu todas as regiões do país, sendo a região Sudeste a mais afetada.

Alexandre Tokitaka/Pulsar

Veja mais informações sobre lâmpadas e consumo consciente de energia elétrica nos *sites*:

- **<http://tub.im/kxntif>**
- **<http://tub.im/y6u8gn>**

(acesso em: 2 fev. 2016)

Lâmpadas

Utilizar a energia elétrica com consciência também é uma forma de combater o desperdício de recursos naturais, preservando assim o meio ambiente.

Uma medida que evita o desperdício e contribui para a redução do valor da fatura de energia elétrica é optar, quando possível, por um tipo de lâmpada mais eficiente para a residência. De maneira geral, as lâmpadas mais utilizadas no Brasil são: a incandescente, que apesar de consumir muita energia foi a mais vendida no país por muito tempo; a fluorescente, que se popularizou no final da década de 1990, quando a busca pela economia de energia ganhou maior destaque; e a de led (do inglês, Diodo Emissor de Luz), que possui baixo consumo de energia e alta durabilidade, quando comparada aos demais modelos.

Observe a seguir a potência e o consumo de energia elétrica de algumas lâmpadas em 1 h de funcionamento.

Explique aos alunos que a sigla W corresponde à unidade de medida watt e a sigla kWh, à unidade de medida quilowatt-hora.

Lâmpadas com luminosidades equivalentes

Lâmpada incandescente

Potência: 60 W
Consumo: 0,06 kWh

Somchai Som/Shutterstock.com

Lâmpada fluorescente

Potência: 15 W
Consumo: 0,015 kWh

maxstockphoto/Shutterstock.com

Lâmpada de led

Potência: 10 W
Consumo: 0,01 kWh

maxstockphoto/Shutterstock.com

Fonte de pesquisa: <http://planetasustentavel.abril.com.br/noticia/energia/qual-melhor-lampada-incandescente-fluorescente-halogena-ou-led-770775.shtml>. Acesso em: 5 ago. 2015.

Oriente os alunos a escreverem as respostas no caderno.

A Você tem o hábito de deixar lâmpadas acesas desnecessariamente em sua casa? Converse com o professor e os colegas sobre isso. Resposta pessoal.

B Qual tipo de lâmpada citada no texto é a menos eficiente? Justifique. Resposta esperada: incandescente, pois, se comparada às fluorescentes e às de led equivalentes, ela consome mais energia elétrica.

C Considere que uma lâmpada ficará acesa 8 h por dia durante 30 dias. Qual será o consumo de energia elétrica se essa lâmpada for do tipo:

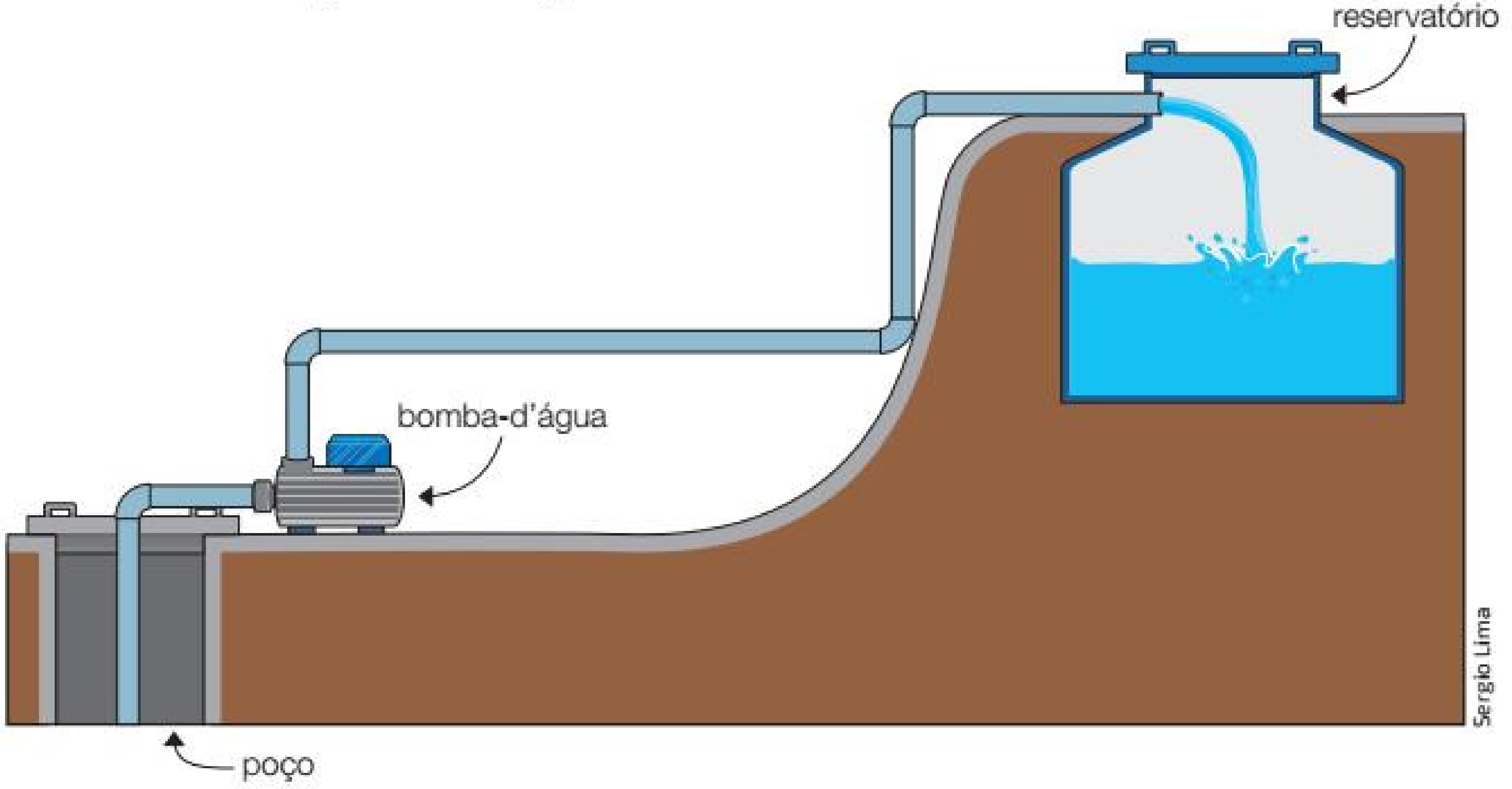
- incandescente de 60 W? 14,4 kWh
- fluorescente de 15 W? 3,6 kWh
- led de 10 W? 2,4 kWh

Explique aos alunos que a legislação brasileira iniciou em 2014 a descontinuidade da comercialização das lâmpadas incandescentes. Porém, por ter sido a mais comercializada até então, é comum a presença dessas lâmpadas nas residências até hoje.

Estudando função afim

Ao final do estudo deste capítulo podem ser trabalhados o exemplo e as atividades das páginas 272 e 273 da seção **Acessando tecnologias**.

A água potável utilizada em propriedades rurais, de modo geral, é retirada de poços com o auxílio de uma bomba-d'água elétrica. Em certo sítio, para abastecer o reservatório de água, é utilizada uma bomba-d'água com capacidade para bombear 15 L por minuto. Essa bomba é ligada automaticamente quando o reservatório está com 250 L de água e desligada ao enchê-lo.



Sergio Lima

Com essas informações, podemos escrever uma fórmula que permite calcular a quantidade de água contida no reservatório em função do tempo em que a bomba permanece ligada, considerando que não haja consumo de água durante esse período.

Para isso, representamos por *y* a quantidade de litros de água no reservatório enquanto a bomba permanece ligada, e por *x* o tempo, em minutos, que a bomba permanece ligada.

quantidade de litros de água

tempo em que a bomba permanece ligada

$$y = 15x + 250$$

litros de água bombeados por minuto

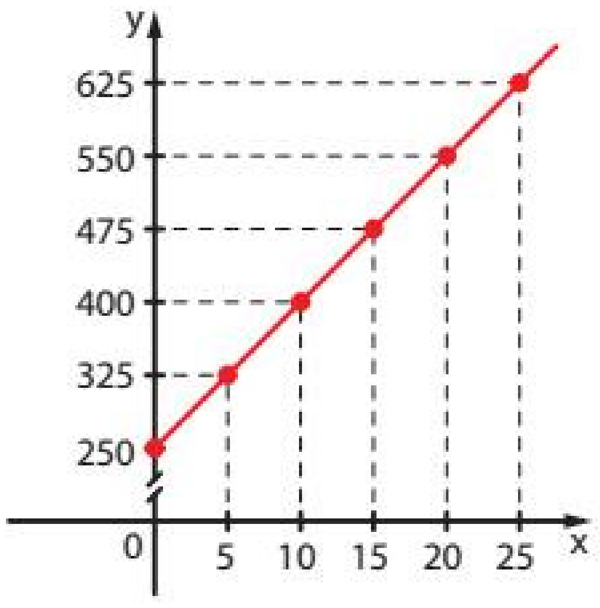
quantidade inicial de litros de água no reservatório

Utilizando essa fórmula, vamos calcular, por exemplo, a quantidade de água no reservatório 25 minutos após a bomba entrar em funcionamento, ou seja, calcular o valor de *y* para $x = 25$.

$$y = 15x + 250 \Rightarrow y = 15 \cdot 25 + 250 = 375 + 250 \Rightarrow y = 625$$

Portanto, após 25 minutos de funcionamento da bomba, o reservatório estará com 625 L de água.

Representando graficamente essa situação, temos:



Acervo da editora

No gráfico, as escalas dos eixos são diferentes entre si.

Junto com os alunos, calcule o valor de $y = 15x + 250$ para $x = 0$, $x = 5$, $x = 10$, $x = 15$, $x = 20$ e $x = 25$. Discuta com eles os significados dos resultados.

Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que a todo número $x \in \mathbb{R}$ associa o número $ax+b$, com *a* e *b* reais, é chamada **função afim**.

$$x \to ax+b$$

$$f(x)=ax+b \text{ ou } y=ax+b$$

Dizemos que *a* e *b* são os **coeficientes** da função.

Diga aos alunos que podemos utilizar qualquer letra para indicar a função, no entanto é mais comum utilizarmos as letras *f*, *g* e *h*. Para indicar a variável independente, também podemos utilizar qualquer letra, sendo mais comum o uso da letra *x*.

Exemplos

- $f(x)=x-5$, com $a=1$ e $b=-5$
- $h(x)=-\frac{2}{5}x+12$, com $a=-\frac{2}{5}$ e $b=12$
- $g(x)=2x+1{,}5$, com $a=2$ e $b=1{,}5$
- $m(x)=-x$, com $a=-1$ e $b=0$

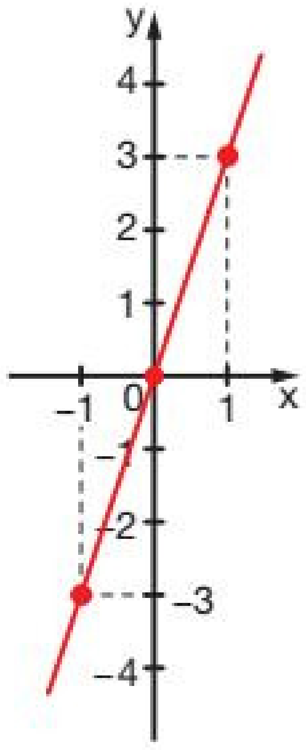
De acordo com os valores dos coeficientes de uma função afim, ela pode receber uma nomenclatura especial. Quando o coeficiente *b* é igual a zero, ela é chamada **função linear**.

A função $f(x)=3x$ ou $y=3x$ é um exemplo de função linear. Observando abaixo o gráfico dessa função, notamos que ele passa pela origem, pois como $b=0$, quando $x=0$ tem-se $y=0$.

Uma função afim $f(x)=ax+b$, com $b=0$, é chamada **função linear**.

$$x \to ax$$

$$f(x)=ax \text{ ou } y=ax$$



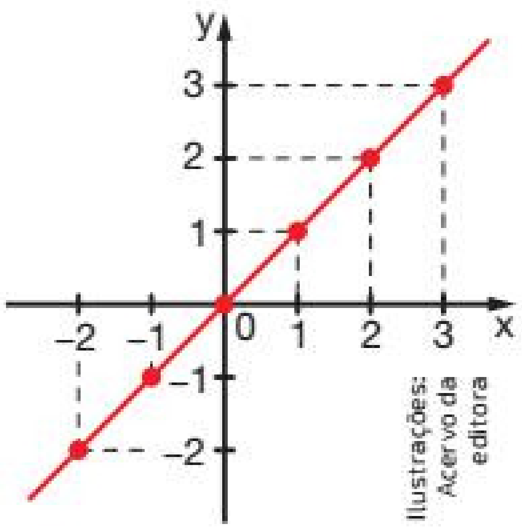
Exemplos

- $f(x)=2x$, com $a=2$ e $b=0$
- $h(x)=\frac{1}{2}x$, com $a=\frac{1}{2}$ e $b=0$
- $g(x)=-3x$, com $a=-3$ e $b=0$
- $m(x)=x$, com $a=1$ e $b=0$

No caso em que o coeficiente *b* de uma função afim é igual a zero e o coeficiente *a* é igual a 1, ela é chamada também de **função identidade**.

Observando o gráfico da função identidade $f(x)=x$ ou $y=x$, notamos que:

- a cada valor de *x* é associado um valor numericamente igual de *y*;
- ele corresponde à bissetriz dos quadrantes ímpares do plano cartesiano.



Ilustrações: Acervo da editora

x	f(x) = x	(x, y)
−2	−2	(−2, −2)
−1	−1	(−1, −1)
0	0	(0, 0)
1	1	(1, 1)
2	2	(2, 2)
3	3	(3, 3)

Uma função afim $f(x)=ax+b$, com $a=1$ e $b=0$, é chamada **função identidade**.

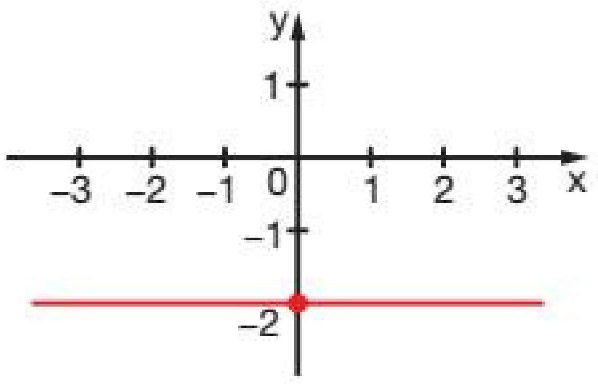
$$x \to x$$

$$f(x)=x \text{ ou } y=x$$

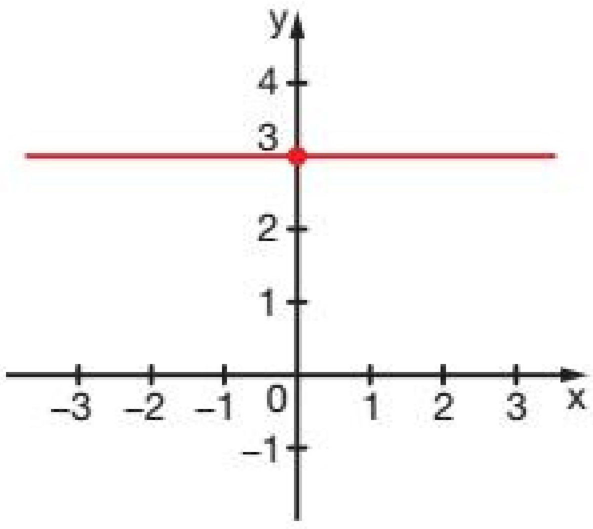
Nos casos em que o coeficiente *a* de uma função afim é igual a zero, ela é chamada **função constante**.

Exemplos

- $f(x)=-2$, com $a=0$ e $b=-2$



- $g(x)=3$, com $a=0$ e $b=3$



Ilustrações: Acervo da editora

Note que o gráfico de uma função constante é uma reta paralela ao eixo das abscissas, pois todos os valores de *x* são associados a um mesmo valor de *y*.

Uma função afim $f(x)=ax+b$, com $a=0$, é chamada **função constante**.

$$x \rightarrow b$$

$$f(x)=b \text{ ou } y=b$$

Atividades resolvidas

Ao trabalhar a atividade resolvida **R1**, veja a possibilidade de retomar o estudo da página 74.

R1. Antônio possui em seu sítio um sistema de bombeamento como o descrito no início do capítulo. Considerando que a potência da bomba-d'água utilizada é 450 watts, então ela consome 0,45 kWh de energia elétrica.

a) Escreva uma função linear que represente o consumo dessa bomba-d'água em quilowatt-hora, durante o tempo em que ela está em funcionamento.

b) Calcule o consumo dessa bomba-d'água se ela permanecer em funcionamento durante 2 h, 6 h e 8 h.

Resolução

a) Chamando de *c* o consumo da bomba, em quilowatt-hora, e de *t* o tempo, em horas, a função que representa o consumo a partir do tempo de funcionamento é dada por:

$$c(t)=0,45t$$

b) Calculando $c(2)$, $c(6)$ e $c(8)$, temos:

- $c(2)=0,45\cdot 2=0,9 \rightarrow$ 0,9 kWh
- $c(6)=0,45\cdot 6=2,7 \rightarrow$ 2,7 kWh
- $c(8)=0,45\cdot 8=3,6 \rightarrow$ 3,6 kWh

R2. Qual é a lei de formação da função afim tal que $f(-1)=2$ e $f(1)=0$?

Resolução

Temos que a função é do tipo $f(x)=ax+b$. Assim:

- $f(-1)=2 \Rightarrow a\cdot(-1)+b=2 \Rightarrow -a+b=2$
- $f(1)=0 \Rightarrow a\cdot 1+b=0 \Rightarrow a+b=0$

Escrevendo e resolvendo o sistema, temos:

$$\begin{cases} -a+b=2 \\ a+b=0 \end{cases}$$

$$2b=2 \Rightarrow b=1$$

$$a+b=0 \Rightarrow a+1=0 \Rightarrow a=-1$$

Portanto, $f(x)=-x+1$.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

1. Classifique cada função $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ em afim, linear, constante ou identidade.

a) $f(x)=\frac{3}{2}x-5$ função afim

b) $f(x)=x$ função afim, linear e identidade

c) $f(x)=-3x$ função afim e linear

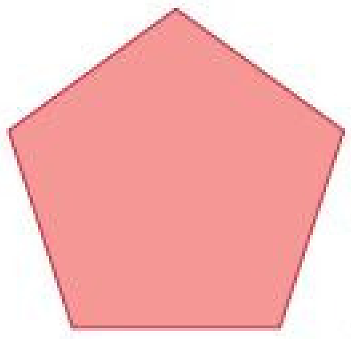
d) $f(x)=-5$ função afim e constante

e) $f(x)=15-\frac{4}{5}x$ função afim

f) $f(x)=-x$ função afim e linear

2. A seguir está indicado o perímetro de um pentágono regular em função da medida, em centímetros, de seu lado.

Medida do lado do pentágono (cm)	Perímetro (cm)
2	10
4	20
5,5	27,5
8	40



Acervo da editora

a) Dado um pentágono regular de lado 13 cm, determine seu perímetro. 65 cm

b) Qual fórmula a seguir permite calcular o perímetro p do pentágono regular em função da medida ℓ do seu lado? $p(\ell)=5\ell$

- $p(\ell)=\frac{1}{5}\ell$
- $p(\ell)=5+\ell$
- $p(\ell)=5\ell$

3. Escreva uma função afim na forma $f(x)=ax+b$, sabendo que:

a) $a=3$ e $b=10$ $f(x)=3x+10$

b) $f(-1)=5$ e $b=0$ $f(x)=-5x$

c) $f(2)=1$ e $a=\frac{1}{4}$ $f(x)=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$

d) $f(3)=11$ e $b=5$ $f(x)=2x+5$

e) $f(1)=3$ e $f(3)=5$ $f(x)=x+2$

f) $f(-2)=7$ e $f(0)=3$ $f(x)=-2x+3$

4. Uma pizzaria oferece serviço de entrega e cobra por isso uma taxa fixa de R$ 2,00 mais R$ 0,80 por quilômetro rodado no trajeto entre o estabelecimento e o local da entrega.

a) Qual será o valor da taxa se o local da entrega for a 13 km da pizzaria? E se o local for a 8,5 km? R$ 12,40; R$ 8,80

b) Escreva uma função que permita calcular o valor t da taxa de entrega, em reais, em função da distância d percorrida, em quilômetros. $t(d)=2+0{,}8d$

5. O gafanhoto-do-deserto é um inseto capaz de comer cerca de 1,5 grama de folhas por dia, um número aparentemente pequeno, mas se considerarmos que algumas nuvens desses gafanhotos podem conter cerca de 50 milhões de indivíduos, a devastação alcança grandes proporções.

Fonte de pesquisa: ANIMAIS do deserto II. Enciclopédia da vida selvagem Larousse. Rio de Janeiro: Altaya, 1997.

Nigel Cattlin/Alamy Stock Photo/Latinstock

Ser vivo adulto

Gafanhoto-do-deserto: cerca de 6 cm de comprimento

gafanhoto-do-deserto

a) Escreva uma função afim que relacione a quantidade q de gafanhotos com a massa m, em gramas, de folhas que eles são capazes de comer por dia. $m(q)=1{,}5q$

b) Quantas toneladas de folhas uma nuvem com 50 milhões de gafanhotos-do-deserto pode comer em um único dia? 75 t

6. Um ônibus faz uma viagem de São Paulo a Curitiba a uma velocidade média de 62 km/h.

Trajeto São Paulo – Curitiba

E. Cavalcante

Fonte: ATLAS geográfico escolar. 6. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2012.

a) Nessas condições, sabendo que a distância entre as duas cidades é de 409 km, em quanto tempo a viagem é realizada? aproximadamente 6,6 h

b) Calcule a distância média percorrida pelo ônibus em:

- 1 hora 62 km
- 2 horas 124 km
- 5 horas 310 km
- 6 horas 372 km

c) Escreva uma função que relacione a distância média d percorrida, em quilômetros, em função do tempo t, em horas. $d(t)=62t$

7. Um técnico em informática, que presta serviços a empresas, realizou um trabalho em 3 h e cobrou R$ 295,00. Sabendo que esse técnico cobra R$ 65,00 por hora de trabalho mais um valor fixo, escreva uma função que represente o preço p que ele cobra por t horas de trabalho. $p(t)=65t+100$

8. (Enem-MEC) Existem muitas diferenças entre as culturas cristã e islâmica. Uma das principais diz respeito ao calendário. Enquanto o calendário cristão (gregoriano) considera um ano como o período correspondente ao movimento de translação da Terra em torno do Sol, aproximadamente 365 dias, o calendário muçulmano se baseia nos movimentos de translação da Lua em torno da Terra, aproximadamente 12 por ano, o que corresponde a anos intercalados de 254 e 255 dias.

Considerando que o calendário muçulmano teve início em 622 da era cristã e que cada 33 anos muçulmanos correspondem a 32 anos cristãos, é possível estabelecer uma correspondência aproximada de anos entre os dois calendários, dada por: a

(C = anos cristãos e M = anos muçulmanos)

a) $C = M + 622 - \left(\dfrac{M}{33}\right)$

b) $C = M - 622 + \left(C - \dfrac{622}{32}\right)$

c) $C = M - 622 - \left(\dfrac{M}{33}\right)$

d) $C = M - 622 + \left(C - \dfrac{622}{33}\right)$

e) $C = M + 622 - \left(\dfrac{M}{32}\right)$

9. Júlio trabalha como vendedor em uma loja e seu salário mensal é calculado da seguinte maneira: uma quantia fixa de R$ 1 200,00 mais 5% do valor das vendas que ele efetuar no mês.

a) Escreva uma função que permita calcular o salário *s* de Júlio em função do valor das vendas *v* efetuadas por ele. $s(v) = 1\,200 + 0{,}05v$

b) Se em determinado mês Júlio vender o equivalente a R$ 20 000,00 em produtos, qual será o valor de seu salário? R$ 2 200,00

c) Em certo mês, Júlio recebeu R$ 2 020,00 de salário. Quantos reais ele vendeu nesse mês? R$ 16 400,00

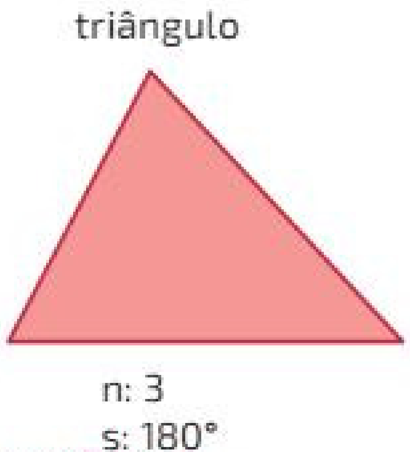
10. Sandra possuía R$ 100,00 e, para fazer uma viagem no final do ano, ela guardou, a partir de janeiro, R$ 60,00 em cada mês.

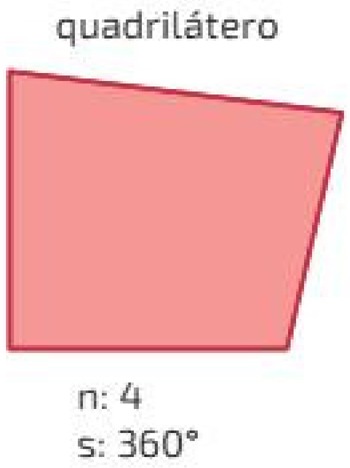
a) Quantos reais Sandra possuía ao final do 6º mês? R$ 460,00

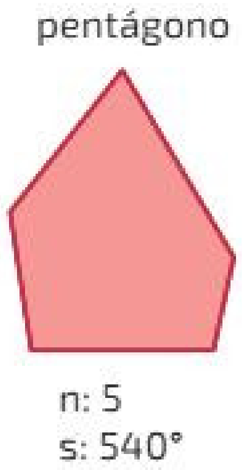
b) Escreva uma função que relacione a quantia em reais *q* com o tempo *t*, em meses. $q(t) = 100 + 60t$

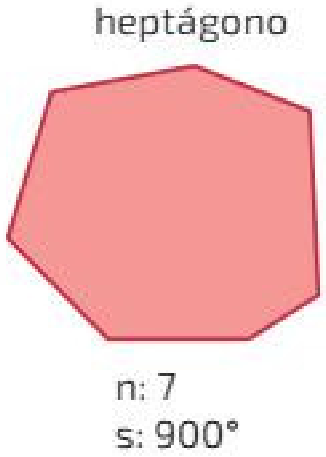
c) Sabendo que a viagem será feita no final do mês de novembro do mesmo ano e que Sandra conseguiu guardar exatamente a quantia necessária para pagá-la, qual o preço dessa viagem? R$ 760,00

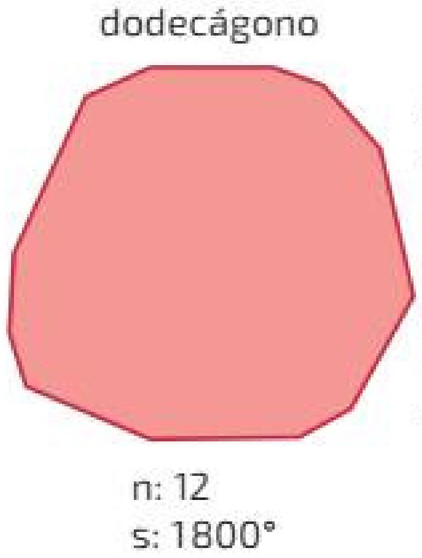
11. A seguir estão indicados o número *n* de lados e a soma *s* dos ângulos internos de alguns polígonos em graus.











Ilustrações: Acervo da editora

Para auxiliar na resolução da atividade 11, sugira aos alunos que organizem em um quadro o número *n* de lados e a soma *s* das medidas dos ângulos internos dos polígonos apresentados.

a) Escreva uma fórmula que relacione a soma *s* dos ângulos internos de um polígono, em graus, em função do número *n* de lados. $s(n) = 180n - 360$

b) De quantos graus é a soma dos ângulos internos de um polígono de 6 lados? 720°

c) Quantos lados tem um polígono cuja soma dos ângulos internos é igual a 2 340°? 15 lados

12. Uma máquina produz um tipo de peça destinada às montadoras de automóveis. Essa máquina tem um custo fixo diário de *b* reais mais R$ 8,50 por peça produzida.

a) Sabendo que a produção diária de 500 peças por essa máquina gera um custo de R$ 4 400,00, calcule o valor de *b*. R$ 150,00

b) Escreva a lei da função que permite calcular o custo *c* para se produzir *p* peças. $c(p) = 8{,}5p + 150$

13. (UFV-MG) A fábrica de chocolates Confeitaria Abelha gasta mensalmente um valor fixo de R$ 3 900,00 mais R$ 0,50 por barra de chocolate produzida. Considerando que a fábrica vende *x* barras de chocolate por mês, a R$ 1,80 cada uma:

Se necessário, comente com os alunos que para calcular o lucro mensal deve-se considerar o valor arrecadado com as vendas e subtrair os gastos da empresa.

a) determine a expressão matemática $G(x)$, que representa o gasto total por mês; $G(x) = 3\,900 + 0{,}5x$

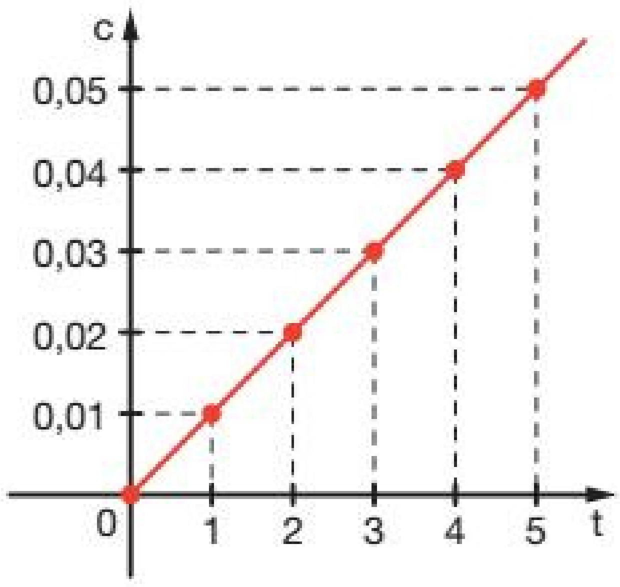
b) determine a expressão matemática $L(x)$, que representa o lucro mensal obtido; $L(x) = 1{,}3x - 3\,900$

c) calcule o número de barras de chocolate que devem ser vendidas, por mês, para que a fábrica tenha um lucro mensal de R$ 2 600,00. 5 000 barras de chocolate

Gráfico de uma função afim

Nas páginas **72** e **73**, estudamos que certa lâmpada de led consome 0,01 kWh de energia elétrica. Podemos representar a relação do tempo *t* (em h) e do consumo *c* (em kWh) por uma função $c : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ dada por $c(t) = 0,01t$, cujo gráfico está representado ao lado.

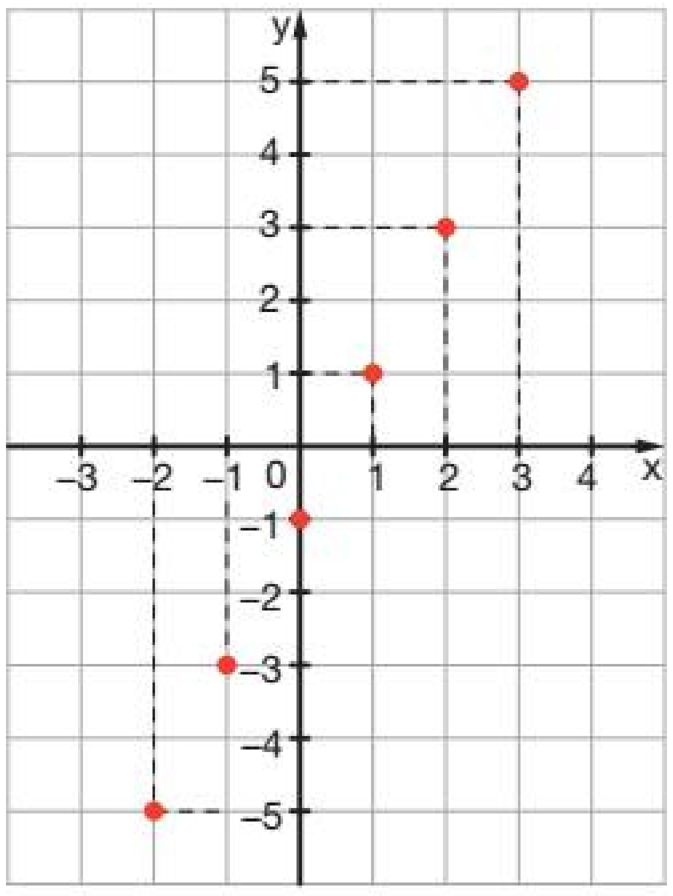
O gráfico de uma função é dado pela representação de todos esses pontos no plano cartesiano. Porém, como é impossível calcular as coordenadas de todos eles, calculamos as coordenadas de alguns e traçamos o gráfico.



No gráfico, as escalas dos eixos são diferentes entre si.

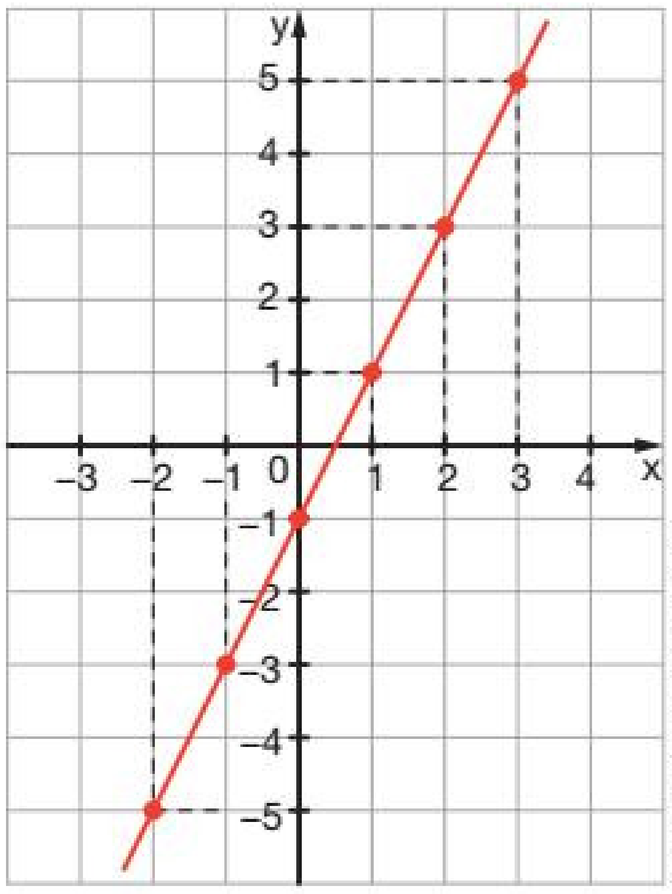
Observe como podemos esboçar o gráfico da função afim $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 2x - 1$. Inicialmente, atribuímos valores para *x* e calculamos valores correspondentes para *y*, determinando pares ordenados (x, y). Em seguida, representamos esses pares ordenados em um plano cartesiano.

x	$f(x) = 2x - 1$	(x, y)
−2	$f(-2) = 2 \cdot (-2) - 1 = -5$	$(-2, -5)$
−1	$f(-1) = 2 \cdot (-1) - 1 = -3$	$(-1, -3)$
0	$f(0) = 2 \cdot 0 - 1 = -1$	$(0, -1)$
1	$f(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$	$(1, 1)$
2	$f(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 3$	$(2, 3)$
3	$f(3) = 2 \cdot 3 - 1 = 5$	$(3, 5)$



Note que determinamos apenas seis pares ordenados que satisfazem essa função. No entanto, como $D(f) = \mathbb{R}$, podemos atribuir infinitos valores para *x*, obtendo consequentemente infinitos pares ordenados (x, y).

Traçando o gráfico de *f* a partir dos pontos determinados, temos:

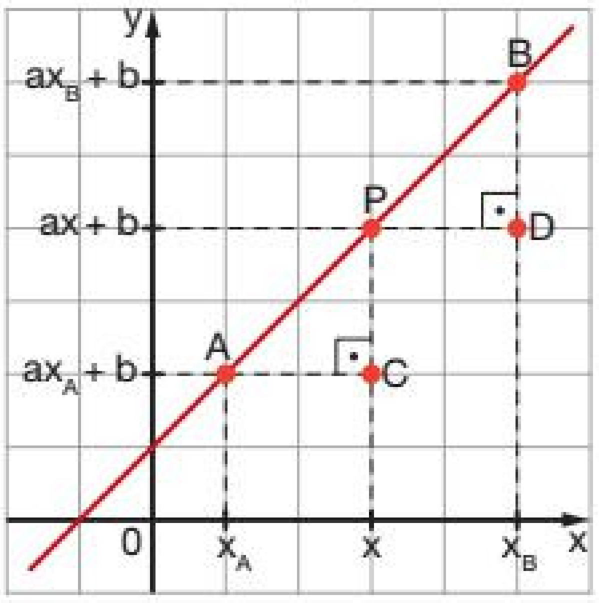


Ilustrações: Acervo da editora

Observando o gráfico de *f*, percebemos que ele sugere ser uma **reta**.

Vamos mostrar que o gráfico de toda função afim $f(x)=ax+b$, com $a\neq 0$, é uma reta. Para isso, vamos considerar dois pontos diferentes quaisquer do gráfico de *f*, $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, e mostrar que qualquer outro ponto $P(x, y)$ desse gráfico pertence à reta que passa por *A* e *B*. No plano cartesiano, temos:

Note que, no gráfico ao lado:
- $y=ax+b$
- $y_A=ax_A+b$
- $y_B=ax_B+b$



Em relação à medida dos catetos dos triângulos ACP e PDB, indicados no gráfico, podemos escrever a igualdade:

$$\frac{PC}{BD}=\frac{(ax+b)-(ax_A+b)}{(ax_B+b)-(ax+b)}=\frac{ax-ax_A}{ax_B-ax}=\frac{a(x-x_A)}{a(x_B-x)}=\frac{x-x_A}{x_B-x}=\frac{CA}{DP}$$

Como são necessários apenas dois pontos para determinarmos uma reta, podemos esboçar o gráfico de uma função afim conhecendo as coordenadas de apenas dois de seus pontos.

Por essa igualdade, temos que os triângulos possuem lados proporcionais e, além disso, possuem um ângulo reto. Portanto, pelo caso de semelhança LAL, os triângulos ACP e PDB são semelhantes. Logo, seus ângulos correspondentes possuem mesma medida.

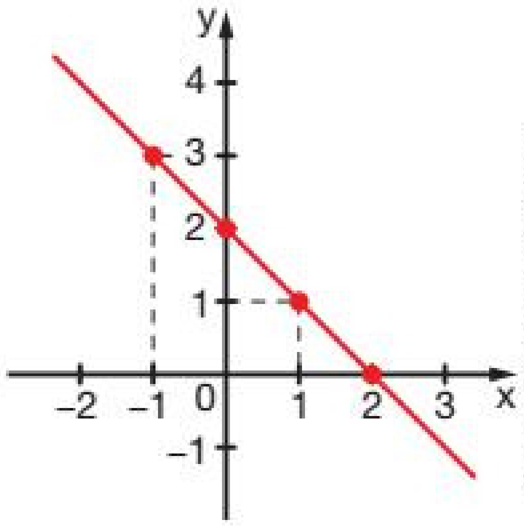
Como $\overleftrightarrow{AC}//\overleftrightarrow{DP}$, temos que $med(C\hat{A}P)=med(D\hat{P}B)$, o que é possível somente se os pontos *A*, *B* e *P* pertencerem à mesma reta, transversal às retas paralelas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{DP}$.

Portanto, todo gráfico de uma função afim, com $a\neq 0$, é uma reta.

Zero de uma função afim

Estudamos anteriormente que o zero de uma função *f* é todo valor *x* de seu domínio tal que $f(x)=0$ e que, graficamente, os zeros correspondem às abscissas dos pontos em que o gráfico intersecta o eixo *x*. Podemos obter o zero de uma função afim resolvendo a equação $ax+b=0$.

Observe o gráfico da função afim $f(x)=-x+2$.



Ilustrações: Acervo da editora

x	f(x)
−1	3
0	2
1	1
2	0

O gráfico da função *f* intersecta o eixo *x* no ponto de coordenadas $(2, 0)$, ou seja, para $x=2$ temos $f(x)=0$. Nesse caso, a abscissa 2 é o **zero da função**.

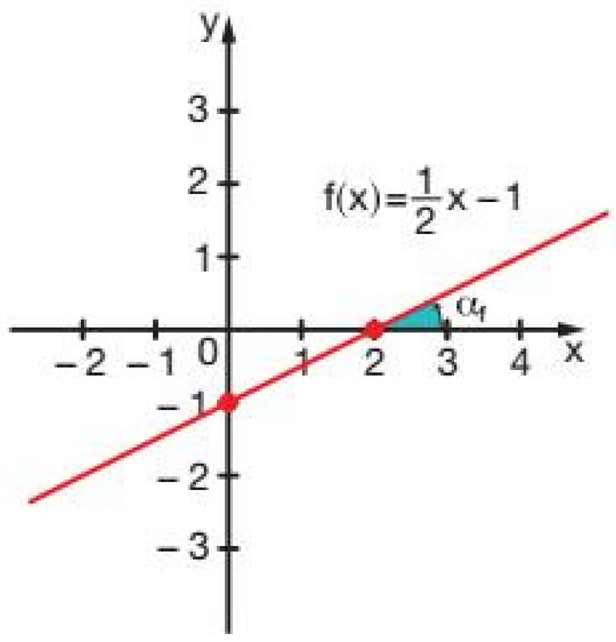
Outra maneira de obtermos o zero dessa função é algebricamente. Para isso, resolvemos a equação $f(x)=0$.

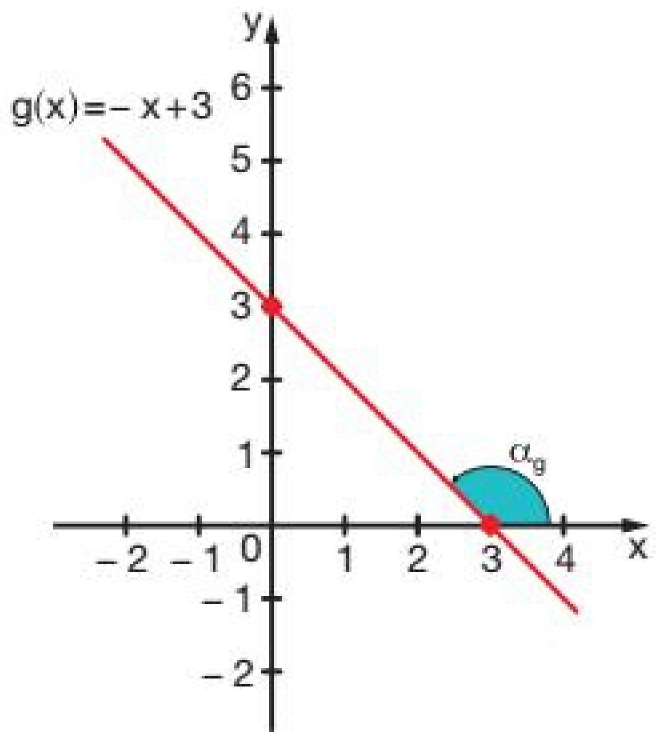
$$f(x)=0\Rightarrow -x+2=0\Rightarrow x=2$$

Portanto, o zero da função $f(x)=-x+2$ é 2.

Coeficientes de uma função afim

Os coeficientes *a* e *b* de uma função afim fornecem informações a respeito da relação entre as grandezas *x* e *y*, bem como sobre o comportamento de seu gráfico. Observe o gráfico de algumas funções.





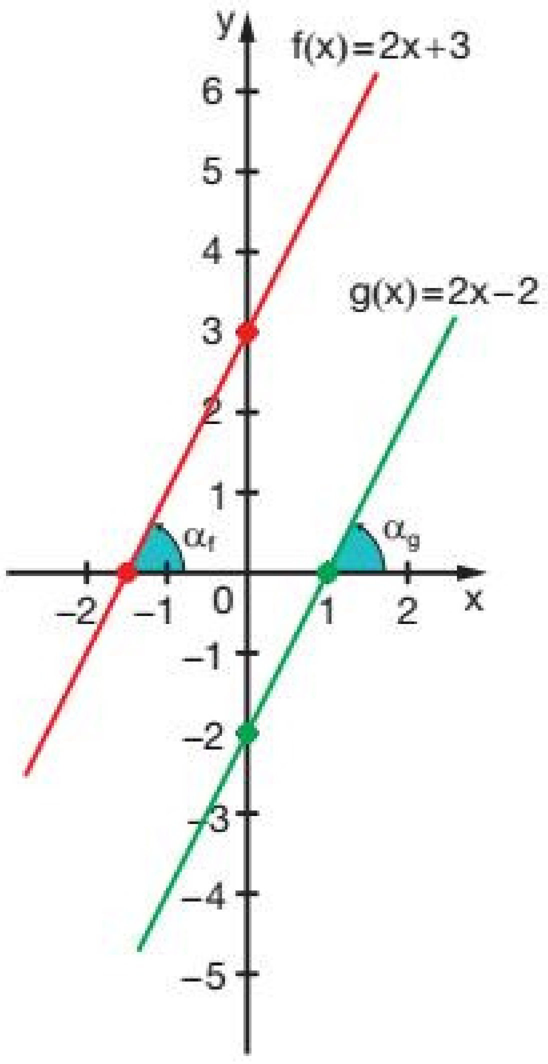
No gráfico de cada uma dessas funções podemos notar que o valor da ordenada do ponto em que as retas intersectam o eixo *y* é igual ao coeficiente *b* da função. Por exemplo, na função $f(x)=\frac{1}{2}x-1$, temos $b=-1$, e o gráfico intersecta o eixo *y* no ponto de coordenadas $(0,-1)$.

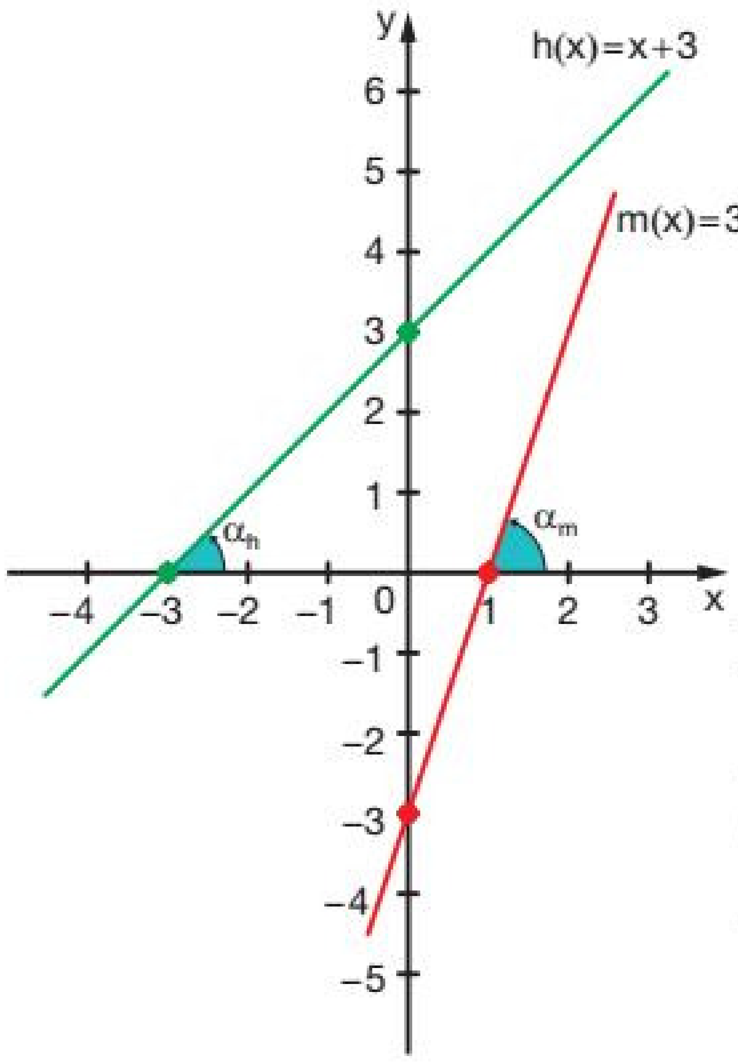
O gráfico de uma função intersecta o eixo *y* quando $x=0$. No caso de uma função afim:

$$f(x)=ax+b$$
$$f(0)=a\cdot 0+b$$
$$f(0)=b$$

Em uma função afim $f(x)=ax+b$, o coeficiente *b* é chamado **termo constante**. O gráfico dessa função intersecta o eixo *y* no ponto de coordenadas $(0,b)$.

Agora, observe os gráficos a seguir.





Ilustrações: Acervo da editora

Podemos notar que cada uma dessas retas forma um ângulo com o eixo *x*. Esse ângulo está relacionado ao coeficiente *a* da função.

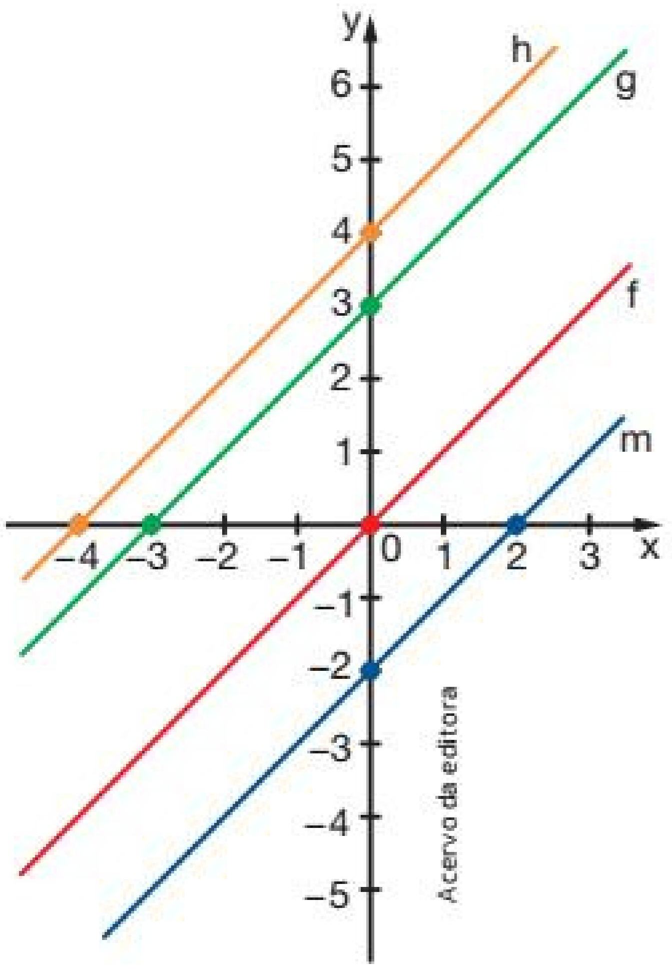
As funções *f* e *g* possuem coeficientes *a* iguais, e os ângulos formados com o eixo *x* possuem mesma medida, ou seja, $\alpha_f = \alpha_g$. As retas que representam essas funções são **paralelas**.

Já as funções *h* e *m* possuem coeficientes *a* diferentes, e os ângulos formados com o eixo *x* também possuem medidas diferentes, ou seja, $\alpha_h \neq \alpha_m$. Nesse caso, as retas que representam essas funções **não são paralelas**.

Em uma função afim $f(x)=ax+b$, o coeficiente *a* é chamado **declividade**. Considerando que os eixos ortogonais estão graduados na mesma unidade de medida, esse coeficiente está associado à inclinação da reta que representa o gráfico da função.

Translação do gráfico de uma função afim

Observe o gráfico das funções $f(x)=x$, $g(x)=x+3$, $h(x)=x+4$ e $m(x)=x-2$, esboçados em um mesmo plano cartesiano.



Note que essas funções possuem declividades iguais (têm mesma inclinação) e termos constantes diferentes. Por isso, os gráficos que as representam são retas paralelas que se diferenciam pela posição que ocupam no plano cartesiano.

O gráfico da função $f(x)=x$ intersecta o eixo *y* na origem, pois $b=0$. O gráfico de $g(x)=x+3$ é semelhante ao gráfico de *f*, porém transladado 3 unidades para cima, intersectando o eixo *y* no ponto de ordenada 3, pois $b=3$.

O gráfico de $h(x)=x+4$ também é semelhante ao gráfico de *f*, porém transladado 4 unidades para cima, intersectando o eixo *y* no ponto de ordenada 4, pois $b=4$.

A função $m(x)=x-2$ possui gráfico semelhante ao de *f*, porém transladado 2 unidades para baixo, intersectando o eixo *y* no ponto de ordenada -2, pois $b=-2$.

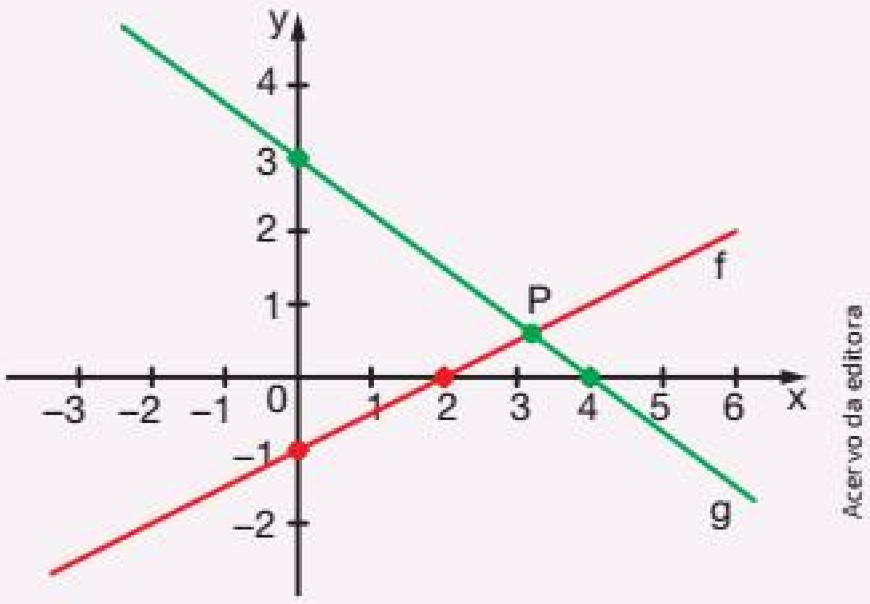
Em relação ao gráfico de *m*, o gráfico de *h* está transladado 6 unidades para cima; em relação ao gráfico de *h*, o gráfico de *m* está transladado 6 unidades para baixo.

O gráfico de uma função afim $g(x)=ax+b$ é semelhante ao gráfico da função linear $f(x)=ax$, porém transladado:

- para cima no eixo *y* em *b* unidades, se $b>0$;
- para baixo no eixo *y*, em valores absolutos, em *b* unidades, se $b<0$.

Atividades resolvidas

R3. Nos gráficos a seguir, determine as coordenadas do ponto *P*.



Acervo da editora

Resolução

Como os gráficos das funções são retas, temos que *f* e *g* são funções afins, isto é, do tipo y = ax + b. Inicialmente, determinamos os coeficientes de *f* e *g*:

- $$\begin{cases} f(0) = -1 \\ f(2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \cdot 0 + b = -1 \\ a \cdot 2 + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -1 \\ \underline{2a + b = 0} \cdot (-1) \end{cases}$$
  $$-2a = -1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$
  Logo, $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$.

- $$\begin{cases} g(0) = 3 \\ g(4) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \cdot 0 + b = 3 \\ a \cdot 4 + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 3 \\ \underline{4a + b = 0} \cdot (-1) \end{cases}$$
  $$-4a = 3 \Rightarrow a = -\frac{3}{4}$$
  Logo, $g(x) = -\frac{3}{4}x + 3$.

Como *P* pertence ao gráfico das duas funções, igualamos *f* e *g* para determinar a abscissa de *P*.

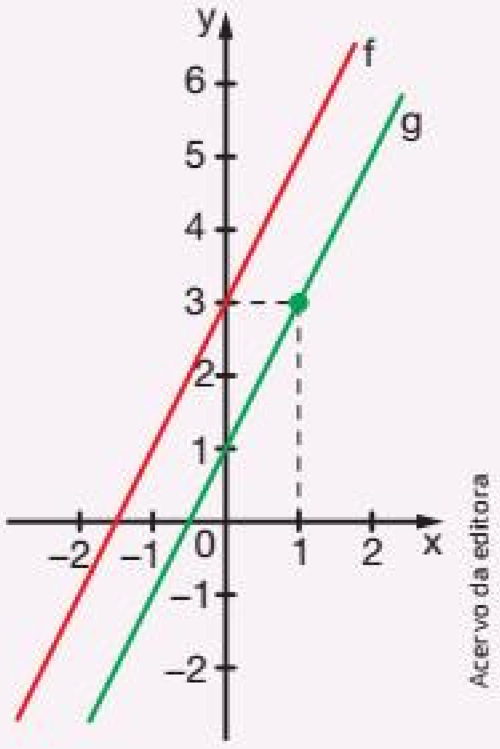
$$f(x) = g(x) \Rightarrow \frac{1}{2}x - 1 = -\frac{3}{4}x + 3 \Rightarrow \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}x = 3 + 1 \Rightarrow \frac{5}{4}x = 4 \Rightarrow x = \frac{16}{5}$$

Por fim, substituímos $x = \frac{16}{5}$ em uma das funções, para obter a ordenada de *P*.

$$f\left(\frac{16}{5}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{5} - 1 = \frac{16}{10} - 1 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

Portanto, as coordenadas do ponto *P* são $\left(\frac{16}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

R4. Determine a função afim $g(x) = ax + b$ cuja representação gráfica é uma reta que passa pelo ponto de coordenadas $(1, 3)$ e é paralela ao gráfico de $f(x) = 2x + 3$.



Acervo da editora

Resolução

Como o gráfico de *g* é paralelo ao de *f*, temos que as declividades dessas funções são iguais, ou seja, a = 2.

Como $(1, 3)$ pertence ao gráfico de *g*, segue que:

$$g(1) = 3 \Rightarrow 2 \cdot 1 + b = 3 \Rightarrow b = 3 - 2 \Rightarrow b = 1$$

Portanto, $g(x) = 2x + 1$.

Note que o gráfico de *f* é semelhante ao de *g*, porém transladado 2 unidades para cima.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

Diga aos alunos que em alguns gráficos apresentados as escalas dos eixos são diferentes entre si.

14. Calcule o zero de cada função.

a) $f(x)=3x-12$ $x=4$

b) $f(x)=-x+9$ $x=9$

c) $f(x)=2x+\frac{3}{4}$ $x=-\frac{3}{8}$

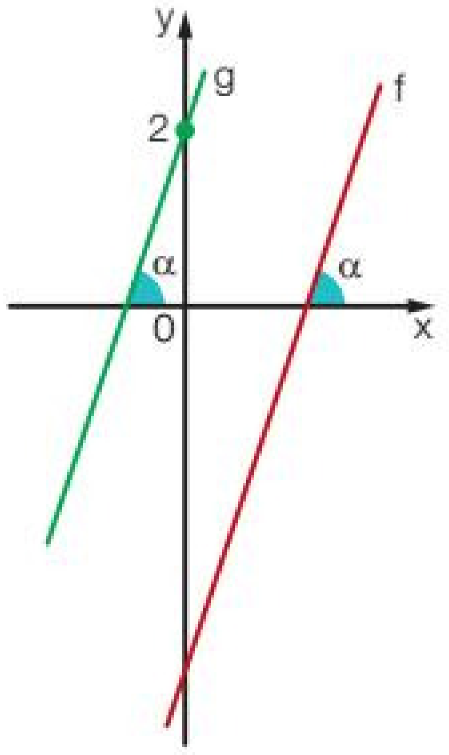
d) $f(x)=-\frac{1}{5}x-6$ $x=-30$

15. Duas das escalas de temperatura mais utilizadas são a Celsius e a Fahrenheit. Para convertermos uma temperatura F medida em Fahrenheit em uma C, medida em Celsius, utilizamos a função $C(F)=\frac{5}{9}(F-32)$.

a) Quando um termômetro registra 50 °F, a mesma temperatura corresponde a quantos graus Celsius? 10 °C

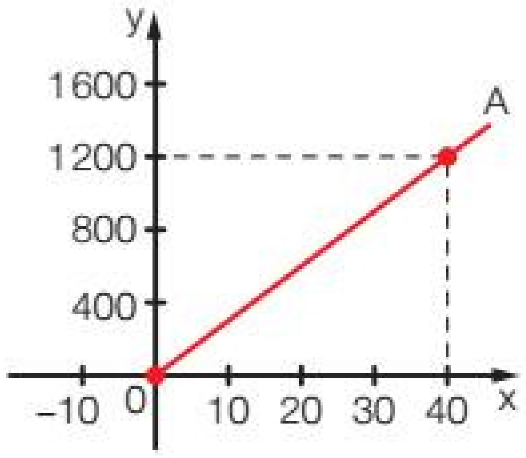
b) Qual o zero dessa função? Nesse contexto, o que o zero representa? $F=32$; A medida, em graus Fahrenheit, correspondente a 0 °C.

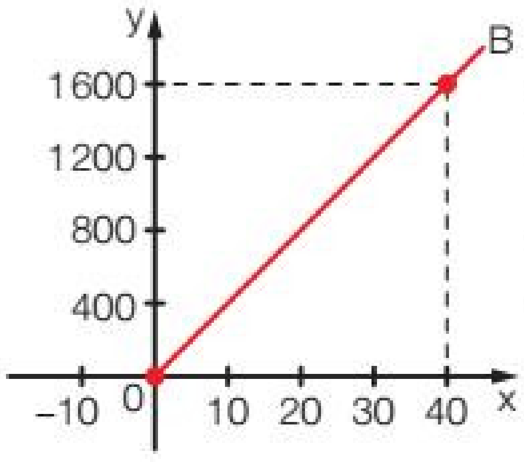
16. Dados os gráficos das funções $f(x)=3x-5$ e $g(x)=ax+b$, determine os valores de a e b.
$a=3$ e $b=2$



Acervo da editora

17. Os gráficos representam as funções que relacionam o número de torcedores que vão a determinado ginásio de basquete e a arrecadação em reais obtida com a venda dos ingressos. A função A representa a arrecadação obtida com a venda dos ingressos das cadeiras, e a função B, a arrecadação obtida com a venda dos ingressos dos camarotes.



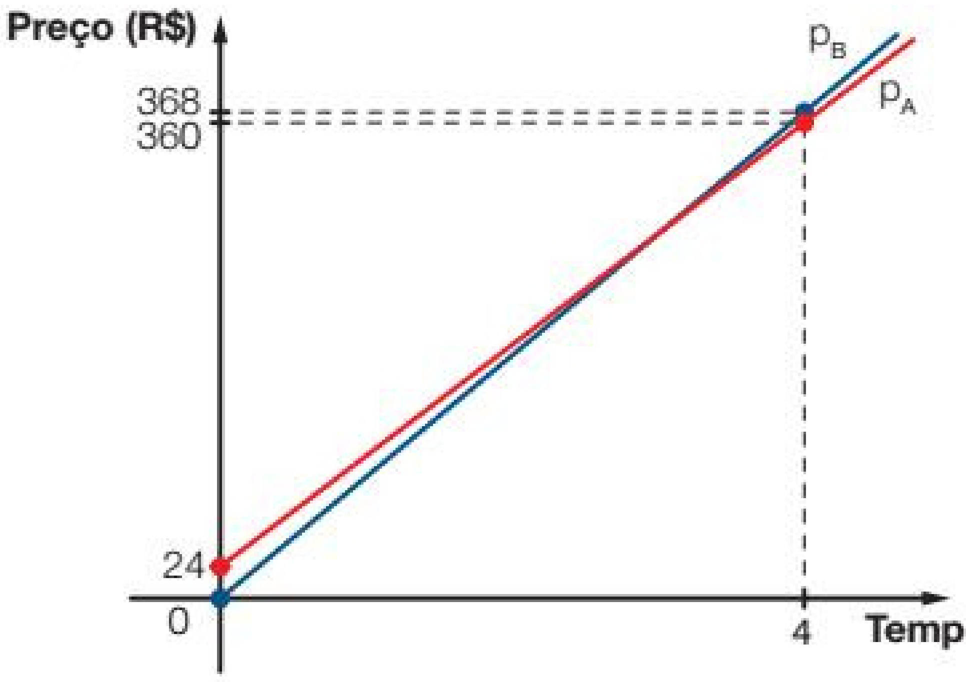


Ilustrações: Acervo da editora

a) O que é possível afirmar em relação ao termo constante de ambas as funções representadas pelos gráficos? Resposta no final do livro.

b) Escreva a lei de formação das funções A e B.
$A(x)=30x$ e $B(x)=40x$

18. Os gráficos representam o preço p cobrado pelo aluguel de uma pista de boliche nos estabelecimentos A e B, em função do tempo t de jogo.



Acervo da editora

a) Escreva a lei de formação das funções representadas pelos gráficos. $p_A(t)=84t+24$ e $p_B(t)=92t$

b) A partir de quantas horas de jogo é mais econômico alugar uma pista no estabelecimento A? A partir de 3 h de jogo.

19. Uma bomba-d'água despeja 4 m³ de água por hora em um reservatório com capacidade para 60 m³, e outra bomba retira 2 m³ de água por hora desse reservatório. Considerando inicialmente que o reservatório está vazio e que a bomba que retira água é ligada após duas horas de funcionamento da bomba que despeja água, responda.

a) Após quanto tempo de funcionamento simultâneo das bombas a quantidade de água no reservatório chega a 16 m³? 4 h

b) Escreva a função que expressa a quantidade q de litros no reservatório em função do tempo t em que as bombas funcionam simultaneamente. $q(t)=2t+8$

c) Esboce o gráfico da função que você escreveu no item **b**. Resposta nas **Orientações para o professor.**

20. Um automóvel movimenta-se com velocidade constante em uma estrada. Abaixo é possível observar sua posição em determinados instantes.

Tempo (h)	0	3	5	7
Posição (km)	20	290	470	650

a) Qual é a velocidade média do automóvel? 90 km/h

b) Escreva uma função que relacione a posição S com o tempo t em que o automóvel se movimenta. $S(t)=20+90t$

c) Após 10 h, qual é a posição ocupada pelo automóvel nessa estrada? quilômetro 920

d) Esboce um gráfico que relacione a posição do automóvel na estrada em função do tempo.
Resposta nas **Orientações para o professor.**

21. O peso de um corpo é obtido por meio do produto da sua massa e da aceleração da gravidade que atua sobre ele, ou seja, $P = m \cdot g$, em que *m* é a massa do corpo (em kg), *g* é a aceleração da gravidade (em m/s^2) e *P* é o peso, medido em newtons (N). Na Terra, a aceleração da gravidade é de aproximadamente $9{,}8\ m/s^2$, e na Lua essa aceleração é de aproximadamente $1{,}6\ m/s^2$.

- **a)** Escreva a função *T* que expresse o peso de um corpo na Terra de acordo com sua massa *m*, e uma função *L* que expresse o peso de um corpo na Lua de acordo com sua massa *n*. $T(m) = 9{,}8m$; $L(n) = 1{,}6n$
- **b)** Determine, em newtons, o peso de uma pessoa de 75 kg, se esta estivesse sobre a superfície da:
  - Lua 120 N
  - Terra 735 N
- **c)** Quantos quilogramas tem uma pessoa que pesa, na Lua, 91,2 N? 57 kg
- **d)** Calcule, em newtons, quanto pesa na Terra uma pessoa que, na Lua, tem 96 N. 588 N
- **e)** Esboce, em um mesmo plano cartesiano, os gráficos das funções que você escreveu no item **a**. Resposta nas **Orientações para o professor**.

22. (UFF-RJ) A adição do biodiesel ao óleo *diesel* promove pequenas modificações nas propriedades do combustível, as quais, apesar de causarem redução na quantidade de energia fornecida ao motor, promovem um aumento na eficiência com que esta energia é convertida em potência de saída.

O gráfico a seguir, representado por um segmento de reta que une o ponto $(30, -8)$ à origem $(0, 0)$, apresenta a variação *V* da energia fornecida ao motor com relação ao padrão *diesel* (em %) como função da proporção *P* de adição de biodiesel na mistura (em %).

Acervo da editora

Adaptado de Scientific American, Ano 5, Número 53, outubro de 2006.

A única opção correta é: c

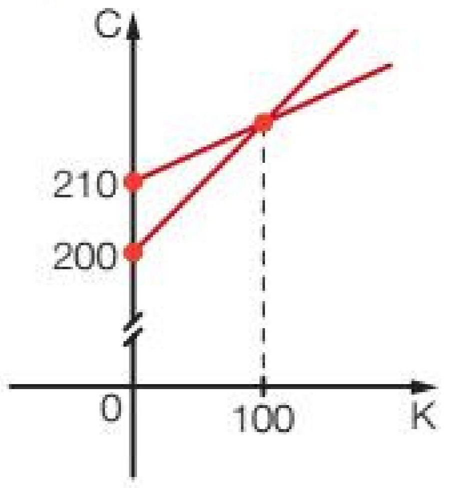
- **a)** $V(2^2) = [V(2)]^2$
- **b)** $V(2) < V(8)$
- **c)** $V(8) = 4V(2)$
- **d)** $\dfrac{V(8) - V(2)}{8 - 2} = -\dfrac{15}{4}$
- **e)** $V(8) = V(2) \cdot V(4)$

23. Os bancos, em geral, cobram mensalmente uma taxa de manutenção sobre cada conta-corrente ativa, sendo que o valor dessa taxa varia de acordo com cada banco e o serviço prestado. Em determinado banco, a taxa de manutenção é de R$ 20,00. Um cliente abriu uma conta-corrente nesse banco e fez um depósito inicial de R$ 600,00, sendo que todo mês seguinte depositou R$ 250,00 na conta.

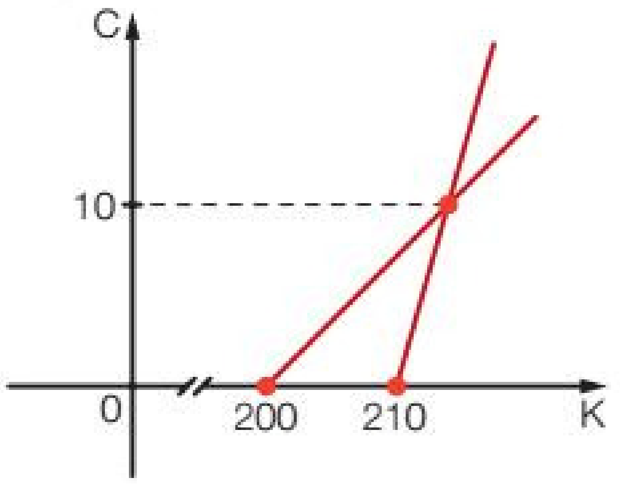
- **a)** Qual a quantia, em reais, que esse cliente terá na sua conta 5 meses após a abertura? R$ 1750,00
- **b)** Escreva a lei de formação da função que relaciona a quantidade *Q*, em reais, na conta desse cliente, com o tempo *t*, em meses, após a abertura da conta. $Q(t) = 600 + 230t$
- **c)** Em um plano cartesiano, esboce o gráfico da função *Q*. Resposta nas **Orientações para o professor**.

24. (UFPA-PA) Um fornecedor **A** oferece a um supermercado um certo produto com os seguintes custos: R$ 210,00 de frete mais R$ 2,90 por quilograma. Um fornecedor **B** oferece o mesmo produto, cobrando R$ 200,00 de frete mais R$ 3,00 por quilograma. O gráfico que representa os custos do supermercado com os fornecedores, em função da quantidade de quilogramas é: a

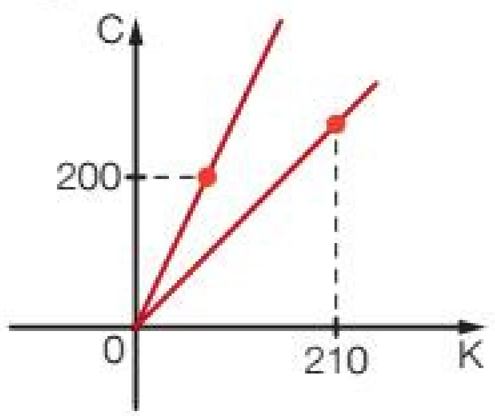
a)



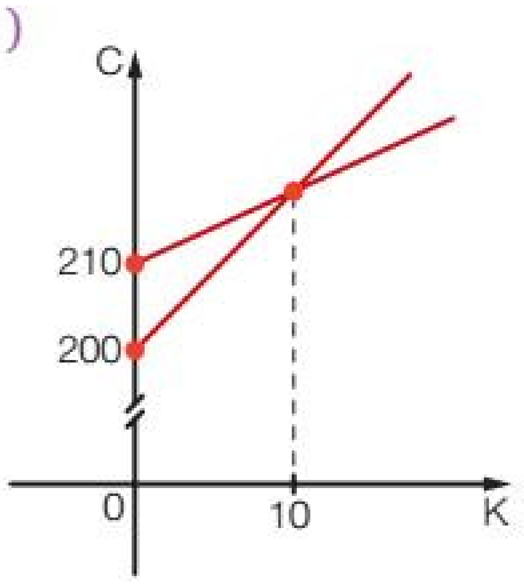
d)



b)

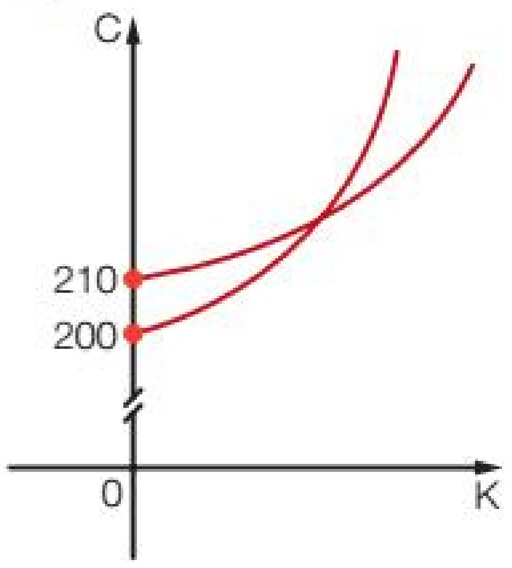


e)



Ilustrações: Acervo da editora

c)



Função crescente e função decrescente

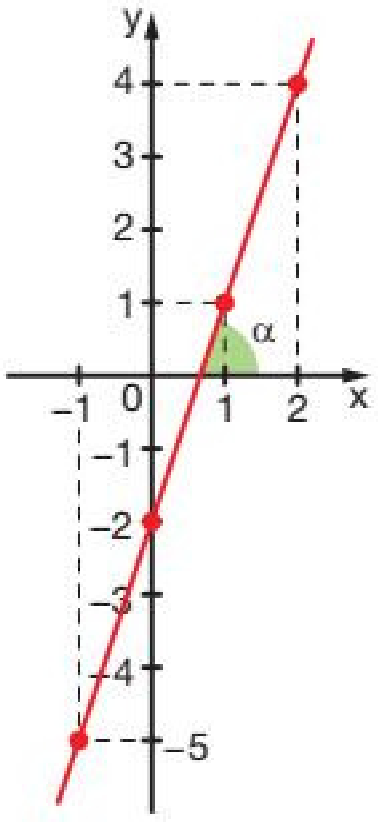
Estudamos anteriormente que, em certo intervalo de seu domínio, uma função é: crescente se, e somente se, ao aumentarmos os valores de *x* pertencentes a esse intervalo, os valores correspondentes de *y* também aumentam; e decrescente se, e somente se, ao aumentarmos os valores de *x* pertencentes a esse intervalo, os valores correspondentes de *y* diminuem.

Se julgar necessário, peça aos alunos que revisem o conceito de função crescente e função decrescente, apresentado no capítulo anterior.

Observe o gráfico da função afim $f(x)=3x-2$.

O ângulo α, formado pela reta e pelo eixo *x*, é agudo, ou seja, $0° < \alpha < 90°$.

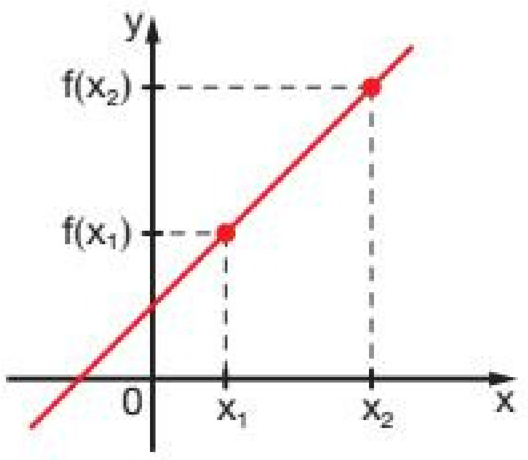
x	f(x)
−1	−5
0	−2
1	1
2	4



Note que essa função é **crescente**, pois, à medida que aumentamos os valores de *x*, os valores correspondentes de *y* também aumentam, ou seja, para dois valores quaisquer, x_1 e x_2, pertencentes ao domínio de *f*, com $x_1 < x_2$, temos $f(x_1) < f(x_2)$.

Temos ainda que a declividade de *f* é maior que zero $(a > 0)$. No caso de uma função afim $f(x)=ax+b$, se $a > 0$ e $x_1 < x_2$, então:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow ax_1 < ax_2 \Rightarrow ax_1 + b < ax_2 + b \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

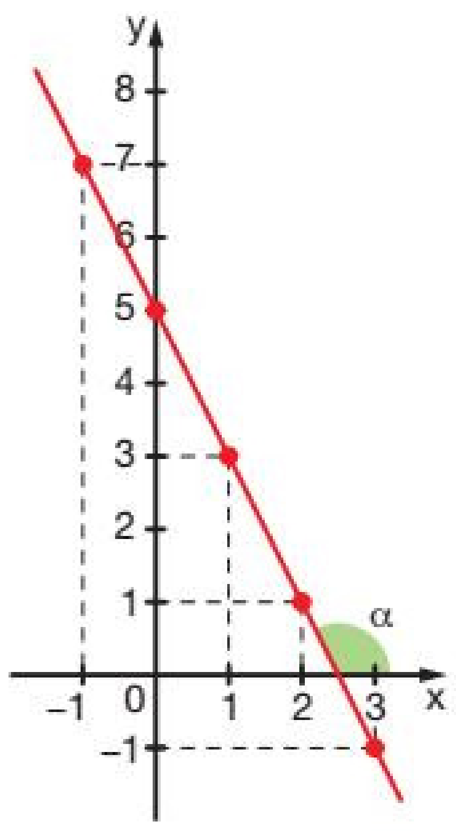


Em uma função afim, se a declividade é maior que zero $(a > 0)$, a função é crescente.

Agora, observe o gráfico da função afim $f(x)=-2x+5$.

O ângulo α, formado pela reta e pelo eixo *x*, é obtuso, ou seja, $90° < \alpha < 180°$.

x	f(x)
−1	7
0	5
1	3
2	1
3	−1

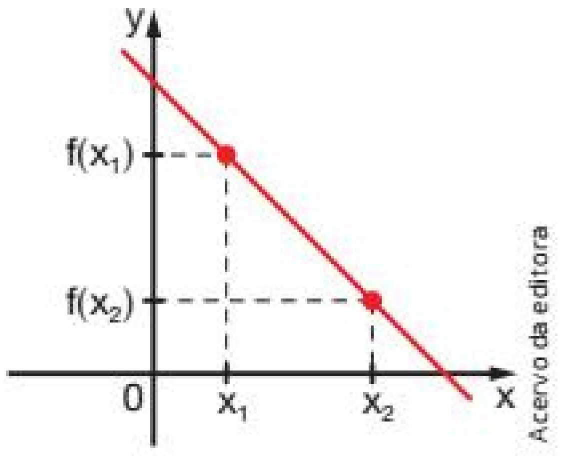


Ilustrações: Acervo da editora

Note que essa função é **decrescente**, pois, à medida que aumentamos os valores de *x*, os valores correspondentes de *y* diminuem, ou seja, para dois valores quaisquer, x_1 e x_2, pertencentes ao domínio de *f*, com $x_1 < x_2$, temos $f(x_1) > f(x_2)$.

Temos ainda que a declividade de *f* é menor que zero $(a < 0)$. No caso de uma função afim $f(x) = ax + b$, se $a < 0$ e $x_1 < x_2$, então:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow ax_1 > ax_2 \Rightarrow ax_1 + b > ax_2 + b \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$



Acervo da editora

É possível que o ângulo α, formado pela reta que representa uma função afim *f* e pelo eixo *x*, seja reto? Por quê?

Não, pois uma reta paralela ao eixo *y* não representa o gráfico de uma função.

Em uma função afim, se a declividade é menor que zero $(a < 0)$, a função é decrescente.

Atividades resolvidas

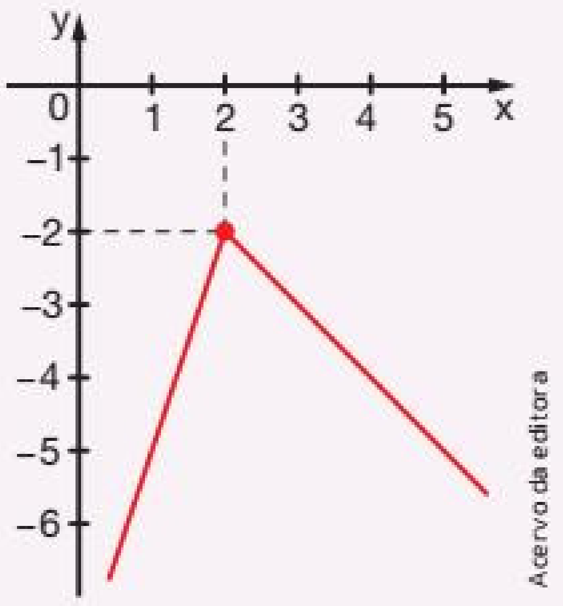
R5. Dada a função $f(x) = \begin{cases} 3x - 8, & \text{se } x < 2 \\ -x, & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, determine os intervalos de crescimento e decrescimento de *f*.

Resolução

Temos duas condições:

- Se $x < 2$, então $f(x) = 3x - 8$. Nesse caso, a declividade de *f* é positiva $(a > 0)$. Logo, *f* é crescente.
- Se $x \geq 2$, então $f(x) = -x$. Nesse caso, a declividade de *f* é negativa $(a < 0)$. Logo, *f* é decrescente.

Portanto, *f* é crescente para $x < 2$ e decrescente para $x \geq 2$.



Acervo da editora

R6. Mostre que, se *f* e *g* são funções afins cujos gráficos são retas paralelas, então a função *h*, tal que $h(x) = f(x) - g(x)$, não é crescente nem decrescente.

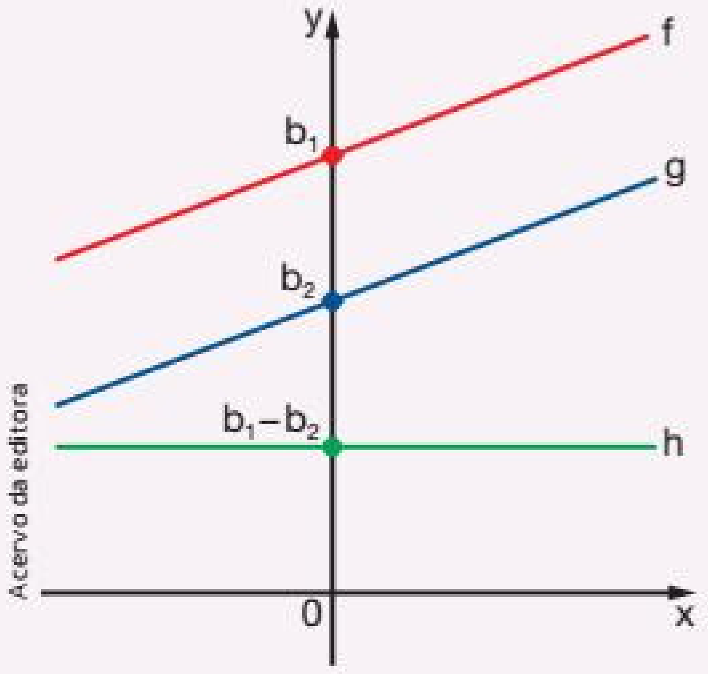
Resolução

Se os gráficos de *f* e *g* são retas paralelas, então possuem declividades iguais, ou seja, $f(x) = ax + b_1$ e $g(x) = ax + b_2$, com b_1 e b_2 reais.

Segue que:

$$h(x) = f(x) - g(x) = ax + b_1 - (ax + b_2) \Rightarrow h(x) = b_1 - b_2$$

Portanto, *h* é uma função constante, ou seja, não é crescente nem decrescente.



Acervo da editora

Em uma função constante, para quaisquer valores de *x* pertencentes ao domínio, os valores correspondentes de *y* são os mesmos, ou seja, não aumentam (crescem) nem diminuem (decrescem).

Atividades

Anote as respostas no caderno.

25. Marcos vai usar suas economias para pagar a mensalidade da faculdade. A função que representa a quantia em dinheiro das economias de Marcos, após iniciar a faculdade, em função do tempo, em meses, é uma função crescente ou decrescente? decrescente

26. Determinado restaurante *self-service* cobra R$ 36,00 por quilograma de alimento. No entanto, para refeições com mais de 700 g de alimento, o preço é fixado em R$ 25,60.

Sergio Lima

a) Quanto custará um prato com 730 g de alimento nesse restaurante? E com 300 g? R$ 25,60 R$ 10,80

b) Determine a função que permite calcular o preço *p* do prato, em reais, em função da massa *m*, em quilogramas, de alimento. Resposta no final do livro.

c) Esboce o gráfico da função e determine os intervalos em que ela é crescente, decrescente ou constante. Resposta no final do livro.

27. Três bombas-d'água, cada uma com vazão de 3 000 L/h, retiram água de um reservatório que contém 150 mil litros.

a) Com as três bombas ligadas, quantos litros de água serão tirados do reservatório em 3 h? 27 mil litros

b) Escreva a lei da função que representa a quantidade *Q* de água no reservatório em função do tempo *t* em que as três bombas permanecem ligadas. $Q(t) = 150\,000 - 9\,000t$

c) Essa função é crescente, decrescente ou constante? decrescente

28. Em duas fábricas, o custo para produzir determinada peça é o mesmo, porém, o custo fixo de cada uma das fábricas é diferente. Em certo mês, a fábrica *A* produziu 5 000 peças, e o custo total foi de R$ 18 000,00; a fábrica *B* também produziu 5 000 peças, e o custo total foi de R$ 20 000,00.

a) Qual é a função *h* que representa a diferença, em valores absolutos, entre o custo total da fábrica *A* e o custo total da fábrica *B*, para *x* peças produzidas? $h(x) = 2\,000$

b) Classifique a função que você escreveu em crescente, decrescente ou constante. constante

29. No processo de industrialização da cana-de-açúcar, em que podem ser produzidos açúcar e etanol, por exemplo, gera-se um resíduo de cerca de 30% da massa em bagaço.

Uma destinação adequada para o bagaço é a geração de energia elétrica, de maneira que 1 t desse resíduo pode gerar cerca de $\frac{100}{3}$ W.

Paulo Fridman/Pulsar

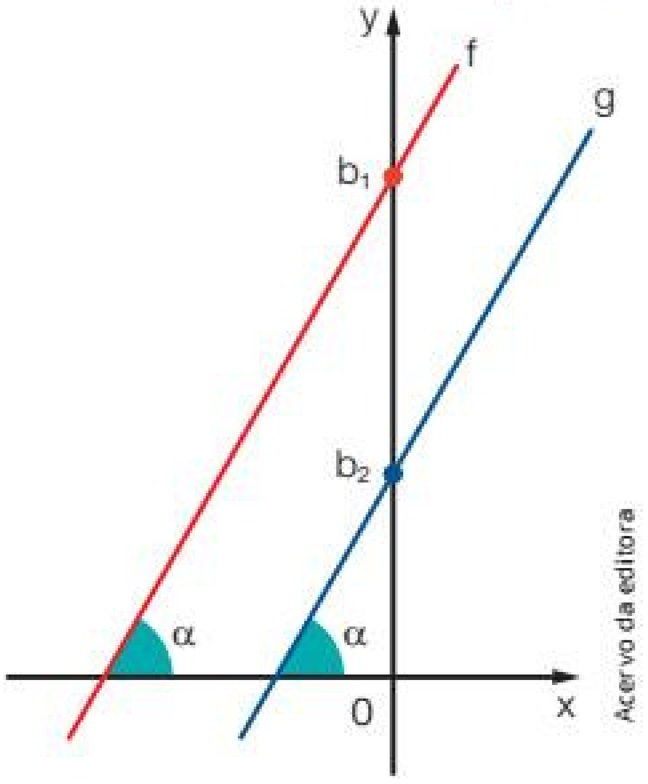
Pátio com bagaço de cana-de-açúcar utilizado para produção de energia elétrica em usina, em Cerqueira César (SP), em 2014.

a) Escreva a lei de formação da função que relaciona a quantidade de watts produzida *E* com a quantidade processada de cana-de-açúcar *q*, em toneladas. $E(q) = 10q$

b) A função que você escreveu no item **a** é crescente, decrescente ou constante? crescente

c) Esboce o gráfico da função que você escreveu no item **b**. Resposta nas Orientações para o professor.

30. Dados os gráficos das funções afins *f* e *g*, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, esboce em um mesmo plano cartesiano os gráficos das funções $h(x) = f(x) - g(x)$ e $m(x) = g(x) - f(x)$ e classifique-as em crescente, decrescente ou constante. Resposta nas Orientações para o professor.



Acervo da editora

Estudo do sinal de uma função afim

No estudo do sinal de uma função *f*, determinamos os valores de *x* pertencentes ao domínio para os quais $f(x)=0$, $f(x)>0$ e $f(x)<0$.

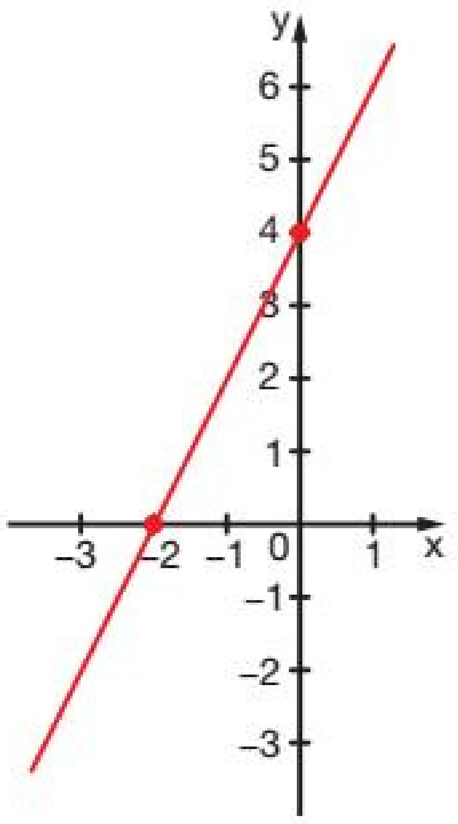
Vamos verificar para quais valores pertencentes ao domínio de $f(x)=2x+4$ temos $f(x)=0$, $f(x)>0$ e $f(x)<0$.

Inicialmente, obtemos o zero de *f*, ou seja, o valor de *x* para o qual $f(x)=0$.

$$f(x)=0 \Rightarrow 2x+4=0 \Rightarrow 2x=-4 \Rightarrow x=-2$$

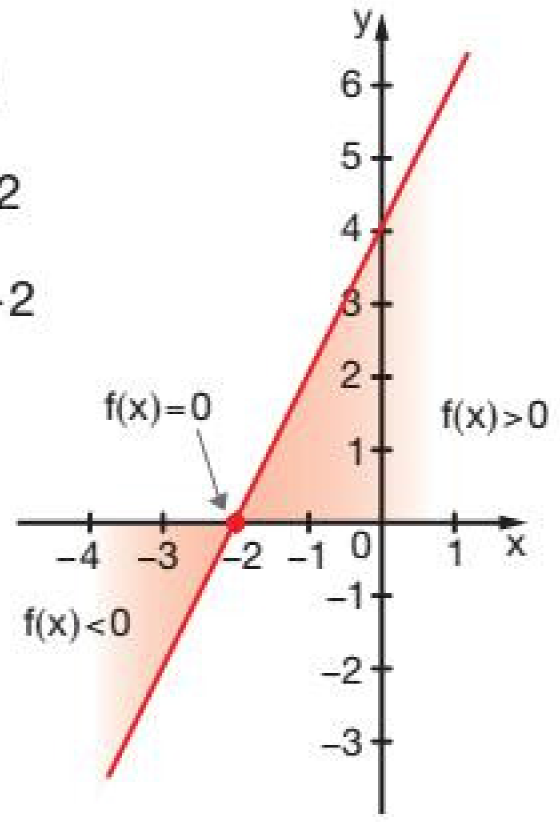
Agora, esboçamos o gráfico de *f*.

x	f(x)
−2	0
0	4



Observando o gráfico, verificamos que essa função é crescente. Podemos verificar também que a função:

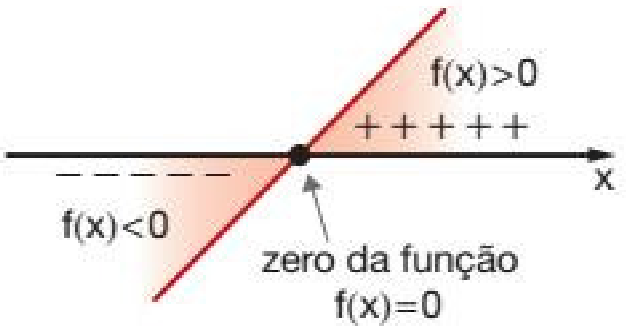
- se anula, ou seja, $f(x)=0$, quando $x=-2$
- é positiva, ou seja, $f(x)>0$, quando $x>-2$
- é negativa, ou seja, $f(x)<0$, quando $x<-2$



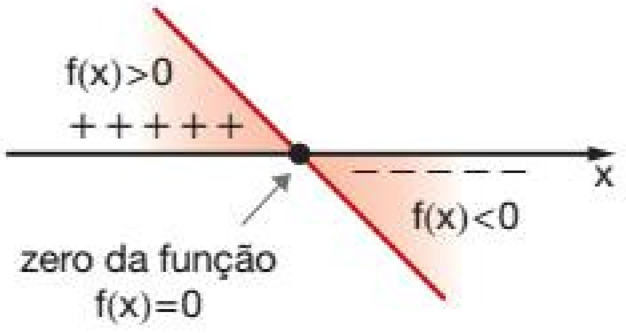
Também podemos afirmar que essa função é crescente pelo fato de o coeficiente *a* ser maior do que zero.

A função afim $f(x)=ax+b$, com $a \neq 0$, pode ser crescente ou decrescente.

- quando *f* é crescente $(a>0)$:



- quando *f* é decrescente $(a<0)$:



Ilustrações: Acervo da editora

Atividades resolvidas

R7. Um estacionamento oferece duas opções de preço para seus clientes:

Sergio Lima

Quais os intervalos de tempo em que cada opção é mais vantajosa?

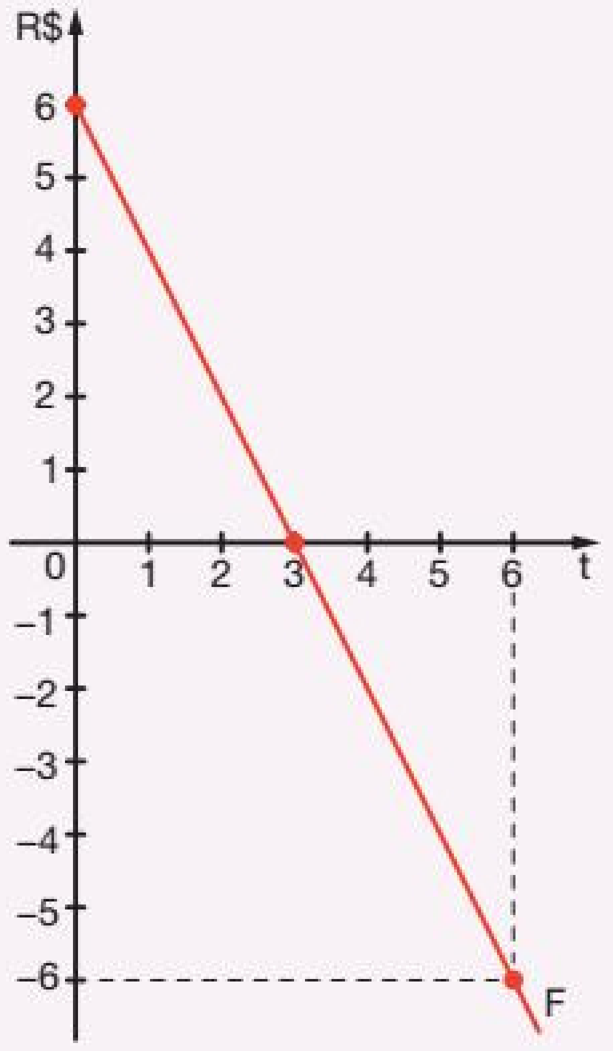
Resolução

Chamando de *A* e *B* as funções afins que representam as opções **A** e **B**, respectivamente, e de *t* o número de horas, o valor em reais a ser pago ao estacionamento em função do tempo é dado por:

$$A(t) = 4,5t + 6 \text{ e } B(t) = 6,5t$$

Uma maneira de comparar as funções *A* e *B* é estudar o sinal e esboçar o gráfico da função *F*, dada por $F(t) = A(t) - B(t)$.

t	$F(t) = \underbrace{4,5t + 6}_{A(t)} - \underbrace{6,5t}_{B(t)} = -2t + 6$	F(t)
0	$F(0) = -2 \cdot 0 + 6 = 6$	6
3	$F(3) = -2 \cdot 3 + 6 = 0$	0
6	$F(6) = -2 \cdot 6 + 6 = -6$	−6



Observando o gráfico, podemos notar que:

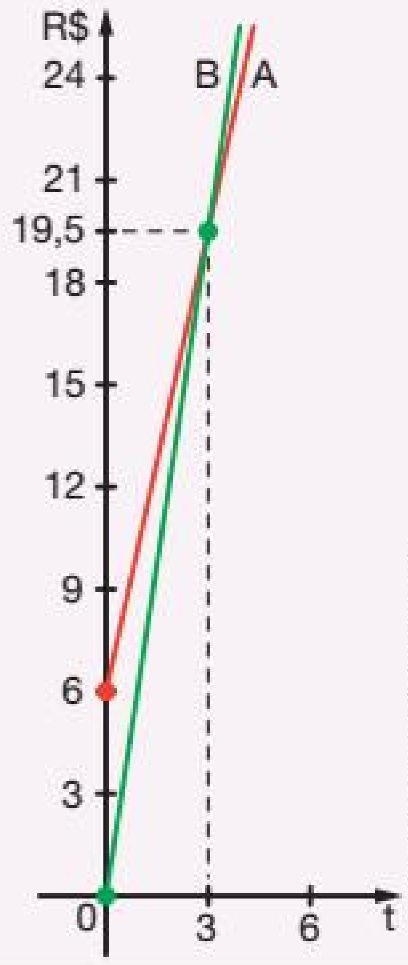
- $F(t) = 0$ para $t = 3$, logo $A(t) = B(t)$
- $F(t) > 0$ para $t < 3$, logo $A(t) > B(t)$
- $F(t) < 0$ para $t > 3$, logo $A(t) < B(t)$

Portanto:

- as opções **A** e **B** têm o mesmo preço para 3 h
- a opção **B** é mais vantajosa para um período menor que 3 h
- a opção **A** é mais vantajosa para um período maior que 3 h

Comparando os gráficos das funções *A* e *B* em um mesmo plano cartesiano, podemos confirmar que:

- $A(t) = B(t)$ para $t = 3$
- $A(t) > B(t)$ para $t < 3$
- $A(t) < B(t)$ para $t > 3$



Ilustrações: Acervo da editora

Atividades

Anote as respostas no caderno.

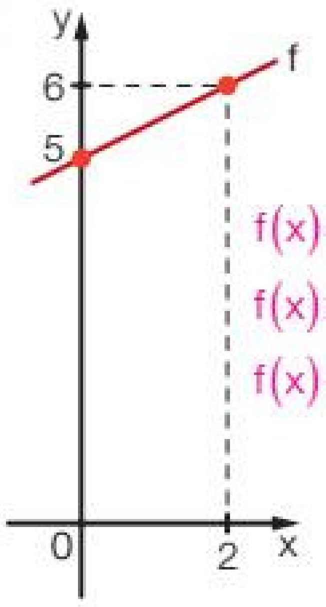
31. Estude o sinal de cada função. Resposta no final do livro.

a) $f(x)=3x+6$ c) $f(x)=\frac{x}{2}-3$

b) $f(x)=-x-5$ d) $f(x)=-3x+7$

32. Realize o estudo do sinal da função representada em cada gráfico.

a)

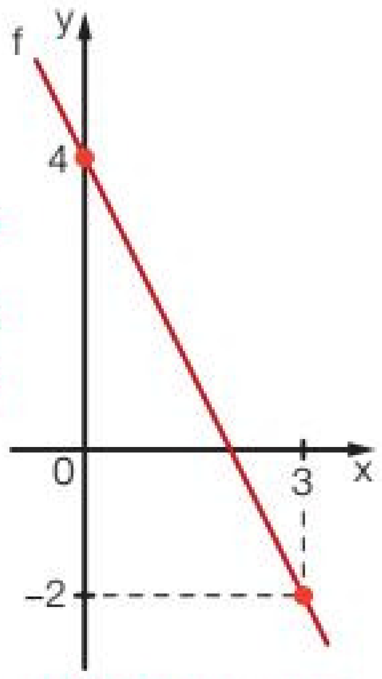


$f(x)=0$ para $x=-10$

$f(x)>0$ para $x>-10$

$f(x)<0$ para $x<-10$

c)



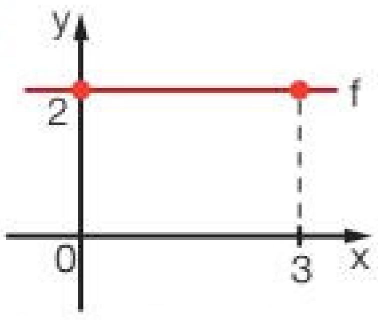
Ilustrações: Acervo da editora

$f(x)=0$ para $x=2$

$f(x)>0$ para $x<2$

$f(x)<0$ para $x>2$

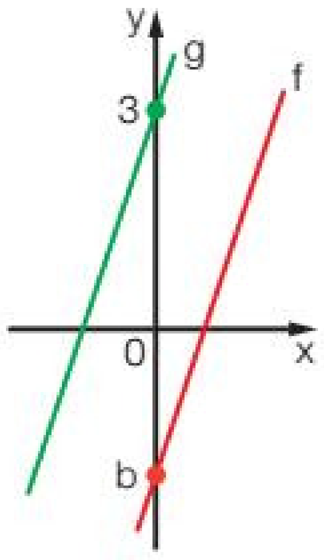
b)



$f(x)>0$ para todo *x* real

33. Dadas as funções $f(x)=-3x+15$ e $g(x)=4x-8$, determine os valores de *x* em que ambas assumem valores positivos. $x \in]2, 5[$

34. O gráfico da função *g* é semelhante ao gráfico de $f(x)=3x+b$, com $b \in \mathbb{R}$, porém transladado 5 unidades para cima.



Acervo da editora

a) Qual é o valor do coeficiente *b*? $b=-2$

b) Escreva a lei da função *g*. $g(x)=3x+3$

c) Determine os zeros das funções *f* e *g*. f: $x=\frac{2}{3}$; g: $x=-1$

d) Realize o estudo do sinal das funções *f* e *g*. Resposta no final do livro.

35. Um representante de vendas recebeu duas propostas para alteração de seu salário.

1ª proposta: R$ 1 600,00 de salário base mais 5% de comissão em suas vendas.

2ª proposta: R$ 1 100,00 de salário base mais 7,5% de comissão em suas vendas.

a) Escreva a lei de formação que relaciona o salário total *S* desse representante com o valor total *v* de suas vendas no mês, para cada proposta. 1ª proposta: $S(v)=1\,600+0,05v$; 2ª proposta: $S(v)=1\,100+0,075v$

b) Para quais valores de vendas o salário de cada proposta é mais vantajoso para o representante? Para vendas menores que R$ 20 000,00 a 1ª proposta é mais vantajosa; para vendas maiores que R$ 20 000,00 a 2ª proposta é mais vantajosa.

36. Para alugar um automóvel, Paulo consultou duas locadoras. Ele obteve os seguintes preços para o aluguel de um automóvel da mesma categoria:

LOCADORA A

R$ 82,00 de taxa fixa, mais R$ 0,52 por quilômetro rodado

LOCADORA B

taxa fixa de R$ 76,00 mais R$ 0,55 por quilômetro rodado

Ilustrações: Sergio Lima

a) Escreva a lei de formação que relaciona o preço total *V* a ser pago em função dos quilômetros rodados *x* para o automóvel de cada locadora. locadora A: $V(x)=82+0,52x$; locadora B: $V(x)=76+0,55x$

b) Sabendo que Paulo pretende rodar cerca de 75 km, em qual das locadoras será mais vantajoso alugar o automóvel? locadora B

c) Determine o intervalo de quilômetros rodados em que cada locadora oferece o menor preço. Resposta no final do livro.

37. Com o objetivo de arrecadar dinheiro para sua formatura, os estudantes de uma turma compraram 75 vales *pizza*, pagando por eles R$ 1 500,00. Para facilitar o troco, eles venderam cada vale *pizza* por um valor inteiro, em reais.

a) Qual será o lucro dos estudantes se eles venderam cada vale *pizza* por R$ 30,00? R$ 750,00

b) Escreva uma função que expresse o lucro/prejuízo *L* dos estudantes em função do preço *v* a que eles venderam cada vale *pizza*. $L(v)=75v-1\,500$

c) Qual deve ser o preço mínimo de cada vale *pizza* para que haja algum lucro, considerando que todas as pizzas sejam vendidas? R$ 21,00

38. (OBM) As seguradoras de automóveis **A** e **B** cobram um valor anual (prêmio) mais um valor que o usuário deve pagar em caso de acidente (franquia). Jean quer fazer um seguro para seu automóvel e recebeu as seguintes propostas das seguradoras:

Seguradora **A**: prêmio anual de R$ 1 500,00 e franquia de R$ 1 400,00.

Seguradora **B**: prêmio anual de R$ 1 700,00 e franquia de R$ 700,00.

Para que valha a pena contratar a Seguradora **A**, Jean não deve se acidentar com o carro por pelo menos *n* anos. O valor de *n* é: c

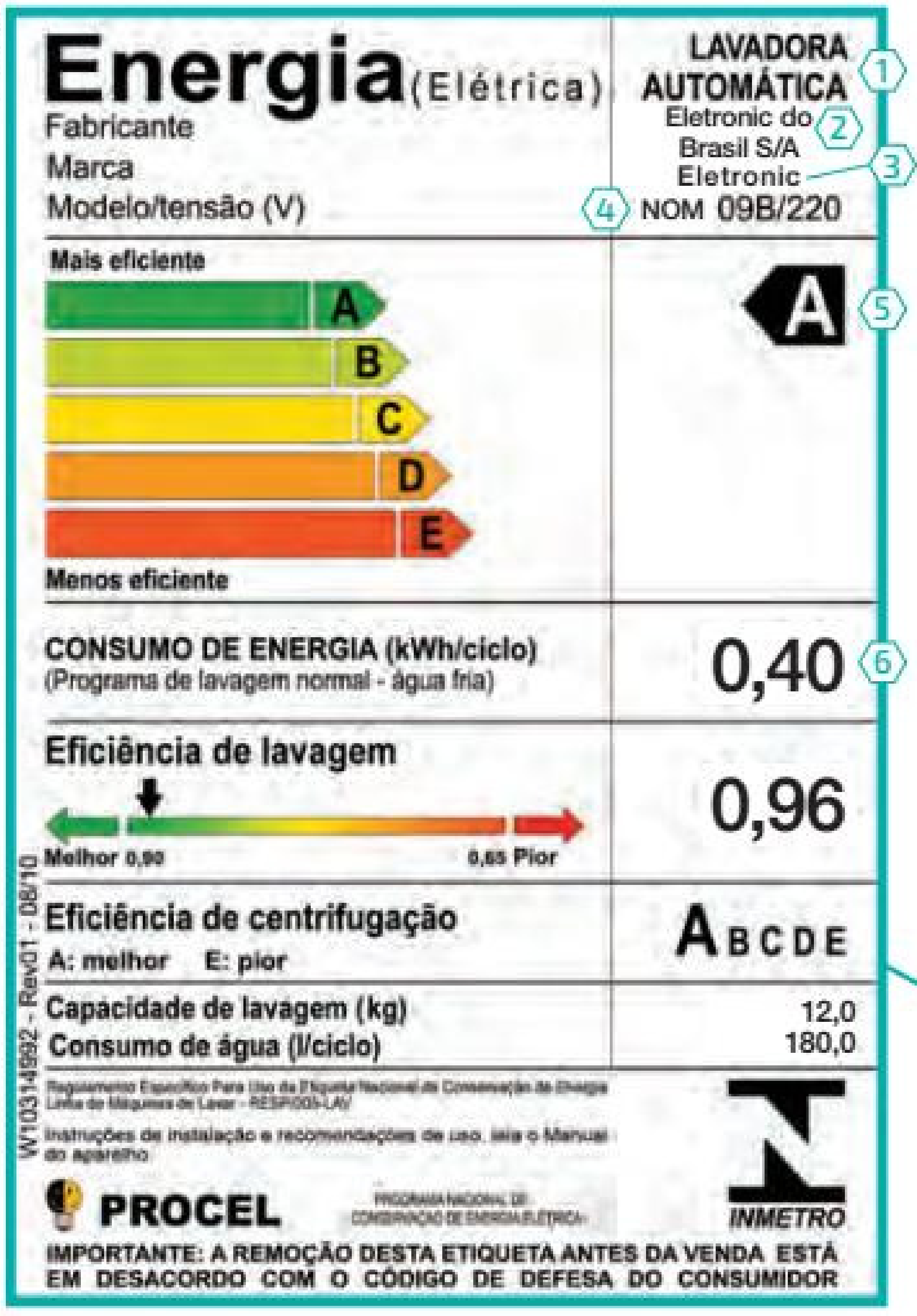
a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

Proporcionalidade e função linear

Uma maneira de economizar energia elétrica é optar por eletrodomésticos e equipamentos eletrônicos com baixo consumo. Nesse sentido, o consumidor pode, no momento da compra, observar o nível de eficiência energética indicado no selo Procel.

Os nomes do fabricante, da marca e do modelo/tensão que aparecem nesta página são fictícios.

PROCEL



Energia (Elétrica)
LAVADORA AUTOMÁTICA ①
Fabricante: Eletronic do Brasil S/A ②
Marca: Eletronic ③
④ Modelo/tensão (V): NOM 09B/220

Mais eficiente
A
B
C
D
E
Menos eficiente

A ⑤

CONSUMO DE ENERGIA (kWh/ciclo)
(Programa de lavagem normal - água fria)
0,40 ⑥

Eficiência de lavagem
Melhor 0,90 — 0,65 Pior
0,96

Eficiência de centrifugação
A: melhor E: pior
A B C D E

Capacidade de lavagem (kg) 12,0
Consumo de água (l/ciclo) 180,0

Regulamento Específico Para Uso da Etiqueta Nacional de Conservação de Energia Linha de Máquinas de Lavar - RESP/005-LAV

Instruções de instalação e recomendações de uso, leia o Manual do aparelho

PROCEL PROGRAMA NACIONAL DE CONSERVAÇÃO DE ENERGIA ELÉTRICA

INMETRO

IMPORTANTE: A REMOÇÃO DESTA ETIQUETA ANTES DA VENDA ESTÁ EM DESACORDO COM O CÓDIGO DE DEFESA DO CONSUMIDOR

W10314992 - Rev01 - 08/10

① Indica o tipo de equipamento.

② Indica o nome do fabricante.

③ Indica a marca comercial ou logomarca.

④ Indica o modelo/tensão.

⑤ A letra indica a eficiência energética do equipamento.

⑥ Indica o consumo de energia, em kWh/ciclo.

lavadora de roupas

Fotomontagem de José Vitor E. C. formada pelas imagens pryzmat/Shutterstock.com e PROCEL

PROCEL

O selo Procel tem o objetivo de indicar aos consumidores os produtos com os melhores níveis de eficiência energética em cada categoria. Produtos que levam o selo Procel ajudam a diminuir o consumo de energia elétrica, reduzindo o valor da fatura.

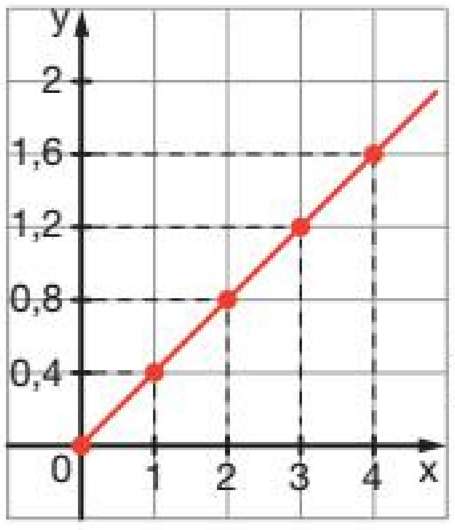
Certa lavadora de roupas, por exemplo, com classificação **A** no selo Procel, consome $0,4\ \text{kWh}$ em 1 h de funcionamento, que corresponde a um ciclo de lavagem de roupas.

O consumo de energia elétrica dessa lavadora é diretamente proporcional ao tempo de uso. Podemos representar esse consumo com a seguinte função linear:

$$\underset{\text{consumo total de energia elétrica}}{y} = \overset{\text{consumo de energia elétrica da lavadora por hora (em kWh)}}{0,4}\underset{\text{tempo de uso da lavadora}}{x}$$

Note que o consumo em quilowatt-hora (y) está em função do tempo em horas (x) de uso da lavadora. Esboçando o gráfico, temos:

x	y
0	0
1	0,4
2	0,8
3	1,2
4	1,6



Acervo da editora

No gráfico, as escalas dos eixos são diferentes entre si.

O consumo de energia elétrica e o tempo de uso da lavadora aumentam proporcionalmente. Se dobrarmos o tempo, o consumo também dobrará.

Ao calcularmos a razão $\frac{y}{x}$ (com $x \neq 0$) para os valores correspondentes de *x* e *y*, obtemos o mesmo resultado, o qual chamamos de **constante de proporcionalidade**.

$$\frac{0,4}{1}=\frac{0,8}{2}=\frac{1,2}{3}=0,4 \longleftarrow \text{constante de proporcionalidade}$$

De modo geral, na função linear $y=ax$ (com $x \neq 0$), temos $\frac{y}{x}=\frac{ax}{x}=a$, ou seja, a constante de proporcionalidade é igual ao coeficiente *a*.

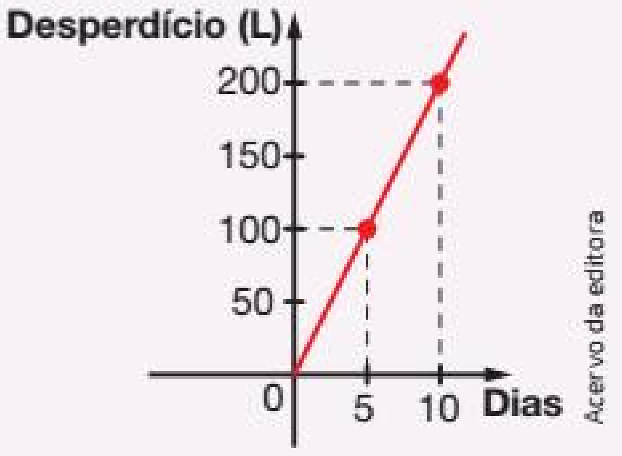
Você estudou em anos anteriores que existem grandezas relacionadas de maneira **inversamente proporcional**, ou seja, quando uma aumenta, a outra diminui na mesma proporção. Nesse caso, a relação entre essas grandezas não pode ser descrita por uma função afim.

Atividades resolvidas

R8. Existem várias formas de evitar o desperdício de água, como verificar se as torneiras estão bem fechadas após o uso.

O gráfico a seguir representa a quantidade de água desperdiçada por uma torneira gotejando 25 gotas por minuto.

No gráfico, as escalas dos eixos são diferentes entre si.



Acervo da editora

Chalermchai Chamnanyon/Shutterstock.com

Torneiras mal fechadas ou com vazamento acarretam grande desperdício de água.

Se essa torneira permanecer gotejando, quantos litros de água serão desperdiçados ao final de 30 dias?

Resolução

Observando o gráfico, notamos que a reta passa pela origem, ou seja, é uma função linear do tipo $y=ax$.

Como o ponto $(5, 100)$ pertence ao gráfico, temos:

$$f(5)=100 \Rightarrow a \cdot 5=100 \Rightarrow a=20$$

Logo, $f(x)=20x$.

Agora, basta calcular $f(30)$:

$$f(30)=20 \cdot 30=600$$

Portanto, serão desperdiçados 600 L de água ao final de 30 dias.

R9. Sejam as funções lineares $f(x)=(m^2+3)x$ e $g(x)=-2mx$, em que *m* corresponde a um número real. Determine os valores de *m*, de modo que a função $h(x)=f(x)+g(x)$ tenha constante de proporcionalidade igual a 3.

Resolução

Temos que:

$$h(x)=f(x)+g(x)=(m^2+3)x-2mx=(m^2-2m+3)x$$

Para *h* ter constante de proporcionalidade igual a 3, a declividade de *h* também deve ser 3, ou seja:

$$m^2-2m+3=3 \Rightarrow m^2-2m=0 \Rightarrow m(m-2)=0$$

Portanto, $m=0$ ou $m=2$.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

39. As tartarugas são conhecidas pela dureza de seus cascos e pela lentidão com que se movimentam. No entanto, na água algumas espécies se movem com boa velocidade. As tartarugas marinhas podem nadar a uma velocidade de até 19 m/s.

a) Escreva uma função que determine a distância *d*, em metros, percorrida por uma tartaruga marinha em função do tempo *t*, em segundos. $d(t) = 19t$

b) Em quanto tempo essa tartaruga consegue percorrer 9 120 m ou mais? 8 min ou mais

40. Entre as pedras preciosas mais caras do mundo está o raríssimo diamante vermelho. Um miligrama dele custa cerca de 22 mil reais. Um dos poucos e maiores diamantes vermelhos já catalogados foi exibido pelo *National Museum of Natural History*, dos Estados Unidos, e tinha, aproximadamente, 1 006 mg.


Fabrice Coffrini/AFP/Getty Images

Anel com o diamante vermelho.

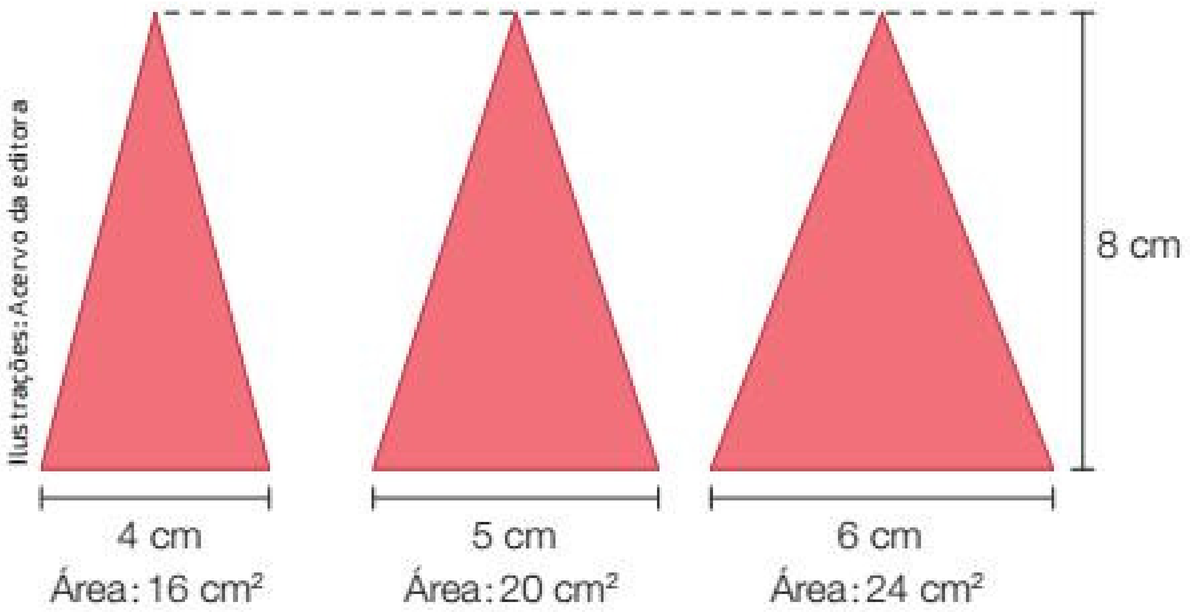
Fonte de pesquisa: <http://geogallery.si.edu/index.php/en/1007278/deyoung-red-diamond>. Acesso em: 27 ago. 2015.

a) Qual seria o preço aproximado da pedra exibida pelo *National Museum of Natural History*, caso estivesse à venda? R$ 22 132 000,00

b) Escreva uma função que relacione o preço *P*, em reais, do diamante vermelho com sua massa *m*, em miligramas. $P(m) = 22\,000m$

c) As grandezas massa e preço do diamante vermelho são proporcionais? Qual é a constante de proporcionalidade? Sim, pois aumentam ou diminuem na mesma proporção. 22 000

41. Observe a sequência de triângulos de mesma altura.



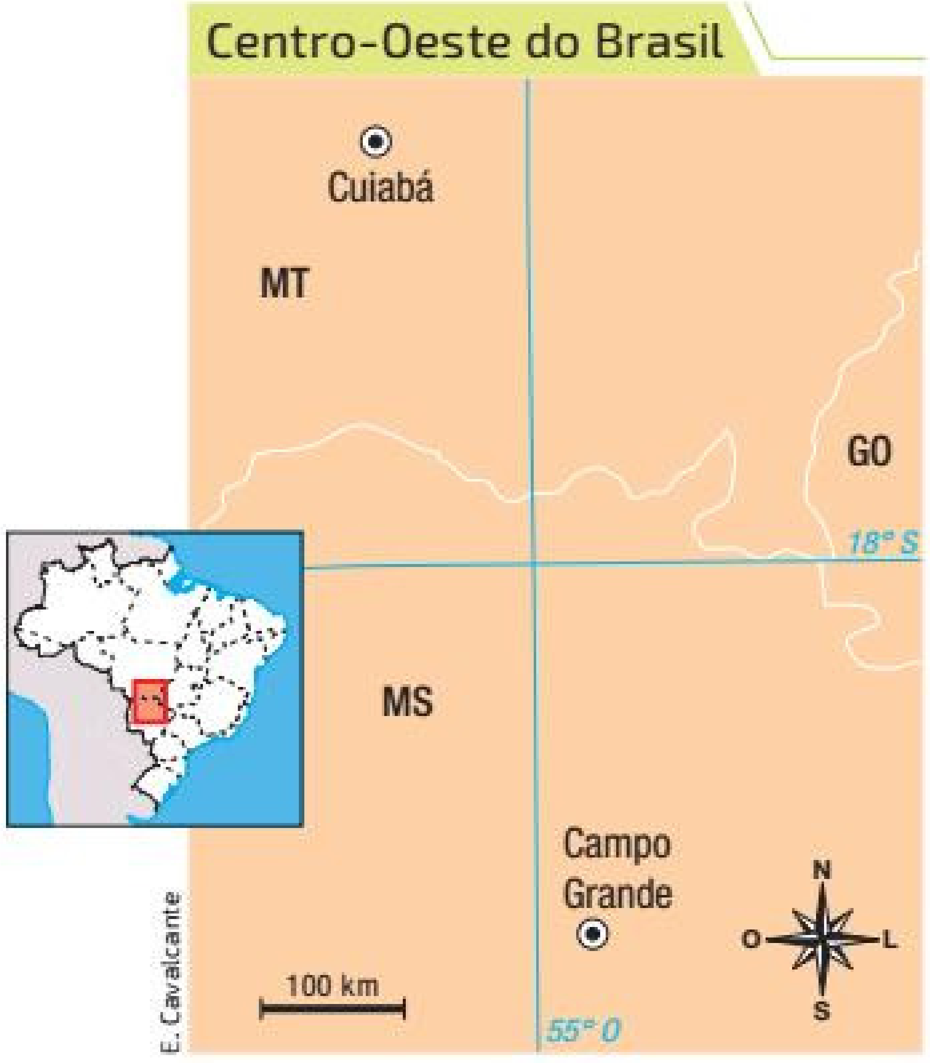
Ilustrações: Acervo da editora

a) Escreva uma função que expresse a área *A* de cada triângulo em função da medida *b* de sua base. $A(b) = 4b$

b) Qual é a área de um triângulo nessa sequência, cuja medida da base seja 15 cm? 60 cm²

c) Qual é a medida da base de um triângulo nessa sequência, sabendo que sua área é 32 cm²? 8 cm

42. Observe parte da região Centro-Oeste do Brasil.



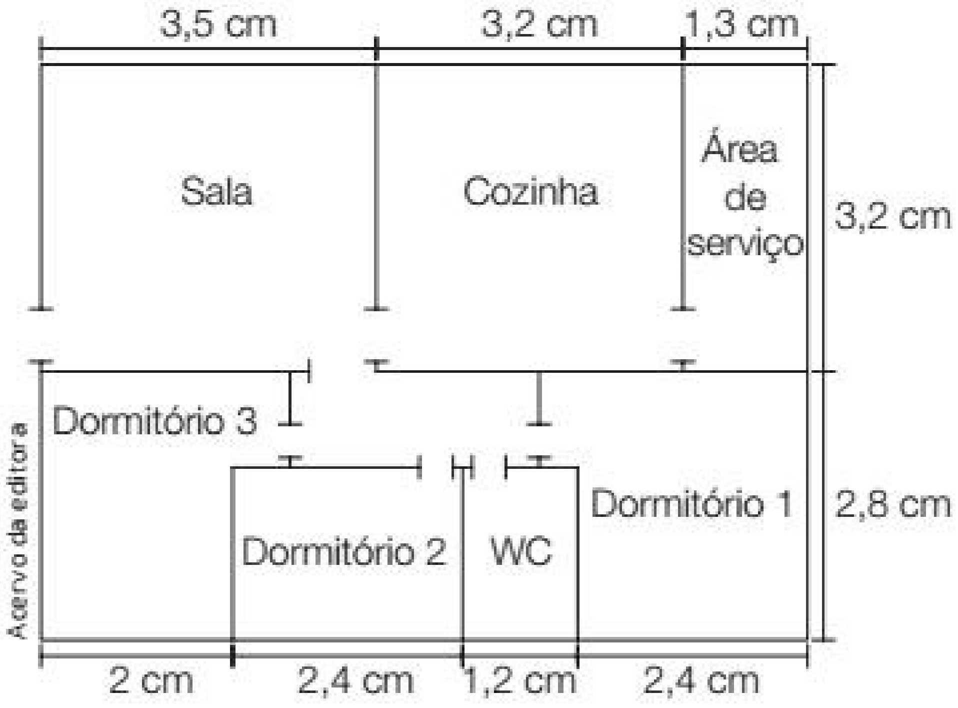
E. Cavalcante

Fonte: ATLAS geográfico escolar. 6. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2012.

a) Qual função permite calcular a distância real em quilômetros *R*, em linha reta, entre as cidades, por meio das distâncias *d* em centímetros representadas no mapa? $R(d) = 100d$

b) Qual é a distância real aproximada, em linha reta, entre as cidades de Campo Grande e Cuiabá, em quilômetros, sabendo que a distância, no mapa, entre essas cidades é de 5,63 cm? 563 km

43. Jorge representou a casa onde mora por meio de um esquema. As medidas, em centímetros, usadas para fazer o esquema estão indicadas na figura.



Acervo da editora

a) Quais são as medidas reais da cozinha da casa de Jorge, sabendo que essa casa tem 10 m de comprimento por 7,5 m de largura? 4 m de comprimento por 4 m de largura

b) Qual foi a escala utilizada por Jorge ao fazer o esquema de sua casa? 1 cm : 125 cm

c) Escreva uma função que permita calcular as medidas reais *m*, em metros, de cada cômodo da casa, por meio das medidas *x*, em centímetros, indicadas no esquema. $m(x) = 1{,}25x$

d) Qual é a constante de proporcionalidade da função que você escreveu no item **c**? 1,25

Inequação do 1º grau

Observe certo plano oferecido por uma companhia telefônica.

Ronaldo Lucena

Nessas condições, quantos minutos de ligação um usuário desse plano telefônico pode realizar no mês, para que o valor da fatura seja no máximo R$ $200{,}00$?

Para responder a essa questão, vamos definir inicialmente a função que permite calcular o total a ser pago pela fatura em função da quantidade de minutos de ligação. Chamando de *v* o valor a ser pago e de *t* a quantidade de minutos de ligação, temos:

$$v(t)=0{,}36t+38$$

Agora, devemos obter os valores de *t* para os quais $v(t)\leq 200$, ou seja, resolver a expressão $0{,}36t+38\leq 200$.

$$0{,}36t+38\leq 200 \Rightarrow 0{,}36t\leq 200-38 \Rightarrow 0{,}36t\leq 162 \Rightarrow t\leq \frac{162}{0{,}36} \Rightarrow t\leq 450$$

Portanto, para que o valor da fatura seja no máximo R$ 200,00, a quantidade de minutos de ligação no mês deve ser menor ou igual a 450 min.

Para resolver esse problema, utilizamos uma desigualdade envolvendo uma função afim, ou seja, utilizamos uma inequação do 1º grau.

Sendo $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ uma função, chamamos de **inequação** toda desigualdade que pode ser escrita de uma das seguintes formas:

- $f>0$
- $f<0$
- $f\geq 0$
- $f\leq 0$

Sendo $f(x)=ax+b$ uma função afim, chamamos de **inequação do 1º grau** toda desigualdade que, quando reduzida, possui uma das seguintes formas:

- $ax+b>0$
- $ax+b<0$
- $ax+b\geq 0$
- $ax+b\leq 0$

Exemplos

- $-2x-\frac{1}{2}>0$
- $\frac{x}{3}+2<0$
- $x+4\leq 5$
- $3x>3$
- $7x+8\geq 3x-5$
- $5x+1\leq 2x+3$
- $\sqrt{3}x>x+1$
- $x+1\geq \frac{\sqrt{2}}{3}x$

Atividades resolvidas

R10. Resolva, no conjunto dos números reais, a inequação $9x-2\leq 4x$.

Resolução

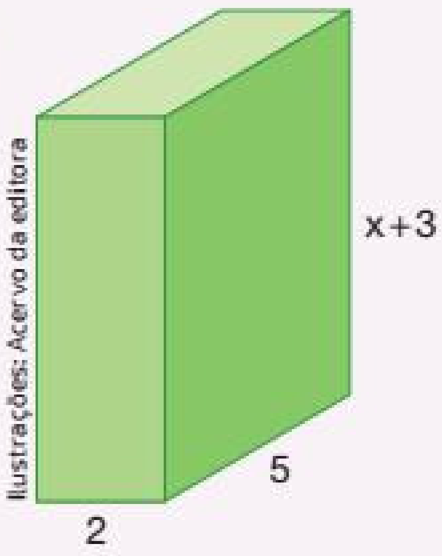
$$9x-2\leq 4x \Rightarrow 9x-4x\leq 2 \Rightarrow 5x\leq 2 \Rightarrow x\leq \frac{2}{5}$$

Portanto, $S=\left]-\infty, \frac{2}{5}\right]$ ou $S=\left\{x\in\mathbb{R} \mid x\leq \frac{2}{5}\right\}$.

Resolver uma inequação é obter os valores da variável que a tornam verdadeira. Esses valores são chamados de **solução da inequação**, e o conjunto das soluções recebe o nome de **conjunto verdade** ou **conjunto-solução** (S).

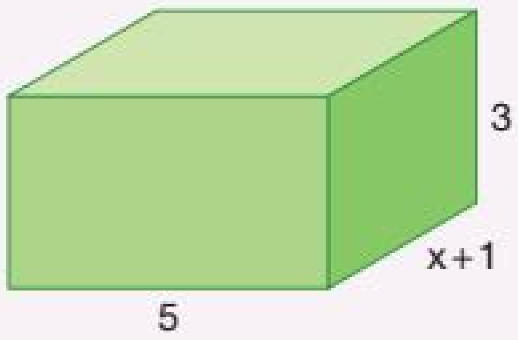
R11. Para quais valores de *x* o volume do prisma **B** é maior que o volume do prisma **A**?

A



Ilustrações: Acervo da editora

B



Resolução

Sejam V_A e V_B funções que descrevem os volumes dos prismas **A** e **B**, respectivamente. Assim:

- $V_A(x)=2\cdot 5\cdot(x+3)=10x+30$
- $V_B(x)=5\cdot(x+1)\cdot 3=15x+15$

Segue que:

$$V_B(x)>V_A(x) \Rightarrow 15x+15>10x+30 \Rightarrow 15x-10x>30-15 \Rightarrow 5x>15 \Rightarrow x>3$$

Portanto, para $x>3$, o volume do prisma **B** é maior que o volume do prisma **A**.

R12. Resolva a atividade **R7**, da página **90**, utilizando uma inequação do 1º grau.

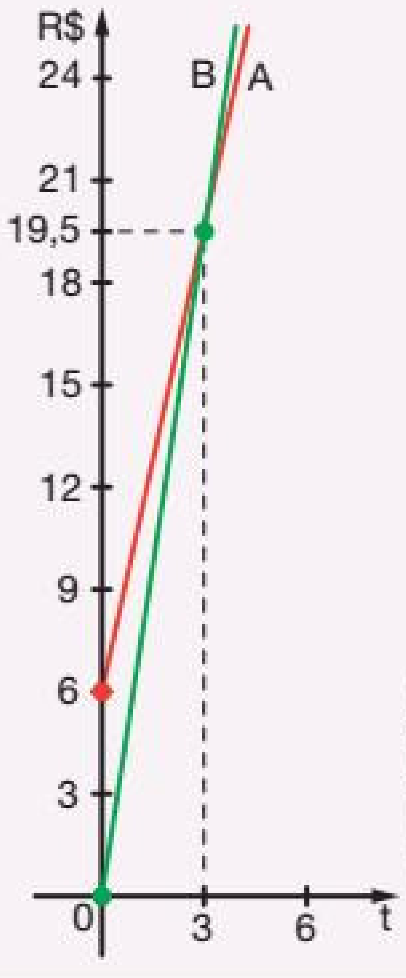
Resolução

Na atividade **R7** fizemos um **estudo de sinal** da função *F* dada por $F(t)=A(t)-B(t)$.

Outra maneira de comparar *A* e *B* é resolvendo a **inequação do 1º grau** $A(t)>B(t)$. Como $A(t)=4,5t+6$ e $B(t)=6,5t$, temos:

$$A(t)>B(t) \Rightarrow 4,5t+6>6,5t \Rightarrow 4,5t-6,5t>-6 \Rightarrow -2t>-6 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2t<6 \Rightarrow t<3$$

Assim, $A(t)>B(t)$ para $t<3$ e, analogamente, $A(t)<B(t)$ para $t>3$. Portanto, como foi possível concluir na atividade **R7**, a opção **A** é mais vantajosa para um período maior que 3 h, e a opção **B** é mais vantajosa para um período menor que 3 h.



Acervo da editora

Quando multiplicamos ambos os membros de uma desigualdade por um número negativo, devemos inverter o sentido da desigualdade.

No gráfico de *F* é possível observar que $F(t)=A(t)-B(t)>0$ para $t<3$.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

44. Resolva em $\mathbb{R}$ cada inequação.

a) $5x+8>-12$ $S=\{x\in\mathbb{R}|x>-4\}$

b) $4x+5<2x$ $S=\left\{x\in\mathbb{R}|x<-\frac{5}{2}\right\}$

c) $6x-4\geq 3x+5$ $S=\{x\in\mathbb{R}|x\geq 3\}$

d) $3-5x\leq 8$ $S=\{x\in\mathbb{R}|x\geq -1\}$

45. (Unifor-CE) Seja *f* a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=2-3x$. Os números reais que satisfazem a sentença $f(f(1-x))<-22$ pertencem ao conjunto: a

a) $]2,+\infty[$

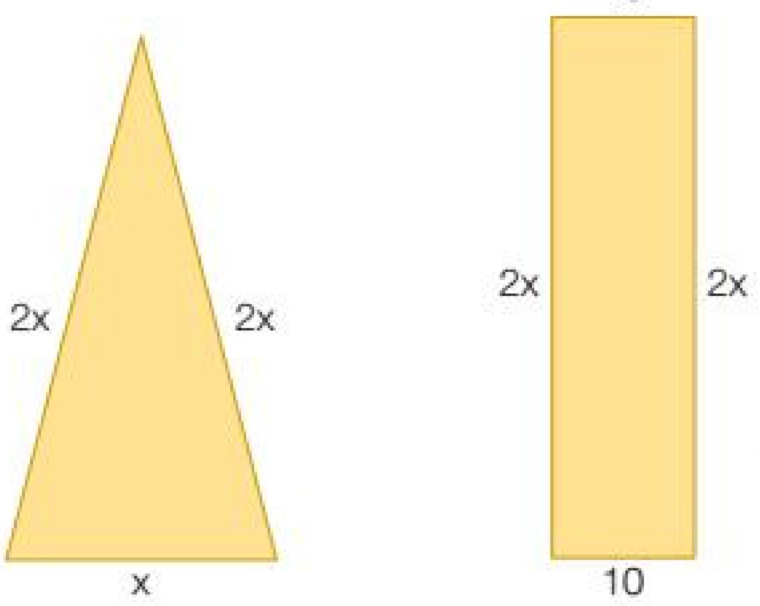
b) $]0,2]$

c) $]-2,0]$

d) $]-4,-2]$

e) $]-\infty,-4]$

46. No triângulo e no retângulo estão indicadas as medidas de seus lados.



Ilustrações: Acervo da editora

a) Qual função expressa o perímetro *p* de cada figura, em relação à medida x? triângulo: $p(x)=5x$; retângulo: $p(x)=4x+20$

b) Qual é o maior valor inteiro que *x* pode assumir para que o perímetro do triângulo seja menor que o do retângulo? $x=19$

47. Segundo as informações nutricionais contidas no rótulo de determinado biscoito, cada unidade tem 47 kcal.

a) Uma pessoa que come 10 unidades desse biscoito está ingerindo quantas quilocalorias? 470 kcal

b) Escreva uma função que expresse a quantidade de quilocalorias ingeridas *q*, em função da quantidade *n* de biscoitos consumidos. $q(n)=47n$

c) Qual é o número mínimo de biscoitos que devem ser consumidos para que sejam ingeridas 350 kcal? 8 biscoitos

48. Desafio

Em um cinema, o preço da sessão varia de acordo com o dia da semana. Nas sextas, sábados e domingos são cobrados R$ 27,00 por pessoa; nos outros dias da semana, R$ 21,00. Sabendo que, em uma semana, o número total de pessoas que vão a esse cinema na sexta, no sábado e no domingo é o triplo do número total de pessoas que vão nos outros dias da semana, determine o número mínimo total de pessoas que devem ir a esse cinema, durante uma semana, para que a arrecadação seja maior ou igual a R$ 178 500,00.
7 000 pessoas

49. Um dos grandes debates sobre a gasolina no Brasil é a quantidade de etanol misturada a esse combustível. No decorrer dos últimos anos, essa quantidade tem variado entre 20% e 27%.

O tanque de um carro com motor *flex*, com capacidade para 55 L, estava com 10 L de etanol quando foi abastecido com gasolina, que continha 27% de etanol na sua composição.

a) Escreva uma função que relacione a quantidade de *a* de etanol no tanque em função da quantidade *g* de gasolina com que o carro foi abastecido. $a(g)=0{,}27g+10$

b) Com quantos litros de gasolina esse carro deve ser abastecido para que a quantidade de etanol no tanque seja igual ou superior a 15 L? mais de 18,52 L

c) Qual é a quantidade máxima de etanol que pode haver no tanque desse carro após o abastecimento? 22,15 L

50. Para a produção de bolos, uma confeitaria tem uma despesa mensal de R$ 3 500,00 em mercadorias e mais R$ 2 500,00 em outros gastos. Cada bolo produzido nessa confeitaria é vendido por R$ 40,00.

a) Escreva a função que determina o lucro *L* dessa confeitaria, em função da quantidade *q* de bolos vendidos. $L(q) = 40q - 6\,000$

b) Para quais valores de *q* a função que você escreveu no item **a** assume valores positivos? O que podemos concluir nesse caso? Resposta no final do livro.

51. Uma bomba-d'água envia 1 500 L de água por minuto para um reservatório. Qual é o tempo mínimo de funcionamento dessa bomba para que ela envie uma quantidade maior ou igual a 22 500 L de água para o reservatório? 15 min

52. Para oferecer planos diferentes dos que são disponibilizados no mercado, uma concessionária de energia elétrica criou dois planos com tarifas mensais fixas da seguinte maneira:

- no plano **A**, a tarifa mensal fixa é de R$ 88,00, com direito ao consumo de até 70 kWh. Caso ultrapasse essa quantia será cobrado R$ 1,20 a cada kWh excedente.
- no plano **B**, a tarifa mensal fixa é de R$ 110,00, com direito ao consumo de até 100 kWh. Caso ultrapasse essa quantia será cobrado R$ 1,80 a cada kWh excedente. *Resposta nas **Orientações para o professor**.

a) Em um plano cartesiano, esboce os gráficos das funções que representam o custo para o consumidor em função do consumo de energia elétrica, do plano **A** e do plano **B**. *

b) Em qual intervalo de consumo o plano **B** é mais vantajoso para o consumidor quando comparado ao plano **A**? Entre $88,\overline{3}$ kWh e $123,\overline{3}$ kWh.

Nas situações apresentadas, estamos considerando constantes outros fatores que determinam a demanda e a oferta como, por exemplo, a renda e a preferência do consumidor e os custos dos fatores de produção.

53. Em Economia, são estudadas as leis da oferta e da demanda. Oferta são os produtos ou serviços oferecidos ao consumidor, enquanto demanda representa a quantidade de pessoas que desejam adquiri-los.

Quando o preço de um produto é reduzido, geralmente a quantidade de consumidores que estão dispostos a adquiri-lo aumenta. Por outro lado, se o preço do produto é elevado, a demanda reduz, ou seja, o número de consumidores em busca do produto é menor devido seu alto custo. Essa relação entre quantidade demandada e preço do produto representa a lei da demanda.

A lei da oferta é a relação entre quantidade de produto ofertado e preço. Quando o preço de um produto sofre elevação, a quantidade do produto ofertado também aumenta, mas se o preço é reduzido a quantidade do produto ofertado também reduz.

Quando não há tendência nas variações de preço, pode-se dizer que existe um equílibrio de mercado. Isso ocorre quando a quantidade demandada de um produto é próxima da quantidade ofertada, ou seja, compradores adquirem e vendedores comercializam a quantidade desejada. Veja abaixo o preço e a quantidade diária de demanda e oferta de certo produto.

Preço	Quantidade diária demandada	Quantidade diária ofertada
R$ 45,00	65	120
R$ 40,00	75	105
R$ 35,00	85	90

Fonte de pesquisa: WESSELS, Walter. **Economia**. Tradução Sara Gedanke. Revisão técnica Celso Seiji Gondo. São Paulo: Saraiva, 1998.

Fotomontagem de José Vitor E. C. formada pelas imagens Peter Bernik/ Shutterstock.com e littleny/Shutterstock.com

Na busca de economia, muitos consumidores optam por comprar produtos que são referentes a estação, pois normalmente apresentam preço mais baixo.

De acordo com as informações apresentadas, resolva as questões.

a) Quando há excesso de oferta de um produto, significa que os vendedores não conseguem vender a quantidade que desejam. Cite uma estratégia que eles podem utilizar para obter a quantidade de vendas esperada. Uma possível resposta: a redução do preço do produto.

b) Se a demanda por determinado produto estiver superior à oferta do mercado, o que isso pode acarretar em relação ao preço do produto? Uma possível resposta: o preço tenderá a aumentar.

c) Em relação às informações apresentadas no quadro de demanda e oferta de certo produto, escreva a função afim:
- *f*, que associa o preço *x* à quantidade diária demandada pelos consumidores. $f(x) = -2x + 155$
- *g*, que associa o preço *x* à quantidade diária ofertada pela distribuidora. $g(x) = 3x - 15$

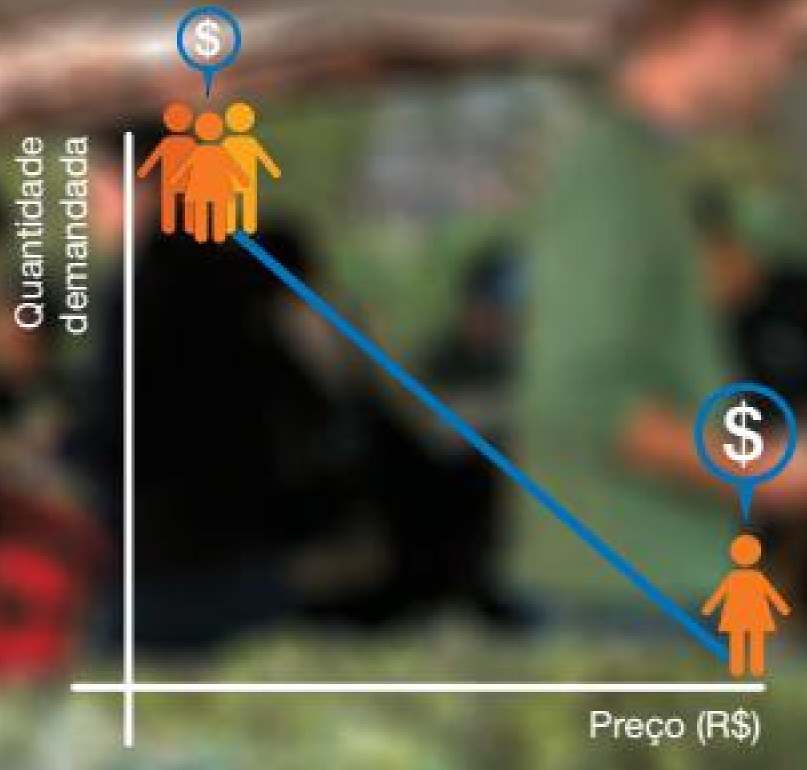
d) Utilizando as funções *f* e *g* obtidas, escreva inequações que representem as situações em que ocorre excesso de oferta e excesso de demanda, respectivamente. $3x - 15 > -2x + 155$ e $3x - 15 < -2x + 155$

e) Considerando que tanto a quantidade demandada quanto a quantidade ofertada não podem ser representadas por números negativos, determine entre quais valores o preço pode estar compreendido. De R$ 5,00 a R$ 77,50.

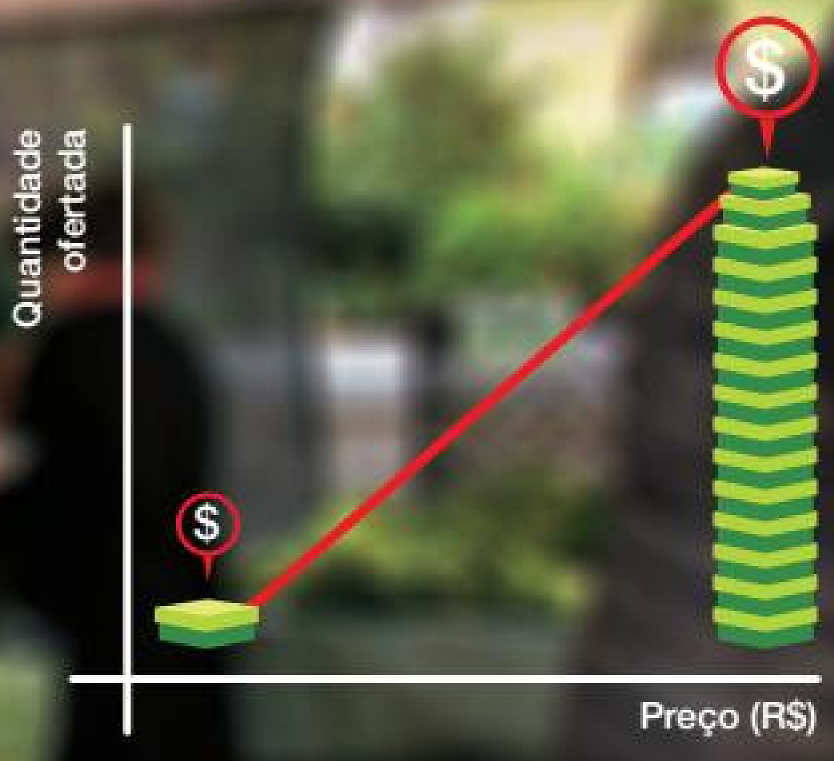
f) Tendo como base a resolução das inequações obtidas no item **d** e a resposta ao item **e**, determine os preços para os quais ocorre:
- excesso de oferta. Superiores a R$ 34,00 até R$ 77,50.
- excesso de demanda. Superiores ou iguais a R$ 5,00 e inferiores a R$ 34,00.

g) Determine o ponto de equilíbrio de mercado na situação apresentada. R$ 34,00

Lei da demanda, lei da oferta e equilíbrio de mercado



A lei da demanda indica que o preço mais baixo atrai mais consumidores dispostos a adquirir um produto e que o preço elevado atrai menos consumidores dispostos a adquiri-lo.



A lei da oferta indica que o preço mais baixo resulta em uma quantidade menor de produtos ofertados e que o preço mais elevado resulta em uma quantidade maior de produtos ofertados.

O equilíbrio de mercado indica uma estabilidade entre a demanda e a oferta, ou seja, o preço é razoável e a quantidade ofertada do produto é suficiente para os consumidores interessados em adquiri-lo.

Ilustrações: Camila Ferreira

Ser consciente

Por que pagamos tributos?

Você pode até não saber, mas quando alguém compra um *videogame* está pagando cerca de 70% do seu valor em tributos. Isso significa, por exemplo, que, ao comprar um desses equipamentos que custam R$ 1 000,00, cerca de R$ 700,00 são recolhidos ao governo. De maneira geral, todos os produtos que compramos têm em seu preço uma porcentagem de tributos, uns mais outros menos. Também pagamos tributos por serviços que adquirimos, como nas tarifas de telefone, água ou energia elétrica. No entanto, você sabe o que são tributos e para que eles servem?

Os tributos cobrados pelos governos municipal, estadual e federal têm a finalidade de custear serviços públicos como saúde, educação, segurança e transporte. Quando os pagamos, estamos cumprindo nosso dever de cidadãos, contribuindo para que a sociedade possa melhorar sua condição de vida ao usufruir de bens e serviços públicos de qualidade.

Os impostos caracterizam um tipo de tributo. Veja alguns exemplos:

- **IPTU (Imposto Predial e Territorial Urbano)**: é cobrado pelos municípios anualmente e incide sobre propriedades urbanas.
- **ICMS (Imposto sobre Circulação de Mercadorias e Prestação de Serviços)**: é cobrado pelos estados e incide sobre a circulação de produtos. Na maioria dos casos o ICMS já vem embutido nos preços desses produtos.
- **IPVA (Imposto sobre Propriedade de Veículos Automotores)**: é um tributo estadual que incide sobre a propriedade de veículos automotores, como automóveis, motocicletas e ônibus.
- **IRPF (Imposto de Renda da Pessoa Física)**: é cobrado pelo governo federal e incide sobre a renda (salários, pensões, aluguel etc.). Depois da declaração de ajuste anual, em alguns casos, há uma restituição feita pelo governo federal.
- **ISS (Imposto sobre Serviços de Qualquer Natureza)**: é cobrado por municípios e pelo governo federal de quem presta serviços. Quem contrata um serviço, paga o tributo embutido no valor.

Fontes de pesquisa: <www.cgu.gov.br/Publicacoes/controle-social/arquivos/cartillhaolhovivo_baixa_v2.pdf>. Acesso em: 2 out. 2015. <www.receita.fazenda.gov.br/EducaFiscal/textoiconedefaultasp.htm>. Acesso em: 22 set. 2015.

Tributos: arrecadação e destinação

A arrecadação de tributos e sua destinação de maneira adequada favorecem o desenvolvimento social do país e promove o crescimento econômico.

Arrecadação

Quando compramos um produto e pedimos a nota ou o cupom fiscal, estamos assegurando a arrecadação de tributos que deverão ser revertidos em benefícios aos cidadãos. Exija sempre a nota ou o cupom fiscal na compra de um produto. Nela, é possível verificar o valor aproximado de tributos referente aos produtos comprados.

Temos também o importante papel de fiscalizar a aplicação do dinheiro arrecadado, a fim de que favoreça a sociedade, permitindo melhorias nos serviços públicos.

Analisando com cidadania

a) Por que é importante exigirmos a nota ou cupom fiscal quando realizamos uma compra? Resposta esperada: dentre outros objetivos, para garantir a arrecadação dos tributos e assegurar direitos sobre o produto adquirido, como a troca no caso de um eventual defeito.

b) Além dos tributos citados no texto, pesquise outros e em quais situações eles são cobrados. Resposta pessoal.

c) Em sua opinião, os tributos arrecadados no Brasil são adequadamente aplicados, resultando na oferta de serviços públicos de qualidade? Converse com o professor e os colegas sobre esse assunto. Resposta pessoal.

Analisando com Matemática

d) Traga uma nota ou um cupom fiscal para a sala de aula e verifique o valor pago em tributos. A qual porcentagem do total corresponde este valor? Resposta pessoal.

No item **d**, traga uma nota ou um cupom fiscal para a sala de aula para que os alunos que não trouxerem possam resolvê-lo.

e) Suponha que o ICMS incidente sobre determinado produto corresponda a 17% de seu valor de venda. Se a unidade do produto custa R$ 3,00, calcule o valor deste tributo pago na compra de:

- 1 unidade R$ 0,51
- 5 unidades R$ 2,55
- 35 unidades R$ 17,85

f) Escreva uma função *f* que associa a quantidade *x* de unidades do produto indicado no item **e** ao valor do ICMS $y = f(x)$ pago. $f(x) = 0,51x$

Veja mais informações sobre tributos nos *sites*:
- <http://tub.im/jacgvb>
- <http://tub.im/ao9k7o>

(acesso em: 2 fev. 2016)

Destinação

Entre os serviços públicos custeados pela arrecadação de tributos está a educação. A destinação de tributos deve propiciar condições de desenvolver uma educação de qualidade aos estudantes brasileiros.

A saúde pública também é custeada pela arrecadação de tributos. Nos postos de saúde, um dos bens oferecidos à sociedade são as vacinas para prevenir diversas doenças, como a vacina contra a poliomielite. Todos devem ficar atentos para tomar as vacinas nas idades recomendadas.

Davi Augusto

4

capítulo

Função quadrática

Ser vivo adulto

Canguru-vermelho: 1 m a 1,6 m de comprimento

Canguru-vermelho (*Macropus rufus*), na Austrália.

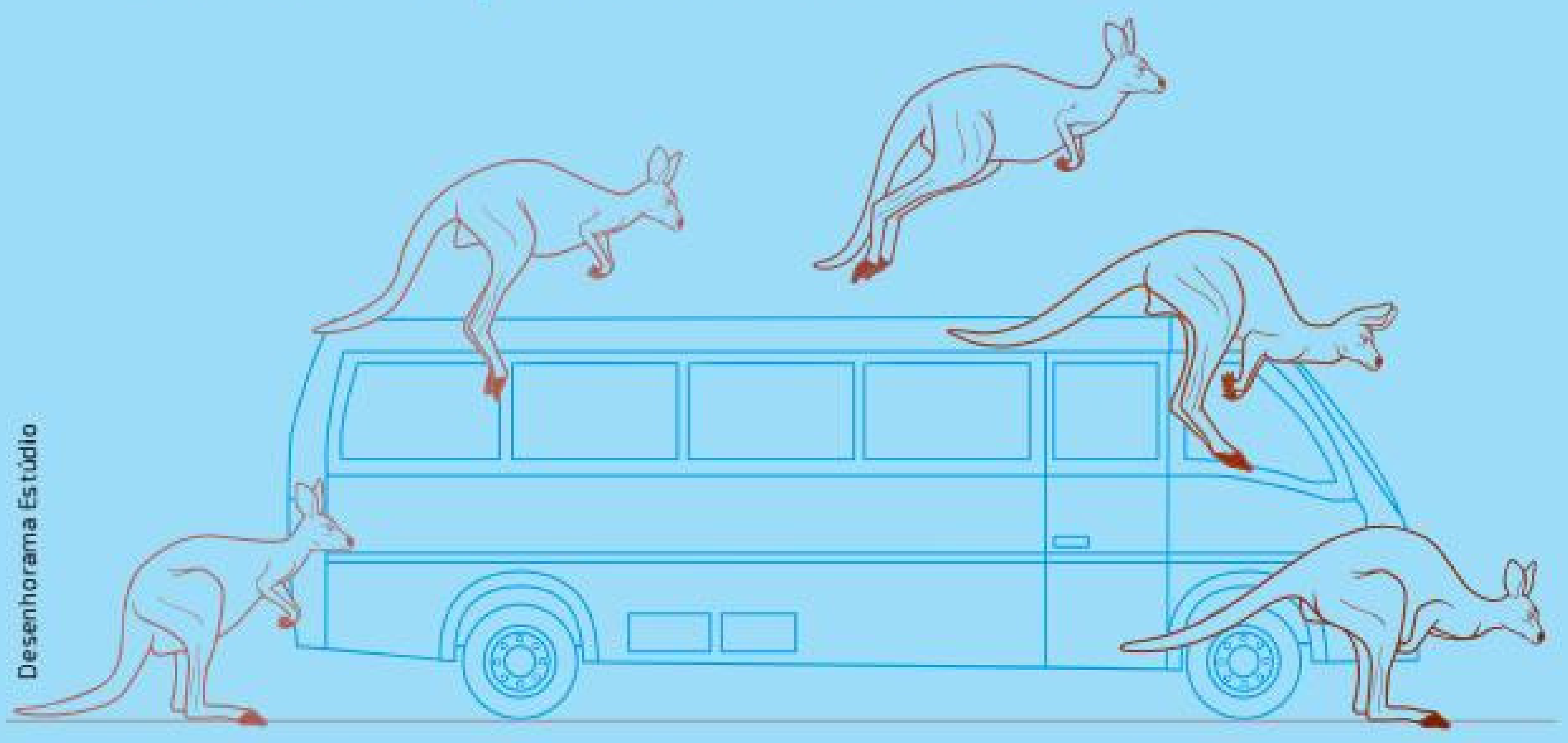
FLPA/Alamy Stock Photo/Latinstock

Os saltos dos cangurus

Os cangurus são mamíferos que se desenvolvem no útero e no marsúpio, espécie de bolsa na região da barriga da fêmea. Atualmente vivem apenas na Austrália e são um dos símbolos desse país. São cerca de 60 espécies existentes, sendo uma delas o canguru-vermelho.

Os cangurus deslocam-se por meio de saltos, utilizando suas patas traseiras como se fossem molas e sua longa cauda para manter o equilíbrio. Esses animais não costumam caminhar, uma vez que, exceto ao nadar, não conseguem mover suas patas separadamente.

Uma forma peculiar de se locomover



Desenhorama Estúdio

Em extrema necessidade, os saltos de alguns cangurus podem atingir 3,3 m de altura e cerca de 9 m de comprimento. Essas medidas, para comparação, são maiores que a altura e o comprimento de diversos modelos de micro-ônibus, por exemplo.

Fonte de pesquisa: ANIMAIS da savana VII. Enciclopédia da vida selvagem Larousse. Rio de Janeiro: Altaya, 1997.

Oriente os alunos a escreverem as respostas no caderno.

A Por que ao se locomover os cangurus saltam em vez de caminhar? Resposta esperada: porque eles não conseguem mover suas patas separadamente, exceto ao nadar.

B A trajetória dos saltos dos cangurus descreve uma reta ou uma curva? uma curva

C Represente, no caderno, a possível trajetória do salto de um canguru desde o momento do primeiro impulso até a sua aterrissagem no solo. Resposta pessoal.

Nesse item, espera-se que o aluno represente o salto do canguru por meio de parte de uma parábola com a concavidade voltada para baixo.

Veja mais informações sobre os marsupiais nos *sites*:

- <http://tub.im/fe2dpt>
- <http://tub.im/u5h59o>

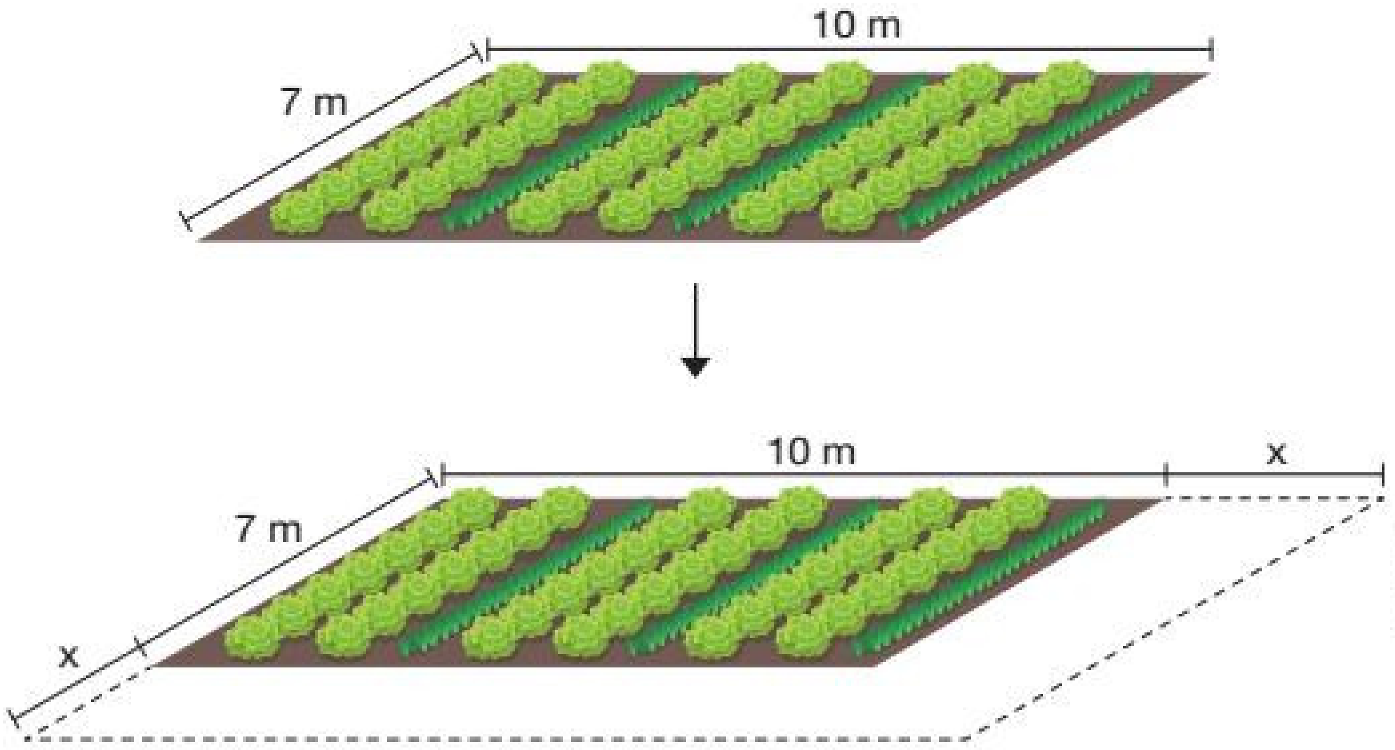
(acesso em: 2 fev. 2016)

Estudando função quadrática

Ao final do estudo deste capítulo podem ser trabalhados o exemplo e as atividades da página **268** da seção **Acessando tecnologias**.

As hortas comunitárias são ótimas alternativas de ocupação para terrenos baldios, espaços muitas vezes utilizados como depósitos de entulhos. Essas hortas oferecem alimentos frescos e saudáveis aos moradores locais, além de, em alguns casos, servirem como fonte de renda.

Em certa horta comunitária, um canteiro de verduras retangular será ampliado em uma mesma medida, tanto no comprimento quanto na largura, como mostra a figura.



Ilustrações: Ronaldo Lucena

Podemos representar a área (f) desse canteiro após a ampliação em função da medida *x* indicada.

A área do retângulo é dada pelo produto do comprimento e da largura.

$$f(x)=(7+x)(10+x)$$
$$f(x)=70+7x+10x+x^2$$
$$f(x)=x^2+17\mathbf{x}+70$$

Se considerarmos $x=3$, isto é, se o canteiro for ampliado em 3 m na largura e no comprimento, podemos calcular sua área da seguinte maneira:

$$f(3)=3^2+17\cdot 3+70=9+51+70=130$$

Portanto, nesse caso, a área do canteiro após a ampliação será 130 m^2.

A fórmula $f(x)=x^2+17x+70$ corresponde à lei da função que expressa a área da região após a ampliação. Esse é um exemplo de uma função denominada **função quadrática**.

Uma função $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, que a todo número $x\in\mathbb{R}$ associa o número ax^2+bx+c, com *a*, *b* e *c* reais, e $a\neq 0$, é denominada **função quadrática**.

$$x\rightarrow ax^2+bx+c$$
$$f(x)=ax^2+bx+c \text{ ou } y=ax^2+bx+c$$

Dizemos que *a*, *b* e *c* são os **coeficientes** da função.

As funções $f(x)=6x+1$, $g(x)=x^3$ e $h(x)=2^x-1$ são quadráticas? Por quê?

Não, pois *f*, *g* e *h* não são da forma $f(x)=ax^2+bx+c$, com *a*, *b* e *c* reais e $a\neq 0$.

Exemplos

- $f(x)=x^2+2x-7$, com $a=1$, $b=2$ e $c=-7$
- $g(x)=-x^2-9x$, com $a=-1$, $b=-9$ e $c=0$
- $h(x)=5x^2+1$, com $a=5$, $b=0$ e $c=1$
- $m(x)=-7x^2$, com $a=-7$, $b=0$ e $c=0$

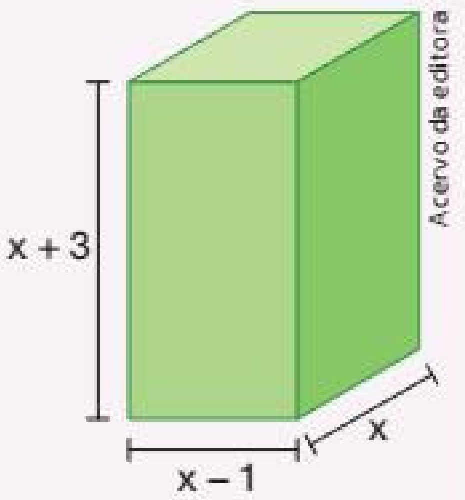
As funções quadráticas em que $b=0$ e $c=0$, $b=0$ e $c\neq 0$, ou $b\neq 0$ e $c=0$ são denominadas **incompletas**. Nos exemplos acima, *g*, *h* e *m* são funções quadráticas incompletas. Já as funções quadráticas **completas** são aquelas em que $b\neq 0$ e $c\neq 0$.

Atividades resolvidas

R1. Considere o prisma reto representado ao lado, cujas medidas estão indicadas em centímetros.

a) Escreva uma função *f* que determine a área da superfície desse prisma em função de *x*.

b) Calcule a área da superfície do prisma para $x=5$.



Acervo da editora

Resolução

a) A área da superfície do prisma é dada por:

$$f(x)=\underbrace{2\cdot(x-1)\cdot(x+3)+2\cdot(x+3)\cdot x}_{\text{área lateral}}+2\cdot\underbrace{(x-1)\cdot x}_{\text{área da base}}\Rightarrow \boxed{f(x)=6x^2+8x-6}$$

b) Para $x=5$, temos:

$$f(5)=6\cdot5^2+8\cdot5-6=184\rightarrow \boxed{184\text{ cm}^2}$$

De maneira geral, quando *x* representa uma medida de comprimento, área, volume etc., devemos restringir o domínio da função, pois não existem valores negativos nesses casos. Nessa atividade, por exemplo, devemos considerar os valores reais para os quais $x>1$.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

1. Quais das funções a seguir são quadráticas? b; c; e

a) $f(x)=2x^3+x^2-6x+3$

b) $f(x)=x^2-8$

c) $f(x)=-\frac{3}{2}x^2+4x+1$

d) $f(x)=2^x+5x-9$

e) $f(x)=x(7-x)$

f) $f(x)=(x+1{,}9)x^2-8{,}3x+6{,}5$

2. Determine os valores dos coeficientes *a*, *b* e *c* das funções quadráticas na forma $f(x)=ax^2+bx+c$.

a) $f(x)=x^2+x+2$ $a=1$, $b=1$ e $c=2$

b) $f(x)=-4x^2+2{,}5$ $a=-4$, $b=0$ e $c=2{,}5$

c) $f(x)=\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{7}x$ $a=\frac{1}{3}$, $b=-\frac{2}{7}$ e $c=0$

d) $f(x)=3x-1-9x^2$ $a=-9$, $b=3$ e $c=-1$

e) $f(x)=7{,}6x^2$ $a=7{,}6$, $b=0$ e $c=0$

f) $f(x)=2x\left(-x-\frac{5}{x}+6\right)$ $a=-2$, $b=12$ e $c=-10$

3. Dadas as funções $f(x)=2x^2-6x-4$ e $g(x)=-3x^2-5x+1$ calcule:

a) $f(3)$ -4

b) $f(-2)$ 16

c) $f(0)$ -4

d) $f(-0{,}2)$ $-2{,}72$

e) $g(1)$ -7

f) $g(-4)$ -27

g) $g(0)$ 1

h) $g\left(\frac{1}{2}\right)$ $-\frac{9}{4}$

4. Podemos obter a soma $s(n)$ dos *n* primeiros números naturais positivos por meio de uma função quadrática. Observe.

Na lousa, calcule com os alunos a soma dos dois, dos três, dos quatro e dos cinco primeiros números naturais positivos.

- $s(1)=1=\frac{1^2+1}{2}=\frac{2}{2}=1$
- $s(2)=1+2=\frac{2^2+2}{2}=\frac{6}{2}=3$
- $s(3)=1+2+3=\frac{3^2+3}{2}=\frac{12}{2}=6$
- $s(4)=1+2+3+4=\frac{4^2+4}{2}=\frac{20}{2}=10$

$\vdots$

- $s(n)=1+2+3+4+\ldots+n=\frac{n^2+n}{2}$

a) Qual é a soma dos 30 primeiros números naturais positivos? E dos 50 primeiros? 465; 1 275

b) É possível que a soma dos *n* primeiros números naturais positivos seja um número não natural? Por quê? Não, pois a adição de números naturais sempre resulta em outro número natural.

c) Qual é o domínio da função *s*? $D(s)=\mathbb{N}^*$

5. Considere a função $f(x)=\begin{cases}x^2-6, \text{ para } x\leq-1\\ 3x^2+x+2, \text{ para } -1<x<3.\\ -x-5, \text{ para } x\geq3\end{cases}$

Calcule:

a) $f(-2)$ -2

b) $f(-1)$ -5

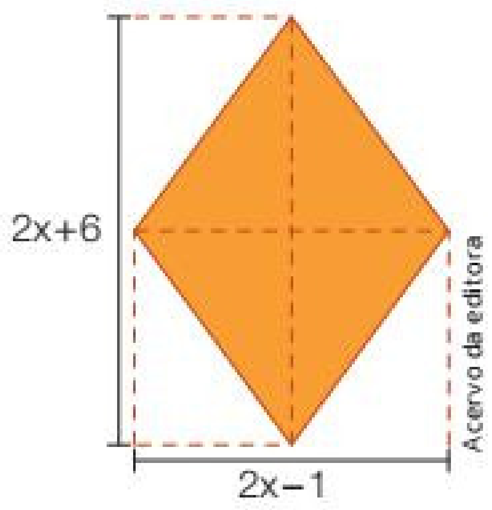
c) $f(0)$ 2

d) $f\left(\frac{2}{3}\right)$ 4

e) $f(3)$ -8

f) $f(4{,}5)$ $-9{,}5$

6. Considere o losango cujas medidas estão indicadas a seguir, em centímetros.



Acervo da editora

A área do losango pode ser calculada pela fórmula $S=\frac{D\cdot d}{2}$, em que *D* e *d* correspondem às medidas da diagonal maior e menor, respectivamente.

a) Determine a função $S(x)=ax^2+bx+c$, correspondente à área desse losango. $S(x)=2x^2+5x-3$

b) Qual é a área do losango para $x=3$? E para $x=8$? 30 cm²; 165 cm²

c) Faz sentido calcular a área do losango para $x=0{,}4$? Justifique. Resposta esperada: não, pois a diagonal menor do losango corresponderia a um valor negativo $(2x-1<0)$.

7. A partir de 2003, o campeonato brasileiro de futebol da série **A** passou a ser disputado no sistema de pontos corridos, no qual vence a equipe que somar o maior número de pontos ao final do campeonato. Nesse sistema, todas as equipes se enfrentam e cada uma joga duas vezes contra o mesmo adversário, em turno e returno.

A seguir é apresentado o número de partidas disputadas nesse sistema, em relação ao número de equipes participantes.

Número de equipes	Número de partidas
2	$2(2-1)=2$
3	$3(3-1)=6$
4	$4(4-1)=12$
5	$5(5-1)=20$
...	...
10	$10(10-1)=90$
...	...

a) Que função relaciona o número *p* de partidas em função do número *n* de equipes? $p(n)=n^2-n$

b) Sabendo que na série **A** do campeonato brasileiro de 2015 participaram 20 equipes, qual foi o número de partidas disputadas? Quantas partidas cada equipe disputou? 380 partidas; 38 partidas

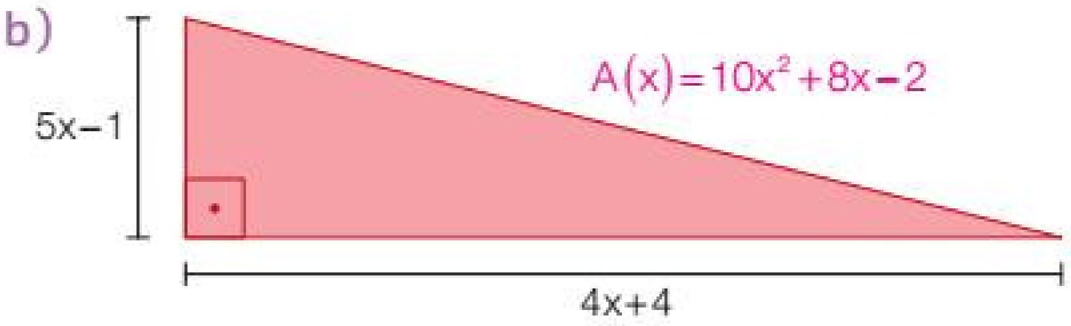
c) Se 25 equipes participarem de um campeonato nesse sistema, quantas partidas serão disputadas? 600 partidas

d) Se todas as equipes se enfrentam duas vezes, por que a função *p* não é definida por $p(n)=n^2$? Resposta esperada: dos $n\cdot n=n^2$ jogos, que representam todos contra todos, subtraímos *n*, que corresponderia aos jogos de “cada equipe contra ela mesma”.

8. Represente por meio de uma função quadrática a área *A* de cada figura, em função de *x*.

a) $A(x)=4x^2+20x$

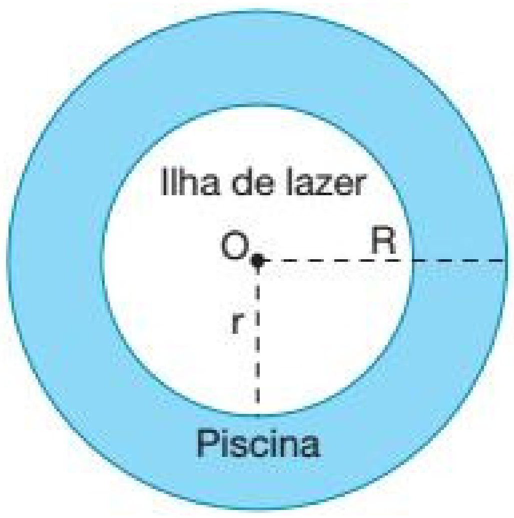
b)



$A(x)=10x^2+8x-2$

Ilustrações: Acervo da editora

9. (Enem-MEC) Num parque aquático existe uma piscina infantil na forma de um cilindro circular reto, de 1 m de profundidade e volume igual a 12 m³, cuja base tem raio *R* e centro *O*. Deseja-se construir uma ilha de lazer seca no interior dessa piscina, também na forma de um cilindro circular reto, cuja base estará no fundo da piscina e com centro da base coincidindo com o centro do fundo da piscina, conforme a figura. O raio da ilha de lazer será *r*. Deseja-se que após a construção dessa ilha, o espaço destinado à água na piscina tenha um volume de, no mínimo, 4 m³.



Acervo da editora

Considere 3 como valor aproximado para π.

Para satisfazer as condições dadas, o raio máximo da ilha de lazer *r*, em metros, estará mais próximo de: a

a) 1,6
b) 1,7
c) 2,0
d) 3,0
e) 3,8

Lembre-se de que o volume de um cilindro reto de altura *h* e raio de base *r* é dado por $V=\pi r^2 h$.

10. Para determinarmos o número *d* de diagonais de um polígono convexo de *n* lados, podemos utilizar a função quadrática $d(n)=\frac{n^2-3n}{2}$.

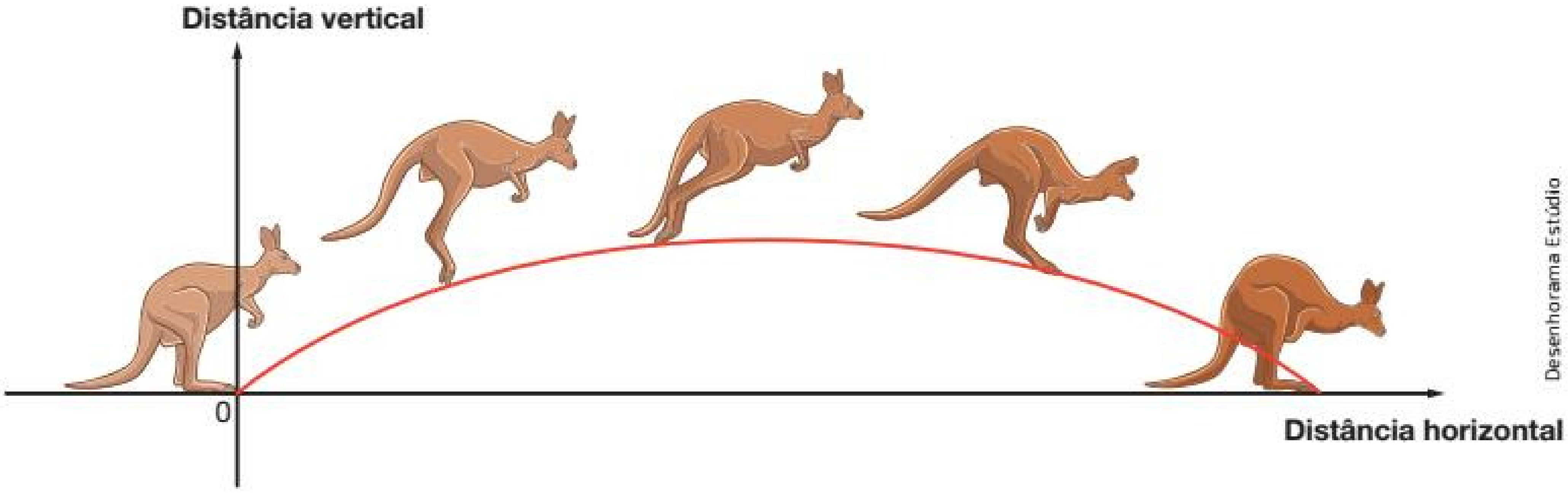
a) Quantas diagonais tem um pentágono convexo? E um polígono convexo de 20 lados? 5 diagonais; 170 diagonais

b) Quantos lados possui o polígono convexo que tem 54 diagonais? E o que tem 119 diagonais? 12 lados; 17 lados

c) Existe algum polígono convexo que possua 13 diagonais? Justifique. Não, pois, para o polígono existir o número *n* de lados deve ser inteiro e maior que 2.

Gráfico de uma função quadrática

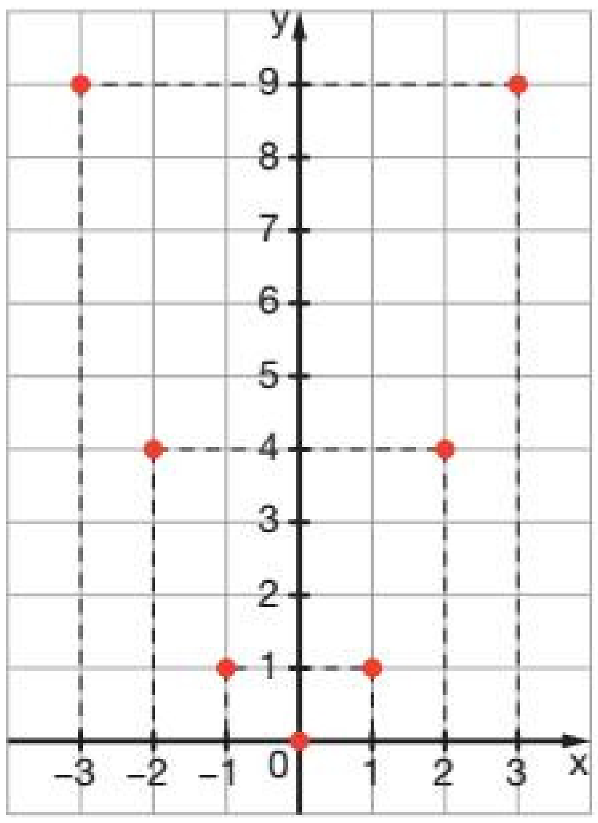
Nas páginas **102** e **103**, estudamos que o canguru move-se por meio de saltos. O deslocamento do canguru no salto descreve uma trajetória que se assemelha a uma curva correspondente ao gráfico de uma função quadrática.



Desenhorama Estúdio

De maneira semelhante à função afim, podemos esboçar o gráfico de uma função quadrática utilizando a ideia de representar pares ordenados em um plano cartesiano. Veja a seguir a construção do esboço do gráfico de $f(x)=x^2$.

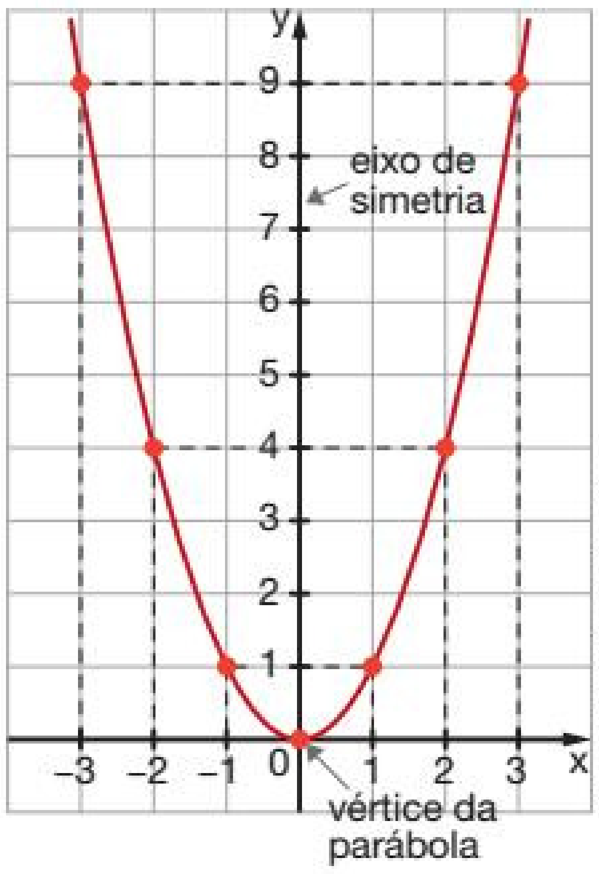
x	$f(x)=x^2$	(x, y)
-3	$f(-3)=(-3)^2=9$	$(-3, 9)$
-2	$f(-2)=(-2)^2=4$	$(-2, 4)$
-1	$f(-1)=(-1)^2=1$	$(-1, 1)$
0	$f(0)=0^2=0$	$(0, 0)$
1	$f(1)=1^2=1$	$(1, 1)$
2	$f(2)=2^2=4$	$(2, 4)$
3	$f(3)=3^2=9$	$(3, 9)$



Note que determinamos apenas alguns pares ordenados que satisfazem essa função. No entanto, como o domínio e o contradomínio de *f* é o conjunto dos números reais, podemos atribuir infinitos valores para *x*, obtendo valores para *y* e, consequentemente, infinitos pares ordenados (x, y).

O gráfico da função é dado pela representação de todos esses pontos no plano cartesiano. Porém, como é impossível calcular as coordenadas de todos eles, calculamos as coordenadas de alguns e traçamos o esboço do gráfico da função.

O gráfico de *f* é uma curva denominada **parábola**. Toda parábola possui um **eixo de simetria**, que a intersecta em um único ponto, denominado **vértice da parábola**. No caso da função $f(x)=x^2$, seu eixo de simetria coincide com o eixo *y* e seu vértice possui coordenadas $(0, 0)$.



Ilustrações: Acervo da editora

Se necessário, relembre os alunos o que é um eixo de simetria, assunto estudado no Ensino Fundamental.

Escreva as coordenadas de dois pontos simétricos em relação ao eixo de simetria que satisfaçam à função $f(x)=x^2$.

Algumas possíveis respostas: $(-1, 1)$ e $(1, 1)$; $(-2, 4)$ e $(2, 4)$.

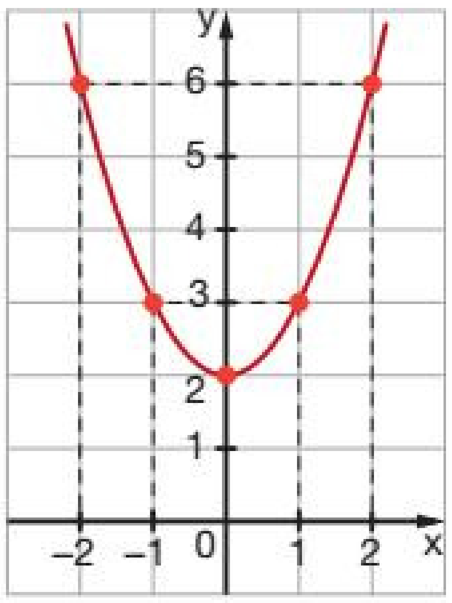
Coeficientes de uma função quadrática

Analisando os coeficientes de uma função quadrática, obtemos informações que nos auxiliam a esboçar o gráfico dessa função.

Observando o coeficiente *a* de uma função quadrática, podemos verificar se a parábola que a representa possui concavidade voltada para cima ou para baixo. Veja o gráfico e algumas informações acerca das funções *f* e *g*.

- $f(x)=x^2+2$

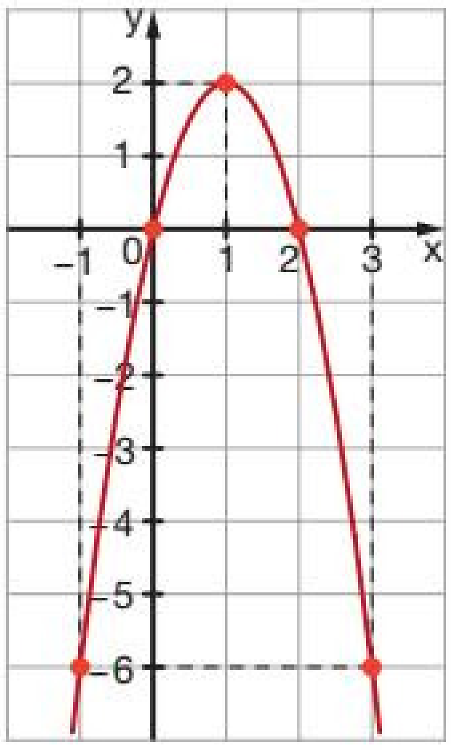
x	(x, y)
−2	$(-2, 6)$
−1	$(-1, 3)$
0	$(0, 2)$
1	$(1, 3)$
2	$(2, 6)$



Note que a parábola tem concavidade voltada para cima e o coeficiente *a* é maior que zero $(a>0)$.

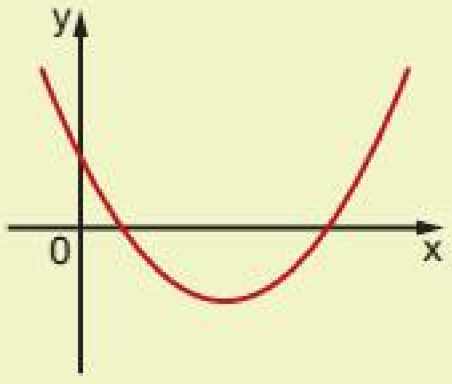
- $g(x)=-2x^2+4x$

x	(x, y)
−1	$(-1, -6)$
0	$(0, 0)$
1	$(1, 2)$
2	$(2, 0)$
3	$(3, -6)$

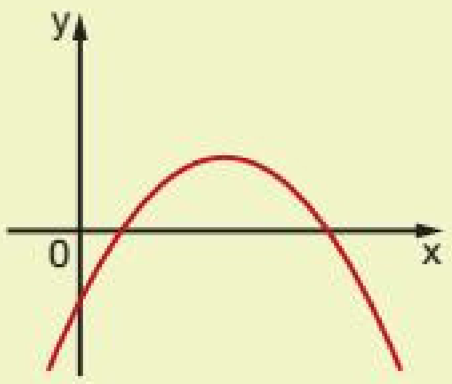


Note que a parábola tem concavidade voltada para baixo e o coeficiente *a* é menor que zero $(a<0)$.

Em uma função quadrática, se o **coeficiente *a* for maior que zero** $(a>0)$, então a parábola terá a **concavidade voltada para cima**.



Em uma função quadrática, se o **coeficiente *a* for menor que zero** $(a<0)$, então a parábola terá a **concavidade voltada para baixo**.



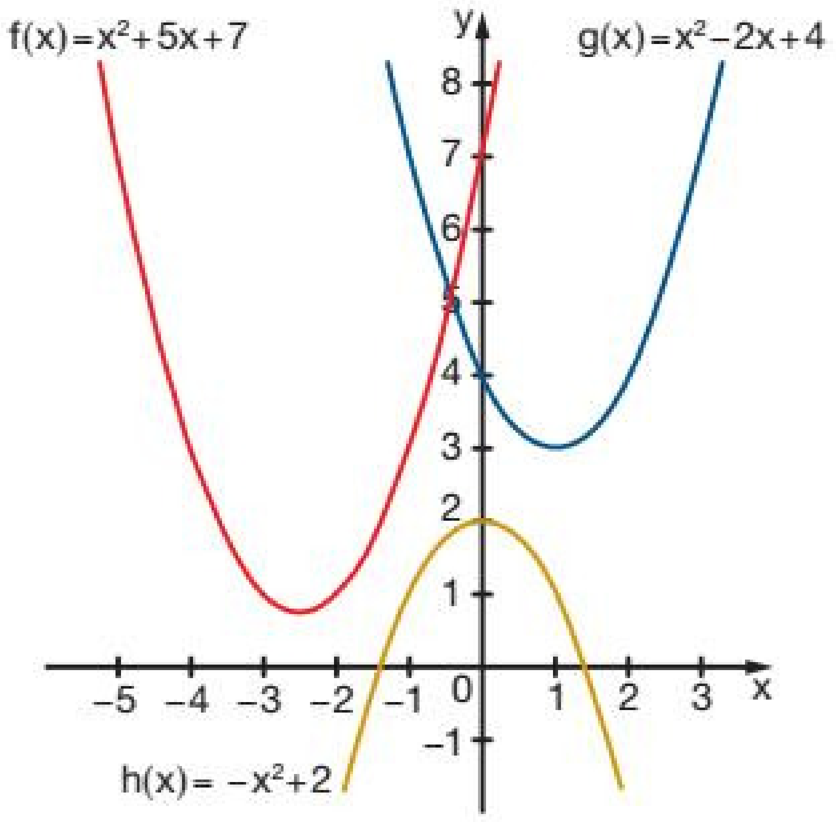
Ilustrações: Acervo da editora

O gráfico que pode ser associado à trajetória do salto do canguru é de uma função quadrática com $a<0$.

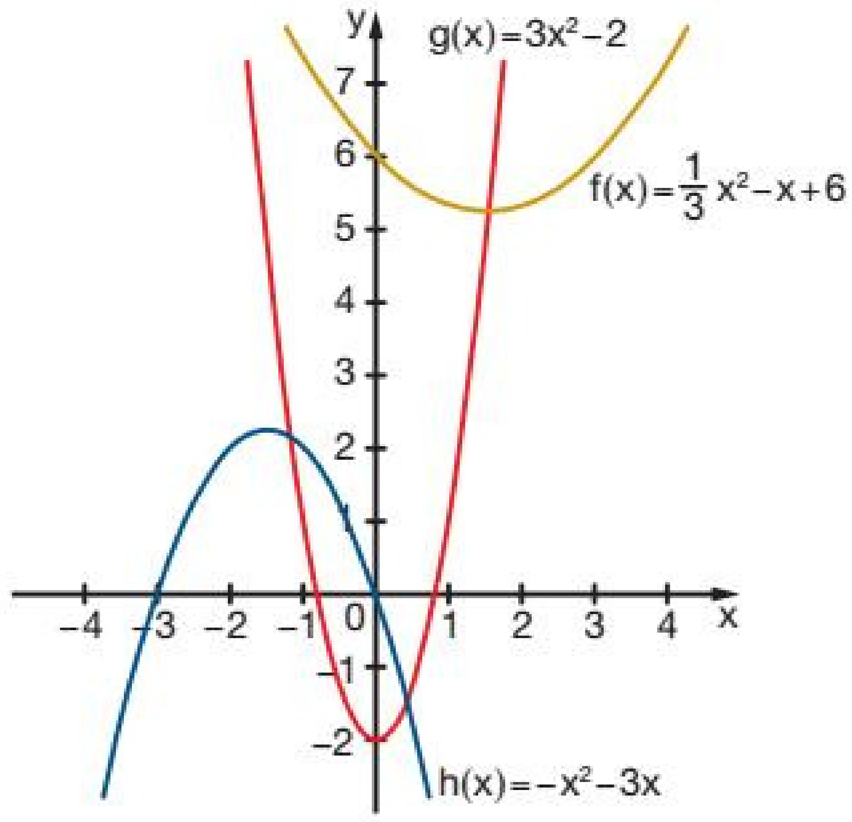
Analisando o coeficiente *a* de uma função quadrática, também podemos obter informações a respeito da abertura da parábola.

Funções quadráticas que têm coeficiente *a* com valores absolutos iguais estão relacionadas a parábolas com aberturas iguais. Aquelas que possuem diferentes valores absolutos do coeficiente *a* estão relacionadas a parábolas com aberturas diferentes.

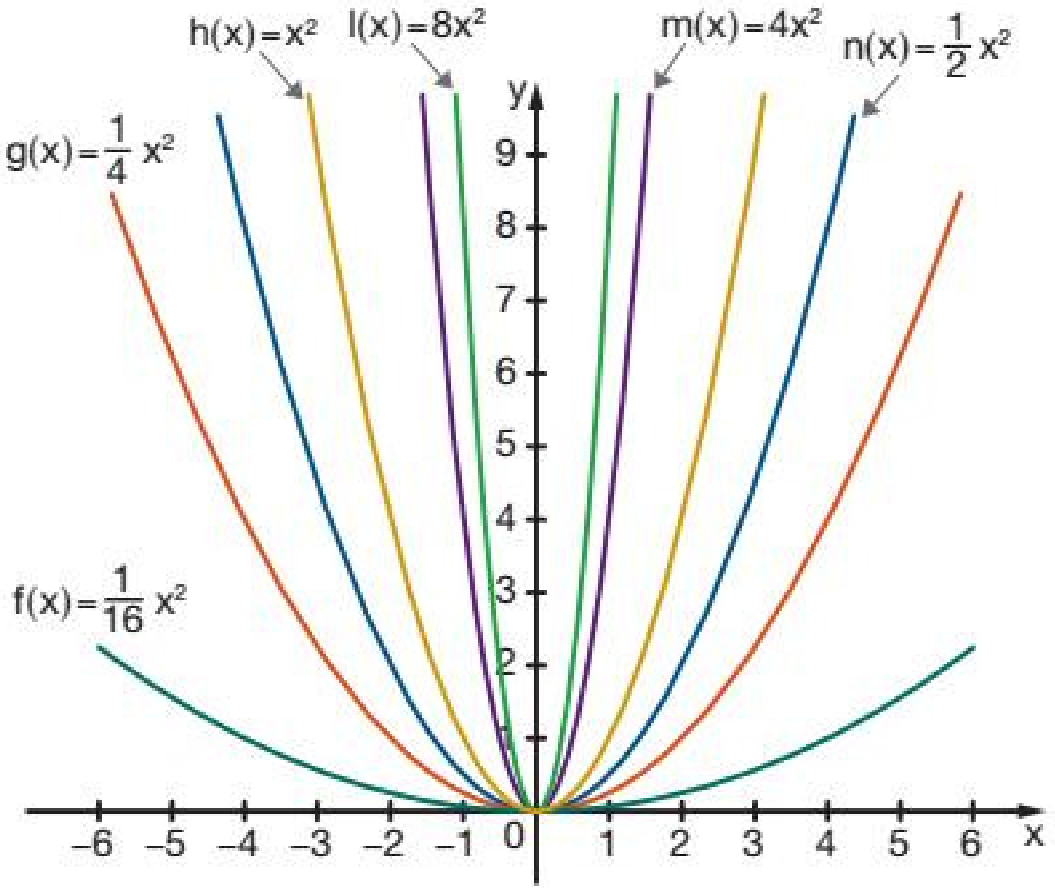
- Note que, para as funções abaixo, o valor absoluto do coeficiente *a* é o mesmo, ou seja, $|a| = 1$. Nesse caso, as parábolas relacionadas possuem mesma abertura.



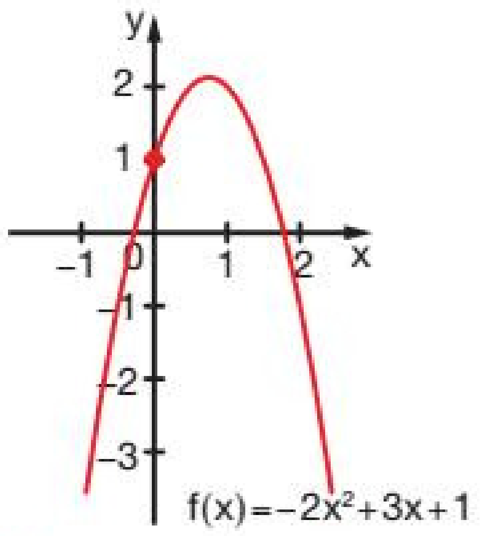
- Note que, para as funções abaixo, o valor absoluto dos coeficientes *a* são diferentes. Nesse caso, as parábolas relacionadas possuem aberturas diferentes.



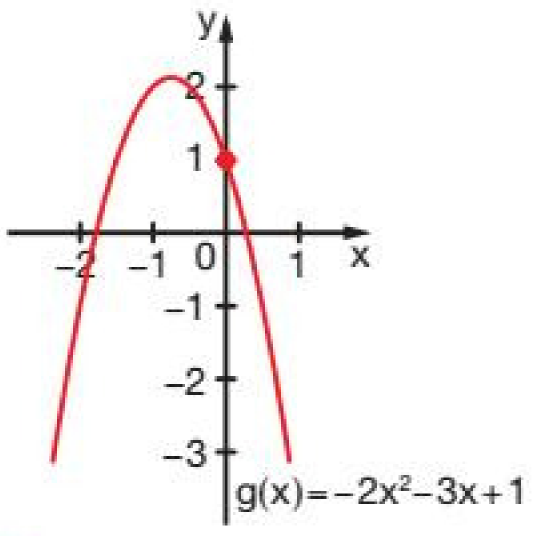
Podemos ainda verificar que, quanto menor for o valor absoluto do coeficiente *a* de uma função quadrática, maior será a abertura da parábola relacionada a ela. Observe.



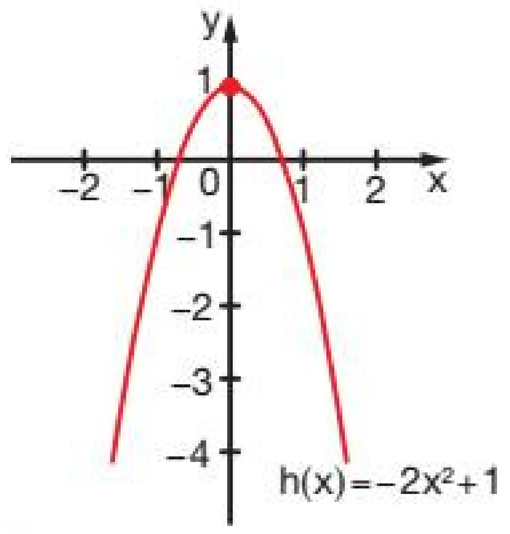
O coeficiente *b* de uma função quadrática indica se a parábola relacionada a ela intersecta o eixo *y* no ramo crescente ou no ramo decrescente. Observe os gráficos das funções *f*, *g* e *h*.



- A parábola intersecta o eixo *y* no ramo crescente e $b>0$.



- A parábola intersecta o eixo *y* no ramo decrescente e $b<0$.

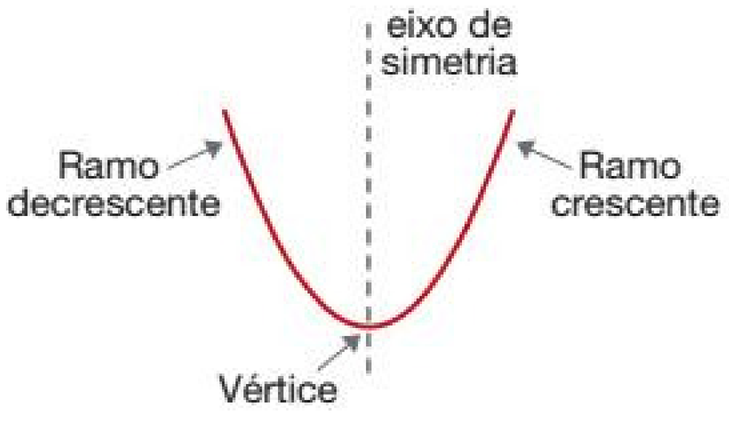


- A parábola intersecta o eixo *y* no vértice e $b=0$.

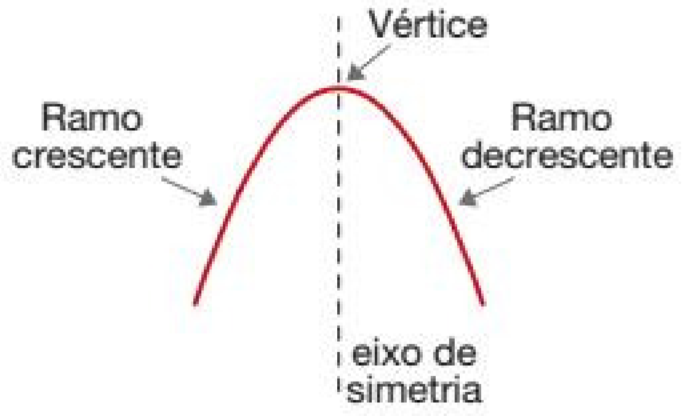
Ilustrações: Acervo da editora

Se uma função quadrática é crescente à direita de seu vértice, então ela será decrescente à esquerda desse ponto, e vice-versa, dependendo da concavidade da parábola.

- $a>0$

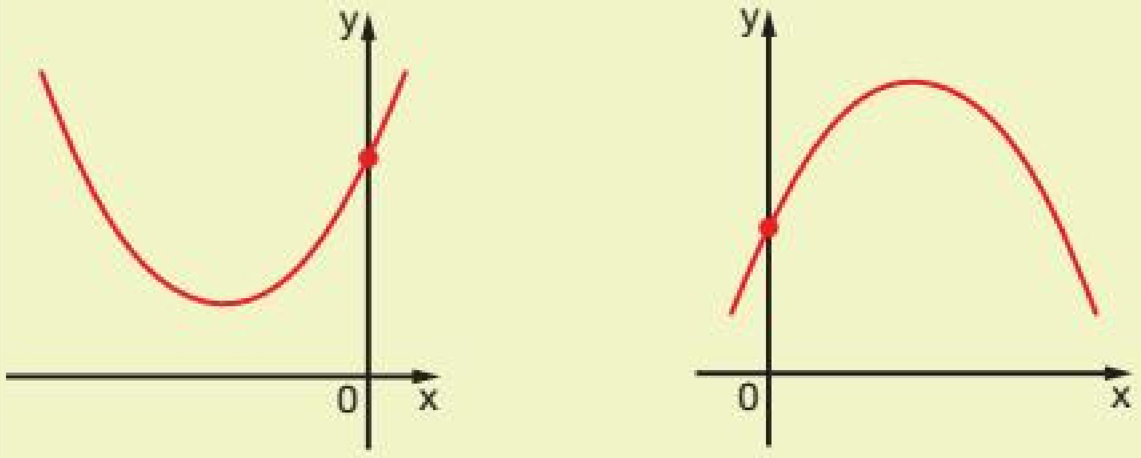


- $a<0$

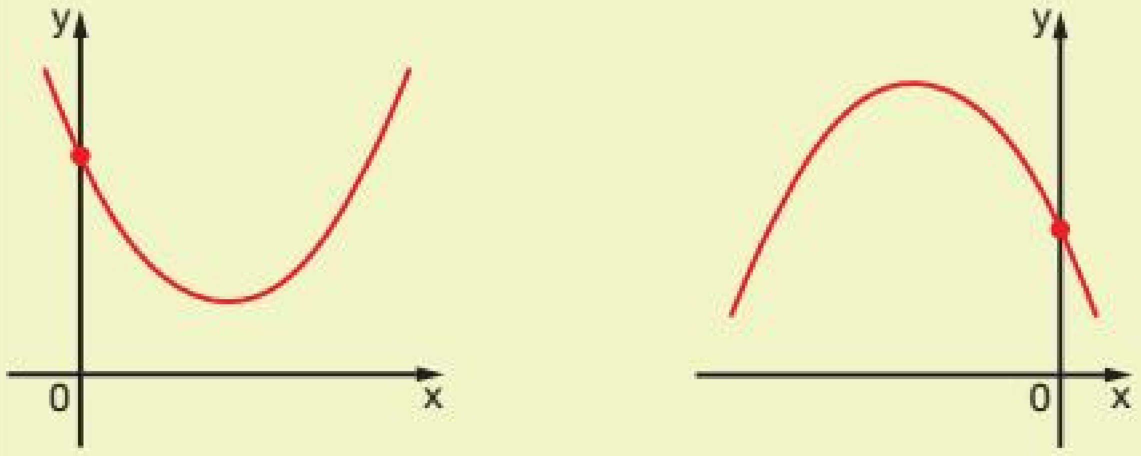


O gráfico de uma função quadrática $f(x)=ax^2+bx+c$ intersecta o eixo *y*:

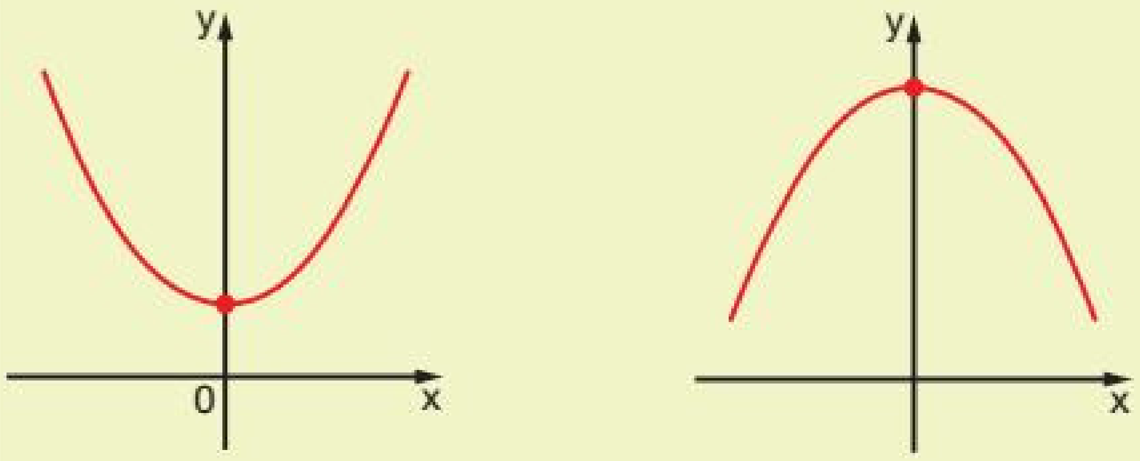
- no ramo crescente se $b>0$



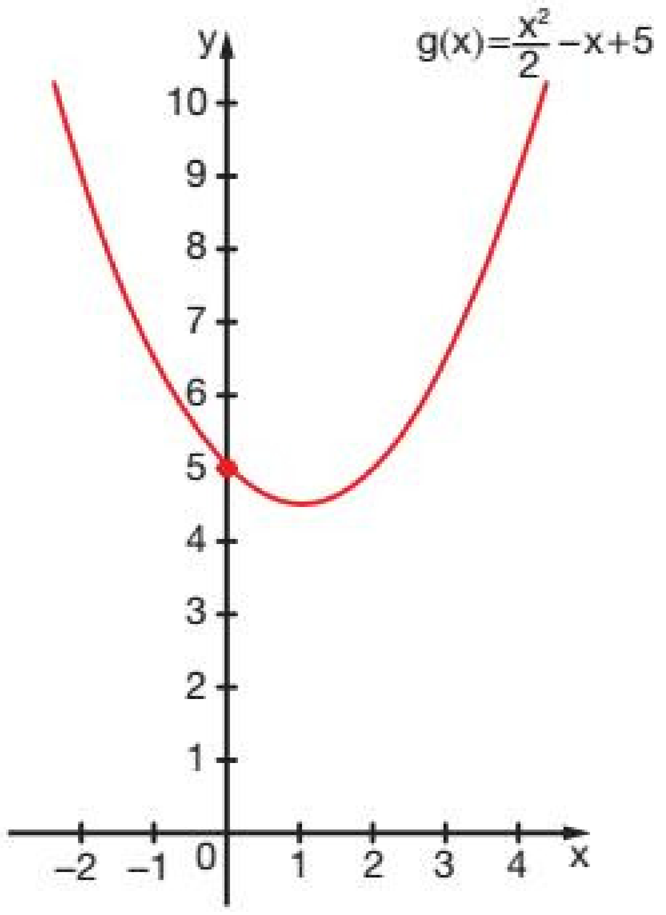
- no ramo decrescente se $b<0$



- no vértice se $b=0$



O coeficiente *c* de uma função quadrática corresponde à ordenada do ponto em que a parábola relacionada à função intersecta o eixo *y*. Por exemplo, na função $g(x)=\frac{1}{2}x^2-x+5$, temos $c=5$, e o gráfico intersecta o eixo *y* no ponto de coordenadas $(0, 5)$.



Ilustrações: Acervo da editora

O gráfico de uma função intersecta o eixo y quando $x=0$. No caso de uma função quadrática:

$f(x)=ax^2+bx+c$

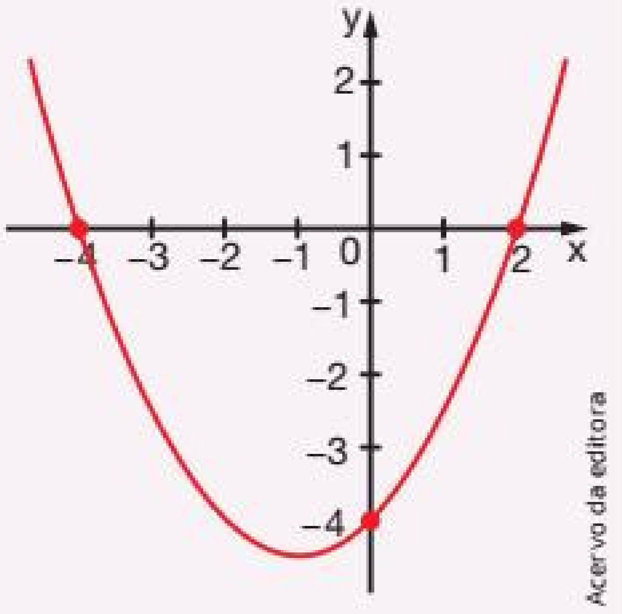
$f(0)=a\cdot 0^2+b\cdot 0+c$

$f(0)=c$

O gráfico de uma função quadrática $f(x)=ax^2+bx+c$ intersecta o eixo *y* no ponto de coordenadas $(0, c)$.

Atividades resolvidas

R2. Escreva a lei da função quadrática correspondente ao gráfico.



Resolução

Como a parábola intersecta o eixo *y* na ordenada −4, temos $c=-4$.

- Substituindo os pontos de coordenadas $(-4, 0)$ e $(2,0)$ em $f(x)=ax^2+bx-4$, temos:

$$\begin{cases} f(-4)=0 \\ f(2)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\cdot(-4)^2+b\cdot(-4)-4=0 \\ a\cdot 2^2+b\cdot 2-4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16a-4b=4 \\ 4a+2b=4 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtido pelo método da adição, temos:

$$\begin{cases} 16a-4b=4 \\ 4a+2b=4 \quad (\cdot 2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16a-4b=4 \\ 8a+4b=8 \end{cases}$$

$$24a=12 \Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

$$4a+2b=4 \Rightarrow 4\cdot\frac{1}{2}+2b=4 \Rightarrow b=1$$

Portanto, a lei da função é $f(x)=\frac{1}{2}x^2+x-4$.

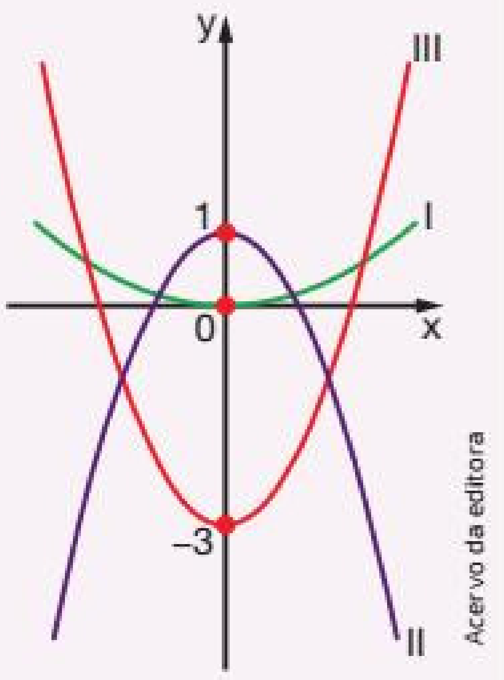
R3. Qual é o valor de *k*, de modo que o gráfico de $f(x)=(k-2)x^2+2x-3$ passe pelo ponto de coordenadas $(1, 4)$?

Resolução

Substituindo o ponto de coordenadas $(1, 4)$ em $f(x)=(k-2)x^2+2x-3$, temos:

$$f(1)=4 \Rightarrow (k-2)\cdot 1^2+2\cdot 1-3=4 \Rightarrow k-2+2-3=4 \Rightarrow k=7$$

R4. Ao lado estão representados os gráficos das funções $f(x)=x^2-3$, $g(x)=\frac{1}{6}x^2$ e $h(x)=-x^2+1$ em um mesmo plano cartesiano. Relacione cada função à sua respectiva parábola.



Resolução

Observando os gráficos, notamos que a parábola:

- **I** tem concavidade voltada para cima e intersecta o eixo *y* no ponto de coordenadas $(0,0)$, ou seja, $a>0$ e $c=0$. Portanto, *g* está representada pela parábola **I**.
- **II** tem concavidade voltada para baixo e intersecta o eixo *y* no ponto de coordenadas $(0,1)$, ou seja, $a<0$ e $c=1$. Portanto, *h* está representada pela parábola **II**.
- **III** tem concavidade voltada para cima e intersecta o eixo *y* no ponto de coordenadas $(0,-3)$, ou seja, $a>0$ e $c=-3$. Portanto, *f* está representada pela parábola **III**.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

Diga aos alunos que em alguns gráficos apresentados as escalas dos eixos são diferentes entre si.

11. Dentre os pontos a seguir, quais pertencem ao gráfico de $g(x)=-2x^2+5x+3$? *B, C, E e F*

- $A(-4,-1)$
- $B(1,6)$
- $C(3,0)$
- $D(-3,7)$
- $E(0,3)$
- $F\left(\frac{1}{2},5\right)$

Contexto Queda livre


Autor desconhecido. c. 1907. Gravura. Coleção particular. Foto: Nicku/Shutterstock.com

Galileu Galilei

12. Ao observar movimentos corriqueiros em nosso dia a dia, cientistas procuram determinar padrões e expressar os resultados em forma matemática. Foi desta maneira que o físico Galileu Galilei (1564-1642), no século XVII, determinou, por meio de experimentos, as leis que regem a queda livre de corpos. Essa descoberta ia contra ao que a maioria acreditava na época, quando tinham como base os ensinamentos do filósofo grego Aristóteles (384-322 a.C.), o qual alegava que corpos mais pesados caíam mais rapidamente que corpos mais leves.

Em um de seus experimentos, Galileu concluiu que dois corpos de massas diferentes, quando abandonados de uma mesma altura e desprezando a resistência do ar, alcançam o solo no mesmo instante. Acredita-se que esse teste foi realizado na torre inclinada de Pisa, cidade natal de Galileu, enquanto ele lançava os objetos de cima da torre seus alunos aguardavam embaixo, observando se os objetos chegariam ao mesmo tempo ao chão.

Galileu também percebeu que a distância percorrida de um corpo em repouso é proporcional ao quadrado do tempo de queda; essa relação ficou conhecida como lei dos corpos em queda e pode ser descrita com a seguinte expressão:

$$d = k \cdot t^2$$

Nela, *d* representa a distância percorrida pelo objeto, *t* o tempo de queda e *k* a constante de proporcionalidade.

Fontes de pesquisa: GUERRA, Andréia et al. **Galileu e o nascimento da ciência moderna.** São Paulo: Atual, 1997.
TREFIL James; HAZEN, M. Robert. **Física viva: uma introdução à física conceitual.** Tradução Ronaldo Sérgio de Biasi. Rio de Janeiro: LTC, 2006. v. 1.

Fotomontagem de rocha caindo de um penhasco.

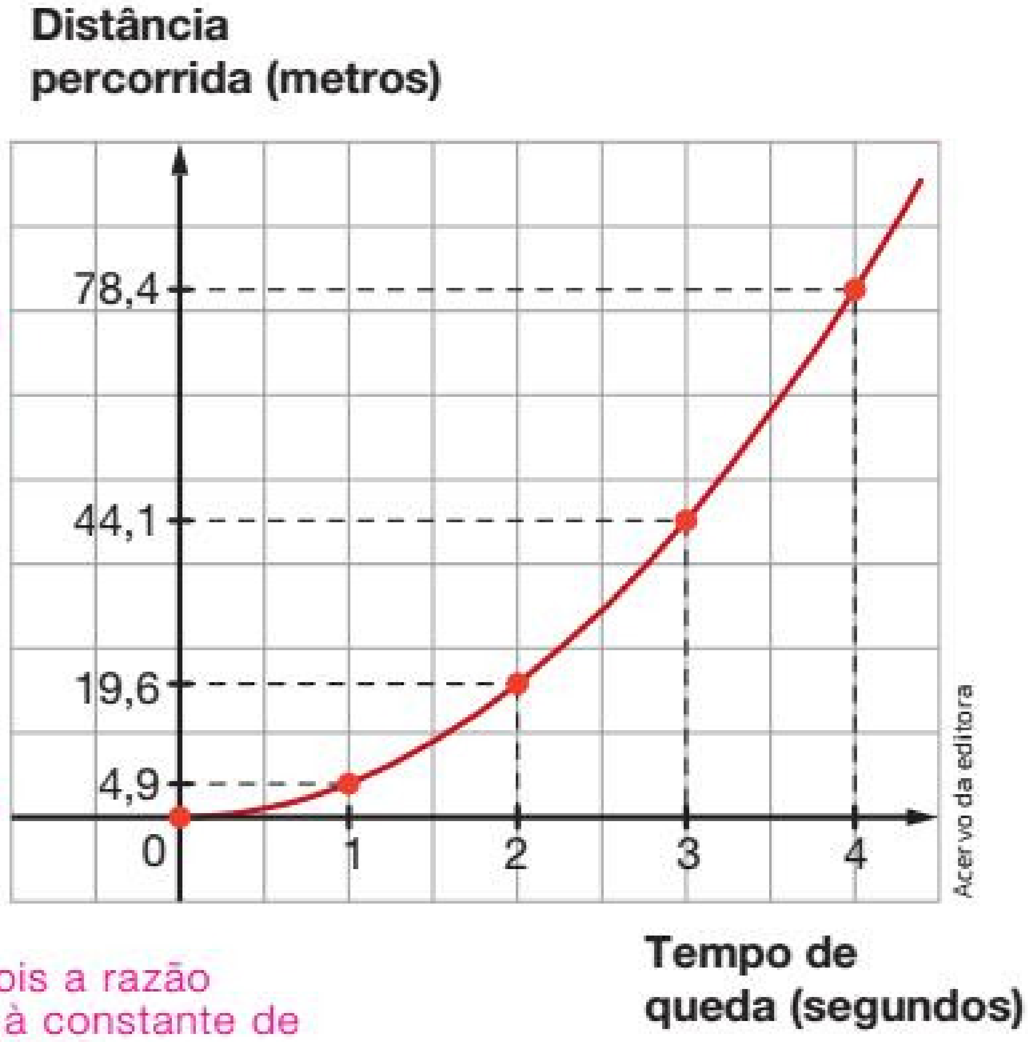
Fotomontagem de Eduardo C. S. formada pela imagem Galyna Andrushko/Shutterstock.com

Observe a seguir a relação entre o tempo de queda e a distância percorrida por um corpo, também representada no esquema ao lado.

Tempo de queda (segundos)	Distância percorrida (metros)
0	0
1	4,9
2	19,6
3	44,1
4	78,4

As medidas executadas de um objeto em queda livre podem ser representadas por meio de um gráfico. A distância percorrida pelo objeto (eixo vertical) é descrita em função do tempo de queda (eixo horizontal).

Verifique se os alunos perceberam que a curva representada no gráfico é um ramo de parábola.



Acervo da editora

a) Resposta esperada: todos os resultados são iguais a 4,9 m/s. Isso ocorre por causa da lei dos corpos em queda, pois a razão corresponde à constante de proporcionalidade.

De acordo com as informações apresentadas, resolva as questões.

a) Para os momentos representados no esquema, calcule a razão entre a distância percorrida e o quadrado do tempo de queda do objeto após iniciar o movimento. Que regularidade você pode observar nos resultados obtidos? Por que isso ocorreu?

b) Escreva a lei da função que relaciona a distância *d* percorrida pelo objeto apresentado de acordo com o tempo *t* de queda. $d(t) = 4,9 \cdot t^2$

c) Qual a distância percorrida por esse corpo em queda livre no instante 7 s? 240,1 m

d) Quantos segundos, aproximadamente, o corpo esteve em queda livre ao percorrer 60 m? 3,5 s

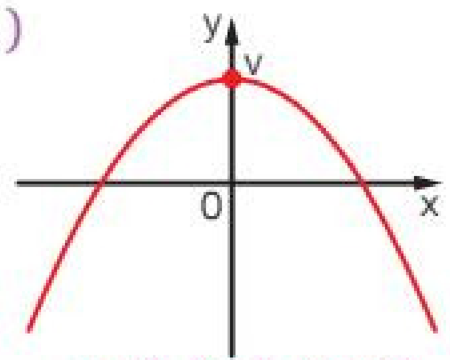
e) Pesquise e cite outros fenômenos da natureza que podem ser descritos por fórmulas matemáticas. Algumas possíveis respostas: temperatura, velocidade do vento, pressão.

13. Determine o valor de *p* na função quadrática $h(x)=4x^2+(p+3)x-7$, de modo que seu gráfico passe pelo ponto de coordenadas $(2, 5)$. $p=-5$

14. Esboce o gráfico da função $f(x)=x^2-2x-3$ e determine as coordenadas do ponto em que o eixo de simetria intersecta a parábola. $(1,-4)$

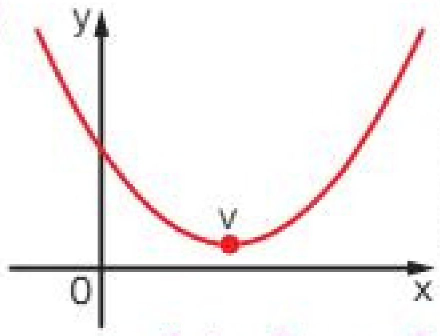
15. Cada gráfico representa uma função quadrática $f(x)=ax^2+bx+c$. Determine se o coeficiente *a*, *b* e *c* de cada uma dessas funções é positivo, negativo ou nulo.

a)



$a<0$, $b=0$ e $c>0$

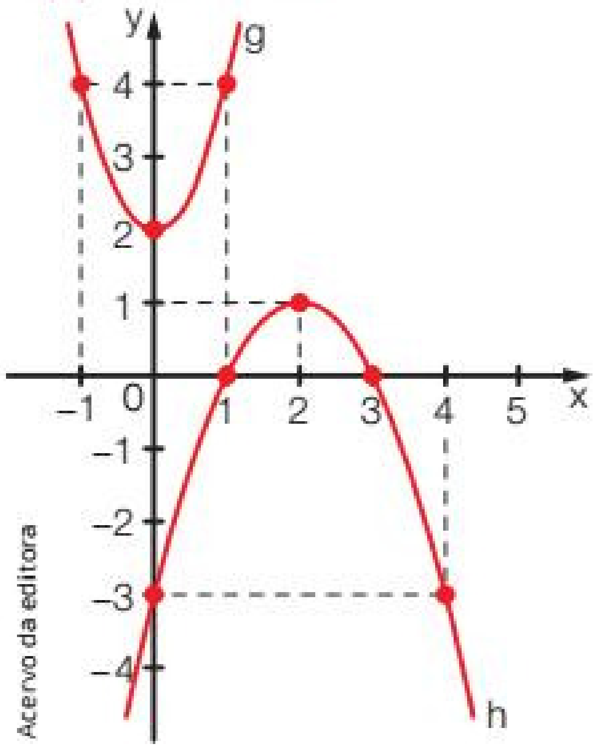
b)



$a>0$, $b<0$ e $c>0$

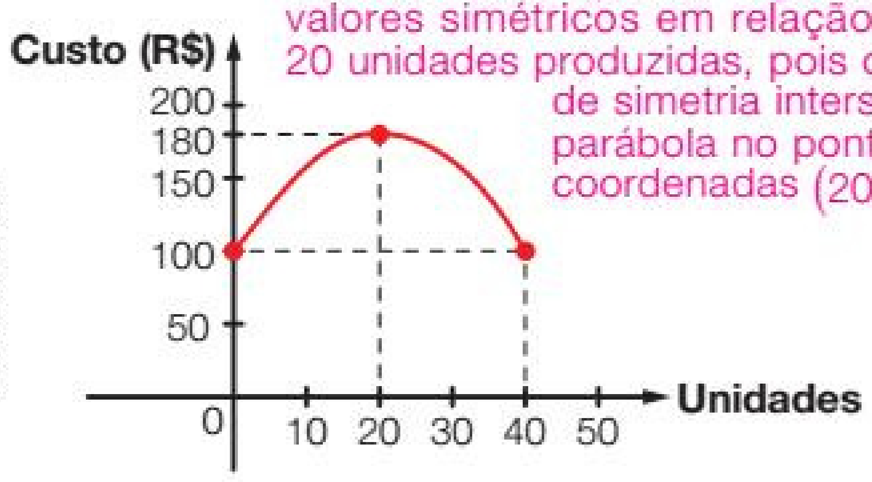
Ilustrações: Acervo da editora

16. Determine a lei das funções quadráticas *g* e *h*.
$g(x)=2x^2+2$; $h(x)=-x^2+4x-3$



Acervo da editora

17. Uma pequena empresa calcula o custo *C*, em reais, para produzir *n* unidades de determinado produto a partir da função $C(n)=-\frac{1}{5}n^2+8n+100$, com $0 \leq n \leq 40$. b) Resposta esperada: os valores do custo de produção são iguais para valores simétricos em relação a 20 unidades produzidas, pois o eixo de simetria intersecta a parábola no ponto de coordenadas $(20, 180)$.



Acervo da editora

a) Qual será o custo para produzir:
- 5 unidades? E 35 unidades? R$ 135,00; R$ 135,00
- 10 unidades? E 30 unidades? R$ 160,00; R$ 160,00
- 15 unidades? E 25 unidades? R$ 175,00; R$ 175,00

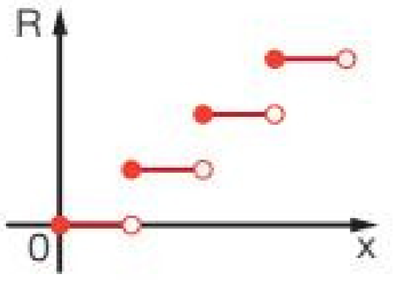
b) Quais regularidades podem ser observadas nos resultados obtidos no item **a**?

c) Nessa empresa, é possível que o custo seja igual a R$ 200,00? Por quê? Não, pois não existe valor de *n* tal que $C(n)=200$.

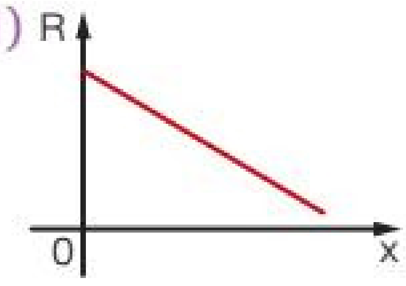
18. (Enem-MEC) Um boato tem um público-alvo e alastra-se com determinada rapidez. Em geral, essa rapidez é diretamente proporcional ao número de pessoas desse público que conhecem o boato e diretamente proporcional também ao número de pessoas que não o conhecem. Em outras palavras, sendo *R* a rapidez de propagação, *P* o público-alvo e *x* o número de pessoas que conhecem o boato, tem-se $R(x)=k \cdot x \cdot (P-x)$, em que *k* é uma constante positiva característica do boato.

O gráfico cartesiano que melhor representa a função $R(x)$, para *x* real, é: e

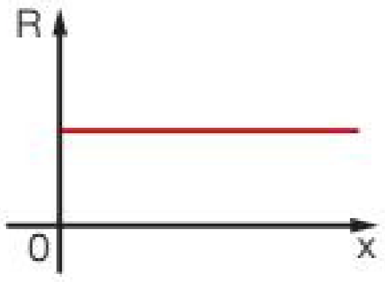
a)



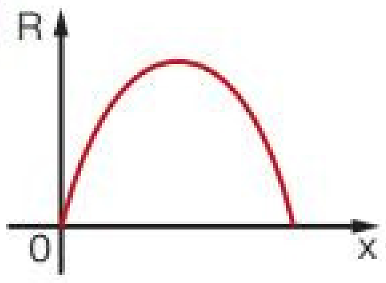
d)



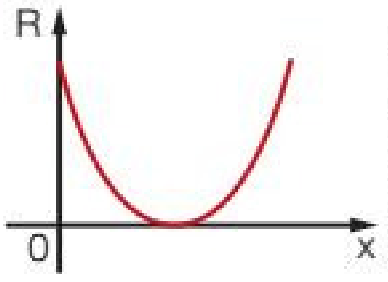
b)



e)



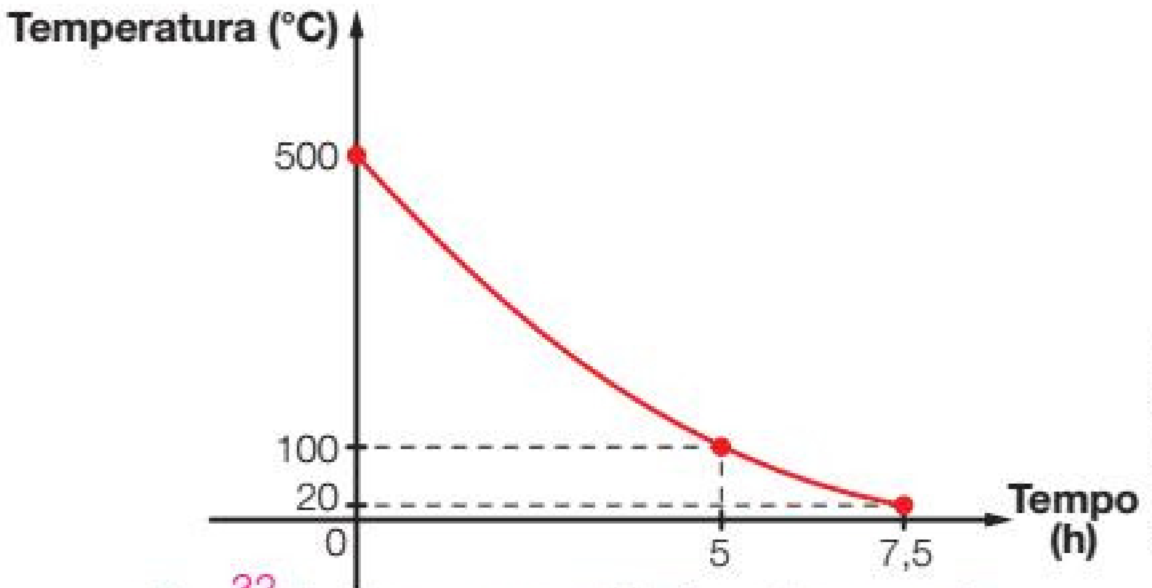
c)



Ilustrações: Acervo da editora

19. Uma vantagem do forno a lenha nas pizzarias é a temperatura, em torno de 550 °C, que é mais alta que a do forno a gás tradicional, cuja temperatura média máxima é de cerca de 300 °C. Devido à alta temperatura do forno a lenha, a *pizza* assa mais rapidamente, o que deixa a massa crocante por fora e macia por dentro.

Em certa pizzaria, após o uso, o forno a lenha vai reduzindo sua temperatura até chegar à temperatura ambiente de 20 °C, segundo a lei da função quadrática representada no gráfico.



Acervo da editora

$t(h)=\frac{32}{5}h^2-112h+500$; $D(t)=\{h \in \mathbb{R} \mid 0 \leq h \leq 7{,}5\}$

a) Determine a lei e o domínio dessa função.

b) A partir das informações apresentadas, elabore uma questão e troque-a com um colega. Em seguida, verifiquem se as respostas obtidas estão corretas. Resposta pessoal.

Zeros de uma função quadrática

Estudamos anteriormente que o zero de uma função *f* é todo valor *x* de seu domínio tal que $f(x)=0$ e que, graficamente, os zeros correspondem às abscissas dos pontos em que o gráfico intersecta o eixo *x*.

Para determinarmos os zeros de uma função quadrática $f(x)=ax^2+bx+c$, fazemos $f(x)=0$ e resolvemos a equação do 2º grau $ax^2+bx+c=0$.

Essa equação pode ser resolvida utilizando a fórmula:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}\text{, na qual } \Delta=b^2-4ac$$

Lembre aos alunos que essa é a fórmula resolutiva de uma equação do 2º grau, conteúdo geralmente estudado nos últimos anos do Ensino Fundamental.

De acordo com os coeficientes da função, temos três possíveis casos para os valores de Δ.

- $\Delta>0$

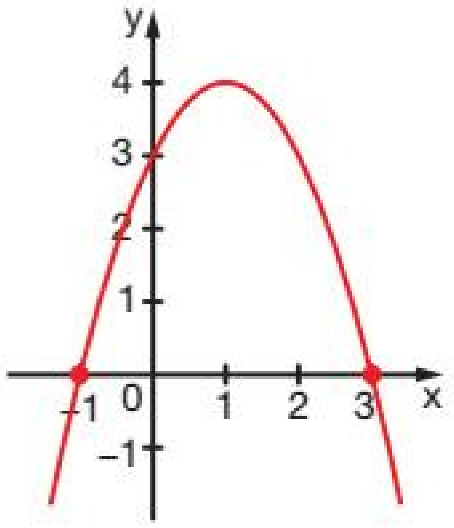
  Para determinarmos os zeros da função $f(x)=-x^2+2x+3$, resolvemos a equação $f(x)=0$.

  $f(x)=0\Rightarrow -x^2+2x+3=0$

  $a=-1$; $b=2$; $c=3$

  $\Delta=2^2-4\cdot(-1)\cdot 3=4+12=16$

  $$x=\frac{-2\pm\sqrt{16}}{2\cdot(-1)}=\frac{-2\pm 4}{-2}\left\langle\begin{array}{l} x_1=\dfrac{-2+4}{-2}=-1 \\ x_2=\dfrac{-2-4}{-2}=3 \end{array}\right.$$



  Portanto, -1 e 3 são os zeros de *f*, e $(-1, 0)$ e $(3, 0)$ são as coordenadas dos pontos em que a parábola relacionada a essa função intersecta o eixo *x*.

Quando $\Delta>0$, temos que:

- a equação $ax^2+bx+c=0$ possui duas raízes reais e distintas: $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$;
- a função $f(x)=ax^2+bx+c$ possui dois zeros reais e distintos;
- a parábola relacionada a *f* intersecta o eixo *x* nos pontos de coordenadas $(x_1, 0)$ e $(x_2, 0)$.

- $\Delta=0$

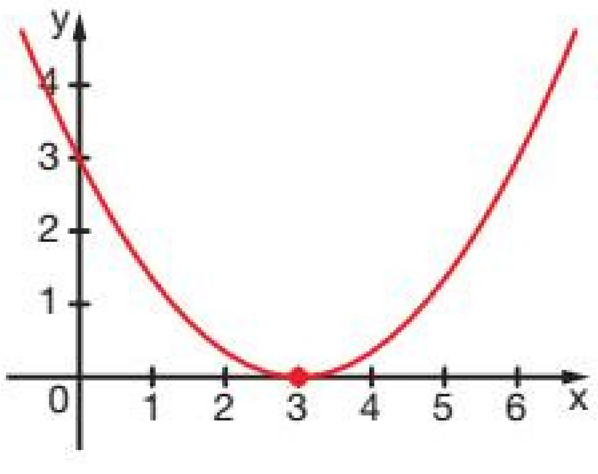
  Para determinarmos os zeros da função $f(x)=\frac{1}{3}x^2-2x+3$, resolvemos a equação $f(x)=0$.

  $f(x)=0\Rightarrow \frac{1}{3}x^2-2x+3=0$

  $a=\frac{1}{3}$; $b=-2$; $c=3$

  $\Delta=(-2)^2-4\cdot\frac{1}{3}\cdot 3=4-4=0$

  $$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{0}}{2\cdot\dfrac{1}{3}}=\frac{2\pm 0}{\dfrac{2}{3}}\left\langle\begin{array}{l} x_1=\dfrac{2}{\dfrac{2}{3}}=3 \\ x_2=\dfrac{2}{\dfrac{2}{3}}=3 \end{array}\right.$$



Ilustrações: Acervo da editora

  Portanto, 3 é o zero de *f*, e $(3, 0)$ são as coordenadas do ponto em que a parábola relacionada a essa função intersecta o eixo *x*.

Na fórmula $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ para $\Delta=0$, temos que:

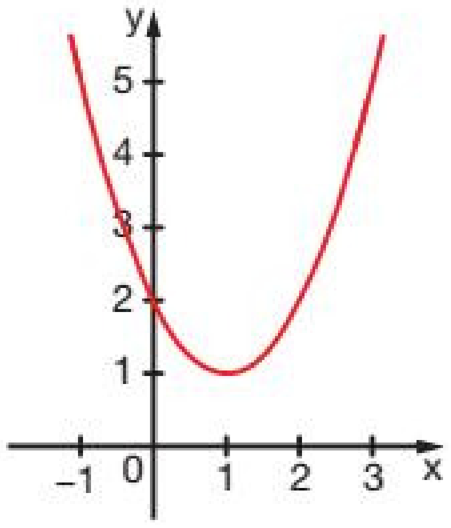
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{0}}{2a}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x=\frac{-b\pm 0}{2a}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$$

Quando $\Delta = 0$, temos que:

- a equação $ax^2 + bx + c = 0$ possui duas raízes reais e iguais: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$;
- a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ possui dois zeros reais e iguais;
- a parábola relacionada a *f* intersecta o eixo *x* em um único ponto, de abscissa $x_1 = x_2$ e ordenada 0.

- $\Delta < 0$

Para determinarmos os zeros da função $f(x) = x^2 - 2x + 2$, resolvemos a equação $f(x) = 0$.



$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 0$

$a = 1$; $b = -2$; $c = 2$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 4 - 8 = -4$

Como $\Delta < 0$, a equação não possui raízes reais, pois $\sqrt{\Delta} \notin \mathbb{R}$.

Portanto, *f* não possui zero real, e a parábola relacionada a essa função não intersecta o eixo *x*.

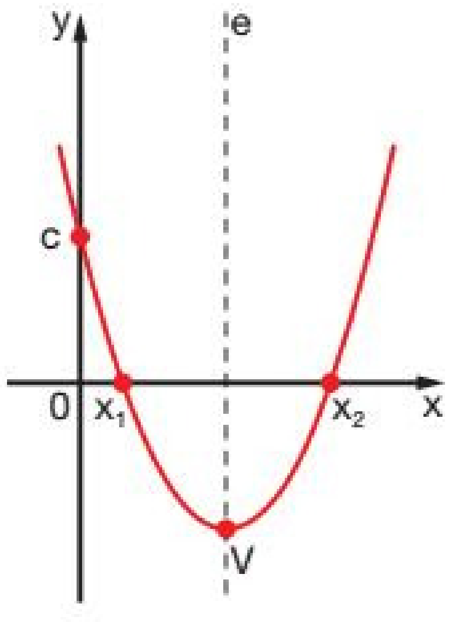
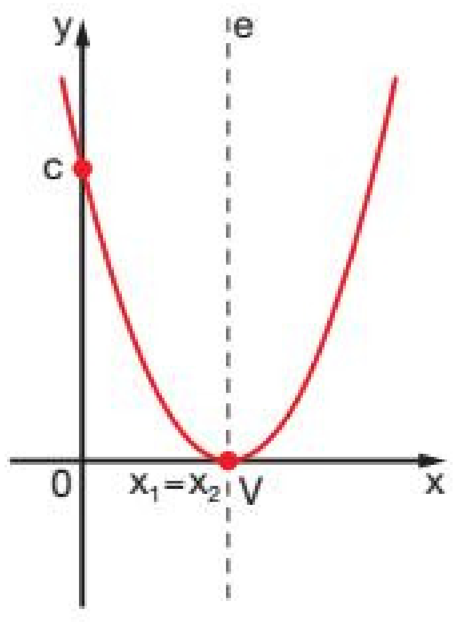
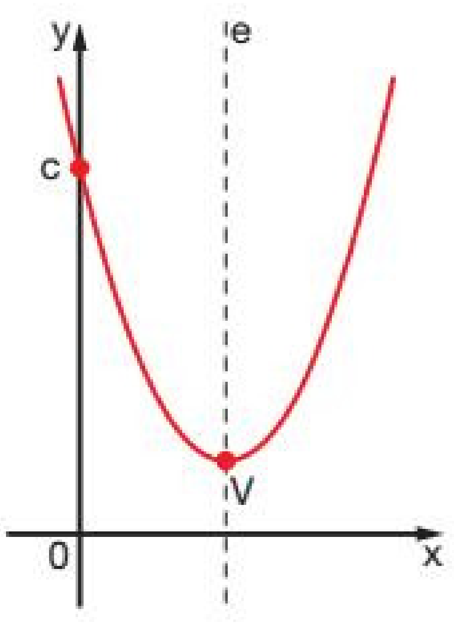
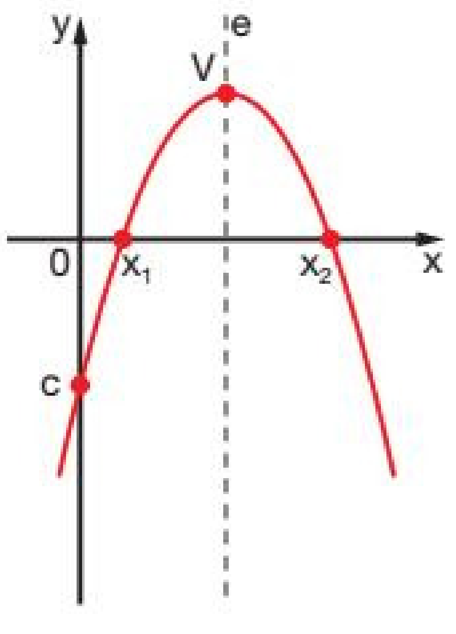
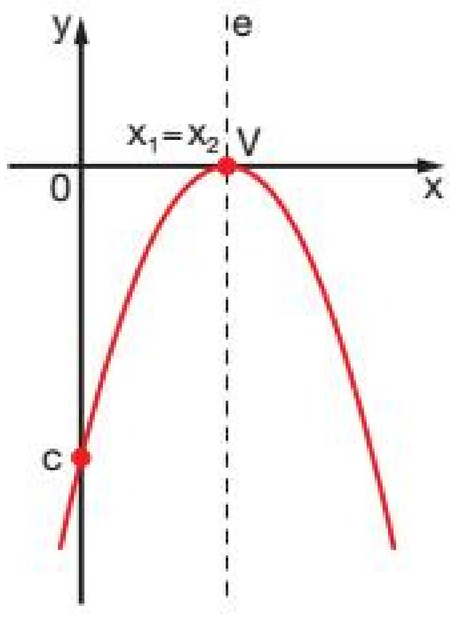
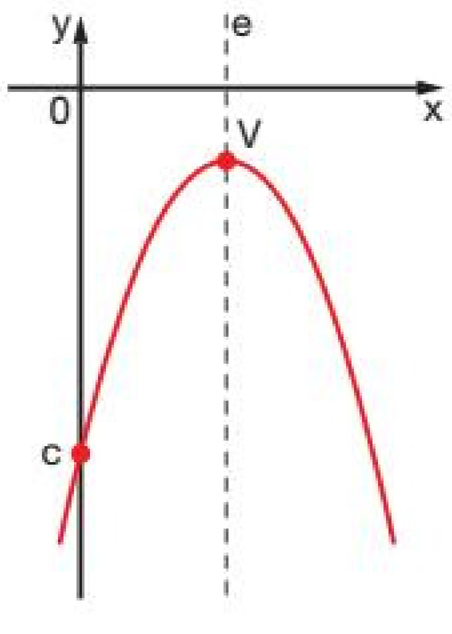
Quando $\Delta < 0$, temos que:

- a equação $ax^2 + bx + c = 0$ não possui raízes reais;
- a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ não possui zeros reais;
- a parábola relacionada a *f* não intersecta o eixo *x*.

Considerando a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ e algumas características de seu gráfico, podemos organizar da seguinte maneira.

e: eixo de simetria da parábola

V: vértice da parábola

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

Ilustrações: Acervo da editora

Atividades resolvidas

R5. Determine *m*, de modo que a função $f(x) = 3x^2 - 6x + m$ admita no conjunto dos reais:

a) dois zeros distintos
b) dois zeros iguais
c) nenhum zero real

Resolução

Como $a = 3$, $b = -6$ e $c = m$, temos que:

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot m = 36 - 12m$$

a) Para que a função tenha dois zeros distintos, temos:

$$\Delta > 0$$
$$36 - 12m > 0$$
$$-12m > -36$$
$$m < \frac{36}{12} = 3$$
$$S = \{m \in \mathbb{R} \mid m < 3\}$$

b) Para que a função tenha dois zeros iguais, temos:

$$\Delta = 0$$
$$36 - 12m = 0$$
$$-12m = -36$$
$$m = \frac{36}{12} = 3$$
$$S = \{3\}$$

c) Para que a função não tenha zero real, temos:

$$\Delta < 0$$
$$36 - 12m < 0$$
$$-12m < -36$$
$$m > \frac{36}{12} = 3$$
$$S = \{m \in \mathbb{R} \mid m > 3\}$$

R6. Mostre que, de modo geral, se x_1 e x_2 são zeros da função *f*, dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, então $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ e $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

Resolução

Se x_1 e x_2 são zeros da função, então:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ e } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Segue que:

- $x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$
- $x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) \cdot \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{b^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}$

Portanto, $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ e $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

> As relações $S = -\frac{b}{a}$ e $P = \frac{c}{a}$ são chamadas de **soma** e **produto** das raízes da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$ e podem ser utilizadas para determinar os zeros da função quadrática. Veja na atividade resolvida a seguir a determinação dos zeros da função utilizando soma e produto.

R7. Determine os zeros da função $f(x) = x^2 - x - 12$.

Resolução

Da atividade resolvida anterior, temos que, se x_1 e x_2 são zeros da função, então:

- $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{(-1)}{1} = 1$
- $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-12}{1} = -12$

Nesse caso, os dois números cuja soma é 1 e o produto é −12 são 4 e −3. Portanto, $x_1 = 4$ e $x_2 = -3$ são zeros de *f*.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

20. Determine, caso existam, os zeros de cada função.

a) $f(x)=x^2-7x+10$ $x_1=2$ e $x_2=5$

b) $f(x)=x^2-6x+9$ $x_1=x_2=3$

c) $f(x)=-x^2+x-7$ não existem zeros reais

d) $f(x)=-4x^2+4$ $x_1=-1$ e $x_2=1$

e) $f(x)=\frac{1}{2}x^2+6x$ $x_1=0$ e $x_2=-12$

f) $f(x)=-2x^2+3x-5$ não existem zeros reais

g) $f(x)=3x^2+x-2$

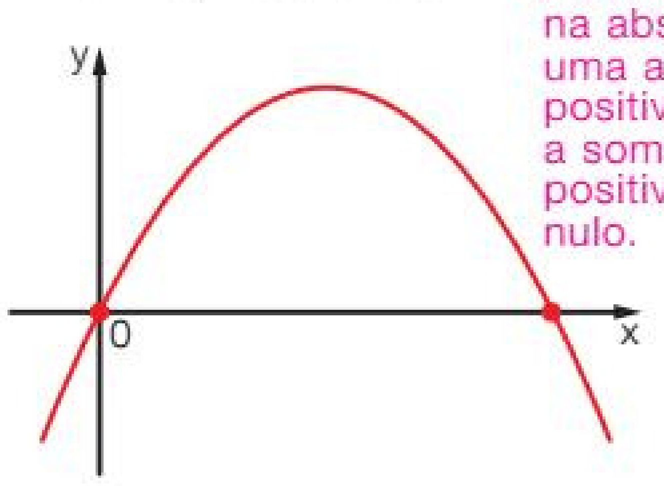
h) $f(x)=-x^2+8x-16$ $x_1=x_2=4$

20. g) $x_1=\frac{2}{3}$ e $x_2=-1$

21. Determine o valor de *k* para que o gráfico da função quadrática $f(x)=(k+2)x^2+2x-k$ intersecte o eixo das abscissas em um único ponto. $k=-1$

22. Analisando o gráfico da função quadrática $f(x)=ax^2+bx+c$, responda:

a) Como o gráfico de *f* intersecta o eixo *x* na abscissa 0 e em uma abscissa positiva, temos que a soma dos zeros é positiva, e o produto, nulo.



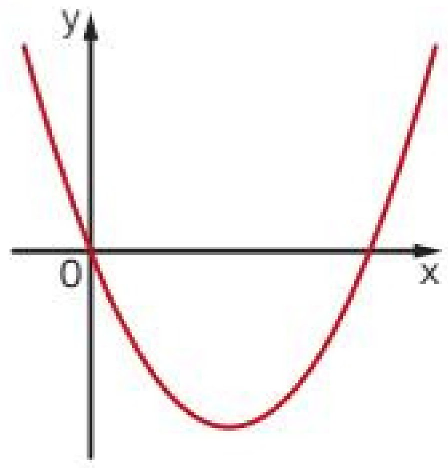
Acervo da editora

a) A soma e o produto dos zeros dessa função são positivos, negativos ou nulos? Justifique.

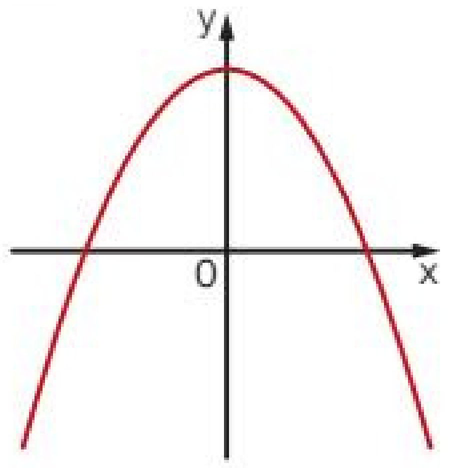
b) O valor de Δ dessa função é positivo, negativo ou nulo? Justifique. Positivo, pois os zeros da função são reais e distintos.

23. Qual dos gráficos melhor representa uma função quadrática em que $\Delta>0$, $S=0$ (soma dos zeros da função) e o coeficiente $a>0$? Justifique.

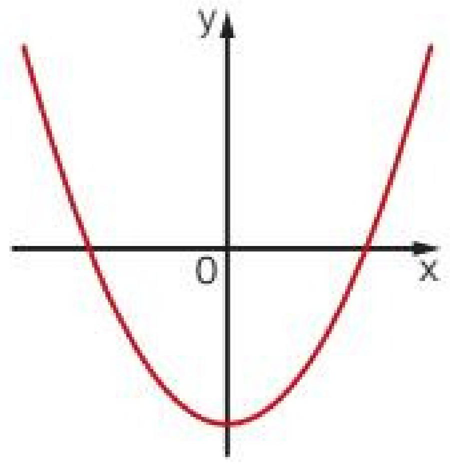
a)



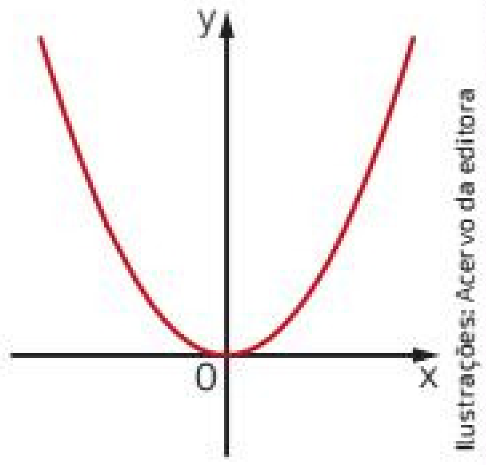
c)



b)



d)



Ilustrações: Acervo da editora

24. Sabendo que os zeros da função quadrática *g* são $x_1=-6$ e $x_2=1$ e que seu gráfico intersecta o eixo *y* no ponto de coordenadas $(0,-2)$, escreva a lei dessa função. $g(x)=\frac{1}{3}x^2+\frac{5}{3}x-2$

25. Calcule, no conjunto dos números reais, as raízes das equações:

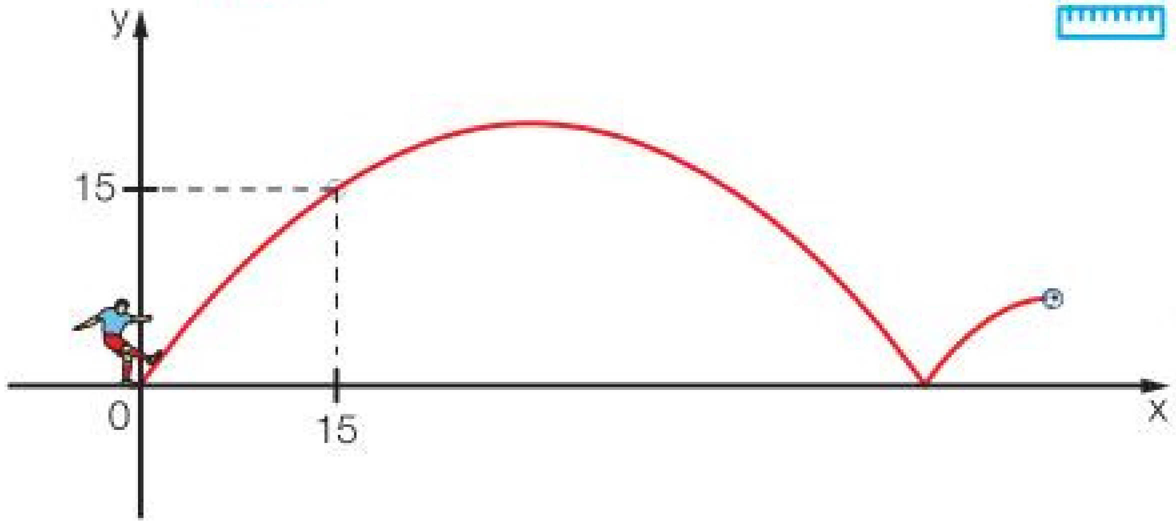
a) $(2x^2+2x-4)(x-8)=0$ $S=\{-2,1,8\}$

b) $(-x^2-6x+16)(3x^2-12x)=0$ $S=\{-8,0,2,4\}$

c) $(-x^2+1)(7x^2-2x+5)=0$ $S=\{-1,1\}$

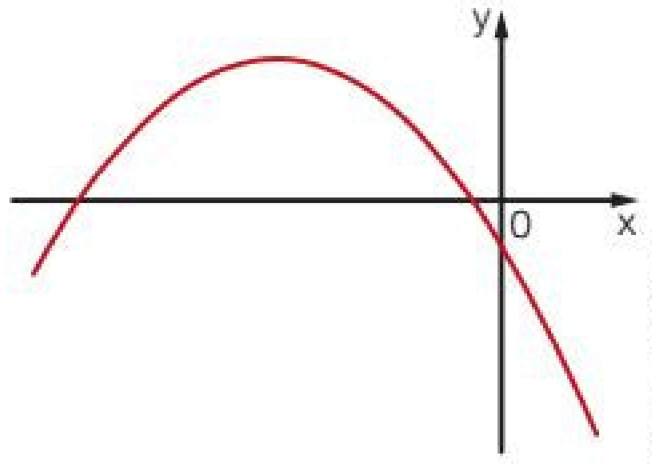
d) $\frac{x^2+6x+5}{x+1}=0$ $S=\{-5\}$

26. Em uma partida de futebol, ao ser chutada por um jogador, a bola descreveu, até tocar o solo, uma trajetória definida pela função $y=\frac{4}{3}x-\frac{1}{45}x^2$, em que *y* corresponde à altura da bola em relação ao solo após ter percorrido horizontalmente uma distância *x*. Observando o esquema e considerando as medidas *x* e *y* em metros, a qual distância horizontal do jogador a bola tocou o solo pela 1ª vez? 60 m



Acervo da editora

27. (UEL-PR) Considere a função real definida por $f(x)=ax^2+bx+c$, cujo gráfico é o seguinte:



Acervo da editora

Com base na situação exposta e nos conhecimentos sobre o tema, considere as seguintes afirmativas:

I) $\Delta=b^2-4ac>0$

II) $a(b+c)>0$

III) $f\left(\frac{-b+2a}{2a}\right)=f\left(\frac{-b-2a}{2a}\right)$

IV) $a\sqrt{\Delta}>0$

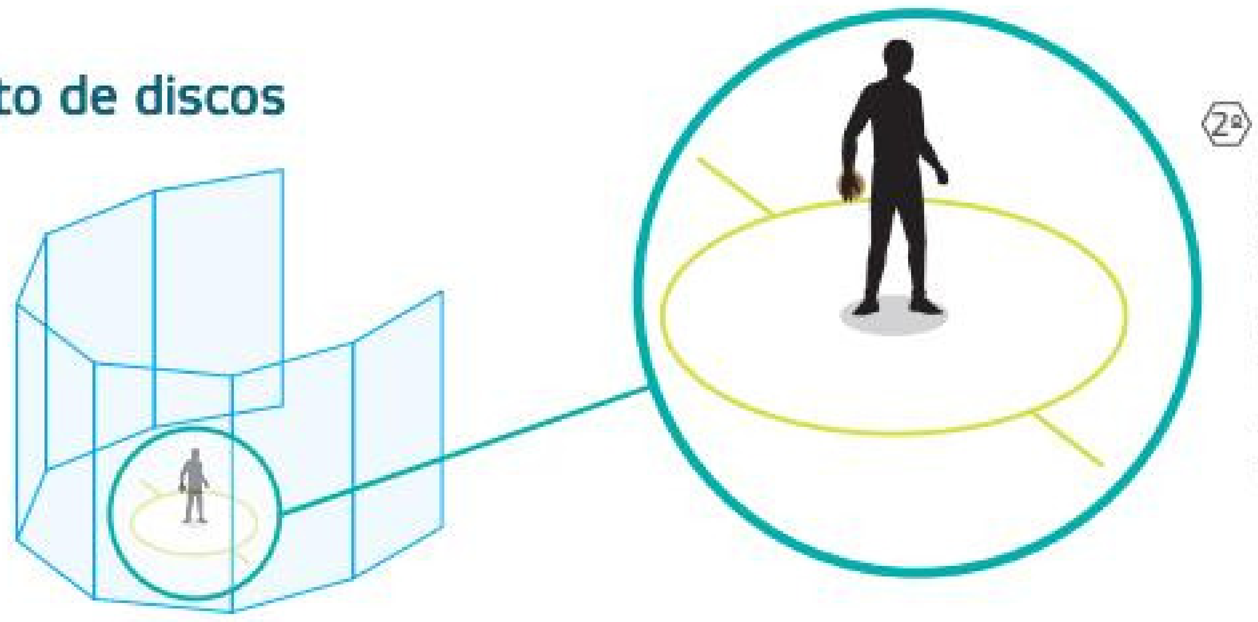
Escreva a alternativa que contém todas as afirmações corretas. c

a) I e III
b) III e IV
c) I, II e III
d) I, II e IV
e) II, III e IV

23. b; A função possui dois zeros distintos, pois $\Delta>0$. Como $S=0$, os zeros da função são números opostos e, sabendo que $a>0$, temos que a concavidade da parábola é voltada para cima.

28. Considerado um dos mais antigos esportes olímpicos, a inspiração do lançamento de discos vem dos guerreiros que jogavam seus escudos antes de atravessar rios para diminuir o peso que teriam de carregar durante a travessia.

Como é realizado o lançamento de discos



①ª O atleta fica dentro de uma gaiola de proteção com uma abertura de 34,92°, por onde é lançado o disco, que pode ser feito de madeira ou de outro material apropriado e deve conter placas circulares de metal embutidas no centro de suas faces.

②ª O lançamento de disco é realizado dentro de uma área circular de 2,5 m de diâmetro. O competidor não pode pisar fora do círculo até que o disco lançado toque o solo.

Ilustrações: Ronaldo Lucena

③ª O atleta se prepara para o momento do arremesso (A) que é o movimento de giro de uma volta e meia. Ele usa, além do braço, o corpo, para dar maior impulso na liberação do disco, que, ao ser lançado, descreve uma trajetória que pode ser representada por uma parábola.

Fontes de pesquisa: <www.cbat.org.br/regras/regras_oficiais_2012-2013.pdf>. Acesso em: 31 ago. 2015.
FORTIN, François. **Sports the complete visual reference**. Montreal: Firefly Books, 2000.

Considere que a trajetória de um disco após seu lançamento possa ser representada pela função $y=-0{,}01x^2+0{,}54x+1{,}71$, em que $y=f(x)$ representa a altura do disco em relação ao solo durante sua trajetória e *x* representa a distância horizontal do disco em relação ao atleta, ambos expressos em metros.

a) A partir de que altura, em relação ao solo, o disco foi lançado? 1,71 m

b) Após ter percorrido horizontalmente 12 m em relação ao atleta, qual foi a altura atingida pelo disco? 6,75 m

c) Qual foi a distância horizontal atingida por esse disco ao tocar o solo? 57 m

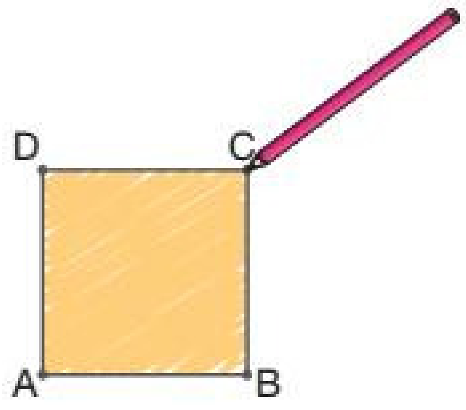
d) Realize uma pesquisa e cite outra modalidade de lançamento praticada nos Jogos Olímpicos. Resposta pessoal.

e) Que benefícios a prática esportiva pode oferecer para a saúde e a qualidade de vida das pessoas? Resposta pessoal.

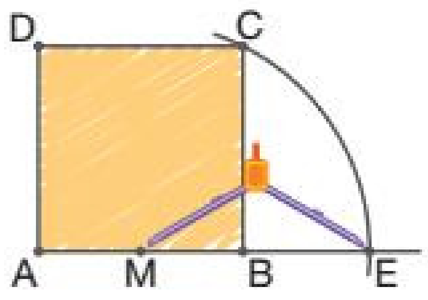
29. Desafio

Um retângulo de dimensões *x* e *y*, tal que $\frac{x}{y}=\frac{y}{x-y}$, é chamado retângulo áureo e a razão $\frac{x}{y}$, proporção áurea ou divina proporção.

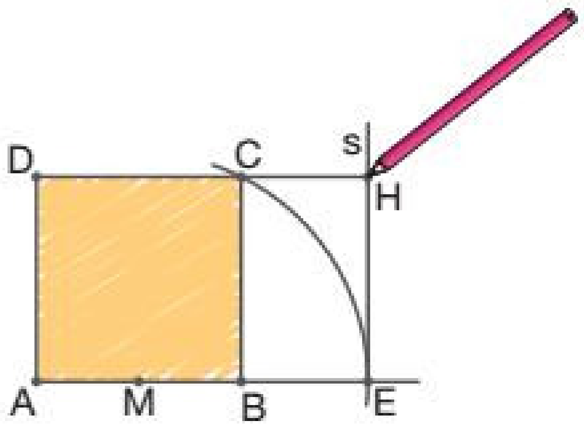
Observe a construção de um retângulo áureo.



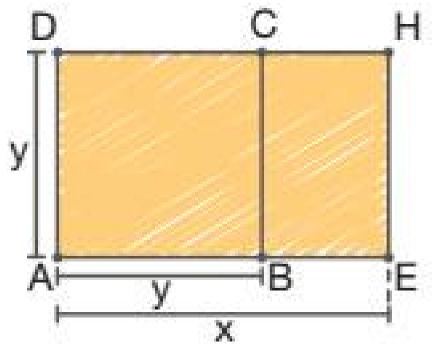
①ª Construímos um quadrado ABCD.



②ª Marcamos o ponto médio *M* de $\overline{AB}$ e com a ponta-seca do compasso em *M* e abertura MC traçamos o arco $\overset{\frown}{CE}$, de modo a intersectar o prolongamento de $\overline{AB}$ em *E*.



③ª Traçamos por *E* uma reta s perpendicular à $\overline{AE}$ e prolongamos $\overline{DC}$ de maneira a intersectar s em *H*.



Ilustrações: Camila Ferreira

④ª AEHD é um retângulo áureo.

a) Considerando que uma das dimensões do retângulo é $y=1$, determine o valor de *x*. $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

b) Calcule o número obtido no item **a** com uma aproximação aos milésimos. 1,618

c) O número correspondente à razão áurea é chamado número de ouro e representado pela letra grega ϕ (lê-se fi). Pesquise se esse número é racional ou irracional. O número ϕ é irracional.

d) Utilizando régua e compasso, construa um retângulo áureo de maneira semelhante à apresentada.

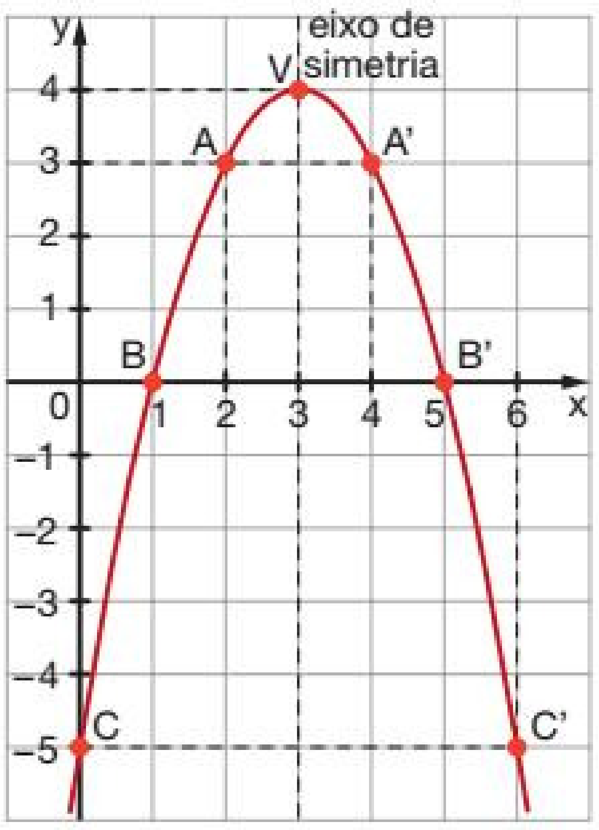
Vértice de uma parábola

Estudamos anteriormente que o eixo de simetria de uma parábola a intersecta em seu vértice. Agora, iremos determinar as coordenadas do vértice de uma parábola.

No gráfico de $f(x)=-x^2+6x-5$ estão destacados alguns pontos. Note que $A(2, 3)$ e $A'(4, 3)$ são pontos da parábola que possuem ordenadas iguais. Quando isso ocorre, dizemos que os pontos são simétricos em relação ao eixo de simetria da parábola.

Quais são os demais pares de pontos em destaque no gráfico que são simétricos em relação ao eixo de simetria da parábola?

$B(1, 0)$ e $B'(5, 0)$;
$C(0, -5)$ e $C'(6, -5)$



Note que, ao calcularmos a média aritmética das abscissas dos pontos da parábola simétricos em relação ao eixo, obtemos a abscissa do vértice da parábola. No caso de $A(2, 3)$ e $A'(4, 3)$, temos:

Realize o cálculo da média aritmética das abscissas dos demais pontos simétricos entre si em destaque no gráfico.

abscissa do ponto *A* abscissa do ponto A'

$$\frac{2+4}{2}=3$$

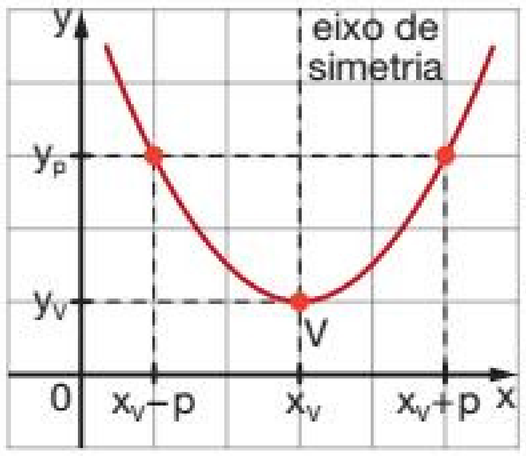
abscissa do vértice

Calculando $f(3)$, obtemos a ordenada do vértice dessa parábola.

$$f(3)=-3^2+6\cdot 3-5=4$$

Portanto, as coordenadas do vértice da parábola são $(3, 4)$.

Podemos obter as coordenadas do vértice $V(x_V, y_V)$ de uma parábola a partir dos coeficientes de uma função quadrática $f(x)=ax^2+bx+c$. Para isso, consideramos dois pontos dessa parábola simétricos em relação ao eixo, cujas coordenadas são (x_V-p, y_p) e (x_V+p, y_p), conforme gráfico abaixo.



Ilustrações: Acervo da editora

Como $y_p=f(x_V-p)$ e $y_p=f(x_V+p)$, então $\underbrace{f(x_V-p)}_{y_p}=\underbrace{f(x_V+p)}_{y_p}$.

Efetuando os cálculos, temos:

$$f(x_V - p) = f(x_V + p)$$
$$a(x_V - p)^2 + b(x_V - p) + c = a(x_V + p)^2 + \mathbf{b}(x_V + p) + c$$
$$a(x_V^2 - 2x_Vp + p^2) + b(x_V - p) + c = a(x_V^2 + 2x_V\mathbf{p} + p^2) + b(x_V + p) + c$$
$$\cancel{ax_V^2} - 2ax_Vp + \cancel{ap^2} + \cancel{bx_V} - bp + \cancel{c} = \cancel{ax_V^2} + 2ax_Vp + \cancel{ap^2} + \cancel{bx_V} + bp + \cancel{c}$$
$$-2ax_Vp - 2ax_Vp = bp + bp$$
$$-4a\mathbf{x}_Vp = 2bp$$
$$x_V = -\frac{2bp}{4ap}$$
$$x_V = -\frac{b}{2a}$$

Para obter a ordenada y_V do vértice, calculamos $f(x_V)$, ou seja, $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.

$$y_V = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c$$
$$y_V = a \cdot \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c$$
$$y_V = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c$$
$$y_V = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$
$$y_V = -\frac{\Delta}{4a}$$

Portanto, as coordenadas $V(x_V, y_V)$ do vértice da parábola correspondente à função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ são:

$$V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right), \text{ em que } \Delta = b^2 - 4ac$$

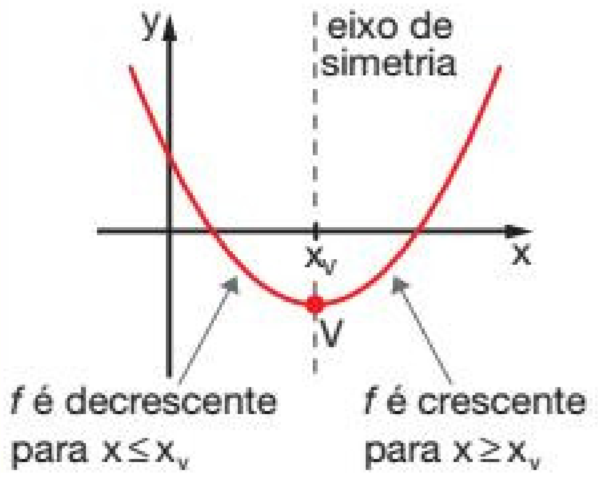
Vamos calcular, por exemplo, as coordenadas do vértice da parábola correspondente à função $f(x) = -x^2 + 6x - 5$.

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2 \cdot (-1)} = 3$$
$$y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{6^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-5)}{4 \cdot (-1)} = 4$$

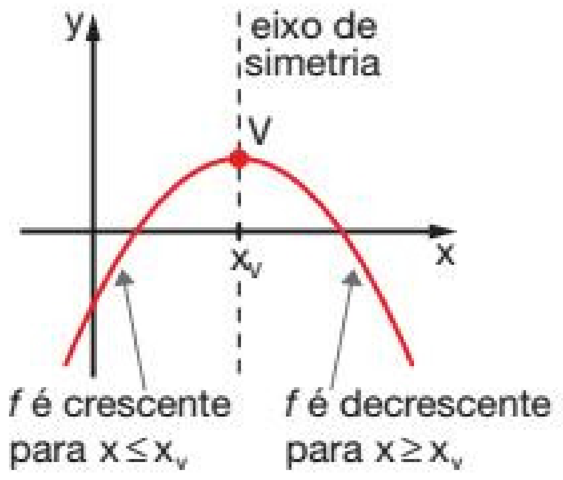
Tal como havíamos obtido anteriormente, as coordenadas do vértice dessa parábola são $V(3, 4)$.

Na função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que x_V é a abscissa do vértice, temos:

- se $a > 0$, então *f* é decrescente para $x \leq x_V$ e crescente para $x \geq x_V$



- se $a < 0$, então *f* é crescente para $x \leq x_V$ e decrescente para $x \geq x_V$



Ilustrações: Acervo da editora

Atividades resolvidas

R8. Seja $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ dada por $f(x)=x^2+4x-5$.

a) Determine os zeros de *f*.

b) Em que ponto o gráfico da função intersecta o eixo *y*?

c) A parábola que representa a função intersecta o eixo *y* no ramo crescente ou decrescente?

d) A concavidade da parábola é voltada para cima ou para baixo?

e) Quais são as coordenadas do vértice da parábola?

f) Esboce o gráfico de *f*, indicando o eixo de simetria.

Resolução

a) $f(x)=0\Rightarrow x^2+4x-5=0$

Resolvendo a equação, temos:

$$\Delta=4^2-4\cdot1\cdot(-5)=36$$

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{36}}{2\cdot1}\left\langle\begin{array}{l}x_1=1\\x_2=-5\end{array}\right.$$

Portanto, os zeros de *f* são 1 e -5.

b) A função intersecta o eixo *y* no ponto de coordenadas $(0,-5)$, pois $c=-5$.

c) A parábola intersecta o eixo *y* no ramo crescente, pois $b=4>0$.

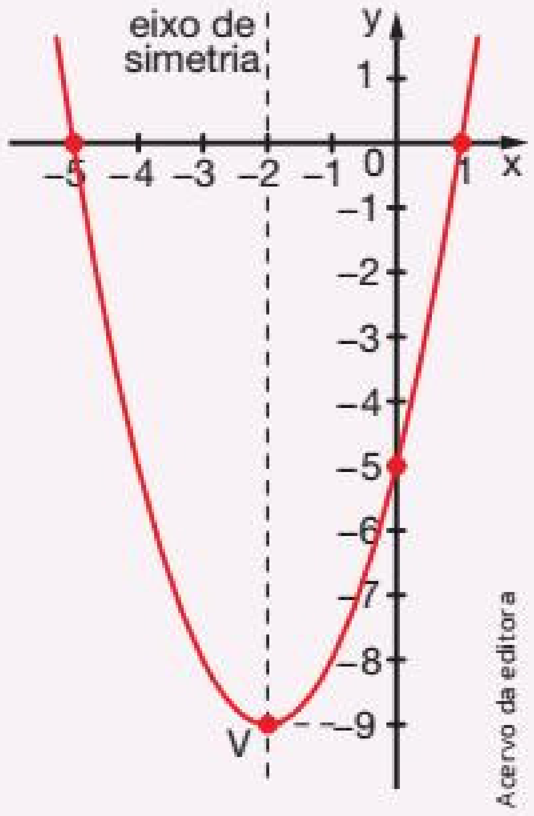
d) A concavidade é voltada para cima, pois $a=1>0$.

e) Temos que:

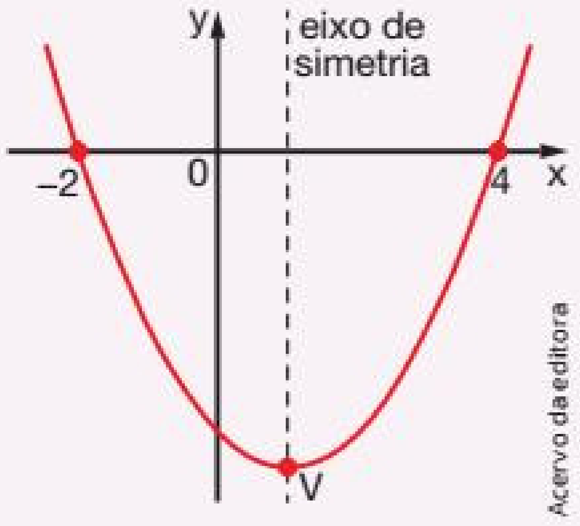
$$x_V=-\frac{b}{2a}=-\frac{4}{2\cdot1}=-2;\ y_V=-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{36}{4\cdot1}=-9$$

Portanto, $V(-2,-9)$.

f)



R9. Determine os intervalos de crescimento e decrescimento da função quadrática cujo gráfico está representado ao lado.



Resolução

Em uma função quadrática, a mudança de comportamento (crescimento e decrescimento) ocorre no vértice da parábola.

Como os zeros da função são pontos simétricos entre si, pois têm ordenadas iguais a zero, podemos calcular a abscissa do vértice pela média aritmética das abscissas desses pontos:

$$x_V=\frac{-2+4}{2}=1$$

Portanto, como a parábola tem concavidade voltada para cima, a função é decrescente para $x\leq1$ e crescente para $x\geq1$.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

30. Determine as coordenadas do vértice da parábola correspondente a cada função.

a) $f(x)=x^2-2x+3$ $V(1,2)$

b) $f(x)=4x^2+4$ $V(0,4)$

c) $f(x)=2x^2-12x+7$ $V(3,-11)$

d) $f(x)=3x^2-2x+1$ $V\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$

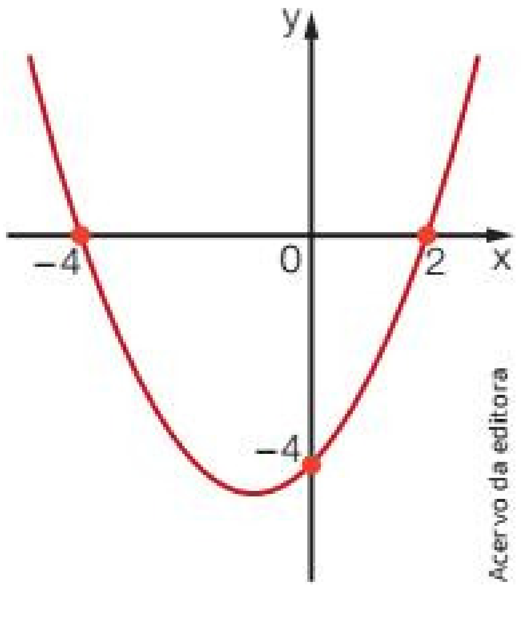
e) $f(x)=\frac{1}{3}x^2-\frac{10}{3}x+5$ $V\left(5,-\frac{10}{3}\right)$

f) $f(x)=x^2-\sqrt{3}x$ $V\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{4}\right)$

31. O eixo de simetria da parábola que representa a função $g(x)=2x^2-4x+1$ intersecta o eixo *x* na abscissa: a

a) $x=1$ b) $x=-1$ c) $x=3$ d) $x=-2$

32. Obtenha as coordenadas do vértice da parábola. $V\left(-1,-\frac{9}{2}\right)$



33. Escreva as coordenadas do vértice da parábola que representa cada função.

a) $f(x)=(x-1)^2$ $V(1,0)$

b) $f(x)=(x+3)^2$ $V(-3,0)$

c) $f(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$ $V\left(\frac{1}{2},0\right)$

d) $f(x)=(x+\sqrt{5})^2$ $V(-\sqrt{5},0)$

Quais regularidades podem ser verificadas nas coordenadas do vértice da parábola de uma função do tipo $f(x)=(x+p)^2$, com $p\in\mathbb{R}$?
Uma possível resposta: a abscissa sempre será $-p$, e a ordenada, 0.

34. Esboce o gráfico de $f(x)=-\frac{m}{5}x^2+mx$, sabendo $f(1)=8$. Em seguida, escreva e indique no gráfico os intervalos de crescimento e decrescimento dessa função. Resposta nas **Orientações para o professor**.

35. Dada a função quadrática $g(x)=ax^2+bx+3$ e a ordenada do vértice $y_v=2$, qual número natural mais se aproxima de $\frac{a}{b^2}$? 0

36. (UFPA-PA) O vértice da parábola $y=ax^2+bx+c$ é o ponto de coordenadas $(-2, 3)$. Sabendo que 5 é a ordenada onde a curva corta o eixo vertical, podemos afirmar que: d

a) $a>1$, $b<1$ e $c<4$

b) $a>2$, $b>3$ e $c>4$

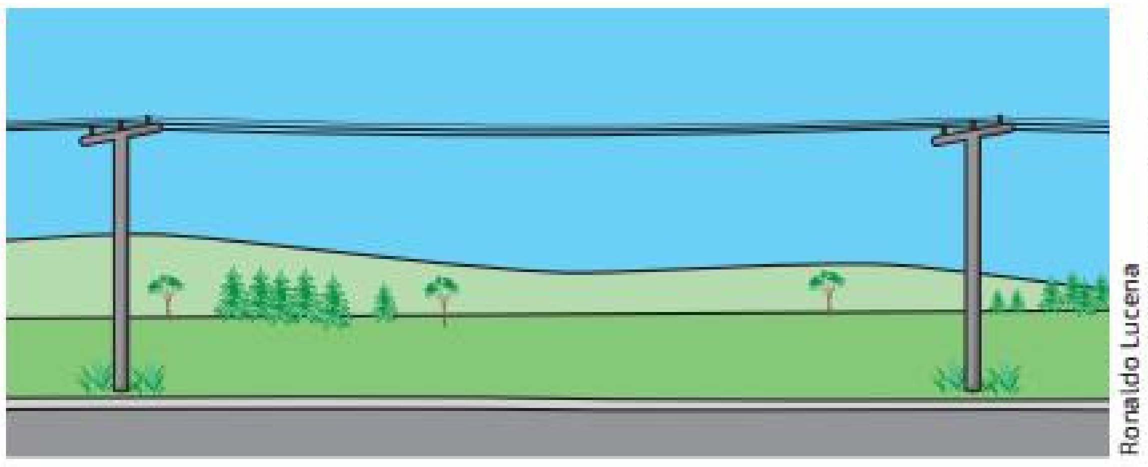
c) $a<1$, $b<1$ e $c>4$

d) $a<1$, $b>1$ e $c>4$

e) $a<1$, $b<1$ e $c<4$

37. Sabendo que a reta da equação $y=8$ tangencia o vértice da parábola de uma função quadrática *f* e que os zeros dessa função são −1 e 3, determine a lei de formação da função *f*.
$f(x)=-2x^2+4x+6$

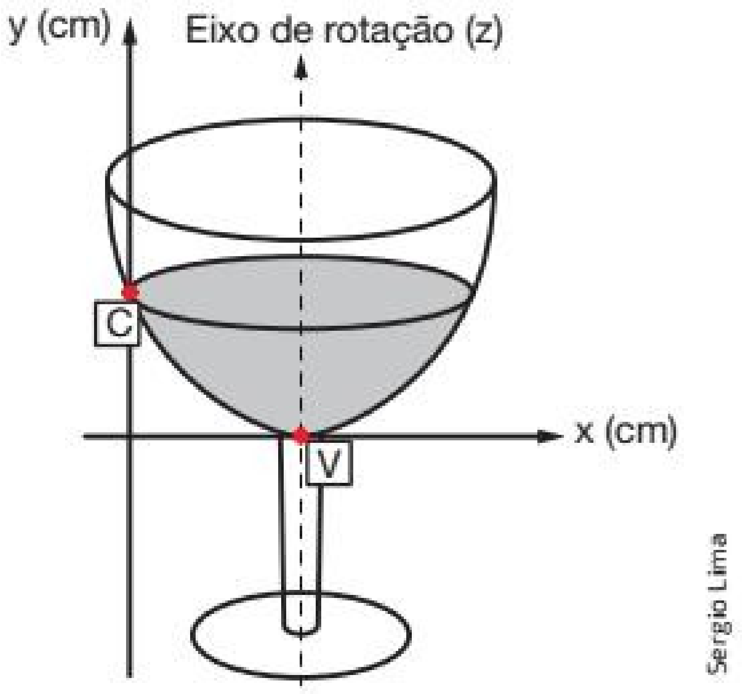
38. Dois postes de 6 m de altura estão distantes 20 m um do outro. Devido às altas temperaturas do verão, os fios de eletricidade que passam por esses postes dilataram, formando uma curva que pode ser descrita, aproximadamente, pela função $y=\frac{1}{500}x^2-\frac{1}{25}x+6$, em que *x* é a distância em relação ao poste da esquerda, e *y* é a altura do fio em relação ao solo, ambas medidas em metros.


Ronaldo Lucena

a) A que distância dos postes a altura do fio é de 5,85 m? 5 m e 15 m

b) Qual é a menor distância do fio em relação ao solo? 5,8 m

39. (Enem-MEC) A parte interior de uma taça foi gerada pela rotação de uma parábola em torno de um eixo *z*, conforme mostra a figura.



Sergio Lima

A função real que expressa a parábola, no plano cartesiano da figura, é dada pela lei

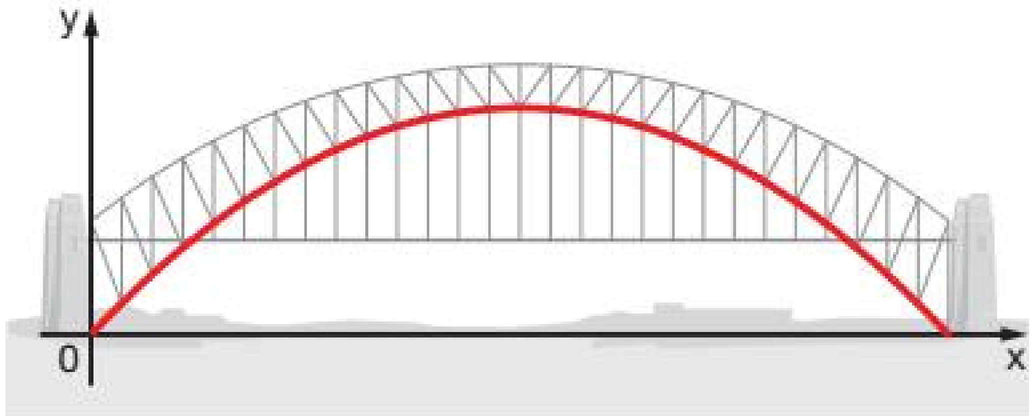
$f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + C$, onde *C* é a medida da altura do líquido contido na taça, em centímetros. Sabe-se que o ponto *V*, na figura, representa o vértice da parábola, localizado sobre o eixo *x*.

Nessas condições, a altura do líquido contido na taça, em centímetros, é: e

a) 1 b) 2 c) 4 d) 5 e) 6

40. Na construção de edifícios e monumentos, seja por propriedades estruturais ou por motivos estéticos, podemos observar a presença de formas que se assemelham a uma parábola. Algumas pontes, por exemplo, apresentam em sua estrutura um arco em forma de parábola.

Observe o esquema de uma ponte sobre um rio cujo arco lembra uma parábola.



Sergio Lima

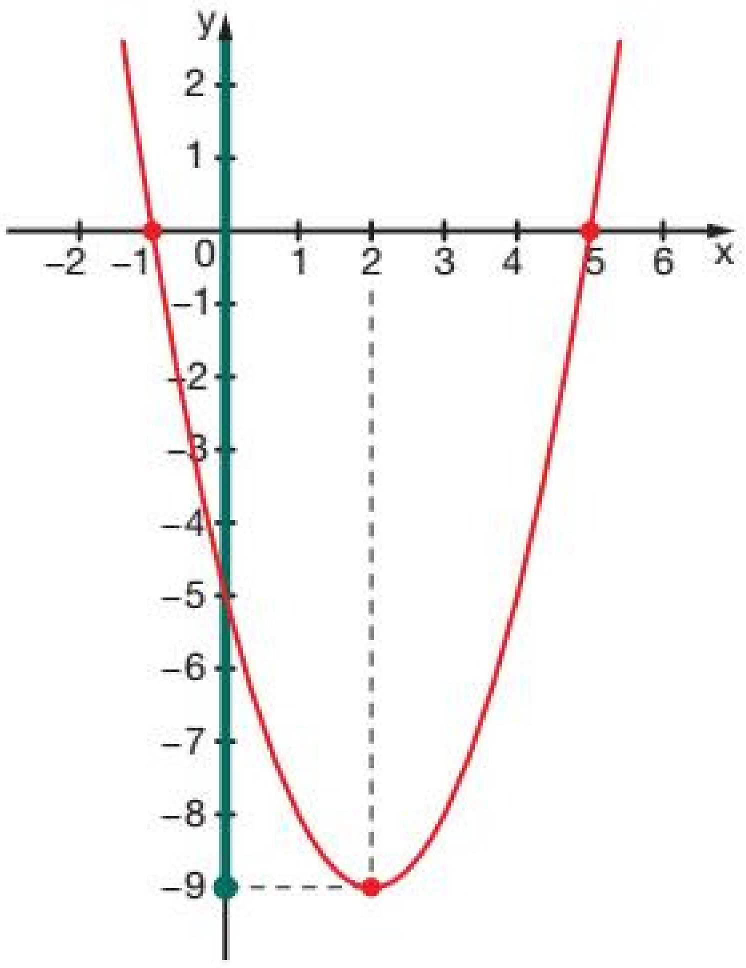
Esse arco pode ser representado matematicamente pela função $y=-0{,}0021x^2+1{,}0563x$, na qual *y* representa a distância entre o nível do rio e o arco, e *x* representa a distância em linha reta a partir de uma das extremidades do arco no nível do rio, ambos expressos em metros.

a) Supondo que uma pessoa escale a ponte representada no esquema, qual será a maior altura que ela poderá atingir, em relação ao nível do rio? aproximadamente 133 m

b) Qual é a distância entre as extremidades do arco formado pela ponte, representada no esquema, no nível do rio? 503 m

Valor máximo ou valor mínimo de uma função quadrática

Conhecendo as coordenadas do vértice de uma parábola, podemos determinar a imagem da função quadrática relacionada a ela e também o **valor máximo** ou **valor mínimo** dessa função.



O gráfico da função $f(x)=x^2-4x-5$ é uma parábola com concavidade voltada para cima, pois $a=1>0$. O vértice dessa parábola é dado por:

$$V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) \Rightarrow V(2, -9)$$

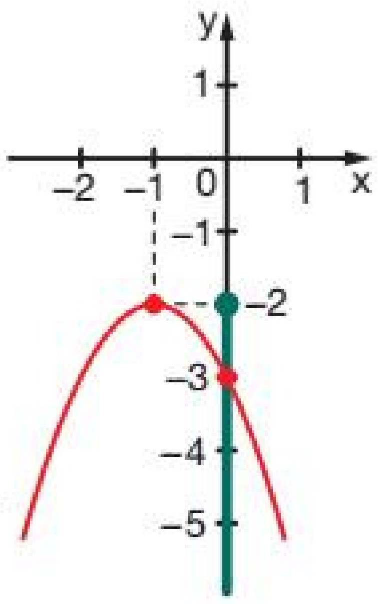
Como a concavidade é voltada para cima, $V(2, -9)$ é o ponto de mínimo de *f*, e $y_V=-9$ é o valor mínimo de *f*.

Podemos também determinar o conjunto imagem de *f*, que nesse caso é dado por:

$$Im(f)=\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -9\} \text{ ou } Im(f)=[-9, +\infty[$$

Na função quadrática $f(x)=ax^2+bx+c$, quando $\mathbf{a}>\mathbf{0}$, a parábola que a representa tem concavidade voltada para cima. Portanto:

- $V(x_V, y_V)$ é o **ponto de mínimo** de *f*
- $y_V=-\frac{\Delta}{4a}$ corresponde ao **valor mínimo** de *f*
- o conjunto imagem de *f* é dado por: $Im(f)=\left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -\frac{\Delta}{4a}\right\}$ ou $Im(f)=\left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right[$



Ilustrações: Acervo da editora

Agora, considere a função $f(x)=-x^2-2x-3$, cujo gráfico é uma parábola com concavidade voltada para baixo, pois $a=-1<0$. O vértice dessa parábola é dado por:

$$V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) \Rightarrow V(-1, -2)$$

Como a concavidade é voltada para baixo, $V(-1, -2)$ é o ponto de máximo de *f*, e $y_V=-2$ é o valor máximo de *f*.

Podemos também determinar o conjunto imagem de *f*, que nesse caso é dado por:

$$Im(f)=\{y \in \mathbb{R} \mid y \leq -2\} \text{ ou } Im(f)=]-\infty, -2]$$

Na função quadrática $f(x)=ax^2+bx+c$, quando $\mathbf{a}<\mathbf{0}$, a parábola que a representa tem concavidade voltada para baixo. Portanto:

- $V(x_V, y_V)$ é o **ponto de máximo** de *f*
- $y_V=-\frac{\Delta}{4a}$ corresponde ao **valor máximo** de *f*
- o conjunto imagem de *f* é dado por: $Im(f)=\left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leq -\frac{\Delta}{4a}\right\}$ ou $Im(f)=\left]-\infty, -\frac{\Delta}{4a}\right]$

Atividades resolvidas

R10. Determine o conjunto imagem da função $f(x)=\frac{1}{2}x^2-3x+2$.

Resolução

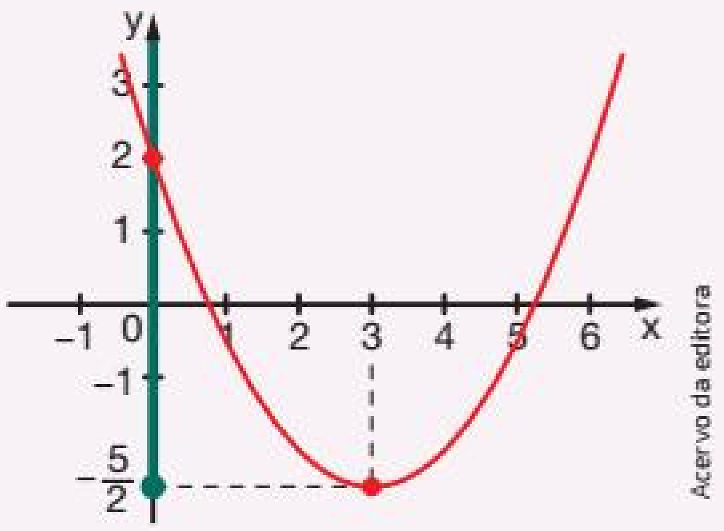
Temos que:

- $a=\frac{1}{2}>0$

Parábola com concavidade voltada para cima.

- $y_V=-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{(-3)^2-4\cdot\frac{1}{2}\cdot 2}{4\cdot\frac{1}{2}}=-\frac{5}{2}$

$-\frac{5}{2}$ é o valor mínimo da função.



Portanto, $\text{Im}(f)=\left[-\frac{5}{2}, +\infty\right[$ ou $\text{Im}(f)=\left\{y\in\mathbb{R}\,|\,y\geq-\frac{5}{2}\right\}$.

R11. Uma empresa oferece o fretamento de um ônibus de 48 lugares na seguinte condição: cada passageiro irá pagar R$ 42,00 fixos mais R$ 3,00 por lugar vago do ônibus. Por exemplo, se sobrarem seis lugares vagos, cada passageiro irá pagar R$ 60,00 $(42+3\cdot 6=60)$.

Para que a quantia arrecadada pela empresa seja máxima, quantos lugares devem ser ocupados? Qual a quantia arrecadada nesse caso?

Resolução

Considerando *x* o número de lugares vagos no ônibus, cada passageiro irá pagar $42+3x$ reais.

Desse modo, a função *f* que descreve o valor arrecadado é:

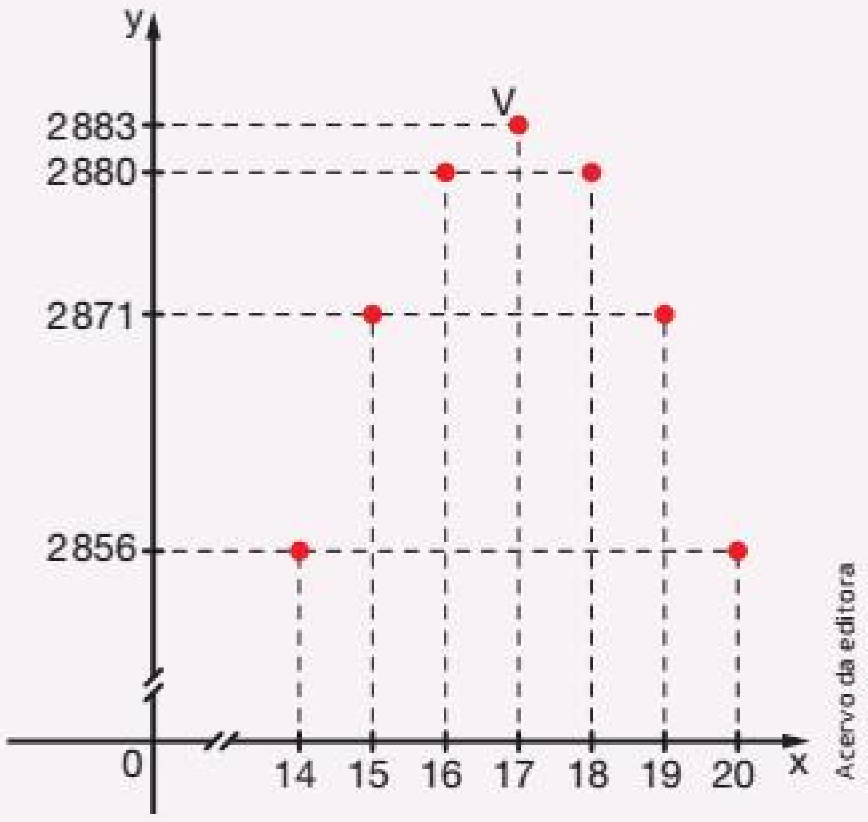
$$f(x)=\underbrace{(48-x)}_{\text{número de passageiros}}\overbrace{(42+3x)}^{\text{valor pago por passageiro}}=-3x^2+102x+2\,016$$

Segue que:

- $x_v=-\frac{b}{2a}=-\frac{102}{2(-3)}=17$
- $y_v=-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{102^2-4\cdot(-3)\cdot 2\,016}{4\cdot(-3)}=2\,883$

Portanto, a empresa terá a quantia arrecadada máxima se sobrarem 17 lugares vagos, ou seja, se 31 lugares forem ocupados. Nesse caso, a quantia arrecadada será R$ 2 883,00.

O gráfico a seguir apresenta alguns valores arrecadados pela empresa (y) em função do número de lugares vagos no ônibus (x).



No gráfico, as escalas dos eixos são diferentes entre si.

R12. Qual é a área máxima de um retângulo com 48 cm de perímetro?

Resolução

Sejam *x* e *y* as dimensões do retângulo. Se o perímetro é 48 cm, então:

$$2x + 2y = 48 \Rightarrow 2y = 48 - 2x \Rightarrow y = 24 - x$$

A função que determina a área do retângulo é dada por:

$$f(x) = x \cdot y = x \cdot (24 - x) = -x^2 + 24x$$

Segue que:

$$y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{24^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 0}{4 \cdot (-1)} = 144$$

Portanto, a área máxima do retângulo é 144 cm^2.

Quais as dimensões desse retângulo? O retângulo é um quadrado de lado 12 cm.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

41. Determine o conjunto imagem de cada função quadrática:

a) $f(x) = 4x^2 - 8x + 4$ $Im(f) = [0, +\infty[$ ou $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$

b) $f(x) = -7x^2 + \sqrt{2}x$ $Im(f) = \left]-\infty, \frac{1}{14}\right]$ ou $Im(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leq \frac{1}{14}\right\}$

c) $f(x) = 3x^2 - 10$ $Im(f) = [-10, +\infty[$ ou $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -10\}$

d) $f(x) = -6x^2 + 1$ $Im(f) =]-\infty, 1]$ ou $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 1\}$

e) $f(x) = \frac{5}{3}x^2 + 9$ $Im(f) = [9, +\infty[$ ou $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 9\}$

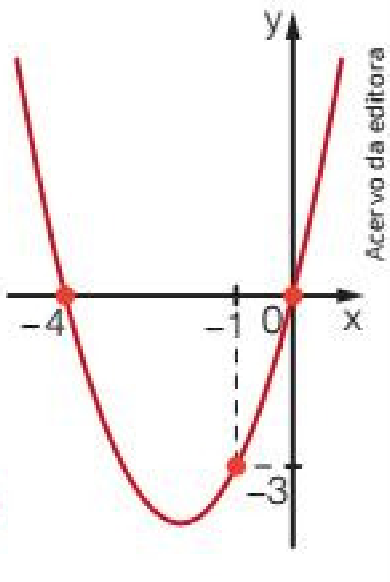
Quais regularidades podem ser verificadas no conjunto imagem das funções do tipo $f(x) = ax^2 + c$?

42. Analisando o gráfico da função quadrática, determine:

a) a lei dessa função; $y = x^2 + 4x$

b) as coordenadas do vértice da parábola; $V(-2, -4)$

c) o valor mínimo da função. -4



Acervo da editora

43. Em cada item, determine os valores de *p* para que a função quadrática:

a) $f(x) = (2p - 8)x^2 + 5x - 13$ admita valor mínimo $p > 4$

b) $g(x) = -4x^2 + (p^2 - 1)x + 9$ admita valor máximo para $x = 6$ $p = -7$ ou $p = 7$

c) $h(x) = 3x^2 + 6x - (2 - p)$ admita valor mínimo igual a -8 $p = -3$

44. Em uma metalúrgica, o custo *c*, em reais, para produzir *n* peças de metal pode ser calculado por $c(n) = 0,04n^2 - 4n + 110$.

Para qual quantidade de peças o custo de produção é mínimo? Qual é esse custo mínimo? 50 peças; R$ 10,00

45. Pedro pretende cercar uma região retangular em sua chácara para criar galinhas. Para isso, ele comprou 80 m de tela e pretende usá-la de modo a obter a maior área possível para o galinheiro. Quais devem ser as medidas dos lados desse galinheiro? Qual será a área máxima desse galinheiro? Os lados devem ter 20 m; 400 m^2

46. O lucro (ou prejuízo) *L* de uma pequena empresa é calculado pela diferença entre a receita *R* e o custo *C*. Nessa empresa, a receita e o custo são dados, respectivamente, pelas funções $R(x) = 180x - x^2$ e $C(x) = 30x + 1\,200$, em reais, em que *x* representa a quantidade vendida mensalmente de determinados itens.

a) Determine a função lucro *L*. $L(x) = -x^2 + 150x - 1200$

b) Se essa empresa não vender nenhum item no mês, ela terá lucro ou prejuízo? De quantos reais? prejuízo; R$ 1 200,00

c) Quantos itens devem ser vendidos nessa empresa para que o lucro seja máximo? 75 itens

d) Qual é o lucro máximo dessa empresa, em reais? R$ 4 425,00

Receita é o valor total que é recebido ou arrecadado.

47. (FGV-SP) O transporte aéreo de pessoas entre duas cidades A e B é feito por uma única companhia em um único voo diário. O avião utilizado tem 180 lugares, e o preço da passagem *p* relaciona-se com o número *x* de passageiros por dia pela relação $p = 300 - 0,75x$. A receita máxima possível por viagem é: d

a) R$ 30 000,00

b) R$ 29 900,00

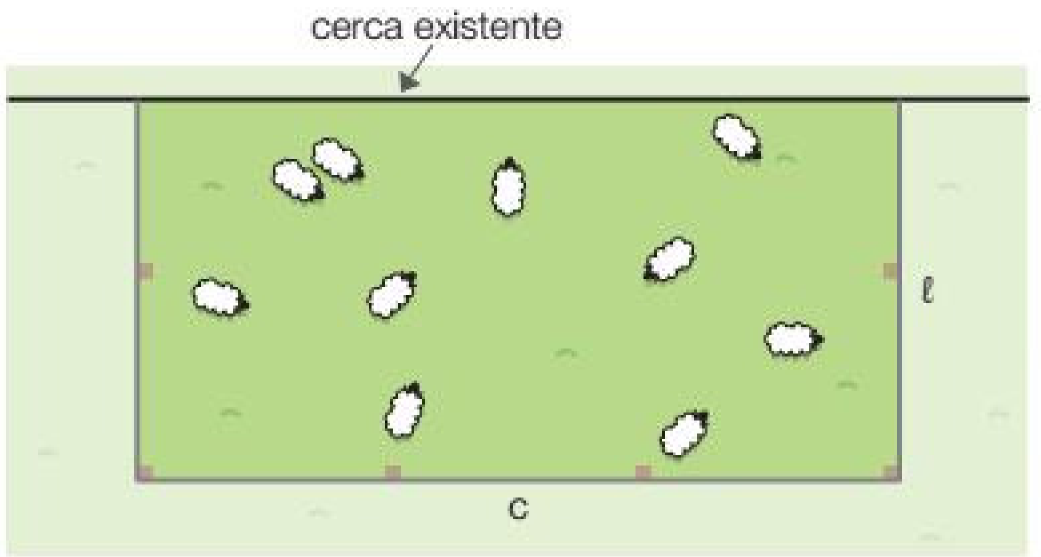
c) R$ 29 800,00

d) R$ 29 700,00

e) R$ 29 600,00

41. Resposta esperada: para $a > 0$, $Im(f) = [c, +\infty[$ ou $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq c\}$; para $a < 0$, $Im(f) =]-\infty, c]$ ou $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq c\}$.

48. José irá cercar uma área retangular de seu sítio para criar carneiros. Ele tem um rolo de arame com 240 m e deseja construir a cerca com quatro fios. Sabendo que ele irá aproveitar uma cerca já existente na propriedade, qual deve ser a medida da largura ℓ e do comprimento *c* para que ele consiga uma área máxima de pastagem para sua criação? $\ell = 15$ m e c = 30 m



Sergio Lima

49. Fernanda e Carol estavam disputando uma partida de golfe em um campo plano. Fernanda realizou uma tacada na qual a bola descreveu uma trajetória representada pela função $f(x) = -\frac{x^2}{100} + \frac{x}{5}$. Em seguida, Carol realizou uma tacada na qual a bola descreveu uma trajetória representada pela função $g(x) = -\frac{x^2}{32} + \frac{x}{2}$. Considerando *x* a distância horizontal e $f(x)$ e $g(x)$ a altura, em metros, de cada tacada, responda:

a) Qual das garotas conseguiu fazer com que a bola alcançasse a maior distância horizontal ao tocar o solo? Qual foi essa distância? Fernanda; 20 m

b) Qual das garotas conseguiu fazer a bola ir mais alto? Qual foi essa altura? Carol; 2 m

50. Um projétil, lançado do nível do solo, atingiu altura máxima de 78,4 m. Sabendo que esse projétil retornou ao solo após um tempo t = 8 s, qual das funções melhor representa a altura desse projétil em função do tempo *t*? b

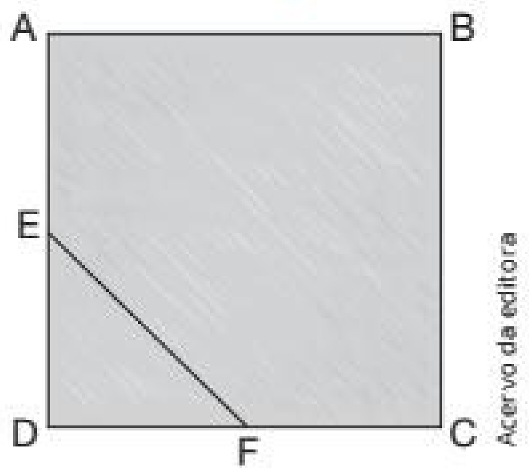
a) $f(t) = -9{,}8t^2 + 39{,}2t$

b) $f(t) = -4{,}9t^2 + 39{,}2t$

c) $f(t) = 4{,}9t^2 - 39{,}2t$

d) $f(t) = -9{,}8t^2 - 4{,}9t$

51. Da chapa metálica quadrada ABCD, com área de 9 m^2, deseja-se cortar a região triangular DEF, de modo que AE = DF. Qual deve ser a área do triângulo DEF para que o pentágono ABCFE tenha a menor área possível? $\frac{9}{8}$ m^2 ou 1,125 m^2



Acervo da editora

52. A popularização do vôlei no Brasil ocorreu no fim da década de 1970 e início da década de 1980. Um dos responsáveis foi o jogador Bernard Rajzman, que ficou conhecido pelo famoso saque "jornada nas estrelas". Sua estratégia era ficar de lado para a quadra, com o ombro direito paralelo à linha de fundo, lançar a bola suavemente para cima e golpeá-la com o braço direito. A bola alcançava cerca de 25 m, e fazia essa jornada com efeito, o que dificultava a recepção dos adversários.

Renata Falzoni/Folhapress

Explique aos alunos que em ambas as funções apresentadas na atividade considerou-se, por aproximação, que a bola foi golpeada a partir do solo.

Bernard executando o saque "jornada nas estrelas" em uma partida de 1984.

Em uma partida de vôlei, na aula de educação física, Rafael utilizou a jogada criada por Bernard, executando o saque "jornada nas estrelas". Desconsiderando-se a altura da bola no momento do saque, a bola descreveu aproximadamente uma trajetória parabólica que pode ser descrita pela função $h(d) = -0{,}398d^2 + 5{,}572d$, em que *d* representa a distância horizontal em metros, e *h*, a altura, também em metros.

a) Qual foi a distância horizontal da bola ao tocar o solo após o saque de Rafael? 14 m

b) Qual foi a altura máxima alcançada pela bola no saque de Rafael? aproximadamente 19,5 m

c) Esboce um gráfico relacionando a distância e a altura alcançadas pela bola com $0 \leq d \leq 14$. Resposta nas **Orientações para o professor**.

53. (Enem-MEC) Um boato tem um público-alvo e alastra-se com determinada rapidez. Em geral, essa rapidez é diretamente proporcional ao número de pessoas desse público que conhecem o boato e diretamente proporcional também ao número de pessoas que não o conhecem. Em outras palavras, sendo *R* a rapidez de propagação, *P* o público-alvo e *x* o número de pessoas que conhecem o boato, tem-se $R(x) = k \cdot x \cdot (P - x)$, em que *k* é uma constante positiva característica do boato.

Considerando o modelo acima descrito, se o público-alvo é de 44 000 pessoas, então a máxima rapidez de propagação ocorrerá quando o boato for conhecido por um número de pessoas igual a: b

a) 11 000

b) 22 000

c) 33 000

d) 38 000

e) 44 000

54. Nas páginas **102** e **103**, estudamos algumas informações sobre os cangurus, como o salto que eles realizam em seu deslocamento.

Dave Watts/Alamy Stock Photo/Latinstock

canguru-vermelho

Considere que um dos saltos de um canguru-vermelho possa ser descrito pela função $f(x)=-\frac{x^2}{8}+x$, em que *x* e $f(x)$ são, respectivamente, a distância horizontal e a altura do salto, em metros.

a) Determine a distância horizontal alcançada pelo canguru-vermelho nesse salto. 8 m

b) Qual foi a altura máxima que o canguru-vermelho obteve? 2 m

55. Calculadora

Um fabricante de motocicletas realizou testes para verificar o consumo de combustível de um de seus novos modelos. Todos os testes foram realizados em uma pista de 10 km, que foi percorrida várias vezes, em velocidade constante. Nesses testes, verificou-se que o consumo de combustível não era o mesmo para diferentes velocidades, chegando-se à conclusão de que, para velocidades entre 20 km/h e 80 km/h, o consumo de combustível, em litros, a cada 10 km, podia ser calculado pela função $L(v)=0{,}00005v^2-0{,}003v+0{,}295$, em que *v* é a velocidade em quilômetros por hora.

a) Para qual velocidade o consumo de combustível será o menor possível? 30 km/h

b) Qual será o consumo mínimo de combustível para percorrer os 10 km? 0,25 L

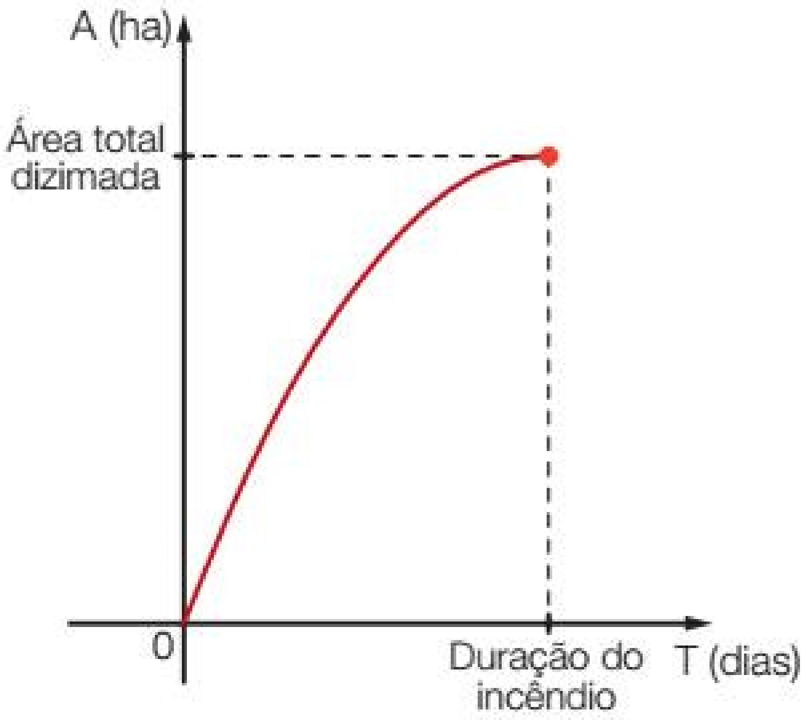
c) Quantos quilômetros no máximo essa motocicleta pode percorrer com 1 L de combustível? 40 km

d) Com o auxílio de uma calculadora, determine quantos quilômetros aproximadamente essa motocicleta percorrerá, com 1 L de combustível, à velocidade constante de:

- 20 km/h 39,22 km
- 40 km/h 39,22 km
- 60 km/h 33,9 km
- 80 km/h 26,67 km

56. Uma loja de uniformes escolares vende diariamente uma média de 20 calças, por R$ 80,00 cada. Ao realizar uma promoção, o gerente da loja percebeu que, a cada R$ 0,50 que baixava no preço, a venda de calças aumentava em 1 unidade por dia. Qual deve ser o preço de cada calça para que se tenha a maior receita? Qual é o valor dessa receita? R$ 45,00; R$ 4 050,00

57. (UFPA-PA) Um incêndio numa Reserva Florestal iniciou no momento em que um fazendeiro vizinho à Reserva ateou fogo em seu pasto e o mesmo se alastrou até a reserva. Os prejuízos para o meio ambiente foram alarmantes, pois a área destruída foi crescendo diariamente até que, no 10º dia, tempo máximo de duração do incêndio, foi registrado um total de 16 000 hectares de área dizimada. A figura abaixo é um arco de parábola que representa o crescimento da área dizimada nessa reserva em função do número de dias que durou o incêndio. Nestas condições, a expressão que representa a área dizimada *A* em função do tempo *T*, em dias, é: c



Acervo da editora

a) $A=-16\,000T^2+10T$

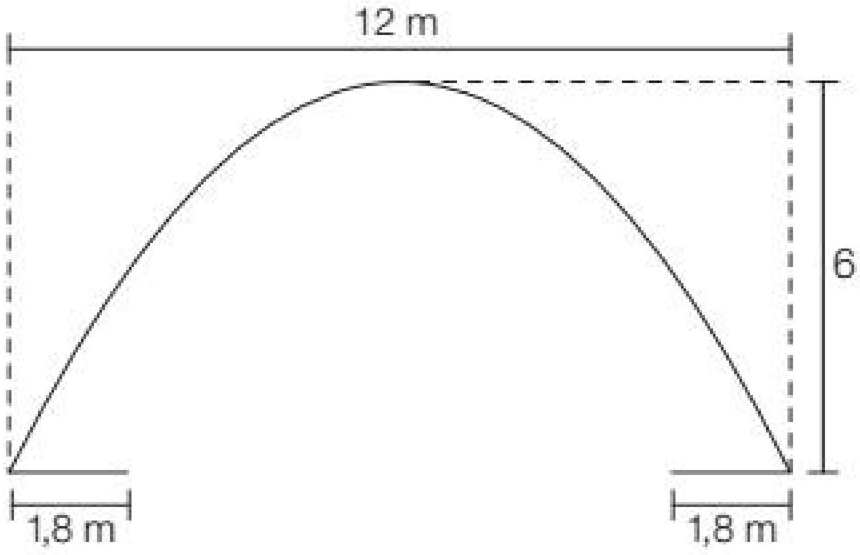
b) $A=16\,000T^2-3\,200T$

c) $A=-160T^2+3\,200T$

d) $A=160T^2-3200T$

e) $A=16\,000T^2-10T$

58. A entrada de um túnel foi construída em formato parabólico com 12 m de largura e 6 m de altura máxima, sendo destinados 1,8 m de cada lado para a passagem de pedestres. Nesse túnel, somente poderão trafegar veículos 0,5 m mais baixos que a menor altura do túnel em que se pode trafegar. Qual é a altura máxima de um veículo para trafegar nesse túnel? 2,56 m



Acervo da editora

Estudo do sinal de uma função quadrática

Anteriormente, vimos que no estudo do sinal de uma função afim *f* determinamos os valores de *x* do domínio para os quais $f(x)=0$, $f(x)>0$ e $f(x)<0$. Para o estudo do sinal de uma função quadrática $f(x)=ax^2+bx+c$ consideraremos três casos:

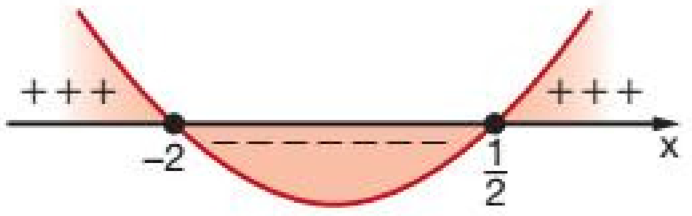
1º caso: $\Delta>0$

Vamos verificar para quais valores do domínio de $f(x)=2x^2+3x-2$ temos $f(x)=0$, $f(x)>0$ e $f(x)<0$.

Verificando a concavidade da parábola e os zeros da função, temos:

- como $a=2>0$, a parábola tem concavidade voltada para cima;
- como $\Delta=3^2-4\cdot2\cdot(-2)=25>0$, a função possui dois zeros reais e distintos, x_1 e x_2.

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{25}}{2\cdot2}=\frac{-3\pm5}{4}\left\langle\begin{array}{l}x_1=\dfrac{1}{2}\\ x_2=-2\end{array}\right.$$

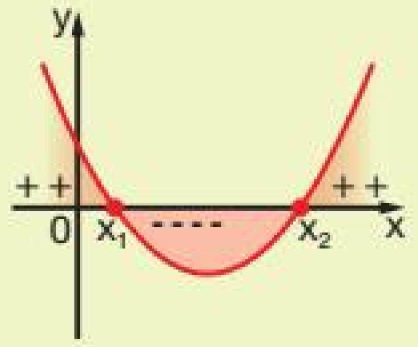


Portanto:

- $f(x)=0$ para $x=-2$ ou $x=\frac{1}{2}$
- $f(x)>0$ para $x<-2$ ou $x>\frac{1}{2}$
- $f(x)<0$ para $-2<x<\frac{1}{2}$

Quando $\Delta>0$, a função quadrática $f(x)=ax^2+bx+c$ possui dois zeros reais e distintos $(x_1\neq x_2)$ e a parábola intersecta o eixo *x* em dois pontos. Nesse caso, no estudo do sinal de *f*, temos:

- $a>0$

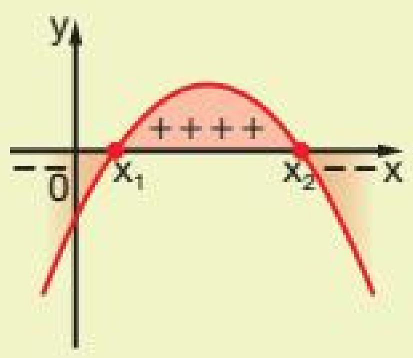


$f(x)=0$ para $x=x_1$ ou $x=x_2$

$f(x)>0$ para $x<x_1$ ou $x>x_2$

$f(x)<0$ para $x_1<x<x_2$

- $a<0$



$f(x)=0$ para $x=x_1$ ou $x=x_2$

$f(x)>0$ para $x_1<x<x_2$

$f(x)<0$ para $x<x_1$ ou $x>x_2$

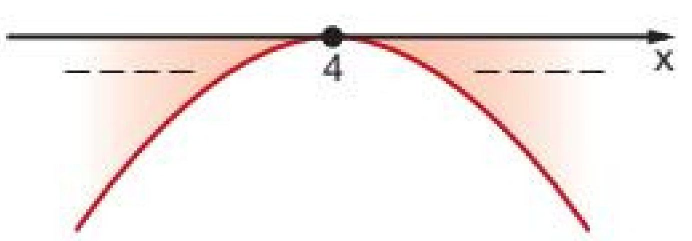
2º caso: $\Delta=0$

Agora, vamos verificar para quais valores do domínio de $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+4x-8$ temos $f(x)=0$, $f(x)>0$ e $f(x)<0$.

Verificando a concavidade da parábola e os zeros da função, temos:

- como $a=-\frac{1}{2}<0$, a parábola tem concavidade voltada para baixo;
- como $\Delta=4^2-4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-8)=0$, a função possui dois zeros reais e iguais, $x_1=x_2$.

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{0}}{2\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)}=\frac{-4\pm0}{-1}\left\langle\begin{array}{l}x_1=4\\ x_2=4\end{array}\right.$$



Ilustrações: Acervo da editora

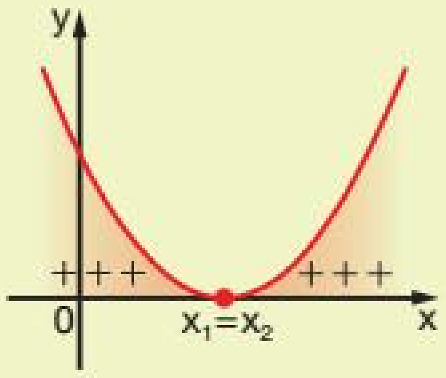
Portanto:

- $f(x)=0$ para $x=4$
- $\nexists x\in\mathbb{R}$ tal que $f(x)>0$
- $f(x)<0$ para $\forall x\neq4$

- $\nexists x\in\mathbb{R}$ lê-se "não existe *x* pertencente aos reais".
- $\forall x\neq4$ lê-se "qualquer que seja *x* diferente de 4".

Quando $\Delta=0$, a função quadrática $f(x)=ax^2+bx+c$ possui dois zeros reais e iguais $(x_1=x_2)$ e a parábola intersecta o eixo *x* em um único ponto. Nesse caso, no estudo do sinal de *f*, temos:

- $a>0$

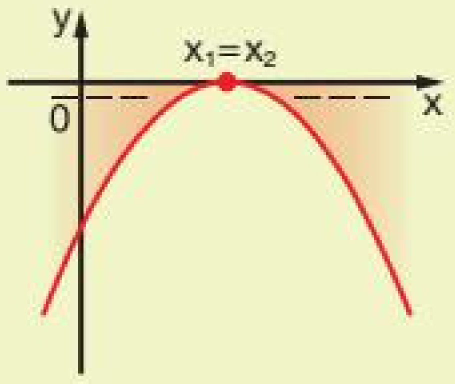


$f(x)=0$ para $x=x_1=x_2$

$f(x)>0$ para $\forall x \neq x_1$

$\nexists x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x)<0$

- $a<0$



$f(x)=0$ para $x=x_1=x_2$

$\nexists x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x)>0$

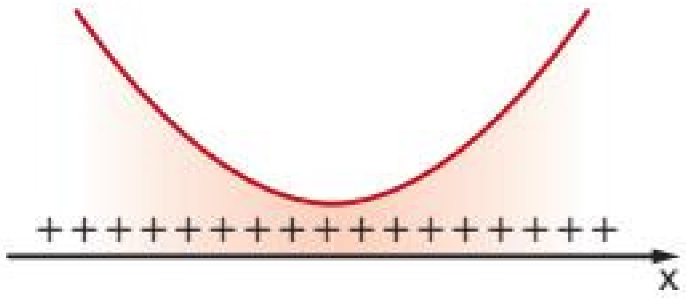
$f(x)<0$ para $\forall x \neq x_1$

3º caso: $\Delta<0$

Vamos verificar para quais valores do domínio de $f(x)=x^2-x+6$ temos $f(x)=0$, $f(x)>0$ e $f(x)<0$.

Verificando a concavidade e os zeros da função, temos:

- como $a=1>0$, a parábola tem concavidade voltada para cima;
- como $\Delta=(-1)^2-4\cdot1\cdot6=-23<0$, a função não possui zeros reais.

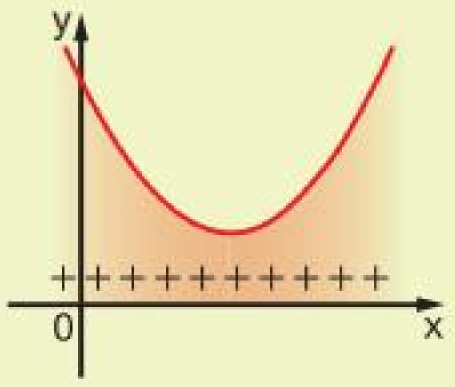


Portanto:

- $\nexists x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x)=0$
- $f(x)>0$ para $\forall x \in \mathbb{R}$
- $\nexists x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x)<0$

Quando $\Delta<0$, a função quadrática $f(x)=ax^2+bx+c$ não possui zeros reais e a parábola não intersecta o eixo *x*. Nesse caso, no estudo do sinal de *f*, temos:

- $a>0$

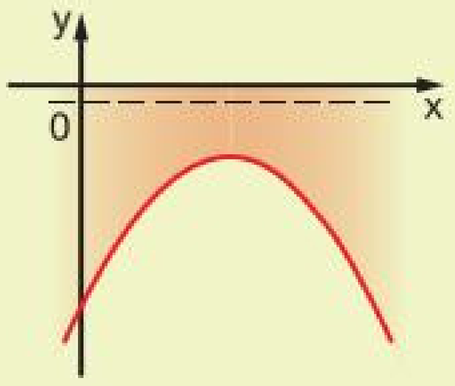


$\nexists x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x)=0$

$f(x)>0$ para $\forall x \in \mathbb{R}$

$\nexists x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x)<0$

- $a<0$



$\nexists x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x)=0$

$\nexists x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x)>0$

$f(x)<0$ para $\forall x \in \mathbb{R}$

Ilustrações: Acervo da editora

Atividades resolvidas

R13. Determine os valores de *k* de modo que a função quadrática $f(x)=x^2-4x+k-1$ seja estritamente positiva em todo o seu domínio.

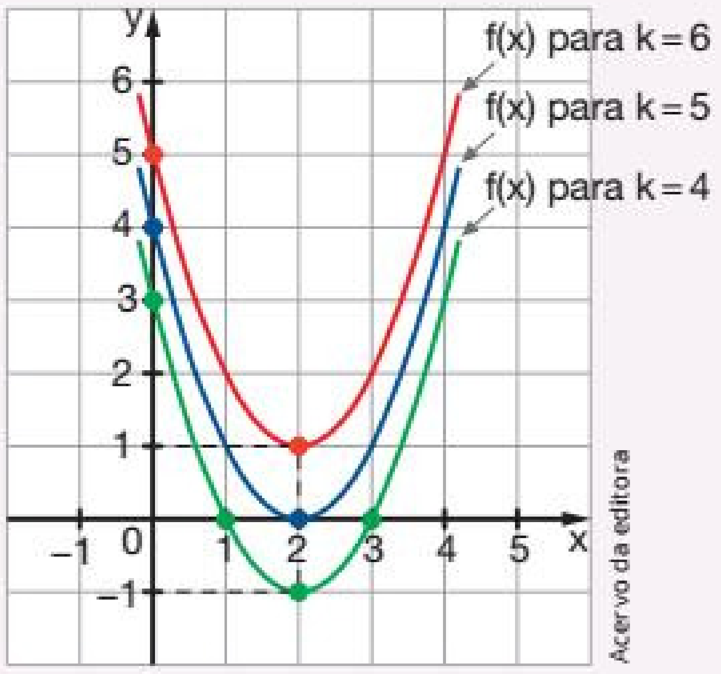
Resolução

Como $a=1>0$, a parábola tem concavidade voltada para cima. Logo, a função será estritamente positiva se não possuir zeros reais, ou seja, $\Delta<0$.

$$b^2-4ac<0\Rightarrow(-4)^2-4\cdot1\cdot(k-1)<0\Rightarrow16-4k+4<0\Rightarrow-4k<-20\Rightarrow k>5$$

Portanto, para $k>5$ temos $f(x)>0$.

Note que, para:
- $k=5$, a função possui dois zeros reais e iguais, pois $\Delta=0$.
- $k<5$, a função possui dois zeros reais e distintos, pois $\Delta>0$.



Acervo da editora

R14. Sejam as funções *f* e *g*, tais que $f(x)=x^2+x-1$ e $g(x)=2x^2+x-2$. Para quais valores de *x* temos $f(x)>g(x)$?

Resolução

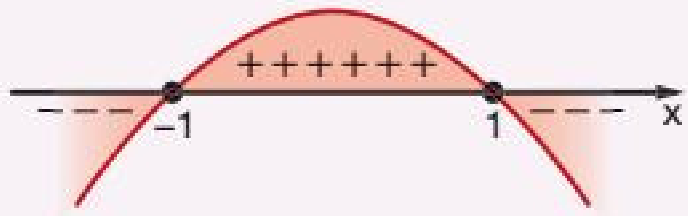
Uma maneira de comparar as funções *f* e *g* é estudar o sinal da função *h*, dada por $h(x)=f(x)-g(x)$.

Temos que:

$$h(x)=f(x)-g(x)=x^2+x-1-(2x^2+x-2)=x^2+x-1-2x^2-x+2\Rightarrow h(x)=-x^2+1$$

Em relação à função *h*, temos:
- como $a=-1<0$, a parábola tem concavidade voltada para baixo;
- a função possui dois zeros reais e distintos, x_1 e x_2.

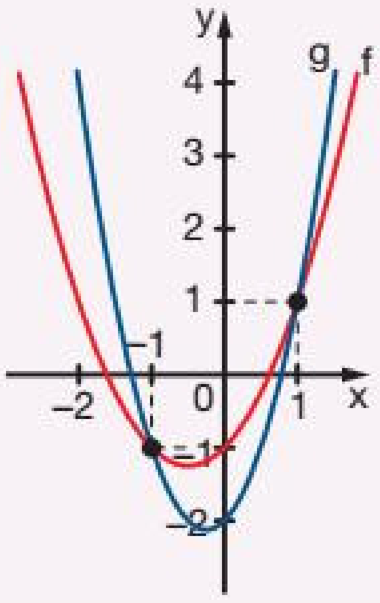
$$-x^2+1=0\Rightarrow x^2=1\left\langle\begin{array}{l}x_1=1\\x_2=-1\end{array}\right.$$



Assim:
- $h(x)=0$ para $x=-1$ ou $x=1$. Nesse caso, $f(x)=g(x)$.
- $h(x)>0$ para $x\in\left]-1,1\right[$. Nesse caso, $f(x)>g(x)$.
- $h(x)<0$ para $x\in\left]-\infty,-1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$. Nesse caso, $f(x)<g(x)$.

Portanto, para $x\in\left]-1,1\right[$, temos $f(x)>g(x)$.

Comparando os gráficos das funções *f* e *g* em um mesmo plano cartesiano, verificamos que:
- $f(x)=g(x)$ para $x=-1$ ou $x=1$
- $f(x)>g(x)$ para $x\in\left]-1,1\right[$
- $f(x)<g(x)$ para $x\in\left]-\infty,-1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$



Ilustrações: Acervo da editora

Atividades

Anote as respostas no caderno.

59. Realize o estudo do sinal das funções.
Respostas no final do livro.

a) $f(x)=x^2-6x+8$

b) $f(x)=-2x^2+9x+5$

c) $f(x)=\frac{1}{4}x^2-3x+9$

d) $f(x)=-x^2+9$

e) $f(x)=3x^2+2x+1$

f) $f(x)=-2x^2+8x$

60. Seja a função quadrática $f(x)=ax^2+bx+c$. Sabendo que $f(x)>0$ somente para $x<-5$ ou $x>2$ e que o gráfico dessa função passa pelo ponto de coordenadas $(0,-20)$, determine a lei de *f*.
$f(x)=2x^2+6x-20$

61. Determine os valores de *k* na função $h(x)=-3x^2-6x+k$, de modo que $h(x)<0$ para todo *x* real. $k<-3$

62. Quais os valores que *x* pode assumir na função $f(x)=-x^2+x+12$ para que $f(x)\geq 0$? $-3\leq x\leq 4$

63. Sabendo que $g(x)=x+2$ e $h(x)=6-3x$, para quais valores de *x* temos $g(x)\cdot h(x)-h(x)\leq 6$? $x\leq 0$ ou $x\geq 1$

64. As funções que relacionam a receita *R* e o custo *C* de uma fábrica são $R(n)=-\frac{1}{2}n^2+20n$ e $C(n)=n^2-40n$, sendo *n* a quantidade de peças produzidas diariamente. Sabendo que o lucro/prejuízo é a diferença entre a receita e o custo, a partir de que quantidade de peças produzidas diariamente essa fábrica obtém prejuízo?
A partir de 41 peças.

65. **Desafio**

Os valores de *x* para os quais a função $f(x)=\frac{x^2-2x-15}{2^x+1}$ é tal que $f(x)<0$ é dado por: c

a) $2<x<4$

b) $-1<x\leq 0$

c) $-3<x<5$

d) $x>5$

e) $x\leq -3$

66. O Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos (CPTEC) possui um sistema de computadores de última geração que possibilita uma previsão meteorológica confiável para todo o território nacional.

Alguns alunos consultaram, no *site* do CPTEC, a temperatura em um município, em vários horários entre as 6 h e as 18 h de certo dia, obtendo como modelo a função $f(x)=-\frac{5}{36}x^2+\frac{7}{2}x+4$, em que $f(x)$ representa a temperatura em graus Celsius no horário *x*.

a) Qual foi aproximadamente a temperatura registrada às 10 h? E às 17 h? 25,11 °C; 23,36 °C

b) Em quais horários a temperatura registrada foi superior a 22 °C? Entre as 7h12min e 18 h.

c) Em que horário foi registrada a maior temperatura? Qual foi essa temperatura?
12h36min; 26,05 °C

d) Junte-se a um colega e discutam acerca da importância das previsões meteorológicas, como, por exemplo, para a agricultura. Em seguida, registrem as conclusões obtidas.
Resposta pessoal.

Inequação do 2º grau

Estudamos anteriormente que resolver uma inequação é determinar os valores de *x* que tornam a desigualdade verdadeira, ou seja, obter o conjunto-solução da inequação. Nesse tópico, resolveremos inequações do 2º grau por meio do estudo do sinal da função quadrática correspondente.

Sendo $f(x)=ax^2+bx+c$ uma função quadrática, denominamos inequação do 2º grau toda desigualdade que, quando reduzida, possui uma das seguintes formas:

- $ax^2+bx+c>0$
- $ax^2+bx+c<0$
- $ax^2+bx+c\geq 0$
- $ax^2+bx+c\leq 0$

Exemplos

- $x^2+4x-\frac{1}{3}<0$
- $-x^2+4\geq -2$
- $2x-5>x^2-5$
- $\frac{x^2}{4}+3x+10\leq 3$

Atividades resolvidas

R15. Resolva em $\mathbb{R}$ as inequações.

a) $3x^2-2x-1\geq 0$

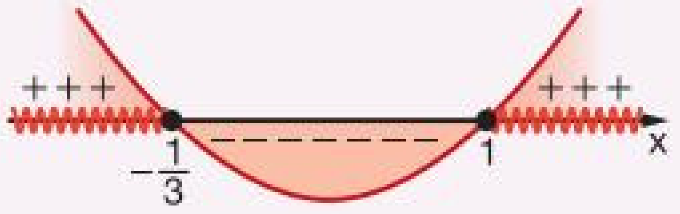
b) $4x^2+2x+1<0$

c) $-2x^2+12x-18<0$

Resolução

a) Consideramos a função *f* dada por $f(x)=3x^2-2x-1$. Fazendo o estudo do sinal de *f*, segue que:

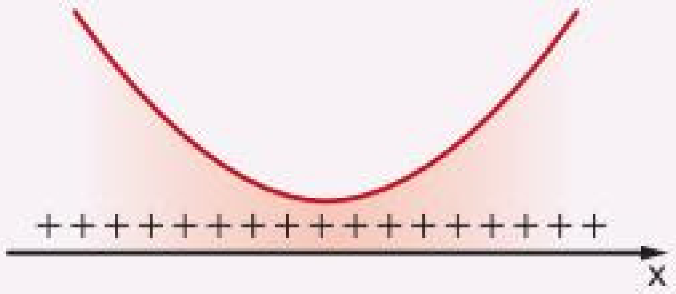
- $a=3>0$
- $\Delta=(-2)^2-4\cdot 3\cdot(-1)=16$
- $x=\dfrac{-(-2)\pm\sqrt{16}}{2\cdot 3}=\dfrac{2\pm 4}{6}\begin{cases}x_1=1\\ x_2=-\dfrac{1}{3}\end{cases}$



Portanto, para $f(x)\geq 0$, temos $S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x\leq -\dfrac{1}{3}\text{ ou } x\geq 1\right\}$.

b) Consideramos a função *g* dada por $g(x)=4x^2+2x+1$. Fazendo o estudo do sinal de *g*, segue que:

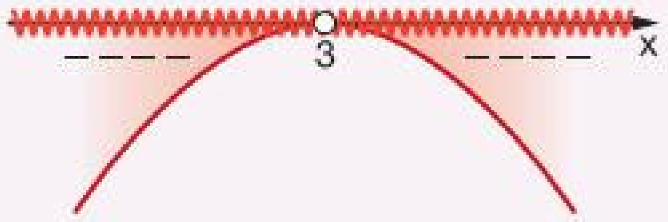
- $a=4>0$
- $\Delta=2^2-4\cdot 4\cdot 1=-12<0$, logo *g* não possui zeros reais.



Portanto, para $f(x)<0$, temos $S=\{\ \}$ ou $S=\varnothing$.

c) Consideramos a função *h* dada por $h(x)=-2x^2+12x-18$. Fazendo o estudo do sinal de *h*, segue que:

- $a=-2<0$
- $\Delta=12^2-4\cdot(-2)\cdot(-18)=0$
- $x=\dfrac{-12\pm\sqrt{0}}{2\cdot(-2)}=3$



Portanto, para $f(x)<0$, temos $S=\mathbb{R}-\{3\}$.

Ilustrações: Acervo da editora

Atividades

Anote as respostas no caderno.

67. Resolva em $\mathbb{R}$ as inequações.

a) $3x^2+18x+15<0$ $S=\{x\in\mathbb{R}\mid -5<x<-1\}$

b) $-x^2+14x-48\leq 0$ $S=\{x\in\mathbb{R}\mid x\leq 6 \text{ ou } x\geq 8\}$

c) $2x^2+x-1>0$ $S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x<-1 \text{ ou } x>\dfrac{1}{2}\right\}$

d) $-2x^2<5$ $S=\mathbb{R}$

e) $-18\leq x-\dfrac{x^2}{3}$ $S=\{x\in\mathbb{R}\mid -6\leq x\leq 9\}$

f) $(x-6)^2\geq 0$ $S=\mathbb{R}$

68. Qual é o menor número natural que satisfaz a inequação $x^2+6x-15<12$? 0

69. Dada a função $f(x)=-3x^2+x+7$, determine os valores reais de *x* para que se tenha $f(-1)\geq f(x+3)$.

70. Quantas são as soluções inteiras da inequação $x^2<\dfrac{27}{4}-3x$? 6 soluções

71. Para quais valores inteiros de *k* a inequação $5x^2+2kx-k>0$ é satisfeita para todo *x* real? $-4, -3, -2$ e -1

69. $S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x\leq -4 \text{ ou } x\geq -\dfrac{5}{3}\right\}$

72. Qual é o domínio da função $h(x)=\sqrt{-x^2+3x+10}$? $D(h)=\{x\in\mathbb{R}\mid -2\leq x\leq 5\}$

73. Considere um triângulo cuja base e altura medem, em centímetros, respectivamente, $4p$ e $(p-1)$, e um retângulo cujos lados medem, em centímetros, $(p+2)$ e *p*. Para quais valores de *p* a área do triângulo é maior que a do retângulo? $p>4$

74. (Udesc-SC) O conjunto-solução da inequação $x^2-2x-3\leq 0$ é: e

a) $\{x\in\mathbb{R}\mid -1<x<3\}$

b) $\{x\in\mathbb{R}\mid -1<x\leq 3\}$

c) $\{x\in\mathbb{R}\mid x<-1 \text{ ou } x>3\}$

d) $\{x\in\mathbb{R}\mid x\leq -1 \text{ ou } x\geq 3\}$

e) $\{x\in\mathbb{R}\mid -1\leq x\leq 3\}$

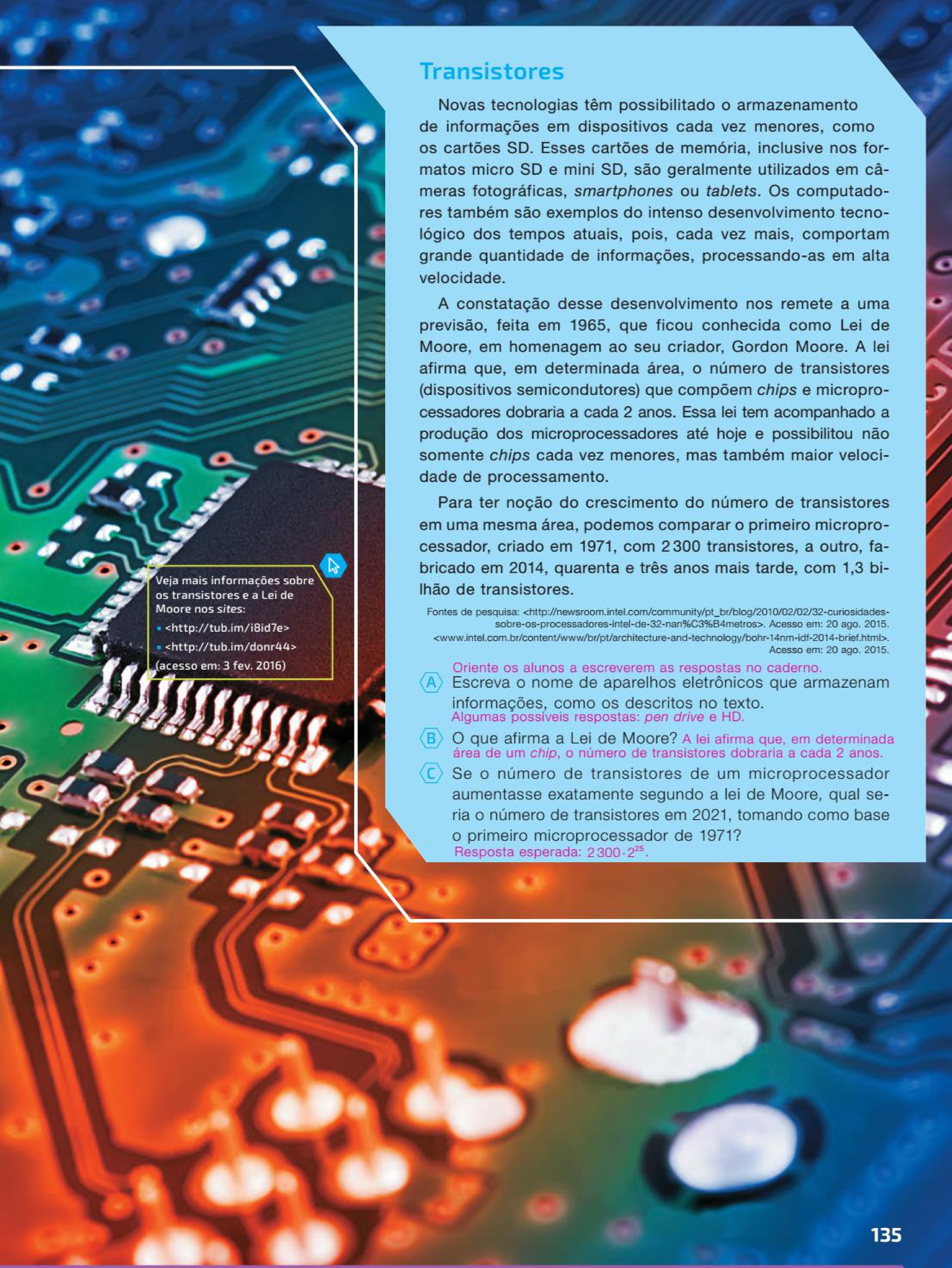
capítulo

5

Função exponencial

chip de computador

Fotomontagem de Eduardo C. S. formada pelas imagens Deni-
Dryashkin/Shutterstock.com e Raimundas/Shutterstock.com



Transistores

Novas tecnologias têm possibilitado o armazenamento de informações em dispositivos cada vez menores, como os cartões SD. Esses cartões de memória, inclusive nos formatos micro SD e mini SD, são geralmente utilizados em câmeras fotográficas, *smartphones* ou *tablets*. Os computadores também são exemplos do intenso desenvolvimento tecnológico dos tempos atuais, pois, cada vez mais, comportam grande quantidade de informações, processando-as em alta velocidade.

A constatação desse desenvolvimento nos remete a uma previsão, feita em 1965, que ficou conhecida como Lei de Moore, em homenagem ao seu criador, Gordon Moore. A lei afirma que, em determinada área, o número de transistores (dispositivos semicondutores) que compõem *chips* e microprocessadores dobraria a cada 2 anos. Essa lei tem acompanhado a produção dos microprocessadores até hoje e possibilitou não somente *chips* cada vez menores, mas também maior velocidade de processamento.

Para ter noção do crescimento do número de transistores em uma mesma área, podemos comparar o primeiro microprocessador, criado em 1971, com 2 300 transistores, a outro, fabricado em 2014, quarenta e três anos mais tarde, com 1,3 bilhão de transistores.

Fontes de pesquisa: <http://newsroom.intel.com/community/pt_br/blog/2010/02/02/32-curiosidades-sobre-os-processadores-intel-de-32-nan%C3%B4metros>. Acesso em: 20 ago. 2015.
<www.intel.com.br/content/www/br/pt/architecture-and-technology/bohr-14nm-idf-2014-brief.html>. Acesso em: 20 ago. 2015.

Veja mais informações sobre os transistores e a Lei de Moore nos *sites*:
- <http://tub.im/i8id7e>
- <http://tub.im/donr44>

(acesso em: 3 fev. 2016)

Oriente os alunos a escreverem as respostas no caderno.

A Escreva o nome de aparelhos eletrônicos que armazenam informações, como os descritos no texto.
Algumas possíveis respostas: *pen drive* e HD.

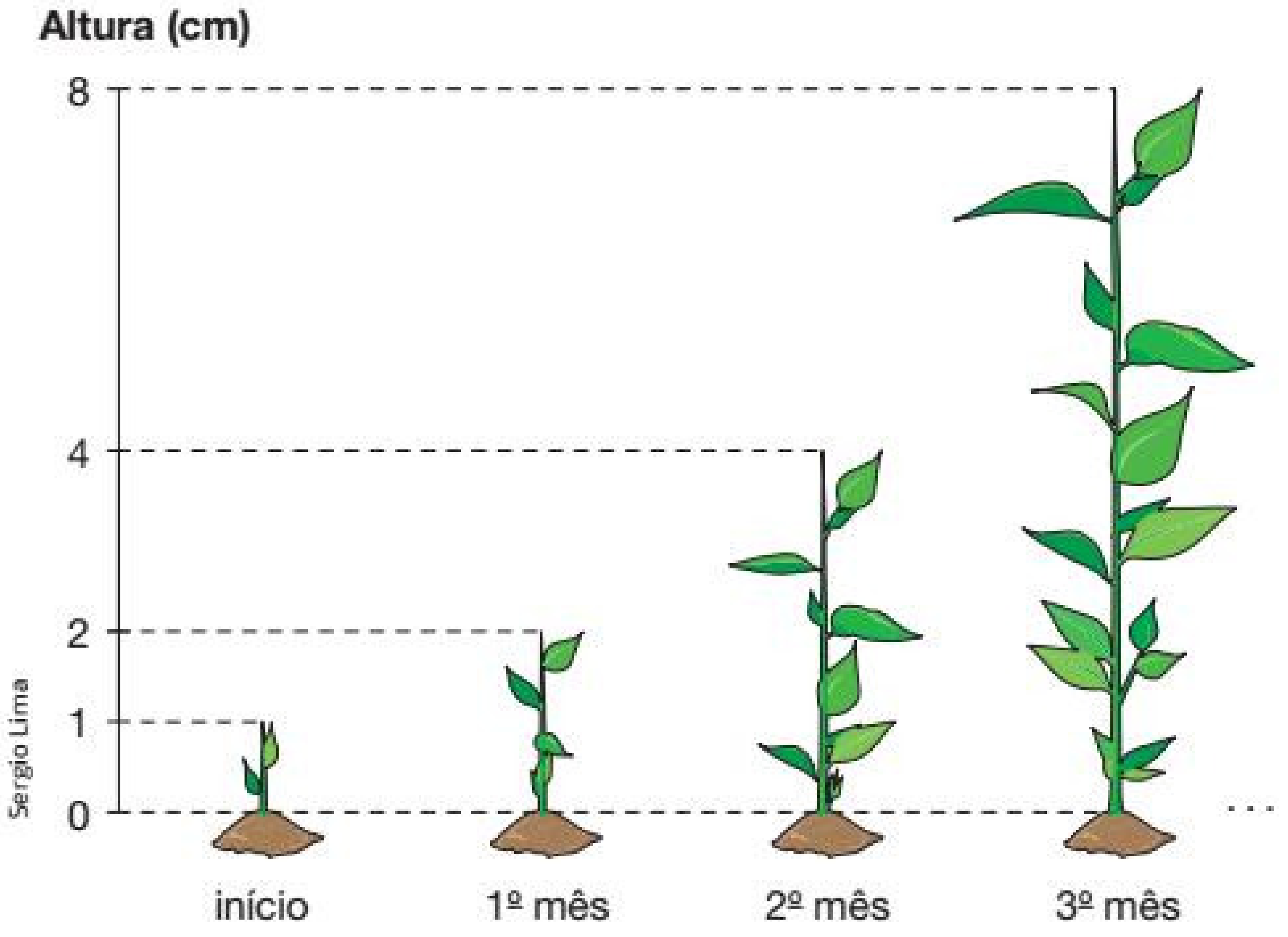
B O que afirma a Lei de Moore? A lei afirma que, em determinada área de um *chip*, o número de transistores dobraria a cada 2 anos.

C Se o número de transistores de um microprocessador aumentasse exatamente segundo a lei de Moore, qual seria o número de transistores em 2021, tomando como base o primeiro microprocessador de 1971?
Resposta esperada: $2\,300 \cdot 2^{25}$.

Estudando função exponencial

Neste capítulo, iremos estudar as funções exponenciais, um tipo de função que descreve várias situações como, por exemplo, o crescimento populacional de bactérias, os rendimentos obtidos em uma aplicação a juros compostos, entre outras.

Veja a seguir uma situação relacionada a uma função exponencial.



Durante determinado período de seu desenvolvimento, a altura de certo tipo de planta dobra a cada mês. Sabendo que a altura da planta no início desse período é 1 cm, calcularemos a altura dessa planta ao final do 4º mês.

A altura da planta, ao final do:

- 1º mês, será 2 cm, pois $2 \cdot 1 = 2$
- 2º mês, será 4 cm, pois $2 \cdot 2 = 4$
- 3º mês, será 8 cm, pois $2 \cdot 4 = 8$
- 4º mês, será 16 cm, pois $2 \cdot 8 = 16$

Podemos escrever a altura da planta, a partir do final do 2º mês, da seguinte maneira:

- 2º mês: $2 \cdot 2 = 2^2 = 4$
- 3º mês: $2 \cdot 4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$
- 4º mês: $2 \cdot 8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$

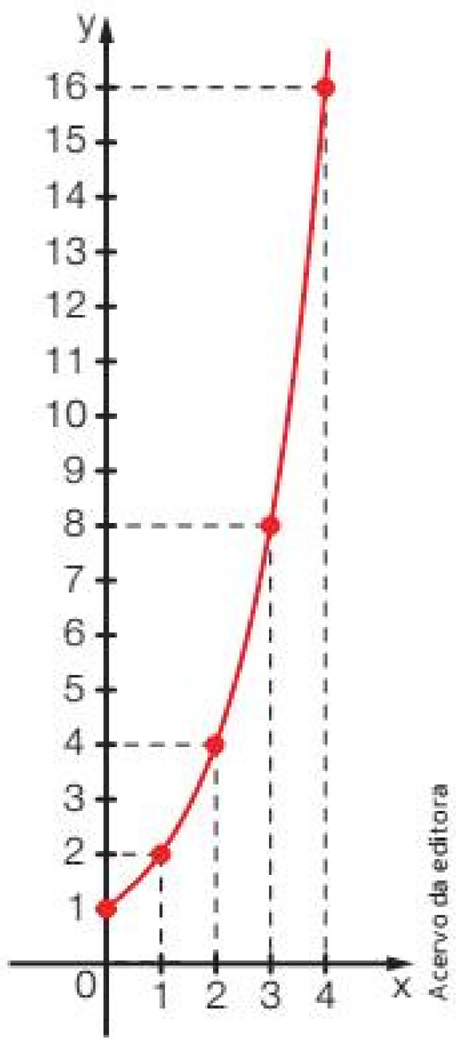
Portanto, a altura da planta ao final do 4º mês será 16 cm.

E qual a altura dessa planta no final do mês *x* do período?

Utilizando raciocínio semelhante, podemos calcular a altura *y* da planta por meio da fórmula $y = 2^x$.

Observando essa fórmula, note que *y* é dado em função de *x*, e que a variável independente está em um expoente. Essa é uma **função exponencial**.

Podemos representar essa situação por meio de um gráfico.



Antes de estudarmos as funções exponenciais, bem como as equações e inequações exponenciais, revisaremos o conceito de potenciação.

Revendo potenciação

No Ensino Fundamental, você provavelmente já estudou a operação de **potenciação** com expoente natural maior do que 1, que corresponde a uma multiplicação de fatores iguais. Veja o exemplo:

$$\underbrace{4\cdot 4\cdot 4\cdot 4\cdot 4}_{\text{5 fatores iguais}} = 4^5 = 1024$$

Na potenciação, podemos destacar os seguintes elementos:

$$\underset{\text{base}}{4}^{\overset{\text{expoente}}{5}} = \underset{\text{potência}}{1024}$$

É importante compreender que a potenciação é diferente da multiplicação. Enquanto a multiplicação é utilizada para representar uma adição de parcelas iguais, a potenciação com expoente natural maior do que 1 representa uma multiplicação de fatores iguais, isto é:

- multiplicação: $\underbrace{7+7+7+7}_{\text{4 parcelas iguais}} = 4\cdot 7 = 28$
- potenciação: $\underbrace{7\cdot 7\cdot 7\cdot 7}_{\text{4 fatores iguais}} = 7^4 = 2\,401$

Potência com expoente natural

Dados $a \in \mathbb{R}$ e $m \in \mathbb{N}$, com $m > 1$, denomina-se **potência** de base *a* e expoente *m* o número a^m, que corresponde ao produto de *m* fatores *a*.

$$a^m = \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ fatores}}$$

No caso de $m=1$ ou $m=0$, definimos:

- $a^1 = a$
- $a^0 = 1$, com $a \neq 0$

Exemplos

- $3^4 = 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3 = 81$
- $1^4 = 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1 = 1$
- $(-3{,}1)^3 = (-3{,}1)\cdot(-3{,}1)\cdot(-3{,}1) = -29{,}791$
- $(-4)^0 = 1$
- $\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5} = \frac{3^3}{5^3} = \frac{27}{125}$
- $\left(-\frac{1}{2}\right)^1 = -\frac{1}{2}$

Potência com expoente inteiro

Dado $a \in \mathbb{R}^*$ e $m \in \mathbb{N}$, definimos:

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

A potência a^{-m}, com $a \neq 0$, é o inverso de a^m.

Exemplos

- $2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$
- $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)^2} = \left(\frac{5}{1}\right)^2 = 25$
- $5^{-1} = \frac{1}{5^1} = \frac{1}{5}$
- $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^3} = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27}$

Propriedades das potências

Agora, vamos rever algumas propriedades das potências.

- **1ª propriedade**: O produto da multiplicação de potências de mesma base pode ser escrito como uma única potência cuja base é a mesma e o expoente é a soma dos expoentes dos fatores. Exemplo:

$$2^3 \cdot 2^2 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{2^3} \cdot \underbrace{2 \cdot 2}_{2^2} = 2^5 \text{ ou } 2^3 \cdot 2^2 = 2^{3+2} = 2^5$$

> De maneira geral, para $a \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}^*$ e $n \in \mathbb{Z}^*$, temos: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$, com $a \neq 0$ se $m < 0$ ou $n < 0$.

- **2ª propriedade**: O quociente da divisão de potências de mesma base (não nula) pode ser escrito como uma única potência cuja base é a mesma e o expoente é a diferença entre os expoentes do dividendo e do divisor. Exemplo:

$$6^5 : 6^3 = \frac{6^5}{6^3} = \frac{6 \cdot 6 \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{6}}{\cancel{6} \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{6}} = 6^2 \text{ ou } 6^5 : 6^3 = 6^{5-3} = 6^2$$

> De maneira geral, para $a \in \mathbb{R}^*$, $m \in \mathbb{Z}^*$ e $n \in \mathbb{Z}^*$, temos: $a^n : a^m = a^{n-m}$.

As propriedades apresentadas podem ser demonstradas.

- **3ª propriedade**: Para elevar o produto de dois ou mais fatores a um expoente, podemos elevar cada um dos fatores a esse mesmo expoente. Exemplo:

$$(4 \cdot 3)^2 = (4 \cdot 3)(4 \cdot 3) = 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 = \underbrace{4 \cdot 4}_{4^2} \cdot \underbrace{3 \cdot 3}_{3^2} = 4^2 \cdot \mathbf{3}^2$$

> De maneira geral, para $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ e $m \in \mathbb{Z}^*$, temos: $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$, com $a \cdot b \neq 0$ se $m < 0$.

- **4ª propriedade**: Para elevar o quociente de uma divisão a um expoente, podemos elevar o dividendo e o divisor a esse mesmo expoente. Exemplo:

$$(15:7)^3 = \left(\frac{15}{7}\right)^3 = \frac{15}{7} \cdot \frac{15}{7} \cdot \frac{15}{7} = \frac{15^3}{7^3}$$

> De maneira geral, para $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$ e $m \in \mathbb{Z}^*$, temos: $(a:b)^m = a^m : b^m$, com $a \neq 0$ se $m < 0$.

- **5ª propriedade**: Para elevar uma potência a um expoente, podemos conservar a base e multiplicar os expoentes. Exemplo:

$$\left(7^2\right)^3 = 7^2 \cdot 7^2 \cdot 7^2 = 7^{2+2+2} = 7^6 \text{ ou } \left(7^2\right)^3 = 7^{2 \cdot 3} = 7^6$$

> De maneira geral, para $a \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}^*$ e $n \in \mathbb{Z}^*$, temos: $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$, com $a \neq 0$ se $m < 0$ ou $n < 0$.

Note que $\left(7^2\right)^3 \neq 7^{2^3}$, pois $\left(7^2\right)^3 = 7^6$ e $7^{2^3} = 7^8$.

Atividades resolvidas

R1. Calcule, em $\mathbb{R}$, as potências.

a) $\left(2^3\right)^2$

b) 2^{3^2}

c) $\left(9 \cdot 3^2 \cdot \frac{1}{3^3}\right)^{-1}$

d) $\left[\frac{\left(5^2\right)^3}{\left(5^3\right)^2}\right]^{-1}$

Resolução

a) $\left(2^3\right)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6 = 64$

b) $2^{3^2} = 2^9 = 512$

c) $\left(9 \cdot 3^2 \cdot \frac{1}{3^3}\right)^{-1} = \left(3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^{-3}\right)^{-1} = \left(3^{2+2-3}\right)^{-1} = \left(3^1\right)^{-1} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$

d) $\left[\frac{\left(5^2\right)^3}{\left(5^3\right)^2}\right]^{-1} = \left(\frac{5^{2 \cdot 3}}{5^{3 \cdot 2}}\right)^{-1} = \left(\frac{5^6}{5^6}\right)^{-1} \left(5^{6-6}\right)^{-1} = \left(5^0\right)^{-1} = 1^{-1} = 1$

Nos itens **a** e **b**, note que $\left(2^3\right)^2 \neq 2^{3^2}$.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

10. d) não; Uma possível resposta: pois a área de um quadrado da sequência deve ser dada por um múltiplo de 4, visto que $(2n)^2 = 4n^2$.

1. Calcule as potências.

a) 13^2 169

b) 2^7 128

c) 29^0 1

d) 7^1 7

e) $(-6)^3$ -216

f) -6^3 -216

g) $\left(-\frac{1}{3}\right)^4$ $\frac{1}{81}$

h) $\left(\frac{8}{5}\right)^3$ $\frac{512}{125}$

i) $3{,}3^2$ 10,89

j) 7^{-2} $\frac{1}{49}$

k) $\left(\frac{5}{2}\right)^{-3}$ $\frac{8}{125}$

l) $(-9)^{-2}$ $\frac{1}{81}$

2. Utilizando as propriedades das potências, verifique que $\dfrac{\left(a^3 \cdot b\right)^2 \cdot \left(a^{-3}\right)^2}{\left(\dfrac{b^{-2}}{a^3}\right)^2} = (a \cdot b)^6$. Resposta nas **Orientações para o professor.**

3. Reduza as expressões a uma única potência.

a) $3^5 \cdot 3^7$ 3^{12}

b) $\dfrac{5^3 \cdot 25^4}{5^2}$ 5^9

c) $\dfrac{4^3 \cdot 2^0 \cdot 2^{3^2}}{8^4 \cdot 2^4}$ 2^{-1}

d) $\left(x^5 \cdot x^2\right)^3$ x^{21}

4. O número $\dfrac{64}{343}$ também pode ser representado por: a; c

a) $\left(\dfrac{4}{7}\right)^3$

b) $\left(\dfrac{7}{4}\right)^3$

c) $\dfrac{343^{-1}}{4^{-3}}$

d) $\dfrac{4^{-3}}{7^3}$

5. Escreva cada número como uma potência de base 10. Lembre aos alunos que 10^n, com $n \in \mathbb{N}$, tem sua escrita formada pelo algarismo 1 seguido por *n* algarismos zero.

a) 0,000001 10^{-6}

b) 0,01 10^{-2}

c) $\dfrac{1}{100\,000}$ 10^{-5}

d) $\dfrac{1000}{10\,000}$ 10^{-1}

e) 10 000 10^4

f) $1\,000\,000 \cdot 1\,000$ 10^9

6. Utilizando o símbolo <, escreva em ordem crescente as potências: -2^2; $(-2)^{-3}$; 2^3; $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$; $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}$; $\left(\frac{2}{3}\right)^2$; $\left(\frac{3}{2}\right)^2$; -3^0; $(-3)^1$. Resposta no final do livro.

7. O valor da expressão $\dfrac{4^3 \cdot 2^{-3} + \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-4} \cdot 3^{-2}}{5 \cdot (1{,}2)^{-1}}$ é: c

a) $\dfrac{432}{25}$

b) $\dfrac{17}{6}$

c) $\dfrac{102}{25}$

d) $\dfrac{25}{23}$

8. Para quais valores de *p* é verdadeira a igualdade $\dfrac{3 \cdot 2^2 - \left(3^{-2}\right)^{-1} + (0{,}2)^{-3}}{p^2} = 8$? $p = -4$ ou $p = 4$

9. Veja a seguir algumas potências de base 4.

$4^1 = 4$	$4^2 = 16$	$4^3 = 64$
$4^4 = 256$	$4^5 = 1024$	$4^6 = 4096$

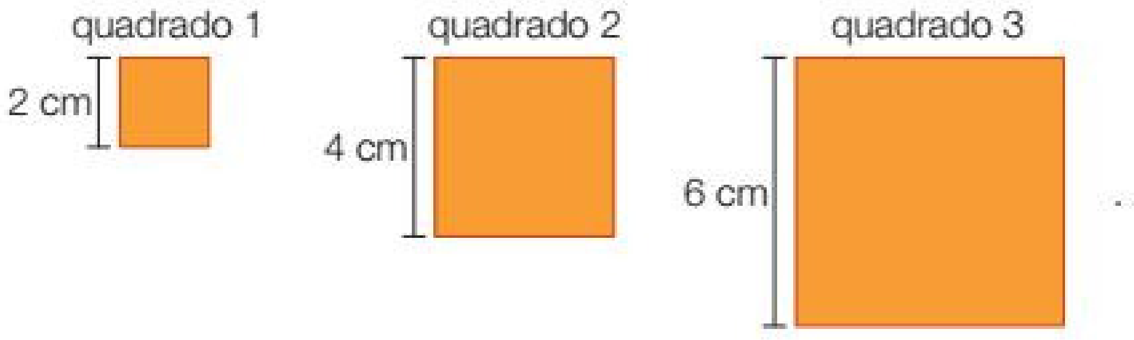
A partir dos padrões que podem ser identificados, determine o algarismo das unidades de:

a) 4^9 4

b) $4^7 \cdot 4^{13}$ 6

c) $4^8 + 4^{15}$ 0

10. Observe a sequência de quadrados.



Ilustrações: Acervo da editora

a) Qual a medida do lado do quadrado 4? E qual é a área? 8 cm; 64 cm²

b) Escreva uma potência que determine a área do quadrado *n* dessa sequência. $(2n)^2$

c) Qual é a área do quadrado:

- 5? 100 cm²
- 8? 256 cm²
- 10? 400 cm²

d) Um quadrado com 81 cm² de área pertence a essa sequência? Por quê?

11. Um dos personagens mais interessantes da História da Matemática é o francês Pierre de Fermat (1601-1665). Advogado de profissão, Fermat dedicava boa parte de seu tempo livre ao estudo da Matemática, tendo nessa ciência seu principal passatempo. Mesmo não sendo um matemático de ofício, as contribuições desse estudioso fizeram com que fosse considerado por seus contemporâneos o "príncipe dos amadores".

Pierre de Fermat

Autor desconhecido. 1843. Gravura. Em "Magasin Pittoresque", Paris. Coleção particular. Foto: Marzolino/Shutterstock.com

Às margens de um livro em que estudava, Fermat enunciou um teorema – denominado posteriormente de "O Último Teorema de Fermat" – que se tornou um célebre problema na Matemática:

> **A equação $x^m + y^m = z^m$, na qual *m* é um número inteiro qualquer maior que 2, não admite solução para *x*, *y* e *z* inteiros e diferentes de zero.**

De acordo com Fermat, a demonstração desse teorema era fácil, contudo não iria fazê-la por falta de espaço na margem do livro. Ocorre que, desde sua publicação, diversos matemáticos tentaram demonstrá-lo, porém esse feito somente foi realizado há alguns anos, em 1993.

Fonte de pesquisa: BOYER, Carl Benjamin. **História da matemática.** Tradução Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

Junte-se a um colega e mostrem, por meio de três exemplos, que a igualdade $x^m + y^m = z^m$, para $m = 2$, é válida para alguns números inteiros *x*, *y* e *z*, diferentes de zero. Algumas possíveis respostas: $3^2 + 4^2 = 5^2$, $6^2 + 8^2 = 10^2$ e $12^2 + 5^2 = 13^2$

Potência com expoente racional

Lembre-se de que, para calcular a raiz enésima de *a*, com $a \in \mathbb{R}$ e $n > 1$, temos que considerar os seguintes casos:

- se *n* for par e $a \geq 0$, temos que $\sqrt[n]{a}$ é um número *b*, com $b \geq 0$, tal que $b^n = a$;
- se *n* for par e $a < 0$, não existe $\sqrt[n]{a}$ no conjunto dos números reais;
- se *n* for ímpar, temos que $\sqrt[n]{a}$ é um número *b*, tal que $b^n = a$.

Agora, estudaremos as potências com expoentes racionais.

Inicialmente, considere a igualdade $x = \sqrt[3]{7^2}$.

Pela definição de raiz, temos que, se $\sqrt[n]{a} = b$, então $b^n = a$. Assim, temos que:

$$x = \sqrt[3]{7^2} \Rightarrow x^3 = 7^2$$

Como ambos os membros da igualdade são positivos, temos:

$$x^3 = 7^2 \Rightarrow \left(x^3\right)^{\frac{1}{3}} = \left(7^2\right)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow x^{\frac{3}{3}} = 7^{\frac{2}{3}} \Rightarrow x = 7^{\frac{2}{3}}$$

De maneira geral, dado $a \in \mathbb{R}_+^*$ e o número racional $\frac{m}{n}$, com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{Z}_+^*$, temos: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

As propriedades estudadas na página **138** também são válidas para as potências com expoente racional.

Exemplos

- $6^{\frac{1}{2}} = \sqrt{6}$
- $12^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{12^3}$
- $\sqrt{51} = 51^{\frac{1}{2}}$
- $\sqrt[5]{7^2} = 7^{\frac{2}{5}}$

Potência com expoente irracional

Estudaremos potências com expoente irracional por meio de aproximações. Para calcularmos $2^{\sqrt{6}}$, por exemplo, inicialmente obtemos valores aproximados do número irracional $\sqrt{6}$:

$$2 \quad 2{,}4 \quad 2{,}44 \quad 2{,}449 \quad 2{,}4494 \quad \cdots$$

Em seguida, definimos as potências de base 2 e expoente com essas aproximações:

$$2^2 \quad 2^{2{,}4} \quad 2^{2{,}44} \quad 2^{2{,}449} \quad 2^{2{,}4494} \quad \ldots$$

Quando o expoente se aproxima de $\sqrt{6}$, a potência se aproxima de $2^{\sqrt{6}}$. Utilizando uma calculadora científica, podemos calcular essas potências.

- $\sqrt{6} \simeq 2 \longrightarrow 2^2 = 4$
- $\sqrt{6} \simeq 2{,}4 \longrightarrow 2^{2{,}4} \simeq 5{,}278031643$
- $\sqrt{6} \simeq 2{,}44 \longrightarrow 2^{2{,}44} \simeq 5{,}42641731$
- $\sqrt{6} \simeq 2{,}449 \longrightarrow 2^{2{,}449} \simeq 5{,}460374872$
- $\sqrt{6} \simeq 2{,}4494 \longrightarrow 2^{2{,}4494} \simeq 5{,}461889019$

...

José Vitor Elorza/ASC Imagens

calculadora

Em calculadoras como a apresentada ao lado, um valor aproximado de $2^{\sqrt{6}}$ pode ser obtido também ao clicar nos botões:

2 ^ √ 6 =

Camila Ferreira

Assim, obtemos o valor aproximado da potência $2^{\sqrt{6}}$, isto é, uma potência a^m, na qual $a \in \mathbb{R}_+^*$ e $m \in \mathbb{I}$. Potências desse tipo sempre correspondem a um número real positivo.

Potência com expoente real

Como o conjunto dos números reais é a união do conjunto dos números racionais com o dos irracionais, podemos agora calcular potências de base positiva com expoentes reais quaisquer, isto é, potências do tipo a^m, em que $a \in \mathbb{R}_+^*$ e $m \in \mathbb{R}$.

Quando $a = 0$ ou $a < 0$, a potência com expoente real pode ou não estar definida em $\mathbb{R}$.

Atividades resolvidas

R2. Calcule as expressões.

a) $\left(2^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}$

b) $5^{0,\overline{3}} \cdot 5^{0,\overline{6}} \cdot 25^{0,5}$

Resolução

a) $\left(2^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}} = 2^{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = 2^{3^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{2}}} = 2^{3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}} = 2^{3^1} = 2^3 = 8$

b) $5^{0,\overline{3}} \cdot 5^{0,\overline{6}} \cdot 25^{0,5} = 5^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{2}{3}} \cdot (5^2)^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}} \cdot 5^{2\cdot\frac{1}{2}} = 5^1 \cdot 5^1 = 5^2 = 25$

Atividades

Anote as respostas no caderno.

12. Escreva os radicais na forma de potência.

a) $\sqrt[2]{6^9}$ $6^{\frac{9}{2}}$

b) $\sqrt[15]{-13^3}$ $(-13)^{\frac{1}{5}}$

c) $\sqrt[7]{(-8)^4}$ $(-8)^{\frac{4}{7}}$

d) $\sqrt{\sqrt[6]{9^4}}$ $9^{\frac{1}{3}}$

e) $\sqrt{\left(\sqrt[5]{7}\right)^4}$ $7^{\frac{2}{5}}$

f) $\left(\sqrt[5]{\left(\frac{10}{3}\right)^8}\right)^3$ $\left(\frac{10}{3}\right)^{\frac{24}{5}}$

13. Se $x = \sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[4]{2^6}}}$, então x^3 é igual a: a

a) $\sqrt[4]{2^3}$

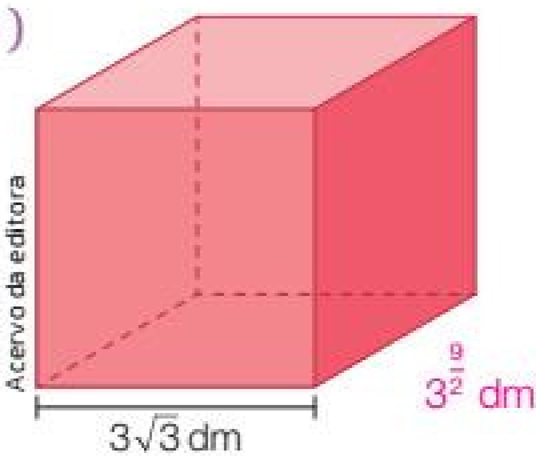
b) $\sqrt[3]{2^4}$

c) 2

d) $2^{-\frac{3}{4}}$

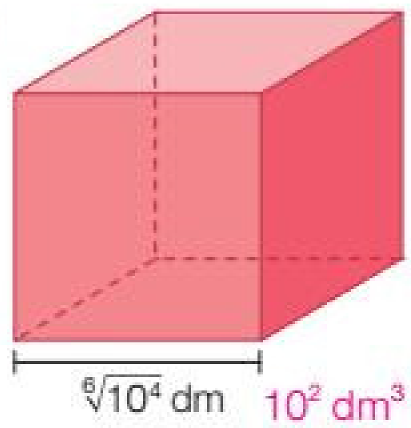
14. Escreva o volume de cada cubo na forma de potência.

a)



$3^{\frac{9}{2}}$ dm³

b)



10^2 dm³

Ilustrações: Acervo da editora

15. Calcule a potência $256^{-\frac{3}{4}}$. $\frac{1}{64}$

16. Escreva cada número como uma potência de base 5.

a) 3 125 5^5

b) $\sqrt{125}$ $5^{\frac{3}{2}}$

c) 0,008 5^{-3}

d) $\sqrt[5]{0,2}$ $5^{-\frac{1}{5}}$

e) $\sqrt{625}$ 5^2

f) $\sqrt[3]{\frac{1}{25}}$ $5^{-\frac{2}{3}}$

17. Copie as alternativas em que todas as potências estão definidas em $\mathbb{R}$. b; d

a) $6^{-\frac{8}{3}}$; 0^{-1}; $2^{\frac{1}{5}}$

b) $(-3)^{\frac{1}{7}}$; $\left(\frac{1}{8}\right)^{-2,5}$; $(-125)^{\frac{1}{3}}$

c) $0^{\frac{4}{3}}$; $(-15)^{\frac{3}{4}}$; $-1^{\sqrt{2}}$

d) $10^{-\frac{2}{3}}$; $-\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{5}{2}}$; $-7^{1,4}$

18. **Calculadora**

Veja como podemos calcular uma potência utilizando uma calculadora científica.

Para calcular a potência $12^{0,6}$, por exemplo, procedemos de seguinte maneira:

Registramos o número 12, digitamos a tecla exponencial ^ e, em seguida, o número 0,6, seguido da tecla =:

1 → 2 → ^ → 0 → • → 6 → =

Diga aos alunos que em algumas calculadoras científicas a tecla exponencial é $\boxed{x^y}$ ou $\boxed{y^x}$.

Camila Ferreira

Agora, com o auxílio de uma calculadora científica, calcule as potências.

a) 5^{11} 48828125

b) $(-12)^6$ 2985984

c) $\left(\frac{8}{3}\right)^9$ aproximadamente 6818,967027

d) $\left(\frac{1}{7}\right)^{-3,5}$

e) $16^{0,25}$ 2

f) $6^{\frac{3}{2}}$

19. Calcule o valor numérico das expressões.

a) $\left(\sqrt[6]{4}\right)^{-3} - \left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right)^2$ $-\frac{47}{6}$

b) $5^{1,\overline{6}} \cdot 25^{-\frac{1}{3}}$ 5

c) $\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\right)^6 + (0,4)^{-3} + \sqrt{8^{-2}}$ $\frac{127}{8}$

d) $4^3 + \left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{1}{3}} - \left(\sqrt{2}\right)^6$ 59

20. O valor mais próximo do resultado da expressão $\left(\sqrt{6}\right)^4 \cdot (0,04)^{0,5} - \left(3^{\sqrt{3}}\right)^{-\sqrt{2}}$ é: d

a) −8

b) −21

c) 16

d) 7

Lembre-se de que $2 < \sqrt{6} < 3$.

18. d) aproximadamente 907,4926997

f) aproximadamente 14,69693846

Notação científica

Quando trabalhamos com números muito grandes ou muito pequenos, podemos utilizar uma escrita abreviada denominada **notação científica**. Os números representados com essa notação são escritos na forma $q \cdot 10^n$, em que:

- *q* é um número racional maior ou igual a 1 e menor que 10
- *n* é um número inteiro

Veja alguns exemplos de números escritos em notação científica.

- Massa da Lua: 73 420 000 000 000 000 000 000 kg

$$73\,420\,000\,000\,000\,000\,000\,000 = 7{,}342 \cdot 10\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000 =$$
$$= 7{,}342 \cdot 10^{22}$$

- Espessura de um fio de cabelo: 0,00007 m

$$0{,}00007 = \frac{7}{100\,000} = 7 \cdot 10^{-5}$$

- Tamanho da molécula de água: 0,00000001 m

$$0{,}00000001 = \frac{1}{100\,000\,000} = 1 \cdot 10^{-8}$$

Atividades

Anote as respostas no caderno.

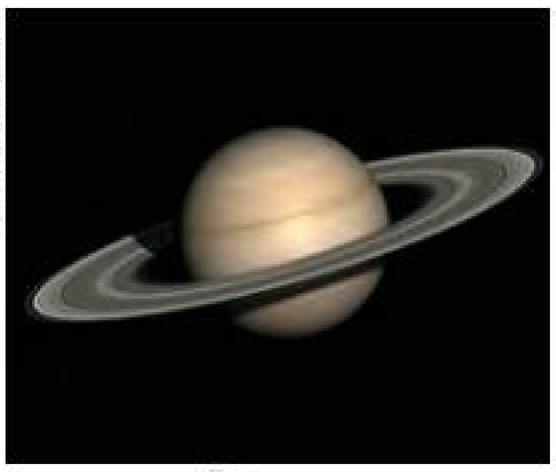
21. Veja a distância média, em quilômetros, de cada planeta do Sistema Solar em relação ao Sol.


MarcelClemens/NASA/Shutterstock.com

Júpiter
$778 \cdot 10^6$ $7{,}78 \cdot 10^8$ km


mr.Timmi/NASA/Shutterstock.com

Mercúrio
$58 \cdot 10^6$ $5{,}8 \cdot 10^7$ km


MarcelClemens/NASA/Shutterstock.com

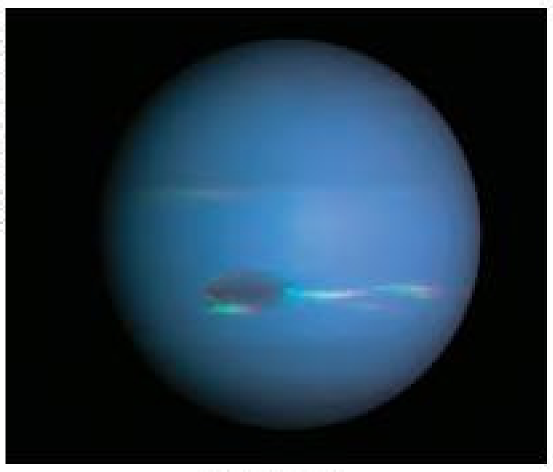
Saturno
$14 \cdot 10^8$ $1{,}4 \cdot 10^9$ km


mr.Timmi/NASA/Shutterstock.com

Urano
$29 \cdot 10^8$ $2{,}9 \cdot 10^9$ km


mr.Timmi/NASA/Shutterstock.com

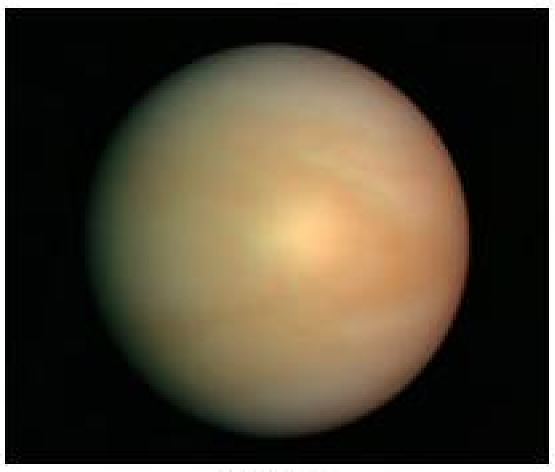
Marte
$228 \cdot 10^6$ $2{,}28 \cdot 10^8$ km


MarcelClemens/NASA/Shutterstock.com

Netuno
$45 \cdot 10^8$ $4{,}5 \cdot 10^9$ km


MarcelClemens/NASA/Shutterstock.com

Terra
$15 \cdot 10^7$ $1{,}5 \cdot 10^8$ km


MarcelClemens/NASA/Shutterstock.com

Vênus
$108 \cdot 10^6$ $1{,}08 \cdot 10^8$ km

Fonte de pesquisa: <https://solarsystem.nasa.gov/planets/>. Acesso em: 11 set. 2015.

a) Estime, sem realizar cálculos por escrito, qual planeta é, em média, mais próximo do Sol: Terra ou Júpiter? Resposta esperada: Júpiter

b) Utilizando notação científica, escreva a distância média de cada planeta em relação ao Sol.

c) Com base na resposta do item **b**, verifique se a estimativa que você realizou no item **a** está correta. Converse com o professor e os colegas sobre como a organização das distâncias em notação científica pode auxiliar na comparação entre elas. Resposta pessoal.

d) Qual é o planeta mais próximo do Sol? E o mais distante? Mercúrio; Netuno

No item c, espera-se que os alunos percebam que a organização das distâncias em notação científica auxilia na comparação entre elas.

22. Leia as informações e escreva os números apresentados em notação científica.

a) Galileu foi um dos primeiros a tentar medir a velocidade da luz, que atualmente sabemos ser, no ar, de aproximadamente 299 000 000 m/s. $2{,}99\cdot10^{8}$ m/s

b) A baleia-azul é o maior animal do planeta, chegando a pesar cerca de 160 000 kg. $1{,}6\cdot10^{5}$ kg

c) O espermatozoide, cujo comprimento é de cerca de 0,0065 cm, é uma das menores células do corpo humano. $6{,}5\cdot10^{-3}$ cm

d) A estrela mais próxima da Terra, depois do Sol, fica a uma distância de aproximadamente $399\cdot10^{11}$ km. $3{,}99\cdot10^{13}$ km

23. Calcule mentalmente o resultado das expressões:

a) $9{,}52\cdot10^{2}$ 952

b) $34\cdot10^{3}$ 34 000

c) $457\cdot10^{-2}$ 4,57

d) $168\cdot10^{-4}$ 0,0168

e) $0{,}015\cdot10^{6}$ 15 000

f) $0{,}2\cdot10^{-3}$ 0,0002

24. Observe as informações e responda.

Países mais populosos do mundo em 2014

País	População
Brasil	$2{,}02\cdot10^{8}$
China	$1{,}3938\cdot10^{9}$
Estados Unidos	$3{,}226\cdot10^{8}$
Índia	$1{,}2674\cdot10^{9}$
Indonésia	$2{,}528\cdot10^{8}$

Fonte: ALMANAQUE ABRIL. São Paulo: Abril, 2015.

Pedro Amatuzzi/Código19/Folhapress

São Paulo é o estado mais populoso do Brasil. Na fotografia podemos observar pessoas no comércio de Campinas (SP), em 2015.

a) Qual é o país mais populoso do mundo? E qual ocupa a 4ª posição? China; Indonésia

b) A população dos Estados Unidos corresponde a que porcentagem da população da Índia? aproximadamente 25%

c) Os países apresentados no texto, juntos, possuem uma população de: $3{,}4386\cdot10^{9}$

- $3{,}4386\cdot10^{8}$
- $3{,}4386\cdot10^{9}$
- $3{,}4386\cdot10^{12}$
- $3{,}4386\cdot10^{17}$

O texto a seguir refere-se às próximas duas questões.

(Enem-MEC) Se compararmos a idade do planeta Terra, avaliada em quatro e meio bilhões de anos ($4{,}5\times10^{9}$ anos), com a de uma pessoa de 45 anos, então, quando começaram a florescer os primeiros vegetais, a Terra já teria 42 anos. Ela só conviveu com o homem moderno nas últimas quatro horas e, há cerca de uma hora, viu-o começar a plantar e a colher. Há menos de um minuto percebeu o ruído de máquinas e de indústrias e, como denuncia uma ONG de defesa do meio ambiente, foi nesses últimos sessenta segundos que se produziu todo o lixo do planeta!

25. O texto permite concluir que a agricultura começou a ser praticada há cerca de: d

a) 365 anos

b) 460 anos

c) 900 anos

d) 10 000 anos

e) 460 000 anos

26. Na teoria do *big bang*, o Universo surgiu há cerca de 15 bilhões de anos, a partir da explosão e expansão de uma densíssima gota. De acordo com a escala proposta no texto, essa teoria situaria o início do Universo há cerca de: b

a) 100 anos

b) 150 anos

c) 1 000 anos

d) 1 500 anos

e) 2 000 anos

27. (Enem-MEC) A Terra é cercada pelo vácuo espacial e, assim, ela só perde energia ao irradiá-la para o espaço. O aquecimento global que se verifica hoje decorre de pequeno desequilíbrio energético, de cerca de 0,3%, entre a energia que a Terra recebe do Sol e a energia irradiada a cada segundo, algo em torno de 1 W/m^{2}. Isso significa que a Terra acumula, anualmente, cerca de $1{,}6\cdot10^{22}$ J.

Considere que a energia necessária para transformar 1 kg de gelo a 0 °C em água líquida seja igual a $3{,}2\cdot10^{5}$ J. Se toda a energia acumulada anualmente fosse usada para derreter o gelo nos polos (a 0 °C), a quantidade de gelo derretida anualmente, em trilhões de toneladas, estaria entre: b

a) 20 e 40

b) 40 e 60

c) 60 e 80

d) 80 e 100

e) 100 e 120

J é o símbolo utilizado para representar a unidade de medida de energia Joule.

Função exponencial

Uma função $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}_{+}^{*}$, definida por $f(x)=a^x$ ou $y=a^x$, com $a>0$ e $a\neq1$, é denominada **função exponencial**.

As funções $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}_{+}^{*}$, definidas por $f(x)=b\cdot a^x+c$, com $a>0$, $a\neq1$ e $b\neq0$ podem ser denominadas do **tipo exponencial**.

Exemplos

- $f(x)=7^x$
- $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$
- $h(x)=\left(\sqrt{6}\right)^x$
- $m(x)=(0,5)^x$

Na definição, as restrições $a>0$ e $a\neq1$ são necessárias, pois, caso contrário, não seria possível caracterizar uma função exponencial.

- Se $a=1$, então $f(x)=a^x$ seria uma função constante.

  $f(x)=1^x=1$, para todo $x\in\mathbb{R}$

- Se $a\leq0$, então $f(x)=a^x$ não é definida para todo $x\in\mathbb{R}$, como desejado. Exemplos:

  Para $a=-3$ e $x=\frac{1}{2}$, temos $f\left(\frac{1}{2}\right)=(-3)^{\frac{1}{2}}$ e $(-3)^{\frac{1}{2}}\notin\mathbb{R}$.

  Para $a=0$ e $x=-7$, temos $f(-7)=0^{-7}$ e 0^{-7} não está definido em $\mathbb{R}$.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

28. Identifique as funções exponenciais. a; d; f

a) $f(x)=(0,3)^{2x}$

b) $f(x)=2x^8$

c) $f(x)=1^{6x}$

d) $f(x)=\left(\frac{8}{5}\right)^{\frac{x}{7}}$

e) $f(x)=(-4)^x$

f) $f(x)=12^{\frac{2}{3}x}$

29. Sendo $f(x)=3^x$ e $g(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^x$, determine:

a) $f(0)$ 1

b) $f(1)$ 3

c) $f(-4)$ $\frac{1}{81}$

d) $f\left(\frac{1}{3}\right)$ $\sqrt[3]{3}$

e) $g(1)$ $\frac{1}{4}$

f) $g(2)$ $\frac{1}{16}$

g) $g(-3)$ 64

h) $g\left(\frac{1}{2}\right)$ $\frac{1}{2}$

30. Determinado imóvel foi avaliado em R$ 350 000,00 e, a partir daí, valoriza-se exponencialmente de acordo com a função $v(t)=350(1{,}1)^t$, em que *t* representa o tempo em anos a partir da avaliação e *v* é o valor do imóvel em milhares de reais. Qual será o valor desse imóvel após 3 anos da avaliação?
R$ 465 850,00

31. Alguns fornos elétricos contêm um dispositivo que controla a temperatura em seu interior. Assim, o aparelho desliga automaticamente quando chega à temperatura desejada e torna a ligar quando há certa perda na temperatura. Um forno elétrico que possui esse dispositivo tem sua temperatura interna *T* calculada em função do tempo *t* que o forno está ligado, em minutos, pela função $T(t)=300-265\cdot(0{,}3)^{\frac{t}{10}}$.

Qual é a temperatura interna desse forno elétrico 5 min após ter sido ligado? E após 20 min?
aproximadamente 154,85 °C; 276,15 °C

32. Para analisar o efeito de um remédio no extermínio de determinada bactéria, cientistas fizeram experimentos expondo uma população desse microrganismo ao remédio e verificando o tempo necessário para que fosse exterminada. Ao final, verificou-se que a população *p* da bactéria *d* dias após a exposição ao remédio poderia ser estimada por meio da função $p(d)=6\,000\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^d$.

Dois dias após a exposição ao remédio, a população da bactéria reduziu-se a quantos por cento da população inicial? 6,25%

33. Certo banco oferece um investimento que rende uma taxa de 6% ao ano de juros compostos. Observe a simulação de um investimento de R$ 1500,00 em um período de três anos.

Ano (n)	Juro (J)	Montante (M)
1	$1\,500{,}00\cdot0{,}06=90{,}00$	$1\,500{,}00+90{,}00=1\,590{,}00$
2	$1\,590{,}00\cdot0{,}06=95{,}40$	$1\,590{,}00+95{,}40=1\,685{,}40$
3	$1\,685{,}40\cdot0{,}06=101{,}12$	$1\,685{,}40+101{,}12=1\,786{,}52$

a) Qual das funções a seguir determina o montante *M* obtido ao final do ano *n*, ao se investir R$ 1500,00? $M=1\,500(1{,}06)^n$

- $M=1500(6)^n$
- $M=1500(1{,}06)^n$
- $M=1500+6^n$
- $M=1500+(1{,}06)^n$

b) Qual será o montante ao final de 4 anos? E de 6 anos? R$ 1 893,72; R$ 2 127,78

34. Atualmente, há uma grande oferta de crédito no mercado e muitas instituições financeiras realizam empréstimos pessoais sem grandes exigências de renda. No entanto, o indivíduo que deseja fazer o empréstimo deve estudar os termos do contrato e escolher a instituição financeira que propuser a forma de pagamento mais adequada às suas condições, inclusive pesquisando taxas de juros justas.

Para realizar um empréstimo de R$ 1 000,00, certa pessoa consultou duas instituições financeiras, **A** e **B**. Ambas cobram a dívida pelo sistema de juros compostos e o pagamento deve ser feito em parcela única *m* meses após a data da assinatura do contrato. No entanto, **A** utiliza uma taxa de 5% ao mês, e **B**, de 3% ao mês. As funções que representam o valor da dívida desse empréstimo nas instituições financeiras **A** e **B**, respectivamente, são: c

a) $f(m) = 1000 + (1{,}05)^m$ e $g(m) = 1000 + (1{,}03)^m$

b) $f(m) = 1000 + (0{,}05)^m$ e $g(m) = 1000 + (0{,}03)^m$

c) $f(m) = 1000 \cdot (1{,}05)^m$ e $g(m) = 1000 \cdot (1{,}03)^m$

d) $f(m) = 1000 \cdot (0{,}05)^m$ e $g(m) = 1000 \cdot (0{,}03)^m$

35. Há uma lenda que credita a invenção do xadrez a um brâmane de uma corte indiana, que, atendendo a um pedido do rei, inventou o jogo para demonstrar o valor da inteligência. O rei, encantado com o invento, ofereceu ao brâmane a escolha de uma recompensa. De acordo com essa lenda, o inventor do jogo de xadrez pediu ao rei que a recompensa fosse paga em grãos de trigo da seguinte maneira: 1 grão para a casa 1 do tabuleiro, 2 grãos para a casa 2, 4 para a casa 3, 8 para a casa 4 e assim sucessivamente. Ou seja, a quantidade de grãos para cada casa do tabuleiro correspondia ao dobro da quantidade da casa imediatamente anterior.


artemisphoto/ Shutterstock.com

O tabuleiro de xadrez possui casas alternadamente claras e escuras, sendo 32 de cada. As peças utilizadas para jogar também são claras e escuras, sendo 16 peças para cada jogador. O jogo de xadrez estimula o raciocínio lógico, entre outros benefícios.

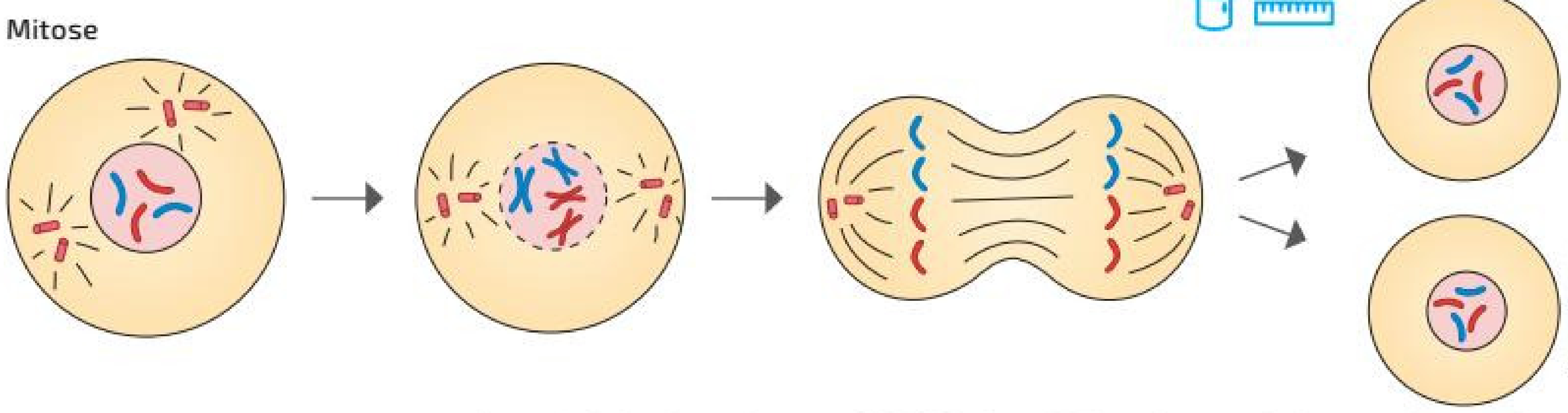
a) De acordo com a lenda, qual é a quantidade de grãos de trigo correspondente à casa 6 do tabuleiro? E à casa 10? 32 grãos de trigo; 512 grãos de trigo

b) Escreva uma função *f* que expresse a quantidade de grãos de trigo em função do número *x* da casa do tabuleiro. $f(x) = 2^{x-1}$

c) Sabendo que o tabuleiro de xadrez possui 64 casas, qual o conjunto domínio da função *f*? $D(f) = \{x \in \mathbb{N}^* \mid 1 \leq x \leq 64\}$

d) Escreva, na forma de potência, quantos grãos de trigo devem ser colocados na última casa do tabuleiro de xadrez. 2^{63}

36. A divisão celular denominada mitose consiste em uma célula duplicar o seu conteúdo e então se dividir em duas, chamadas células-filhas. Cada célula-filha, por sua vez, repete esse processo, totalizando, após a 2ª divisão, quatro células-filhas.



Renan Fonseca

Ilustração elaborada com base em: TORTORA, Gerard J. **Corpo humano**: fundamentos de anatomia e fisiologia. Tradução Cláudia L. Zimmer. 4. ed. Porto Alegre: Artmed, 2000. p. 56.

a) Determine o número total de células-filhas obtidas a partir de uma única célula após:
- 3 divisões 8 células-filhas
- 4 divisões 16 células-filhas
- 7 divisões 128 células-filhas

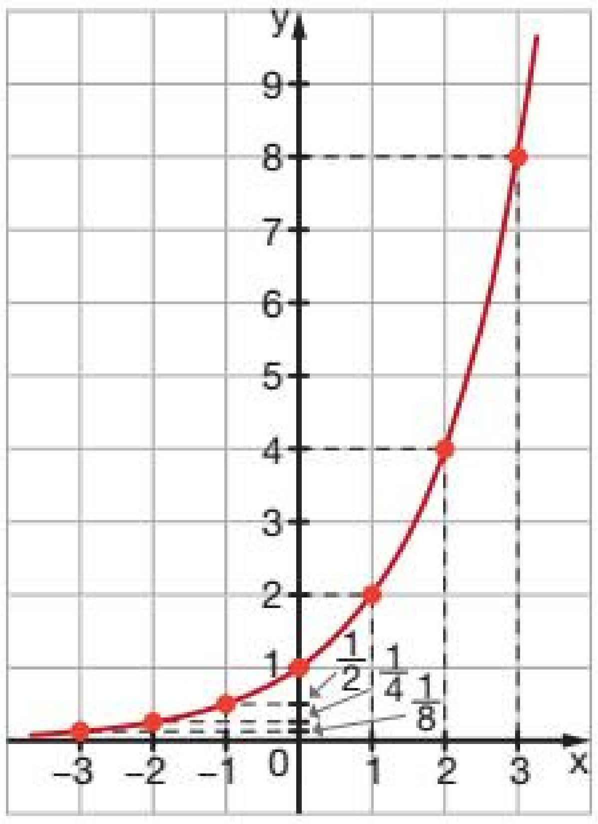
b) Escreva uma função que associe a quantidade total de células-filhas *y*, obtida a partir de uma única célula, após uma quantidade *x* $(x > 0)$ de divisões. $y = 2^x$

Gráfico de uma função exponencial

Vamos esboçar o gráfico das funções exponenciais $f(x)=2^x$ e $g(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$. Para isso, atribuímos alguns valores para *x* e calculamos os valores correspondentes de *y*, determinando pares ordenados (x, y). Em seguida, representamos esses pares ordenados em um plano cartesiano.

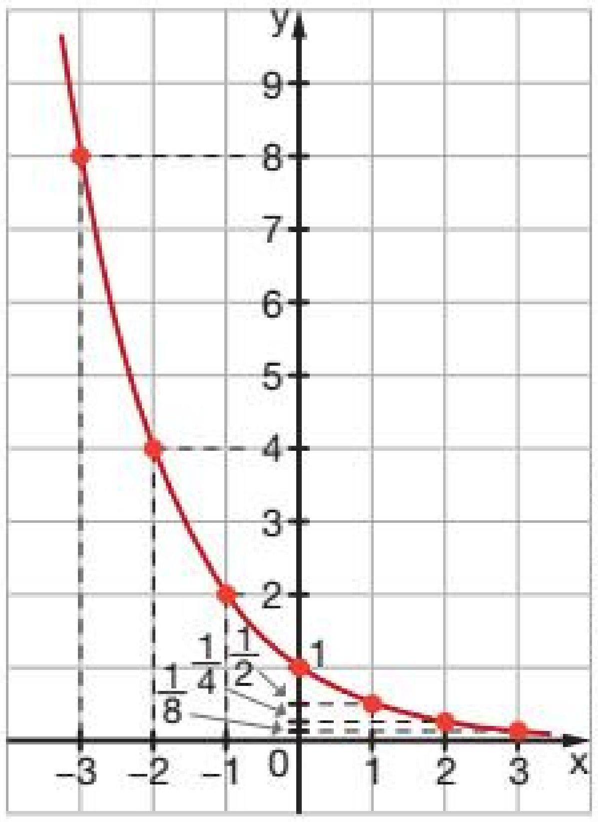
- $f(x)=2^x$

x	$f(x)=2^x$	(x, y)
-3	$f(-3)=2^{-3}=\dfrac{1}{8}$	$\left(-3, \dfrac{1}{8}\right)$
-2	$f(-2)=2^{-2}=\dfrac{1}{4}$	$\left(-2, \dfrac{1}{4}\right)$
-1	$f(-1)=2^{-1}=\dfrac{1}{2}$	$\left(-1, \dfrac{1}{2}\right)$
0	$f(0)=2^0=1$	$(0, 1)$
1	$f(1)=2^1=2$	$(1, 2)$
2	$f(2)=2^2=4$	$(2, 4)$
3	$f(3)=2^3=8$	$(3, 8)$



- $g(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

x	$g(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$	(x, y)
-3	$g(-3)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3}=8$	$(-3, 8)$
-2	$g(-2)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}=4$	$(-2, 4)$
-1	$g(-1)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1}=2$	$(-1, 2)$
0	$g(0)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{0}=1$	$(0, 1)$
1	$g(1)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{1}=\dfrac{1}{2}$	$\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$
2	$g(2)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2}=\dfrac{1}{4}$	$\left(2, \dfrac{1}{4}\right)$
3	$g(3)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{3}=\dfrac{1}{8}$	$\left(3, \dfrac{1}{8}\right)$



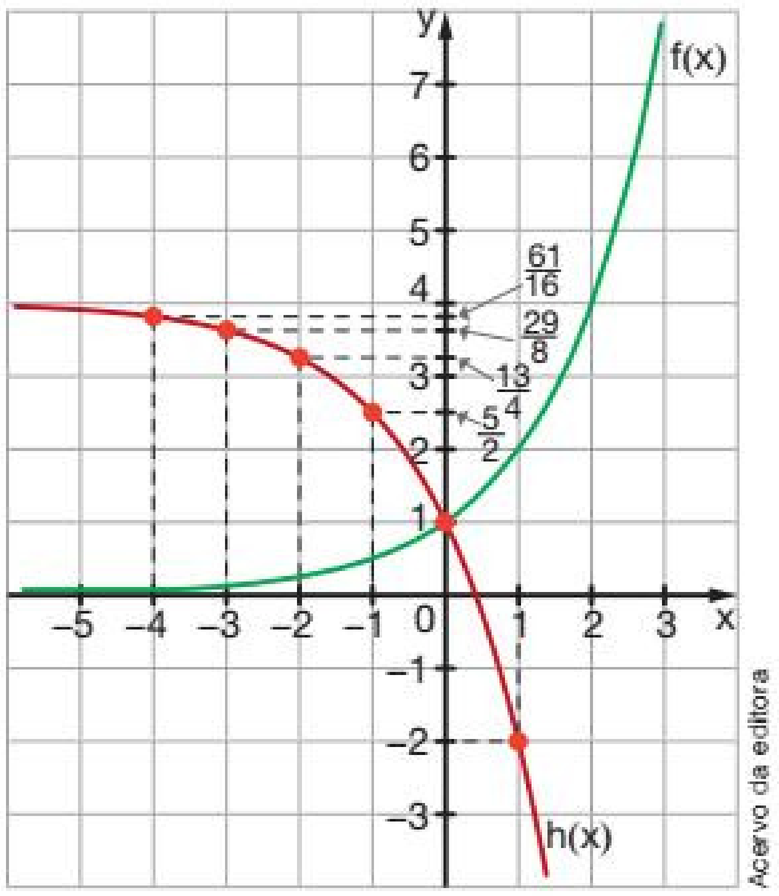
Ilustrações: Acervo da editora

As funções *f* e *g* são exponenciais, ou seja, são da forma $y=a^x$. Note que *f* é crescente e $a=2>1$. Já a função *g* é decrescente e $a=\dfrac{1}{2}$, ou seja, $0<a<1$. Além disso, os gráficos de *f* e *g* intersectam o eixo *y* no ponto de coordenadas $(0, 1)$ e não intersectam o eixo *x*, sendo definidos acima dele.

De maneira geral, temos que:

- uma função exponencial é **crescente** se $a>1$. Sempre que aumentamos os valores de *x*, os valores correspondentes de *y* aumentam, isto é, $x_1>x_2 \Leftrightarrow a^{x_1}>a^{x_2}$.
- uma função exponencial é **decrescente** se $0<a<1$. Sempre que aumentamos os valores de *x*, os valores correspondentes de *y* diminuem, isto é, $x_1>x_2 \Leftrightarrow a^{x_1}<a^{x_2}$.
- o gráfico de uma função exponencial é denominado **curva exponencial**, intersecta o eixo *y* no ponto de coordenadas $(0,1)$ e não intersecta o eixo *x*, sendo definido acima desse eixo.

O gráfico de uma função do tipo exponencial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, definida por $f(x) = b \cdot a^x + c$, com $a > 0$, $a \neq 1$ e $b \neq 0$, também é uma curva exponencial e pode ser obtido a partir do gráfico de $f(x) = a^x$. Veja, por exemplo, como podemos esboçar o gráfico de $h(x) = (-3) \cdot 2^x + 4$ e compare com o gráfico de $f(x) = 2^x$, esboçado na página anterior.



x	$h(x) = (-3) \cdot 2^x + 4$	(x,y)
−4	$h(-4) = (-3) \cdot 2^{-4} + 4$	$\left(-4, \frac{61}{16}\right)$
−3	$h(-3) = (-3) \cdot 2^{-3} + 4$	$\left(-3, \frac{29}{8}\right)$
−2	$h(-2) = (-3) \cdot 2^{-3} + 4$	$\left(-2, \frac{13}{4}\right)$
−1	$h(-1) = (-3) \cdot 2^{-1} + 4$	$\left(-1, \frac{5}{2}\right)$
0	$h(0) = (-3) \cdot 2^{0} + 4$	(0,1)
1	$h(1) = (-3) \cdot 2^{1} + 4$	(1,−2)

Atividades

Anote as respostas no caderno.

Diga aos alunos que em alguns gráficos apresentados as escalas dos eixos são diferentes entre si.

37. Classifique as funções exponenciais em crescente ou decrescente. crescentes: a, c; decrescentes: b, d

a) $f(x) = \left(\frac{9}{5}\right)^x$

b) $f(x) = 6^{-x}$

c) $f(x) = 4^{\frac{x}{2}}$

d) $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^{2x}$

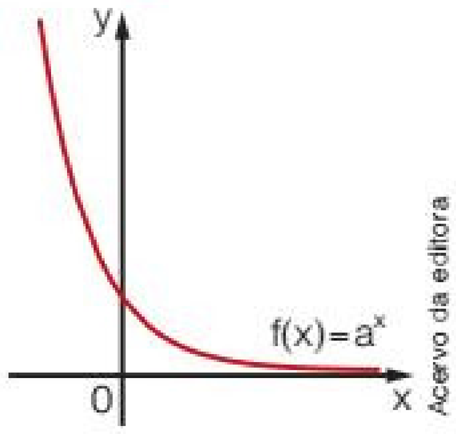
38. De acordo com o gráfico de $f(x) = a^x$, temos que *a* pertence ao intervalo: c

a) $]-\infty, -1[$

b) $[-1, 0]$

c) $]0, 1[$

d) $]1, +\infty[$



39. Dadas as funções $f(x) = 3^{x-1}$ e $g(x) = x - 1$, resolva.

a) Determine a função $f \circ g$ e classifique-a em crescente ou decrescente. $f \circ g(x) = 3^{x-2}$; crescente

b) Esboce o gráfico de $f \circ g$.
Resposta nas Orientações para o professor.

40. Para quais valores reais de *k* a função $f(x) = \left(\frac{5}{k}\right)^x$ é decrescente? $k > 5$

41. Um estudo realizado por um restaurante mostrou que o número de refeições servidas por mês, em certo ano, pode ser descrito aproximadamente pela função $f(x) = 4\,000 \cdot (1{,}1)^{x-1}$, em que *x* representa o mês do ano (para janeiro, por exemplo, $x = 1$).

a) Quantas refeições, aproximadamente, foram servidas por esse restaurante em março? E em julho? 4 840 refeições; 7 086 refeições

b) Esboce o gráfico de *f*.
Resposta nas Orientações para o professor.

42. Esboce o gráfico de cada função. Respostas nas Orientações para o professor.

a) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

b) $g(x) = 2 \cdot 3^x$

c) $h(x) = 9^{\frac{x}{3}}$

43. (Enem-MEC) A duração do efeito de alguns fármacos está relacionada à sua meia-vida, tempo necessário para que a quantidade original do fármaco no organismo se reduza à metade. A cada intervalo de tempo correspondente a uma meia-vida, a quantidade de fármaco existente no organismo no final do intervalo é igual a 50% da quantidade no início desse intervalo.

O gráfico acima representa, de forma genérica, o que acontece com a quantidade de fármaco no organismo humano ao longo do tempo.

F. D. Fuchs e Cher I. Wannma. **Farmacologia Clínica**. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan, 1992, p. 40.

A meia-vida do antibiótico amoxicilina é de 1 hora. Assim, se uma dose desse antibiótico for injetada às 12 h em um paciente, o percentual dessa dose que restará em seu organismo às 13h30min será aproximadamente de: d

a) 10%　b) 15%　c) 25%　d) 35%　e) 50%

Contexto Radioatividade

44. Em 1896, o físico Antoine Henri Becquerel (1852-1908) descobriu a radioatividade enquanto estudava minerais que continham urânio. Após essa descoberta, diversos estudos foram realizados acerca de elementos radioativos. Atualmente, sabe-se que a radiação pode trazer tanto malefícios quanto benefícios aos indivíduos. Se, por um lado, a exposição prolongada à radiação pode causar danos em relação ao funcionamento do organismo, por outro, o uso de elementos radioativos permite que médicos e cientistas realizem diagnósticos a respeito de doenças e estudem as funções do corpo humano. Um exemplo de elemento radioativo utilizado em medicina, na realização de exames de tireoide, é o iodo-131.

Outro benefício é o uso da radioatividade para determinar a idade de um fóssil. Esse método, conhecido como datação absoluta, é realizado observando a relação entre os elementos radioativos presentes no fóssil.

Fontes de pesquisa: <www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1903/becquerel-bio.html>. Acesso em: 10 ago. 2015.

BRADY, James E.; RUSSELL, Joel W.; HOLUM, John R. **Química** a matéria e suas transformações. Tradução J. A. Souza. Rio de Janeiro: LTC, 2003.

Decaimento radioativo

No esquema, é apresentado o decaimento de uma substância radioativa (n) passadas três meias-vidas.

Sabe-se que toda substância radioativa sofre transmutação, ou seja, um decaimento radioativo, tendo sua quantidade de átomos, e consequentemente sua massa e atividade, diminuída com o passar do tempo. Para acompanhar esse decaimento, foi estabelecido como padrão o período necessário para que a quantidade de átomos radioativos, a massa e a atividade de um elemento sejam reduzidas à metade em relação à quantidade anterior, o que é designado por meia-vida (ver esquema). Em determinado momento, sua quantidade de átomos radioativos se torna tão insignificante que não permite mais distinguir suas radiações das presentes no meio ambiente. O carbono-14, por exemplo, é utilizado na determinação da idade aproximada de fósseis de seres vivos e possui tempo de meia-vida de 5 730 anos, passado este tempo metade da quantidade continua como carbono-14 e a outra metade se transforma em carbono-12. O carbono-14 é indicado para determinar a idade de organismos que viveram até 70 000 anos atrás. Para organismos que viveram mais que este tempo são utilizados outros elementos como o potássio-40 e o urânio-238, com meia-vida de 1,25 bilhão de anos e 4,47 bilhões de anos, respectivamente.

c) Não, porque a meia-vida do carbono-14 é relativamente curta, cerca de 5 730 anos. Para essa afirmação, é necessário recorrer a outro elemento radioativo de meia-vida mais longa.

f) Uma possível resposta: determinando a idade de um fóssil é possível estudar condições próprias da época em que o ser era vivo, como o clima e o meio ambiente, conhecimentos que podem ser utilizados em situações atuais.

Mario Henrique

Preparador expondo os dentes de um crânio fossilizado de um dinossauro, em Utah, nos Estados Unidos, 2014.

Fotomontagem de Eduardo C. S. formada pelas imagens The Granger Collection/ Glow Images e Farferros/Shutterstock.com

De acordo com as informações apresentadas, resolva as questões.

a) Considerando uma amostra com 3 g de iodo-131, cuja meia-vida é de 8 dias, quantos gramas de iodo-131 ainda haveria nessa amostra após:
   - 8 dias? 1,5 g
   - 16 dias? 0,75 g
   - 24 dias? 0,375 g
   - 32 dias? 0,1875 g

b) Qual das funções determina a quantidade *f* de iodo-131 na amostra após *x* dias? II

I) $f(x) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$

II) $f(x) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{8}}$

III) $f(x) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{8x}$

c) Utilizando a meia-vida do carbono-14, é possível afirmar que certo organismo viveu há cerca de 100 000 anos? Por quê?

d) Qual é a datação de um resíduo de organismo que tem 12,5% do carbono-14 original? 17 190 anos

e) Escreva a função do tipo exponencial que expressa a massa *f* de carbono-14 de determinado fóssil, em um dado período de tempo *t*, em anos, considerando que inicialmente esse organismo possuía massa *m* de carbono-14. $f(t) = m \cdot 2^{\left(-\frac{t}{5\,730}\right)}$

f) Em sua opinião, qual é a importância de se determinar a datação de um fóssil?

Equação exponencial

Uma equação que apresenta incógnita apenas no expoente é denominada **equação exponencial**.

São exemplos de equações exponenciais:

- $3^x = 27$
- $2^{x-15} = 16$
- $\left(\frac{1}{5}\right)^x = 625$
- $49^2 = \sqrt{49^x}$
- $3^{2x} = 3^x + 21$

Para resolver uma equação exponencial, reduzimos os dois membros a potências de mesma base. Depois, utilizamos as propriedades das potências estudadas anteriormente. Quando isso não é possível, utilizamos alguns artifícios de cálculo.

Observe a seguir a resolução de diferentes equações exponenciais.

Atividades resolvidas

R3. Resolva as equações.

a) $3^x = 27$

b) $2^{x-15} = 16$

c) $7^{x^2-9} = 1$

d) $25^{2x+1} = 125^{-x+2}$

e) $10^{x+2} \cdot 100^{-3x} = 10\,000\,000$

f) $\sqrt{\left(\frac{4}{9}\right)^x} = 0,\overline{6}$

Resolução

Nessas equações podemos reduzir os dois membros a potências de mesma base.

a) $3^x = 27 \Rightarrow 3^x = 3^3 \Rightarrow x = 3$

Portanto, $S = \{3\}$.

b) $2^{x-15} = 16 \Rightarrow 2^{x-15} = 2^4 \Rightarrow$

$\Rightarrow x - 15 = 4 \Rightarrow x = 19$

Portanto, $S = \{19\}$.

c) $7^{x^2-9} = 1 \Rightarrow 7^{x^2-9} = 7^0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 9 = 0 \left\langle \begin{array}{l} x_1 = 3 \\ x_2 = -3 \end{array} \right.$

Portanto, $S = \{-3, 3\}$.

d) $25^{2x+1} = 125^{-x+2} \Rightarrow \left(5^2\right)^{2x+1} = \left(5^3\right)^{-x+2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 5^{4x+2} = 5^{-3x+6} \Rightarrow 4x + 2 = -3x + 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow 7x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{7}$

Portanto, $S = \left\{\frac{4}{7}\right\}$.

e) $10^{x+2} \cdot 100^{-3x} = 10\,000\,000 \Rightarrow$

$\Rightarrow 10^{x+2} \cdot \left(10^2\right)^{-3x} = 10^7 \Rightarrow$

$\Rightarrow 10^{x+2-6x} = 10^7 \Rightarrow$

$\Rightarrow -5x + 2 = 7 \Rightarrow$

$\Rightarrow -5x = 5 \Rightarrow x = -1$

Portanto, $S = \{-1\}$.

f) $\sqrt{\left(\frac{4}{9}\right)^x} = 0,\overline{6} \Rightarrow \left\{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^x\right\}^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2 \cdot x \cdot \frac{1}{2}} = \left(\frac{2}{3}\right)^1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^1 \Rightarrow x = 1$

Portanto, $S = \{1\}$.

R4. Determine a solução da equação $49^x - 6 \cdot 7^x = 7$.

Resolução

Nessa equação não é possível reduzir os dois membros a potências de mesma base. Nesse caso, é necessário utilizar alguns artifícios de cálculo.

Temos que:

$$49^x - 6 \cdot 7^x = 7 \Rightarrow \left(7^2\right)^x - 6 \cdot 7^x - 7 = 0 \Rightarrow \left(7^x\right)^2 - 6 \cdot 7^x - 7 = 0$$

Substituímos $y = 7^x$ para resolver a equação: $y^2 - 6y - 7 = 0 \left\langle \begin{array}{l} y_1 = -1 \\ y_2 = 7 \end{array} \right.$

Retornamos os valores de y_1 e y_2 na igualdade $y = 7^x$.

- $y_1 = -1 \Rightarrow 7^{x_1} = -1$ (impossível)
- $y_2 = 7 \Rightarrow 7^{x_2} = 7^1 \Rightarrow x_2 = 1$

Portanto, $S = \{1\}$.

Note que $\left(7^x\right)^2 = 7^{x \cdot 2} = \left(7^2\right)^x$.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

45. Resolva as equações.

a) $3^{x+1}=27$ $S=\{2\}$

b) $(0,25)^{2x+3}=4^{x-1}$ $S=\left\{-\frac{2}{3}\right\}$

c) $\sqrt{7^x}=343$ $S=\{6\}$

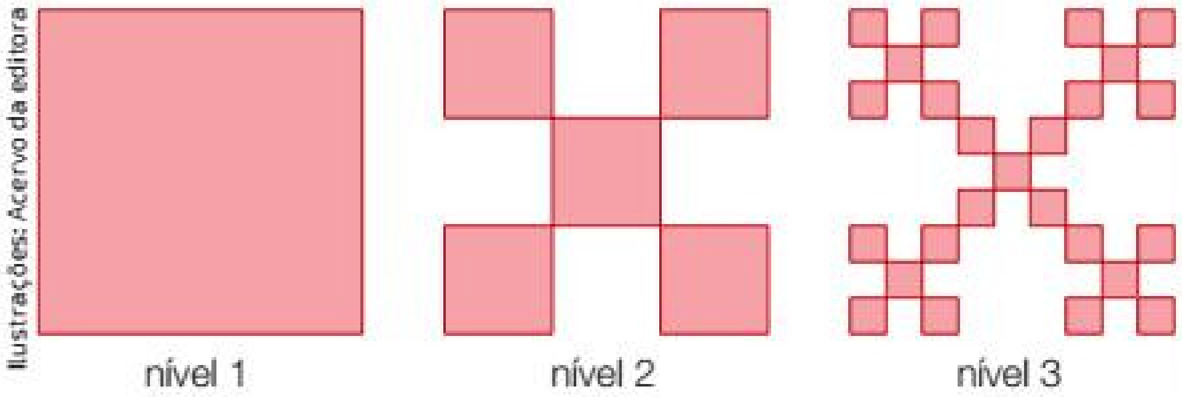
d) $5^{\frac{3}{2}x}=125^4$ $S=\{8\}$

e) $\sqrt[6]{1\,000}\cdot 10^x=0,001$ $S=\left\{-\frac{7}{2}\right\}$

f) $\dfrac{8^x}{2^{x+2}}=256$ $S=\{5\}$

46. A sequência de figuras apresenta vários níveis na composição de um fractal.

Ilustrações: Acervo da editora



a) Utilizando malha quadriculada, construa a figura correspondente ao próximo nível dessa sequência. Resposta no final do livro.

b) Qual função expressa o número y de quadradinhos existentes na figura de nível x dessa sequência? $y=5^{x-1}$

- $y=5^{x+1}$
- $y=5^x$
- $y=5^{x-1}$

c) Em qual nível da sequência o número de quadradinhos da figura será:

- 3 125? nível 6
- 78 125? nível 8

47. Nas páginas **134** e **135** estudamos que Gordon Moore, em 1965, previa que o número de transistores que compõem *chips* e microprocessadores dobraria a cada 2 anos. Essa previsão ficou conhecida como Lei de Moore.

a) Escreva uma função que estime a quantidade f de transistores em função do tempo t, em anos, considerando as estimativas realizadas por Moore e sabendo que o primeiro microprocessador, criado em 1971, tinha 2 300 transistores. $f(t)=2\,300\cdot 2^{\frac{t}{2}}$

Para resolver a atividade, considere o ano 1971 como o tempo inicial da Lei de Moore, ou seja, $t=0$.

Para resolver o item **b**, pode ser utilizada uma calculadora científica.

b) Qual a estimativa de quantidade de transistores, de acordo com a Lei de Moore, de um microprocessador em 1989? E em 2014? 1 177 600 transistores; 6 821 387 842 transistores

c) Sabendo que em 1989 e em 2014 foram lançados microprocessadores com, respectivamente, 1 200 000 e 1 300 000 000 transistores aproximadamente, pode-se afirmar, comparando com os resultados obtidos no item **b**, que esses processadores acompanharam a Lei de Moore?

48. Determine o valor de x para que a igualdade $3^{5x+1}\cdot(0,\overline{3})^{x+8}=243^{x-3}$ seja verdadeira. 8

49. (UFMG-MG) A população de uma colônia da bactéria *E. coli* dobra a cada 20 minutos. Em um experimento, colocou-se, inicialmente, em um tubo de ensaio, uma amostra com 1 000 bactérias por mililitro. No final do experimento, obteve-se um total de $4,096\cdot 10^6$ bactérias por mililitro.

Assim, o tempo do experimento foi de: d

a) 3 horas e 40 minutos

b) 3 horas

c) 3 horas e 20 minutos

d) 4 horas

Capítulo 5

50. Considere as funções $f(x)=2\cdot(0,5)^x$ e $g(x)=4^x$.

a) Classifique essas funções em crescente ou decrescente. crescente: *g*; decrescente: *f*

b) Para qual valor de x, $f(x)=g(x)$? $x=\frac{1}{3}$

c) Esboce em um mesmo plano cartesiano os gráficos das funções f e g, indicando as coordenadas do ponto em que eles se intersectam. Resposta nas **Orientações para o professor**.

51. É correto afirmar que a equação $(0,5)^{x^2-6}=8$: d

a) não possui solução real.

b) possui infinitas soluções reais.

c) possui apenas uma solução real.

d) possui apenas duas soluções reais.

52. Resolva as equações.

a) $9^{2x-1}=1$ $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$

b) $6\cdot 7^{x-3}=294$ $S=\{5\}$

c) $3^{1+x}=324-3^x$ $S=\{4\}$

d) $2^{x+2}+2^{x-1}=36$ $S=\{3\}$

e) $\dfrac{25^x+5}{6}-5^x=0$ $S=\{0,1\}$

f) $(4^{x+1}-4^x)^2=144$ $S=\{1\}$

47. c) Resposta esperada: a quantidade de transistores do microprocessador lançado em 1989 aproxima-se da estimada pela Lei de Moore. Já o microprocessador de 2014 apresenta uma quantidade muito inferior à estimada pela Lei de Moore.

53. Uma rede de lojas de informática verificou que a quantidade de peças vendidas de certo produto, numa filial **A**, pode ser descrita pela função $y=10\cdot 5^x$, em que x representa a quantidade de meses desde a inauguração da loja, e y, o total de produtos vendidos. Outra filial, **B**, vende a cada mês o triplo de **A**. Sabendo que ambas as lojas foram inauguradas em janeiro ($x=0$), em que mês as duas lojas juntas venderam 25 000 peças do produto? maio

54. Determine o valor de x para que $4^{x+1}-12=2^{x+1}$. $x=1$

Inequação exponencial

Uma desigualdade que apresenta a incógnita apenas no expoente é denominada **inequação exponencial**. Observe alguns exemplos:

- $3^x > 81$
- $5^{x-3} < 125$
- $\left(\frac{1}{8}\right)^x \geq 256$
- $7^{x^2-1} \leq \sqrt{49^x}$

Note que, quando $a > 1$, o sentido da desigualdade se mantém, e quando $0 < a < 1$, o sentido da desigualdade é invertida.

Para resolver uma inequação exponencial, reduzimos os dois membros a potências de mesma base. Depois, sabendo que a função exponencial $f(x) = a^x$ é crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$, aplicamos a seguinte propriedade:

- se $a > 1$: $a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$
- se $0 < a < 1$: $a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2$

Veja, a seguir, a resolução de algumas inequações exponenciais.

Atividades resolvidas

R5. Resolva as inequações.

a) $3^x < 81$ b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x+1} \geq \frac{1}{4}$ c) $25^{x^2-3} \leq \left(\frac{1}{5}\right)^2$

Resolução

a) Temos que $3^x < 81 \Rightarrow 3^x < 3^4$.

Como $a = 3 > 1$, a desigualdade se mantém.

$$3^x < 3^4 \Rightarrow x < 4$$

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 4\}$.

b) Temos que:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-x+1} \geq \frac{1}{4} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-x+1} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Como $a = \frac{1}{2}$ e $0 < a < 1$, a desigualdade é invertida.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-x+1} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow -x + 1 \leq 2 \Rightarrow x \geq -1$$

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$.

c) Temos que:

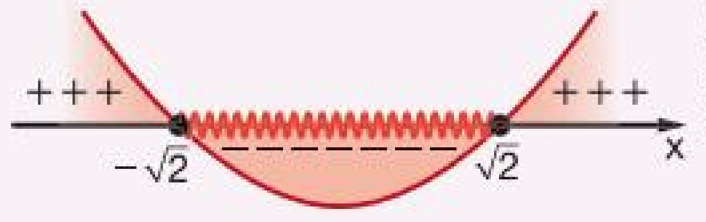
$$25^{x^2-3} \leq \left(\frac{1}{5}\right)^2 \Rightarrow (5^2)^{x^2-3} \leq \frac{1}{5^2} \Rightarrow 5^{2x^2-6} \leq 5^{-2}$$

Como $a = 5 > 1$, a desigualdade se mantém.

$$5^{2x^2-6} \leq 5^{-2} \Rightarrow 2x^2 - 6 \leq -2 \Rightarrow 2x^2 - 4 \leq 0$$

Fazemos o estudo da função $f(x) = 2x^2 - 4$:

- a parábola tem concavidade voltada para cima.
- $f(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 - 4 = 0 \left\langle \begin{array}{l} x_1 = -\sqrt{2} \\ x_2 = \sqrt{2} \end{array} \right.$



Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}\}$.

R6. Resolva a inequação dupla $49^{x-1} < \left(\frac{1}{7}\right)^x < \sqrt{7}$.

Resolução

Temos que:

$$49^{x-1} < \left(\frac{1}{7}\right)^x < \sqrt{7} \Leftrightarrow \begin{cases} 49^{x-1} < \left(\frac{1}{7}\right)^x \\ \left(\frac{1}{7}\right)^x < \sqrt{7} \end{cases}$$

Resolvemos cada inequação:

- $49^{x-1} < \left(\frac{1}{7}\right)^x \Rightarrow (7^2)^{x-1} < (7^{-1})^x \Rightarrow 7^{2x-2} < 7^{-x}$

Como $a = 7 > 1$, a desigualdade se mantém.

$$7^{2x-2} < 7^{-x} \Rightarrow 2x - 2 < -x \Rightarrow x < \frac{2}{3}$$

Logo, $S_1 = \left]-\infty, \frac{2}{3}\right[$.

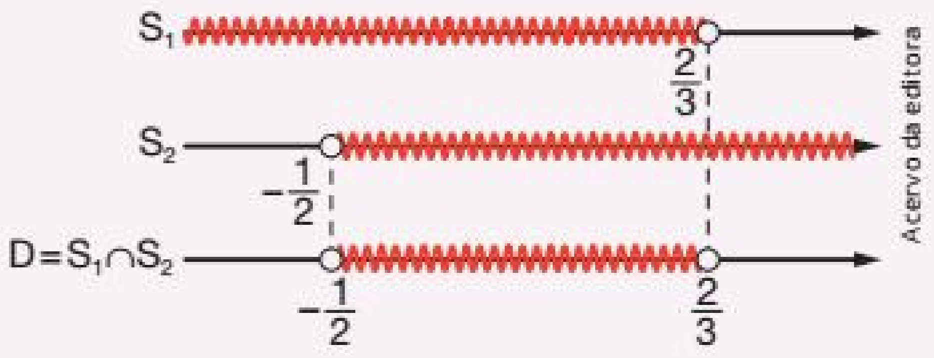
- $\left(\frac{1}{7}\right)^x < \sqrt{7} \Rightarrow \left(\frac{1}{7}\right)^x < \left[\left(\frac{1}{7}\right)^{-1}\right]^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \left(\frac{1}{7}\right)^x < \left(\frac{1}{7}\right)^{-\frac{1}{2}}$

Como $a = \frac{1}{7}$ e $0 < a < 1$, a desigualdade é invertida.

$$\left(\frac{1}{7}\right)^x < \left(\frac{1}{7}\right)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow x > -\frac{1}{2}$$

Logo, $S_2 = \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

Fazemos a interseção de S_1 e S_2.



Portanto, $S = \left]-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right[$ ou $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} < x < \frac{2}{3}\right\}$.

R7. Qual é o domínio da função $f(x)=\dfrac{5}{\sqrt{49^{\frac{4-x}{3}}-\sqrt[3]{7}}}$?

Resolução

O domínio da função é dado pela seguinte inequação:

$$49^{\frac{4-x}{3}}-\sqrt[3]{7}>0\Rightarrow\left(7^2\right)^{\frac{4-x}{3}}>7^{\frac{1}{3}}\Rightarrow 7^{\frac{8-2x}{3}}>7^{\frac{1}{3}}$$

Como $a=7>1$, a desigualdade se mantém.

$$7^{\frac{8-2x}{3}}>7^{\frac{1}{3}}\Rightarrow\frac{8-2x}{3}>\frac{1}{3}\Rightarrow 8-2x>1\Rightarrow -2x>-7\Rightarrow x<\frac{7}{2}$$

Portanto, $D(f)=\left\{x\in\mathbb{R}\,|\,x<\dfrac{7}{2}\right\}$.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

55. Resolva as inequações.

a) $27^x\geq 3$ $S=\left\{x\in\mathbb{R}|x\geq\dfrac{1}{3}\right\}$

b) $(0{,}8)^{2x-3}<(0{,}8)^5$ $S=\{x\in\mathbb{R}|x>4\}$

c) $3\cdot 4^x\leq 72-6\cdot 4^x$ $S=\left\{x\in\mathbb{R}|x\leq\dfrac{3}{2}\right\}$

d) $4^{x+1}\cdot 2^{x-1}<128$ $S=\{x\in\mathbb{R}|x<2\}$

e) $25\geq\dfrac{5}{5^x}$ $S=\{x\in\mathbb{R}|x\geq -1\}$

f) $3^{x(x+1)}>3^{x^2+1}$ $S=\{x\in\mathbb{R}|x>1\}$

56. O conjunto-solução da inequação $3\cdot 2^{x+2}-2^{2x}>32$ é: b

a) $]4, 8[$ b) $]2, 3[$ c) $[4, 8]$ d) $[2, 3]$

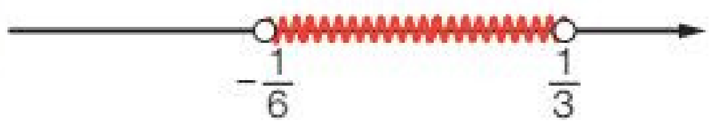
57. Sendo $f(x)=2^x+2^{x+1}$, calcule *x*, de modo que $f(x)\leq 96$. $x\leq 5$

58. Determine o domínio de cada função.

- $f(x)=\sqrt{3^{x-2}-1}$ $D(f)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\geq 2\}$
- $g(x)=5\sqrt{2^{2x-1}-8}$ $D(g)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\geq 2\}$
- $h(x)=\left(\sqrt[4]{4^x-2^{x+4}}\right)^2$ $D(h)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\geq 4\}$

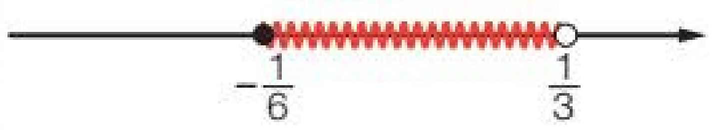
59. Para quais valores de *x* a desigualdade $(0{,}4)^x<(0{,}4)^{\frac{x-3}{2}}$ é verdadeira? $x>-3$

60. Qual dos intervalos representa o conjunto-solução da inequação $0{,}5\leq 8^{2x}<4$? d

a)


b)


c)


d)


e)


Ilustrações: Acervo da editora

61. Para qual subconjunto do domínio de $f(x)=(0{,}6)^{2x+1}$ temos $\dfrac{27}{125}<f(x)\leq 1$? a

a) $\left[-\dfrac{1}{2}, 1\right[$ b) $\left[-\dfrac{1}{2}, 1\right]$ c) $\left]-\dfrac{1}{2}, 1\right]$ d) $\left]-\dfrac{1}{2}, 1\right[$

62. Sabendo que $f(x)=8^x-2^{x+1}$ e $g(x)=-4^x$, para quais valores de *x* temos $f(x)+g(x)>0$? $x>1$

63. **Desafio**

(UEL-PR) Algumas empresas utilizam uma função matemática, denominada curva de aprendizagem, como parâmetro de contratação de mão de obra na área de produção. Essa função pode ser definida como $f(x)=a\left(b-3^{-cx}\right)$, onde *a*, *b* e *c* são constantes reais e *x* é o tempo medido em dias. O processo desencadeia-se da seguinte forma: primeiramente são selecionados candidatos ao emprego; em seguida, passam por treinamento num setor específico da produção; finalmente, eles exercem seu trabalho em regime de experiência nesse setor por 30 dias. Finalizado o período, são ajustadas as constantes *a*, *b* e *c* à curva *f* para cada candidato. A empresa define como curva ideal a situação em que $a=45$, $b=2$ e $c=0$, e a contratação ocorrerá se a curva *f* do candidato selecionado atingir ou ultrapassar a situação ideal no regime de experiência.

Os candidatos João e Paulo obtiveram, respectivamente, como curva de aprendizagem, as funções $f(x)=15\left(\dfrac{10}{3}-3^{-0{,}01x}\right)$ e

$f(x)=30\left(\dfrac{10+15\sqrt{3}}{10\sqrt{3}}-3^{-0{,}04x}\right)$.

Com base no que foi exposto, é correto afirmar que: b

a) Paulo não será contratado.

b) João não será contratado e Paulo será contratado.

c) João será contratado e Paulo não será contratado.

d) João e Paulo não serão contratados.

e) João será contratado.

Ser consciente

Evite o tabagismo

O tabagismo é caracterizado como a principal causa de morte evitável do mundo. Segundo relatório da Organização Mundial da Saúde (OMS) sobre Epidemia Global do Tabaco (2013), o tabaco mata mais de 6 milhões de pessoas por ano. Muitos pensam que "só experimentar" cigarro ou outro derivado de tabaco não causa dependência, porém, a maioria dos adultos começa a fumar com 18 anos ou menos. A Pesquisa Nacional de Saúde do Escolar – 2012, realizada com estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental, apontou que 19,6% dos adolescentes já haviam experimentado cigarro.

Uma prática mais recente entre os jovens é o uso do narguilé (cachimbo-d'água), habitualmente compartilhado em rodas de amigos, que muitas vezes desconhecem os prejuízos à saúde causados por ele. No entanto, é importante saber que o uso do narguilé, em um período que dure entre 20 e 80 minutos, corresponde à exposição aos componentes tóxicos da fumaça de 100 a 200 cigarros. Além disso, ao compartilhá-lo, os usuários podem ser expostos ao vírus da herpes, hepatite C, tuberculose e a outras doenças da boca.

O tabagismo é uma doença caracterizada pela dependência da droga nicotina presente em qualquer derivado de tabaco, como cigarro, narguilé, cigarro de palha, charuto, entre outros. A quantidade de nicotina presente no corpo de uma pessoa reduz pela metade a cada duas horas aproximadamente. Desse modo, quando os neurônios sentem falta dessa substância, provocam agitação, nervosismo e falta de concentração, levando a pessoa a fumar novamente, repetindo assim o ciclo. A cada cigarro consumido, o organismo absorve aproximadamente 1 mg de nicotina.

Fontes de pesquisa:
<www.inca.gov.br/wcm/dncf/2015/o-que-e-narguile.asp>. Acesso em: 1 set. 2015.
<http://portalsaude.saude.gov.br/index.php/cidadao/principal/agencia-saude/13071-min>. Acesso em: 15 set. 2015.
<www.ensp.fiocruz.br/portal-ensp/informe/site/materia/detalhe/33130>. Acesso em: 3 nov. 2015.

Tabaco: livre-se de seus males!

Ao consumir derivados do tabaco, aproximadamente 4 720 substâncias tóxicas são introduzidas no organismo. No Brasil, existem leis que estabelecem normas para uso e venda de derivados do tabaco. Para evitar doenças relacionadas ao seu uso, o melhor é não consumi-lo.

A nicotina está presente nas folhas da planta *Nicotiana tabacum*, que é a planta do tabaco. Desde o manuseio na lavoura é necessário evitar o contato das folhas com a pele que pode causar intoxicação, provocando mal-estar e a doença da folha verde.

Analisando com cidadania

a) Quais as desvantagens de consumir produtos derivados do tabaco?

a) Resposta esperada: tornar-se dependente da substância e desenvolver diversas doenças associadas ao tabagismo.

b) Você já experimentou ou é usuário de algum dos produtos derivados do tabaco? Relate sua experiência. Resposta pessoal.

c) Se o tabagismo é a principal causa de morte evitável do mundo, na sua opinião, por que ainda há um alto índice de fumantes? Converse com seus colegas e o professor. Resposta pessoal.

Analisando com Matemática

Considerando o consumo de um único cigarro, resolva os itens a seguir.

d) Qual função representa a quantidade *y* de nicotina (em mg) presente no corpo de uma pessoa *t* horas após o consumo, desconsiderando uma quantidade inicial que porventura se tenha no organismo? $y = 2^{-\frac{t}{2}}$

- $y = 2^t$
- $y = 2^{\frac{t}{2}}$
- $y = 2^{-\frac{t}{2}}$
- $y = 2^{-t}$

e) Qual é a quantidade de nicotina presente no organismo, proveniente daquele único cigarro, após 4 h do consumo? 0,25 mg

Veja mais informações sobre o tabagismo no *site*:
- <http://tub.im/bi57tf>

(acesso em: 3 fev. 2016)

Atualmente, leis proíbem a venda de derivados do tabaco para menores de 18 anos e também qualquer tipo de propaganda relacionada ao tabaco, seja pela televisão ou pelo estabelecimento que o comercializa, entre outros. Também é proibido fumar derivados do tabaco em ambientes fechados públicos e privados.

O consumo de derivados do tabaco é nocivo à saúde, causando muitas doenças, principalmente respiratórias, cardiovasculares, além de vários tipos de câncer. No Brasil, o tabagismo é responsável por aproximadamente 200 mil mortes por ano.

Davi Augusto

capítulo

6

Logaritmo e função logarítmica

Dr Gary Gaugler/SPL/Latinstock

Salmonela (aumento aproximado de 67 000 vezes).

Microrganismos

Um dos perigos na alimentação humana são as contaminações por microrganismos, como bactérias, vírus, fungos e alguns parasitas, que costumam se reproduzir rapidamente em ambientes favoráveis. Essas contaminações, que em geral causam diversas doenças, podem ser prevenidas com cuidados a serem tomados durante o preparo e armazenamento dos alimentos.

Entre esses microrganismos está a bactéria Salmonela, que é transmitida ao homem por meio da ingestão de alimentos contaminados, principalmente os de origem animal, como ovos, leite e carnes. Os principais sintomas das pessoas infectadas por essa bactéria são: diarreia, dor abdominal, náuseas, vômitos e febre.

Para evitar essa transmissão algumas medidas podem ser adotadas, como:

- cozinhar bem ovos e carnes e ferver o leite antes de ingeri-los;
- verificar se o estabelecimento que fornece alimentação segue as normas da vigilância sanitária;
- lavar bem as mãos antes do manuseio de qualquer alimento;
- não misturar alimentos crus com cozidos.

Fonte de pesquisa: <www.blog.saude.gov.br/35051-higiene-no-preparo-de-alimentos-evita-contaminacao-por-salmonella>. Acesso em: 28 mar. 2016.

Oriente os alunos a escreverem as respostas no caderno.

A Quais cuidados você tem, ou pode adotar, para evitar a contaminação de doenças por microrganismos?
Resposta pessoal.

B Cite alguns sintomas que a infecção por Salmonela pode provocar. diarreia; dor abdominal; náuseas; vômitos; febre

C Sabendo que certo microrganismo se prolifera dobrando sua população a cada 30 min, estime em quantas horas uma população desse microrganismo pode atingir 1 000 indivíduos a partir de apenas um deles. aproximadamente 5 h

Veja mais informações sobre a contaminação dos alimentos no *site*:

- **<http://tub.im/jajijk>**

(acesso em: 4 fev. 2016)

Estudando logaritmo

Ao final do estudo deste capítulo podem ser trabalhados o exemplo e as atividades da página 269 da seção **Acessando tecnologias**.

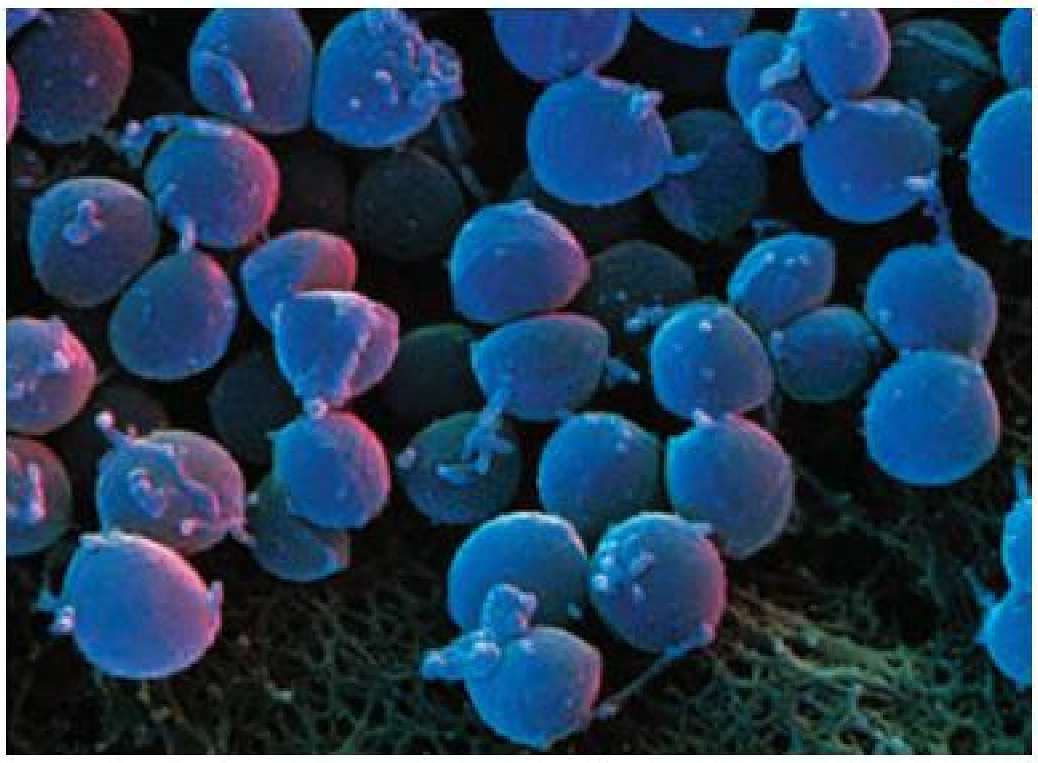
Veja a seguir uma situação relacionada à equação exponencial, assunto estudado no capítulo anterior.

A taxa de crescimento diário de certa cultura de bactérias é de 5%. Em quantos dias uma população B_0 dessa bactéria irá triplicar, se a taxa de crescimento se mantiver?

Para responder a essa pergunta, construiremos um quadro a partir das informações apresentadas.

Dia	População
início	B_0
1º dia	$B_1 = B_0 + B_0 \cdot 0{,}05 = B_0 \cdot 1{,}05$
2º dia	$B_2 = B_1 + B_1 \cdot 0{,}05 = \underbrace{B_1}_{B_0 \cdot 1{,}05} \cdot 1{,}05 = B_0 \cdot (1{,}05)^2$
3º dia	$B_3 = B_2 + B_2 \cdot 0{,}05 = \underbrace{B_2}_{B_0 \cdot (1{,}05)^2} \cdot 1{,}05 = B_0 \cdot (1{,}05)^3$
4º dia	$B_4 = B_3 + B_3 \cdot 0{,}05 = \underbrace{B_3}_{B_0 \cdot (1{,}05)^3} \cdot 1{,}05 = B_0 \cdot (1{,}05)^4$
...	...
enésimo dia	$B_n = B_{n-1} + B_{n-1} \cdot 0{,}05 = \underbrace{B_{n-1}}_{B_0 \cdot (1{,}05)^{n-1}} \cdot 1{,}05 = B_0 \cdot (1{,}05)^n$

Ao observarem o quadro, verifique se os alunos perceberam que a taxa de crescimento (5%) é incorporada à população de bactérias do dia anterior.


David Scharf/SPL/Latinstock

Bactéria *Staphylococcus aureus* (aumento aproximado de 11 800 vezes). Essa bactéria é encontrada em seres humanos e outros animais.

Lembre-se de que podemos escrever porcentagem na forma decimal, como apresentada ao lado, isto é: $5\% = \frac{5}{100} = 0{,}05$.

Como queremos determinar em quantos dias a população triplicará, temos:

$$B_n = 3 \cdot B_0$$

$$\cancel{B_0} \cdot (1{,}05)^n = 3 \cdot \cancel{B_0}$$

$$(1{,}05)^n = 3$$

A resolução desta equação é apresentada na atividade resolvida R3 da página 161.

Para resolver essa equação, a partir dos conceitos estudados até o momento, é necessário reduzir os dois membros a potências com a mesma base. No entanto, é possível verificar que esse método não é eficaz neste caso, fazendo-se necessária a utilização de conhecimentos acerca de **logaritmos**, assunto que será tratado neste capítulo.

Os logaritmos foram desenvolvidos pelo escocês John Napier (1550-1617), no início do século XVII. Antes de seu desenvolvimento, efetuar cálculos como, por exemplo, $1{,}45786 \cdot 2{,}38761$ ou $5{,}78204 : 3{,}89637$ era, em geral, trabalhoso e demorado. Contudo, após a descoberta de Napier, operações desse tipo puderam ser transformadas em adições e subtrações, o que, na maioria dos casos, era mais simples e rápido.


Autor desconhecido. Séc. XIX. Gravura. Coleção particular. Foto: The Granger Collection/Glow Images

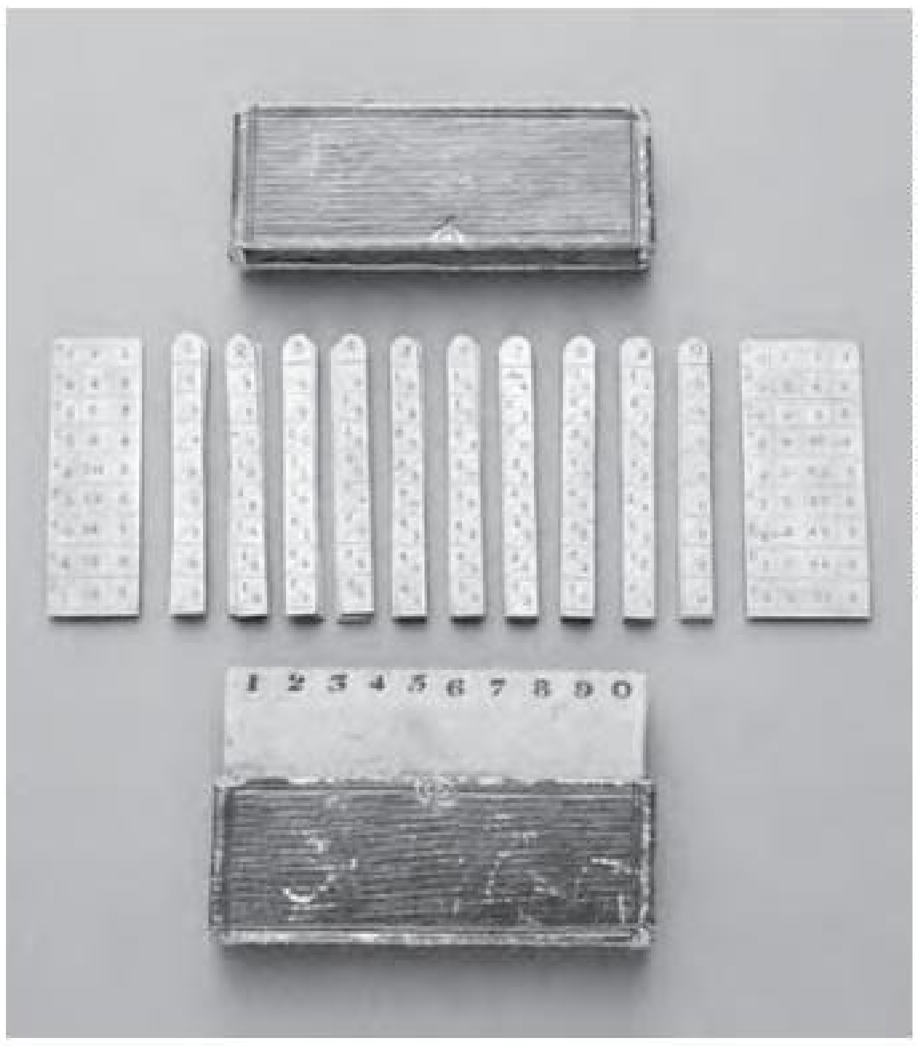
John Napier

Em sua obra **Mirifice logarithmorum canonis descriptio** (Uma descrição da maravilhosa regra dos logaritmos), de 1614, Napier explica a natureza dos logaritmos, cujo objetivo principal era minimizar os cálculos realizados pelos navegadores e astrônomos da época.

Napier não era um matemático profissional, porém dedicava grande parte de seu tempo ao estudo de Matemática. Os frutos dessa dedicação foram vários trabalhos que muito contribuíram para o desenvolvimento da Matemática. Uma de suas invenções ficou conhecida como barras de Napier (ou ossos de Napier), um instrumento utilizado para efetuar mecanicamente multiplicações, divisões e cálculos de raízes quadradas.

Atualmente, com o uso de computadores e calculadoras científicas, realizar operações como multiplicação e divisão já não é tão exaustivo. Mesmo assim, os logaritmos ainda são utilizados em algumas situações, como, por exemplo, na resolução de equações exponenciais.

Fonte de pesquisa: BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. Tradução Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.



Séc. XVII. Museu do Louvre, Paris (França). Foto: Jean-Gilles Berizzi/RMN/Other Images

barras de Napier

Definição

Antes de definirmos precisamente o que é logaritmo, resolveremos algumas equações exponenciais.

- $3^x = 81 \Rightarrow 3^x = 3^4 \Rightarrow x = 4$

  Dizemos que 4 é o **logaritmo** de 81 na base 3, que pode ser indicado por $\log_3 81 = 4$.

- $5^x = \frac{1}{125} \Rightarrow 5^x = \left(\frac{1}{5}\right)^3 \Rightarrow 5^x = 5^{-3} \Rightarrow x = -3$

  Dizemos que -3 é o **logaritmo** de $\frac{1}{125}$ na base 5, que pode ser indicado por $\log_5\left(\frac{1}{125}\right) = -3$.

Sejam os números reais positivos *a* e *b*, com $a \neq 1$. Denomina-se logaritmo de *b* na base *a* o expoente *c*, tal que $b = a^c$, isto é:

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

Nessa representação, *a* é a base do logaritmo, *b* é o logaritmando e *c* é o logaritmo.

Exemplos

- $\log_4 64 = 3 \Leftrightarrow 4^3 = 64$
- $\log_{\frac{1}{4}} 16 = -2 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = 16$
- $\log_{10} 100 = 2 \Leftrightarrow 10^2 = 100$
- $\log_9 1 = 0 \Leftrightarrow 9^0 = 1$

A partir da definição de logaritmos, temos que $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$ e $b \in \mathbb{R}_+^*$. Assim, não são definidos, por exemplo, os seguintes logaritmos.

- $\log_4(-12)$
- $\log_{-3} 27$
- $\log_1 49$
- $\log_8 0$
- $\log_0 9$
- $\log_{-6}(-36)$

Peça aos alunos que apliquem a definição dos logaritmos nesses casos, para que verifiquem a impossibilidade do cálculo.

Os logaritmos cuja base é igual a 10 são denominados **logaritmos decimais**. Neles, costuma-se não indicar a base. O logaritmo $\log_{10} 7$, por exemplo, pode ser indicado por $\log 7$.

Consequências da definição

De acordo com a definição de logaritmo, podemos estabelecer que:

- $\log_a a = 1$

  Fazendo $\log_a a = x$, temos $a^x = a^1 \Rightarrow x = 1$.

- $\log_a 1 = 0$

  Fazendo $\log_a 1 = x$, temos $a^x = 1 \Rightarrow a^x = a^0 \Rightarrow x = 0$.

- $\log_a a^n = n$

  Fazendo $\log_a a^n = x$, temos $a^x = a^n \Rightarrow x = n$.

- $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$

  Mostraremos inicialmente que $\log_a b = \log_a c \Rightarrow b = c$. De fato, fazendo $\log_a b = x$ e $\log_a c = x$, temos $\left.\begin{matrix} a^x = b \\ a^x = c \end{matrix}\right\} b = c$. Agora, mostraremos que $b = c \Rightarrow \log_a b = \log_a c$. Fazendo $\log_a b = x$, pela definição de logaritmo segue que $b = a^x$. Como $b = c$, temos que $c = a^x$. Sendo assim, $x = \log_a c$. Portanto, $\log_a b = \log_a c$.

- $a^{\log_a b} = b$

  Fazendo $\log_a b = x$, temos $a^x = b$.
  Substituindo $x = \log_a b$ em $a^x = b$, temos $a^{\log_a b} = b$.

Condição de existência de um logaritmo

Como vimos anteriormente, temos que $\log_a b = c$ existe quando $a > 0$, $b > 0$ e $a \neq 1$.

Dessa maneira, precisamos definir para quais valores o logaritmo existe. Para isso, vamos verificar alguns casos por meio de exemplos.

Exemplo 1

Vamos verificar qual deve ser o valor de *x* para que $\log_3(2x+8)$ exista. Nesse caso, temos que a base é 3, isto é, maior que 0 e diferente de 1. Assim, precisamos analisar somente o logaritmando $(2x+8)$, pois esse deve ser maior que 0.

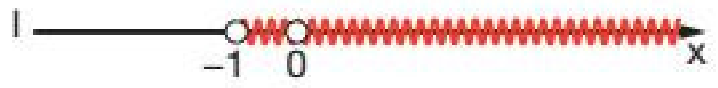
$$2x + 8 > 0 \Rightarrow 2x > -8 \Rightarrow x > -4$$

Dessa maneira, temos que *x* deve ser um número real maior que -4.

Exemplo 2

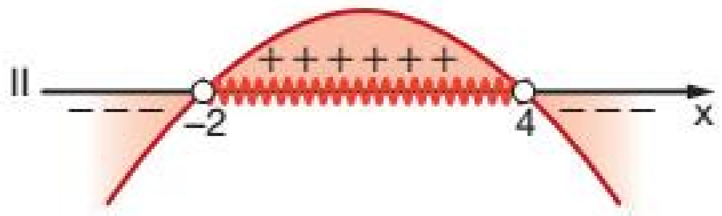
Em $\log_{x+1}(-x^2+2x+8)$, vamos analisar a base e o logaritmando.

- base: $\begin{cases} x+1 > 0 \Rightarrow x > -1 \\ x+1 \neq 1 \Rightarrow x \neq 0 \end{cases}$

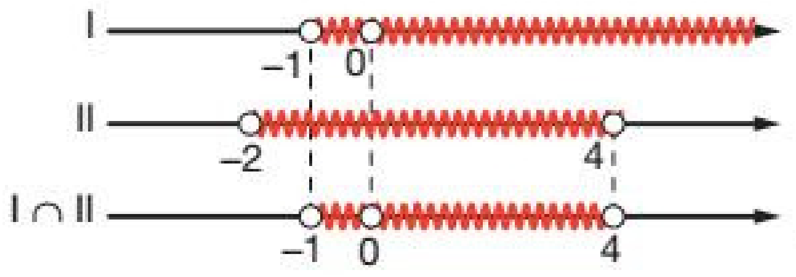


- logaritmando: $-x^2 + 2x + 8 > 0$

$$-x^2 + 2x + 8 = 0$$
$$a = -1;\ b = 2;\ c = 8$$
$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 8 = 36$$
$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-2 \pm 6}{-2} \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 4 \end{cases}$$



A solução se dá pela interseção de **I** e **II**.



Ilustrações: Acervo da editora

Assim, $\log_{x+1}(-x^2+2x+8)$ existe para $x \in \mathbb{R}$ tal que $-1 < x < 4$ e $x \neq 0$.

Atividades resolvidas

R1. Dados $x=\log_{0,25}\left(\frac{1}{16}\right)$ e $y=\log_{\sqrt{3}}81$, calcule $x+y$.

Para auxiliar os alunos na compreensão das atividades resolvidas apresentadas nesta página, lembre-os das propriedades da potenciação, assunto abordado no capítulo anterior.

Resolução

- $x=\log_{0,25}\left(\frac{1}{16}\right)\Rightarrow(0,25)^x=\frac{1}{16}\Rightarrow\left(\frac{1}{4}\right)^x=\left(\frac{1}{4}\right)^2\Rightarrow x=2$
- $y=\log_{\sqrt{3}}81\Rightarrow(\underbrace{\sqrt{3}}_{3^{\frac{1}{2}}})^y=81\Rightarrow 3^{\frac{y}{2}}=3^4\Rightarrow\frac{y}{2}=4\Rightarrow y=8$

Portanto: $x+y=2+8=10$.

R2. Calcule:

a) $25^{\frac{1}{2}+\log_{25}4}+8^{3-\log_8 4}$

b) $\log 10\,000+\log 0,00001$

c) $\pi^{\log_e 1+\log_5 5}$

d) $\log\left(\log_2\left(\log_3 3^2\right)\right)$

Resolução

a) $25^{\frac{1}{2}+\log_{25}4}+8^{3-\log_8 4}=25^{\frac{1}{2}}\cdot\underbrace{25^{\log_{25}4}}_{4}+8^3\cdot8^{-\log_8 4}=\sqrt{25}\cdot4+512\cdot\frac{1}{8^{\log_8 4}}=5\cdot4+512\cdot\frac{1}{4}=20+128=\boxed{148}$

b) $\log 10\,000+\log 0,00001=\underbrace{\log 10^4}_{4}+\underbrace{\log 10^{-5}}_{-5}=4-5=\boxed{-1}$

Da consequência da definição $\log_a a^n=n$, temos $\log 10^n=n$, para qualquer *n* real.

c) $\pi^{\log_e 1+\log_5 5}=\pi^{\overbrace{\log_e 1}^{0}}\cdot\pi^{\overbrace{\log_5 5}^{1}}=\pi^0\cdot\pi^1=1\cdot\pi=\boxed{\pi}$

Os logaritmos de base *e* são denominados **logaritmos neperianos**, em homenagem ao escocês John Napier (1550-1617). Costuma-se indicar $\log_e x$ simplesmente por $\ln x$.

d) $\log\left(\log_2\left(\underbrace{\log_3 3^2}_{2}\right)\right)=\log\left(\underbrace{\log_2 2}_{1}\right)=\log 1=\boxed{0}$

R3. Na página **158**, estudamos uma situação em que certa cultura de bactérias triplicaria o número de indivíduos passados *n* dias do início da reprodução, de acordo com a equação $(1,05)^n=3$. Sabendo que $\log_{1,05}3\simeq22,5$, calcule o valor de *n*.

Resolução

Da definição de logaritmos, temos que:

$$(1,05)^n=3\Leftrightarrow\log_{1,05}3=n$$

Portanto, $n\simeq22,5$, ou seja, o número de indivíduos da cultura de bactérias triplicou no 23º dia.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

1. Calcule o valor de *y* em cada equação.

a) $\log_4 y=3$ $y=64$

b) $\log_y 36=2$ $y=6$

c) $\log_9 y=1$ $y=9$

d) $\log_y 125=3$ $y=5$

e) $\log_2 y=5$ $y=32$

f) $\log_y\left(\frac{1}{256}\right)=-4$ $y=4$

2. Escreva uma igualdade logarítmica utilizando os números dados.

Se necessário, resolva o item **a** desta atividade junto com os alunos.

a) 9, 2 e 81 $\log_9 81=2$

b) 7, 0 e 1 $\log_7 1=0$

c) -3, $\frac{8}{27}$ e $\frac{3}{2}$ $\log_{\frac{3}{2}}\frac{8}{27}=-3$

d) $\sqrt{6}$, $\frac{1}{2}$ e 6 $\log_6\sqrt{6}=\frac{1}{2}$

e) -2 e 0,01 $\log 0,01=-2$

3. De acordo com a definição de logaritmos e suas consequências, calcule:

a) $\log_{21} 1$ 0
b) $\log 10\,000$ 4
c) $\log_{32} 32$ 1
d) $8^{\log_8 19}$ 19
e) $\log 0{,}1$ −1

4. Calculadora

Veja como podemos calcular logaritmos decimais utilizando uma calculadora científica.

Para calcular o logaritmo decimal de 11, por exemplo, procedemos da seguinte maneira:

Digitamos a tecla logaritmo log, registramos o número 11 e, em seguida, digitamos a tecla =:

log → 1 → 1 → =

Em alguns modelos de calculadoras científicas, o cálculo do logaritmo decimal de 11 deve ser realizado da seguinte maneira:

1 → 1 → log → =

Para calcularmos o logaritmando de um logaritmo decimal como $\log b = 0{,}95$, por exemplo, digitamos SHIFT e a tecla 10^x log, registramos o número 0,95 e digitamos a tecla =:

SHIFT → 10^x log → 0 → • → 9 → 5 → =

Ilustrações: Camila Ferreira

Utilizando uma calculadora científica e procedendo de maneira semelhante à apresentada, calcule em cada equação o valor de *x* com aproximação de uma casa decimal.

a) $\log 7 = x$ $x = 0{,}8$
b) $\log x = 0{,}903$ $x = 8$
c) $\log 13 = x$ $x = 1{,}1$
d) $\log x = 1{,}322$ $x = 21$
e) $\log 20 - \log 17 = x$ $x = 0{,}1$
f) $\log x = 3 + \log 25$ $x = 25\,118{,}9$

5. Calcule o valor de cada expressão.

a) $\log_3 \sqrt[4]{9} - 4^{\log_4 5}$ $-\frac{9}{2}$

b) $2\log_9 1 + \left[\log_{0,5}\left(\frac{1}{8}\right)\right]^2$ 9

c) $6^{2+\log_6 7} - \log(\log 10)$ 252

d) $4\log_8 2\sqrt{2} + \log_{\frac{1}{5}} 0{,}04$ 4

6. O logaritmo de certo número em determinada base é igual a 4, e o logaritmo desse mesmo número com base igual ao triplo da anterior é igual a 2. Qual é esse número? 81

7. Considerando que $10^{0,301} = 2$ e $10^{0,477} = 3$, veja como podemos calcular log6.

$$\log 6 = x \Rightarrow \log(2 \cdot 3) = x \Rightarrow \log\left(10^{0,301} \cdot 10^{0,477}\right) = x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \log\left(10^{0,778}\right) = x \Rightarrow 10^x = 10^{0,778} \Rightarrow x = 0{,}778$$

Agora, calcule:

a) $\log 12$ 1,079
b) $\log 18$ 1,255
c) $\log 30$ 1,477
d) $\log 54$ 1,732

8. Cientistas observaram que determinada colônia de bactérias aumenta sua população em 20% a cada hora. Considerando a taxa de crescimento constante e $\log_{1,2} 2 = 3{,}81$, calcule aproximadamente quantas horas serão necessárias para que essa população dobre. 3h49min

9. Para quais valores de *x* é possível determinar:

a) $\log_6(x-9)$ $x > 9$

b) $\log_{(2x+8)} 0{,}05$ $x > -4$ e $x \neq -\frac{7}{2}$

c) $\log_5(1-x) + \log_{(x+0,3)} 9$ $-0{,}3 < x < 1$ e $x \neq 0{,}7$

d) $\log_{13}\left(\frac{3x-6}{2-4x}\right)$ $\frac{1}{2} < x < 2$

e) $\frac{\log(x-10)}{\log_{(x+1)} 25}$ $x > 10$

10. Sendo $\log_{(2a-10)} 2 = \log_{(4+a)}\left(\frac{b}{3} - 1\right)$ e $\log_b\left(8 - \frac{a}{2}\right) = 0$, qual é o valor de $y = 8^{\log_5 17 \cdot \log_8(a-b)}$? $y = 17$

11. Quando digitamos a tecla log de uma calculadora científica e inserimos um número maior que zero, ao pressionarmos a tecla = obtemos um número real no visor da calculadora. Qual é a relação entre o número inserido inicialmente e o número real obtido? Resposta esperada: o número 10, que é a base do logaritmo, elevado ao número real que obtemos é igual ao número inserido inicialmente.

12. Bruno digitou em sua calculadora científica a tecla √, pressionou duas vezes log e inseriu certo número natural *n*. Ao digitar a tecla =, obteve no visor da calculadora o número zero. Determine o número *n* digitado por Bruno. $n = 10$

Propriedades operatórias dos logaritmos

Neste tópico, iremos estudar as propriedades dos logaritmos, que serão úteis em diversos cálculos.

- **logaritmo do produto**

Em uma mesma base, o logaritmo do produto de dois ou mais números positivos é igual à soma dos logaritmos de cada um desses números.

$$\log_a(b\cdot c)=\log_a b+\log_a c,\ \text{com } a>0,\ b>0,\ c>0 \text{ e } a\neq 1$$

Demonstração:

Considerando $\log_a b=m$, $\log_a c=n$ e $\log_a(b\cdot c)=p$, temos, pela definição, que:

$$\log_a b=m\Leftrightarrow a^m=b \qquad \log_a c=n\Leftrightarrow a^n=c \qquad \log_a(b\cdot c)=p\Leftrightarrow a^p=b\cdot c$$

Substituindo $b=a^m$ e $c=a^n$ em $a^p=b\cdot c$, temos:

$$a^p=a^m\cdot a^n\Rightarrow a^p=a^{m+n}\Rightarrow \underbrace{p}_{\log_a(b\cdot c)}=\overbrace{m}^{\log_a b}+\underbrace{n}_{\log_a c}\Rightarrow \log_a(b\cdot c)=\log_a b+\log_a c$$

Note que $\log_a b\cdot c$ é diferente de $\log_a(b\cdot c)$. Em $\log_a b\cdot c$, temos um número c multiplicando $\log_a b$; em $\log_a(b\cdot c)$, o logaritmando é $b\cdot c$, o que possibilita a aplicação da propriedade do logaritmo do produto.

Exemplos

- $\log_6(9\cdot 7)=\log_6 9+\log_6 7$
- $\log(3\cdot 1)=\log 3+\log 1=\log 3+0=\log 3$

- **logaritmo do quociente**

Em uma mesma base, o logaritmo do quociente de dois números positivos é igual à diferença dos logaritmos de cada um desses números.

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right)=\log_a b-\log_a c,\ \text{com } a>0,\ b>0,\ c>0 \text{ e } a\neq 1$$

Demonstração:

Considerando $\log_a b=m$, $\log_a c=n$ e $\log_a\left(\frac{b}{c}\right)=q$, temos, pela definição, que:

$$\log_a b=m\Leftrightarrow a^m=b \qquad \log_a c=n\Leftrightarrow a^n=c \qquad \log_a\left(\frac{b}{c}\right)=q\Leftrightarrow a^q=\frac{b}{c}$$

Substituindo $b=a^m$ e $c=a^n$ em $a^q=\frac{b}{c}$, temos:

$$a^q=\frac{a^m}{a^n}\Rightarrow a^q=a^{m-n}\Rightarrow \underbrace{q}_{\log_a\left(\frac{b}{c}\right)}=\overbrace{m}^{\log_a b}-\underbrace{n}_{\log_a c}\Rightarrow \log_a\left(\frac{b}{c}\right)=\log_a b-\log_a c$$

Exemplos

- $\log\left(\frac{4}{9}\right)=\log 4-\log 9$
- $\log_2\left(\frac{1}{2}\right)=\log_2 1-\log_2 2=0-1=-1$

- **logaritmo da potência**

O logaritmo de uma potência de base positiva é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da base da potência.

$$\log_a b^n=n\cdot\log_a b,\ \text{com } a>0,\ b>0 \text{ e } a\neq 1$$

Demonstração:

Considerando $\log_a b=c$ e $\log_a b^n=d$, temos, pela definição, que:

$$\log_a b=c\Leftrightarrow a^c=b \qquad \log_a b^n=d\Leftrightarrow a^d=b^n$$

Substituindo $b=a^c$ em $a^d=b^n$, temos:

$$a^d=(a^c)^n\Rightarrow a^d=a^{c\cdot n}\Rightarrow \underbrace{d}_{\log_a b^n}=n\cdot\underbrace{c}_{\log_a b}\Rightarrow \log_a b^n=n\cdot\log_a b$$

Exemplos

- $\log 2^7=7\cdot\log 2$
- $\log 0{,}1=\log 10^{-1}=-1\cdot\log 10=-1\cdot 1=-1$

Atividades resolvidas

R4. Dados $\log 2 = 0{,}301$, $\log 3 = 0{,}477$ e $\log 5 = 0{,}699$, calcule:

a) $\log 30$
b) $\log 0{,}\overline{3}$
c) $\log 64$
d) $\log \sqrt[7]{2{,}5}$

Resolução

a) $\log 30 = \underbrace{\log(2\cdot 3\cdot 5) = \log 2 + \log 3 + \log 5}_{\text{logaritmo do produto}} = 0{,}301 + 0{,}477 + 0{,}699 = \boxed{1{,}477}$

b) $\log 0{,}\overline{3} = \underbrace{\log\left(\frac{1}{3}\right) = \log 1 - \log 3}_{\text{logaritmo do quociente}} = 0 - 0{,}477 = \boxed{-0{,}477}$

c) $\log 64 = \underbrace{\log 2^6 = 6\cdot\log 2}_{\text{logaritmo da potência}} = 6\cdot 0{,}301 = \boxed{1{,}806}$

d) $\log\sqrt[7]{2{,}5} = \underbrace{\log 2{,}5^{\frac{1}{7}} = \frac{1}{7}\cdot\log\left(\frac{5}{2}\right)}_{\text{logaritmo da potência}} = \overbrace{\frac{1}{7}\cdot(\log 5 - \log 2)}^{\text{logaritmo do quociente}} = \frac{1}{7}\cdot(0{,}699 - 0{,}301) = \boxed{0{,}057}$

De modo geral, $\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n}\cdot\log_a b$, com $a > 0$, $b > 0$ e $a \neq 1$.

R5. Resolva a equação exponencial $2^{x-6} = 6$, dado $\log_2 3 = 1{,}58$.

Resolução

Por definição, temos:

$$2^{x-6} = 6 \Rightarrow \log_2 6 = x - 6 \Rightarrow \log_2(2\cdot 3) = x - 6 \Rightarrow \underbrace{\log_2 2}_{1} + \underbrace{\log_2 3}_{1{,}58} = x - 6 \Rightarrow 1 + 1{,}58 = x - 6 \Rightarrow x = 8{,}58$$

Atividades

Anote as respostas no caderno.

13. Utilizando as propriedades, desenvolva cada logaritmo.

a) $\log(b\sqrt{c})$ $\log b + \frac{1}{2}\log c$
b) $\log\left(\frac{a^2 b}{c}\right)$ $2\log a + \log b - \log c$
c) $\log_2\left(\frac{\sqrt[5]{a}}{b\cdot c^2}\right)$ $\frac{1}{5}\log_2 a - \log_2 b - 2\log_2 c$

14. Escreva na forma de um único logaritmo.

a) $\log_4 5 + \log_4 9$ $\log_4 45$
b) $3\log_8 4 - \log_8 16$ $\log_8 4$
c) $8\log 1 + \log 0{,}77 - \log 0{,}11$ $\log 7$
d) $\frac{1}{3}\log_3 8 - \log_3 10 + 4\log_3 2$ $\log_3 3{,}2$

15. Considerando $\log 2 = 0{,}3$, $\log 3 = 0{,}5$ e $\log 5 = 0{,}7$, determine o valor de:

a) $\log 15$ 1,2
b) $\log 30$ 1,5
c) $\log 45$ 1,7
d) $\log 1{,}2$ 0,1
e) $(\log 1{,}5)^2$ 0,04
f) $\log\sqrt{0{,}3}$ −0,25

16. Sabendo que $3\log a = 2$ e $\frac{1}{2}\log b = 4$, qual o valor de $2\log\left(\frac{\sqrt[4]{a}}{b^6}\right)$? $-\frac{574}{3}$

17. Calcule o valor da expressão $x + y - z$, sabendo que $x = \log 0{,}001^6$, $y = \log_3 243$ e $z = \log_3\sqrt{27}$. $-\frac{29}{2}$

18. Determine a solução das equações exponenciais, dado $\log_3 5 = 1{,}465$.

a) $3^{x+4} = 15$ $S = \{-1{,}535\}$
b) $27^x = 125$ $S = \{1{,}465\}$
c) $225 = 9^{\frac{x}{4}-1}$ $S = \{13{,}86\}$

19. Qual o valor de *x* para que seja satisfeita a igualdade $\log_c xb^3 = \frac{1}{2}\log_c a + 4\log_c b$? $x = b\sqrt{a}$

20. Resolva as equações.

a) $\log_4 x + \log_4(x+3) = 1$ $S = \{1\}$
b) $\log(x-3) + \log x = 1$ $S = \{5\}$
c) $\log_6(x-1)^2 - \log_6(x-1) = 0$ $S = \{2\}$
d) $\log_4 2x + \log_4(9-x) = 2$ $S = \{1, 8\}$

21. A desvalorização que certo modelo de automóvel sofre pode ser calculada por meio da fórmula $v = n\left(\frac{9}{10}\right)^t$, em que *v* é o valor futuro, *n* é o valor atual e *t* é o período de tempo, a cada dois anos, no qual o automóvel sofre a desvalorização.

a) Qual é a taxa de desvalorização desse automóvel a cada dois anos? 10%

b) Se o valor atual de mercado desse automóvel é *n* reais, após quantos anos, aproximadamente, o seu valor será reduzido à metade? Use $\log_{0,9} 0{,}45 = 7{,}6$. 13 anos

22. Um investimento bancário rende 1% ao mês. Se forem investidos R$ 500,00, quantos meses e dias serão necessários para que se obtenha R$ 50,00 de juros? Considere o mês com 30 dias e, se necessário, utilize $\log_{1,01} 10 = 231{,}4$ e $\log_{1,01} 11 = 240{,}9$.
9 meses e 15 dias

23. Os biólogos utilizam em certas pesquisas a alometria, do grego *aloos* (outra) e *metron* (medida), que estuda as variações das formas e dos processos de organismos. Os modelos alométricos podem ou não ser lineares. Uma maneira de linearizar os modelos é utilizando os logaritmos neperiano (base *e*) ou decimal. Um dos modelos alométricos para a biomassa das árvores é dado por $M=a\cdot D^b$, em que *M* é a massa acima do solo, *D* é o diâmetro do tronco à altura do peito, *a* é o coeficiente da escala e *b* é o expoente da escala. Utilizando logaritmos decimais ou neperianos, linearize o modelo apresentado. $\log M=\log a+b\log D$ ou $\ln M=\ln a+b\ln D$

Modelos alométricos lineares são aqueles que não apresentam variável no expoente.

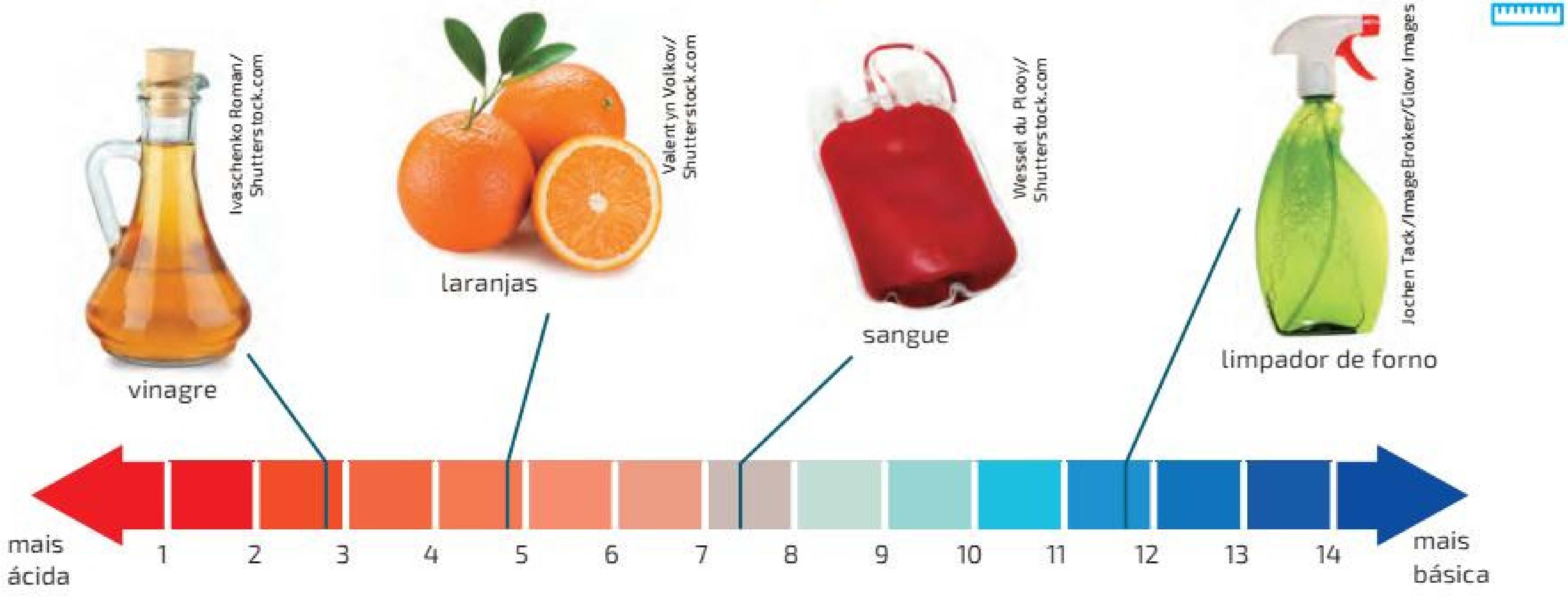
24. O pH, ou potencial hidrogeniônico, permite expressar a acidez, neutralidade ou basicidade de uma solução aquosa por meio da concentração de íons hidrogênio, em mol/L.

Em 1909, com base em diversos estudos realizados em físico-química na segunda metade do século XIX e início do XX, o bioquímico dinamarquês Sören P. Sörensen (1868-1939) estabeleceu uma maneira para expressar o pH de uma substância utilizando o logaritmo negativo da sua concentração de íons hidrogênio $\left(\left[H^+\right]\right)$, ou seja, $pH=-\log\left[H^+\right]$.

A partir desse conceito, da obtenção experimental do produto iônico da água $\left(\left[H^+\right]\left[OH^-\right]\right)$, que corresponde a $1\cdot10^{-14}$ a 25 °C, e do pOH, determinado por meio do logaritmo negativo da concentração de íons hidroxila $\left(\left[OH^-\right]\right)$ em mol/L, ou seja, $pOH=-\log\left[OH^-\right]$, foi obtida a relação $pH+pOH=14$, e desenvolveu-se uma escala de 0 a 14, por meio da qual uma solução aquosa a 25 °C pode ser classificada em ácida, neutra ou básica.

- solução ácida: $pH<7$
- solução neutra: $pH=7$
- solução básica: $pH>7$

Escala do pH



Fontes de pesquisa: <http://qnint.sbq.org.br/novo/index.php?hash=conceito.23>. Acesso em: 8 dez. 2015.
KOTZ, John C., TREICHEL JR, Paul M. **Química geral e reações químicas**. Tradução técnica Flávio Maron Vichi. São Paulo: Thomson Learning, 2006.
BRADY, James E.; RUSSELL, Joel W.; HOLUM, John R. **Química**: a matéria e suas transformações. Tradução J. A. Souza. Rio de Janeiro: LTC, 2003.

A utilização do pH na indústria permitiu que processos como produção de vacinas, fermentações, produção de leite e derivados fossem realizados por meio de procedimentos mais adequados.

Um agrônomo, ao verificar as condições do solo para o início de um plantio, oferece ao produtor informações sobre o nível de nutrientes, o conteúdo orgânico e o pH do solo, que, quando representado por um valor entre 6 e 7, tende a ser mais fértil.

a) Em uma propriedade rural, a produtividade máxima de feijão foi obtida com o pH 6,4 do solo. Determine a concentração de íons hidrogênio apresentada nesse solo. $10^{-6,4}$ mol/L

b) Considerando o pH, a 25 °C, das substâncias a seguir, classifique-as em ácidas, básicas ou neutras.
- leite de magnésia: $10<pH<11$ substância básica
- suco de limão: $2<pH<3$ substância ácida
- água pura: $pH=7$ substância neutra
- leite: $6<pH<7$ substância ácida

c) Considerando $\left[H^+\right]\left[OH^-\right]=1\cdot10^{-14}$ e utilizando as fórmulas $pH=-\log\left[H^+\right]$ e $pOH=-\log\left[OH^-\right]$, obtenha a relação $pH+pOH=14$. $\left[H^+\right]\left[OH^-\right]=1\cdot10^{-14}\Rightarrow\log\left(\left[H^+\right]\left[OH^-\right]\right)=-14\Rightarrow-\log\left[H^+\right]-\log\left[OH^-\right]=14\Rightarrow pH+pOH=14$

Mudança de base

Em alguns casos temos de efetuar cálculos com logaritmos de bases diferentes. Para isso podemos realizar a mudança de base do logaritmo de maneira conveniente.

Veja como podemos transformar $\log_a b$ em um logaritmo de base c, com $a>0$, $b>0$, $c>0$, $a\neq1$ e $c\neq1$:

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Demonstração:

Considerando $\log_a b=p$, $\log_c b=m$ e $\log_c a=n$, temos, pela definição, que:

$$\log_a b=p\Leftrightarrow a^p=b \qquad \log_c b=m\Leftrightarrow c^m=b \qquad \log_c a=n\Leftrightarrow c^n=a$$

Como $a^p=b$ e $c^m=b$, então $a^p=c^m$.

Substituindo $a=c^n$ em $a^p=c^m$, temos:

$$\left(c^n\right)^p=c^m\Rightarrow c^{n\cdot p}=c^m\Rightarrow \underbrace{n}_{\log_c a}\cdot\overbrace{p}^{\log_a b}=\underbrace{m}_{\log_c b}\Rightarrow \log_c a\cdot\log_a b=\log_c b\Rightarrow \boxed{\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}}$$

> Exemplos

- Mudando para 3 a base de $\log_7 25$, temos: $\log_7 25=\dfrac{\log_3 25}{\log_3 7}$.
- Mudando para 10 a base de $\log_9 13$, temos: $\log_9 13=\dfrac{\log 13}{\log 9}$.

Na igualdade $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$, quando $b=c$, temos:

$$\log_a b=\frac{\overbrace{\log_b b}^{1}}{\log_b a}\Rightarrow \boxed{\log_a b=\frac{1}{\log_b a}} \text{ ou } \boxed{\log_b a\cdot\log_a b=1}$$

> Exemplo

- $\log_2 32=5\Leftrightarrow\log_{32}2=\dfrac{1}{5}$

Como $\log_2 32\cdot\log_{32}2=5\cdot\dfrac{1}{5}=1$, temos que $\log_2 32$ e $\log_{32}2$ são números inversos.

De maneira geral, dizemos que $\log_c a$ e $\log_a c$, quando existirem, são números inversos.

Atividades resolvidas

R6. Dados $\log2=0{,}301$, $\log3=0{,}477$ e $\log5=0{,}699$, calcule $\log_2 15$ e $\log_{500}30\,000$.

Resolução

- $\log_2 15=\log_2(3\cdot5)=\overbrace{\log_2 3+\log_2 5=\frac{\log3}{\log2}+\frac{\log5}{\log2}}^{\text{mudança de base}}=\dfrac{0{,}477}{0{,}301}+\dfrac{0{,}699}{0{,}301}\simeq\boxed{3{,}907}$

- $\log_{500}30\,000=\underbrace{\log_{5\cdot10^2}(3\cdot10^4)=\frac{\log(3\cdot10^4)}{\log(5\cdot10^2)}}_{\text{mudança de base}}=\dfrac{\log3+\overbrace{\log10^4}^{4}}{\log5+\underbrace{\log10^2}_{2}}=\dfrac{0{,}477+4}{0{,}699+2}=\dfrac{4{,}477}{2{,}699}\simeq\boxed{1{,}659}$

R7. Escreva a expressão $\log_7 12-\log_7 3$ utilizando logaritmos decimais.

Resolução

$$\log_7 12-\log_7 3=\log_7\left(\frac{12}{3}\right)=\log_7 4=\boxed{\frac{\log4}{\log7}}$$

R8. Resolva a equação exponencial $7^{2x-1}=3$. Para isso, considere $\log3=0{,}48$ e $\log7=0{,}85$.

Resolução

Aplicamos a definição de logaritmo e utilizamos a mudança de base.

$$7^{2x-1}=3\Rightarrow 2x-1=\log_7 3\Rightarrow 2x-1=\frac{\log3}{\log7}\Rightarrow 2x-1=\frac{0{,}48}{0{,}85}\Rightarrow x=\frac{\frac{0{,}48}{0{,}85}+1}{2}\Rightarrow \boxed{x\simeq0{,}782}$$

Atividades

Anote as respostas no caderno.

26. d) $\frac{\log 2}{\log 17}$

25. Determine o valor de cada expressão, considerando $\log 2 = 0{,}3$, $\log 5 = 0{,}7$ e $\log 7 = 0{,}8$.

a) $\log_2 35$ 5
b) $\log_5 28$ 2
c) $\log_7 14$ $\frac{11}{8}$
d) $\log_{14} 70$ $\frac{18}{11}$
e) $\log_8 1{,}4$ $\frac{1}{9}$
f) $\log_{\sqrt{2}} 5^7$ $\frac{98}{3}$

26. Reduza as expressões a razões de logaritmos decimais.

a) $\log_{12} 2 + \log_{12} 4$ $\frac{\log 8}{\log 12}$
b) $\log_9 24 - \log_9 6$ $\frac{\log 4}{\log 9}$
c) $\log_2 3 + \log_2 1 - \log_2 7$ $\frac{\log\left(\frac{3}{7}\right)}{\log 2}$
d) $\log_{17} 18 - \log_{17} 12 + \log_{17} \frac{4}{3}$

27. Considerando $\log a = x$ e $\log b = y$, calcule o valor das expressões.

a) $\log_a b \cdot \log_b a$ 1
b) $\log_{\sqrt{b}} a^3$ $\frac{6x}{y}$, com $y \neq 0$

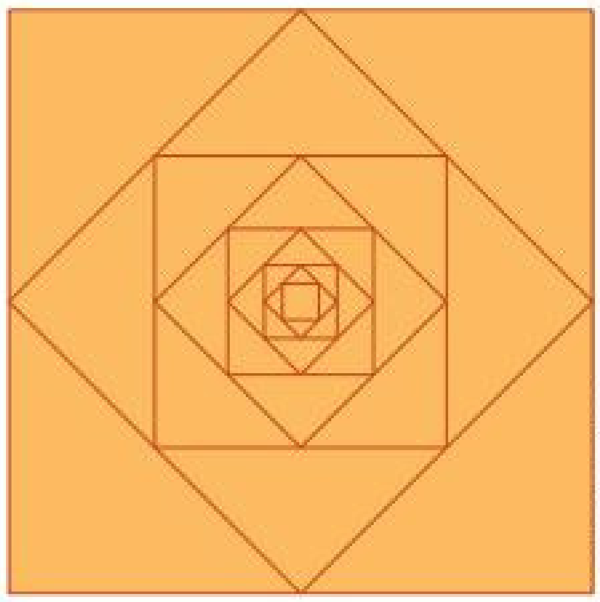
28. O valor de $\log_8 \left[\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{(a \cdot b)^{\frac{1}{2}}}\right]$, sabendo que *a* e *b* são números positivos e $a + b = 30\sqrt{a \cdot b}$, é: b

a) 0,6
b) $1{,}\overline{6}$
c) $2{,}\overline{8}$
d) 3,9
e) 4

29. Nas páginas **156** e **157**, estudamos informações sobre o crescimento populacional de alguns microrganismos e os cuidados que devemos ter para evitar a contaminação de alimentos com bactérias, por exemplo.

Sabendo que certo microrganismo se prolifera rapidamente, dobrando sua população a cada 20 min, em quanto tempo, aproximadamente, uma população de 100 microrganismos passará a ser composta de 5 000 indivíduos? (Dado: $\log 2 = 0{,}3$ e $\log 5 = 0{,}7$) 1h54min

30. Em um quadrado, se traçarmos segmentos de reta ligando os pontos médios de seus lados, obteremos um novo quadrado; ligando os pontos médios dos lados desse novo quadrado, obteremos outro quadrado. Esse processo pode ser realizado indeterminadas vezes, gerando uma sequência de quadrados.


Acervo da editora

Considerando o quadrilátero inicial com lado unitário, a medida do lado de um quadrado é dada pela fórmula $m = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$, em que *n* é o número do quadrado na sequência.

Quais quadrados dessa sequência têm lados medindo entre $\frac{\sqrt{2}}{50}$ e $\frac{2}{25}$ unidade? Utilize $\log 2 = 0{,}3$ e $\log 5 = 0{,}7$.

9º, 10º e 11º quadrados

31. Determine o valor de $z \cdot w$, sabendo que $z = \log_6 27 \cdot \log_3 36$ e $w = \log_4 10 \cdot \log \sqrt[3]{16}$. 4

32. Calculadora

Veja como podemos calcular logaritmos de base não decimais utilizando uma calculadora científica.

Para calcular $\log_5 14$, por exemplo, procedemos da seguinte maneira:

Inicialmente, utilizando a propriedade de mudança de base, temos $\log_5 14 = \frac{\log 14}{\log 5}$. Em seguida, efetuamos os cálculos:

*

log → 1 → 4 → ÷ → log → 5 → =

A sequência de teclas a serem pressionadas pode variar dependendo do modelo da calculadora científica.

*Se os alunos estiverem em dúvida sobre como calcular o logaritmo na base decimal utilizando a calculadora científica, retome a atividade 4 deste capítulo.

Camila Ferreira

Utilizando uma calculadora científica e procedendo de maneira semelhante à apresentada, calcule o valor de cada logaritmo com aproximação de uma casa decimal.

a) $\log_7 3$ 0,6
b) $\log_5 9$ 1,4
c) $\log_{21} 10$ 0,8
d) $\log_{3,2} 8$ 1,8
e) $\log_2 15^3$ 11,7
f) $\log_4 \sqrt[5]{12}$ 0,4

Para resolver os itens **e** e **f** em calculadoras científicas que possuem as funções x^y e $\sqrt[x]{\ }$, não é necessário simplificar o logaritmando; pode-se calcular diretamente digitando-se as teclas correspondentes.

33. Com o auxílio de uma calculadora científica, calcule o valor de cada expressão com aproximação de três casas decimais.

a) $\log_3 \sqrt{6} + \log_8 20^4$ 6,578

b) $\log \sqrt[3]{2} - \log_5 4^7$ −5,929

c) $\log_7 5^5 + \log \sqrt[3]{4^2} - \log_{0,1} 1$ 4,537

d) $\log\left(\log_6 3^{\frac{1}{8}}\right)^2$ −2,231

e) $\frac{\log_{\sqrt{10}} 15 + \log\sqrt{14}}{\log_5 8}$ 2,264

34. Desafio

Calcule o número de algarismos da potência 50^{14}. Se necessário, utilize $\log 2 = 0{,}301$.

24 algarismos

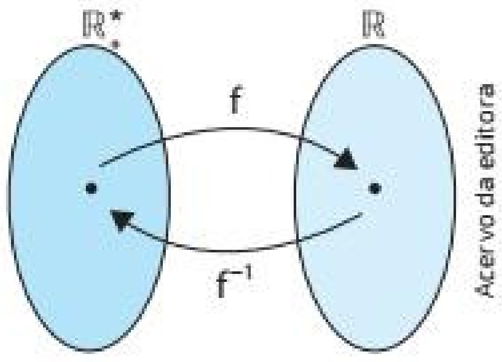
Função logarítmica

Estudamos anteriormente que uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+^*$, definida por $f(x)=a^x$, com $a>0$ e $a\neq1$, é denominada **função exponencial**. Além disso, vimos que essa função é bijetiva e, dessa maneira, possui inversa.

A inversa de uma função exponencial é denominada **função logarítmica**, que pode ser definida da seguinte maneira:

> Uma função $f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$, definida por $f(x)=\log_a x$ ou $y=\log_a x$, com $a>0$ e $a\neq1$, é denominada **função logarítmica**.

Veja no esquema ao lado a representação das funções logarítmica $f(x)=\log_a x$ e exponencial $f^{-1}(x)=a^x$.



Na função logarítmica, $\mathbb{R}_+^*$ é o domínio, e $\mathbb{R}$, o conjunto imagem.

São exemplos de funções logarítmicas:

- $f(x)=\log_3 x$
- $g(x)=\log x$
- $h(x)=\log_{\sqrt{7}} x$
- $m(x)=\log_{\frac{1}{3}} x$

Atividades resolvidas

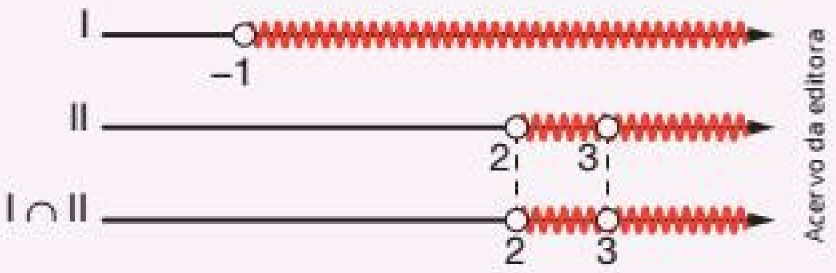
R9. Determine o domínio da função $f(x)=\log_{x-2}\sqrt{x+1}$.

Resolução

A função é definida para:

- $\sqrt{x+1}>0\Rightarrow x+1>0\Rightarrow x>-1$ (I)
- $x-2>0\Rightarrow x>2$ e $x-2\neq1\Rightarrow x\neq3$ (II)

O domínio da função é dado pela interseção de **I** e **II**.



Portanto, $D(f)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x>2 \text{ e } x\neq3\}$.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

35. Dadas as funções $f(x)=\log_2 x$ e $g(x)=\log_3\left(\frac{1}{x}\right)$, calcule:

a) $f(16)$ 4

b) $g(1)$ 0

c) $f(\sqrt[3]{4})$ $\frac{2}{3}$

d) $g(9^{-2})$ 4

e) $f^{-1}(5)$ 32

f) $g^{-1}(3)$ $\frac{1}{27}$

36. Determine o domínio e o conjunto imagem das funções.

a) $f(x)=\log(x+3)$ $D(f)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x>-3\}$; $Im(f)=\mathbb{R}$

b) $f(x)=\log_8(6-x)$ $D(f)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x<6\}$; $Im(f)=\mathbb{R}$

c) $f(x)=5+\log_4(2x)$ $D(f)=\mathbb{R}_+^*$; $Im(f)=\mathbb{R}$

37. Obtenha o domínio de cada função.

a) $g(x)=\log_{(x-4)}(x+2)$ $D(g)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x>4 \text{ e } x\neq5\}$

b) $g(x)=\log_{(-x)}(1+x)$ $D(g)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,-1<x<0\}$

c) $g(x)=\log_{(2x-1)}(x^2-6x+9)$ $D(g)=\left\{x\in\mathbb{R}\,|\,x>\frac{1}{2} \text{ e } x\neq1 \text{ e } x\neq3\right\}$

38. O nível sonoro de um ambiente, em decibéis (dB), pode ser calculado pela lei de Weber-Fechner, que é dada por $N=10\log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)$, em que *I* é a intensidade sonora medida em watts por metro quadrado (W/m^2).

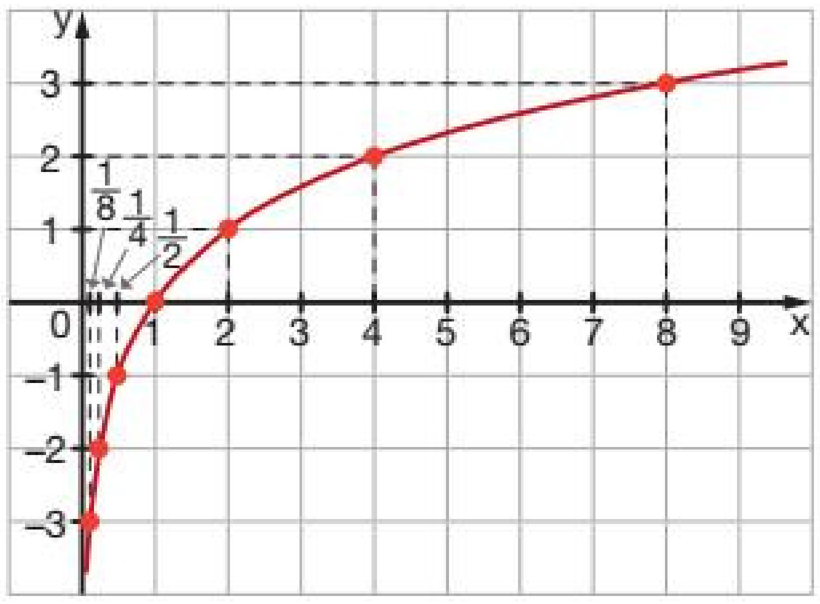
Qual é o nível sonoro da respiração normal de uma pessoa que tem intensidade de 10^{-11} W/m^2?
10 dB

Gráfico de uma função logarítmica

Vamos esboçar o gráfico das funções logarítmicas $f(x)=\log_2 x$ e $g(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$. Para isso, atribuímos alguns valores para *x* e calculamos os valores correspondentes de *y*, determinando pares ordenados (x, y). Em seguida, representamos esses pares ordenados em um plano cartesiano.

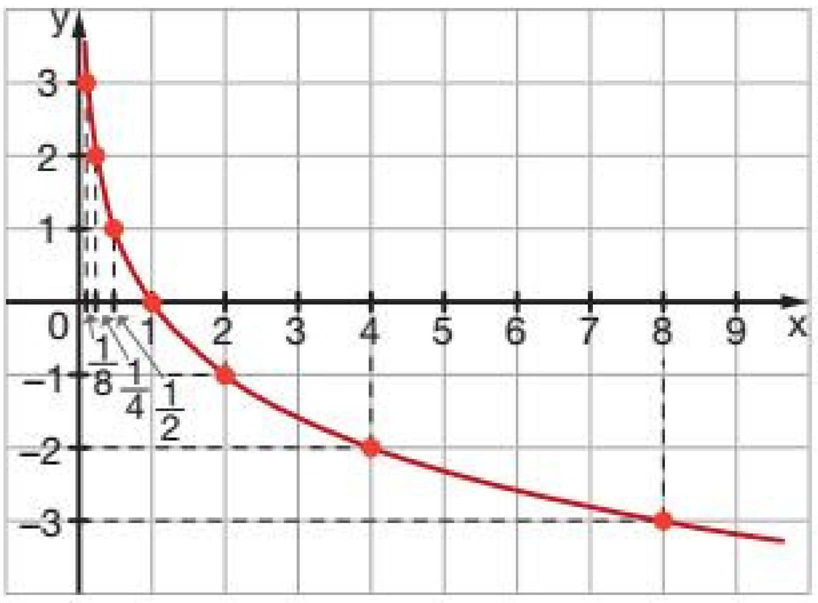
- $f(x)=\log_2 x$

x	$f(x) = \log_2 x$	(x, y)
$\frac{1}{8}$	$f\left(\frac{1}{8}\right)=\log_2 \frac{1}{8}=-3$	$\left(\frac{1}{8}, -3\right)$
$\frac{1}{4}$	$f\left(\frac{1}{4}\right)=\log_2 \frac{1}{4}=-2$	$\left(\frac{1}{4}, -2\right)$
$\frac{1}{2}$	$f\left(\frac{1}{2}\right)=\log_2 \frac{1}{2}=-1$	$\left(\frac{1}{2}, -1\right)$
1	$f(1)=\log_2 1=0$	$(1,0)$
2	$f(2)=\log_2 2=1$	$(2,1)$
4	$f(4)=\log_2 4=2$	$(4,2)$
8	$f(8)=\log_2 8=3$	$(8,3)$



- $g(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$

x	$g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$	(x, y)
$\frac{1}{8}$	$g\left(\frac{1}{8}\right)=\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}=3$	$\left(\frac{1}{8}, 3\right)$
$\frac{1}{4}$	$g\left(\frac{1}{4}\right)=\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}=2$	$\left(\frac{1}{4}, 2\right)$
$\frac{1}{2}$	$g\left(\frac{1}{2}\right)=\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}=1$	$\left(\frac{1}{2}, 1\right)$
1	$g(1)=\log_{\frac{1}{2}} 1=0$	$(1,0)$
2	$g(2)=\log_{\frac{1}{2}} 2=-1$	$(2,-1)$
4	$g(4)=\log_{\frac{1}{2}} 4=-2$	$(4,-2)$
8	$g(8)=\log_{\frac{1}{2}} 8=-3$	$(8,-3)$



Ilustrações: Acervo da editora

Note que a função *f* é crescente e a base do logaritmo é $a=2>1$. Já a função *g* é decrescente e a base é $a=\frac{1}{2}$, ou seja, $0<a<1$. Além disso, os gráficos de *f* e *g* intersectam o eixo *x* no ponto de coordenadas $(1, 0)$ e não cruzam o eixo *y*, sendo definidas à direita dele.

De maneira geral, é possível demonstrar que:

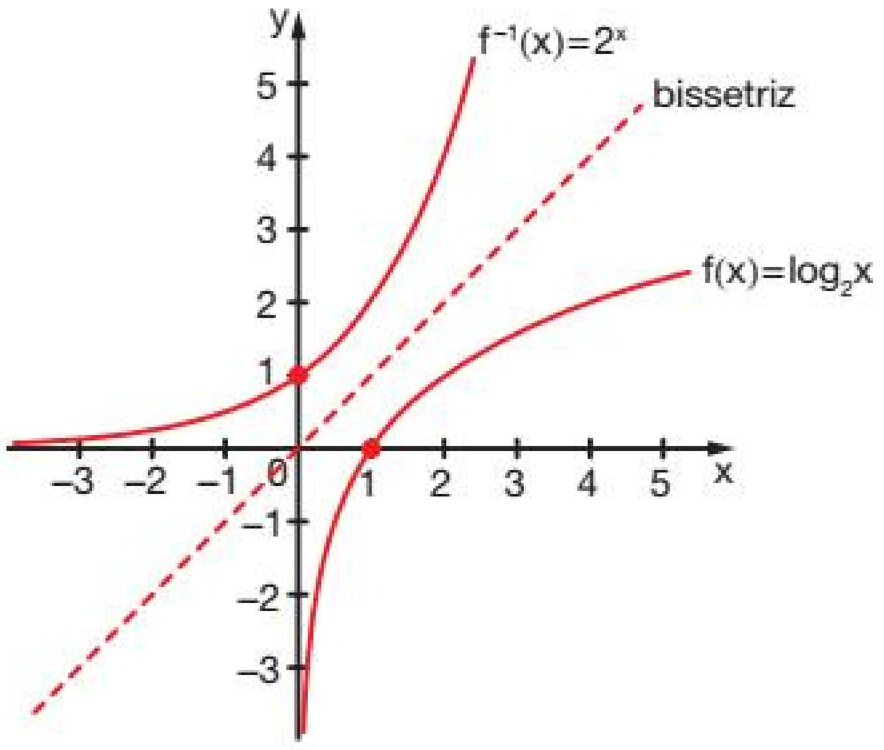
- uma função logarítmica é **crescente** se $a>1$. Sempre que aumentamos os valores de *x*, os valores correspondentes de *y* aumentam, isto é, $x_1>x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1>\log_a x_2$;
- uma função logarítmica é **decrescente** se $0<a<1$. Sempre que aumentamos os valores de *x*, os valores correspondentes de *y* diminuem, isto é, $x_1>x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1<\log_a x_2$;
- o gráfico da função logarítmica $y=\log_a x$, com $a>0$ e $a\neq 1$, intersecta o eixo *x* no ponto de coordenadas $(1,0)$ e não cruza o eixo *y*, sendo definido à direita desse eixo.

Função logarítmica e função exponencial no plano cartesiano

A bissetriz pode ser representada pela função identidade $f(x)=x$.

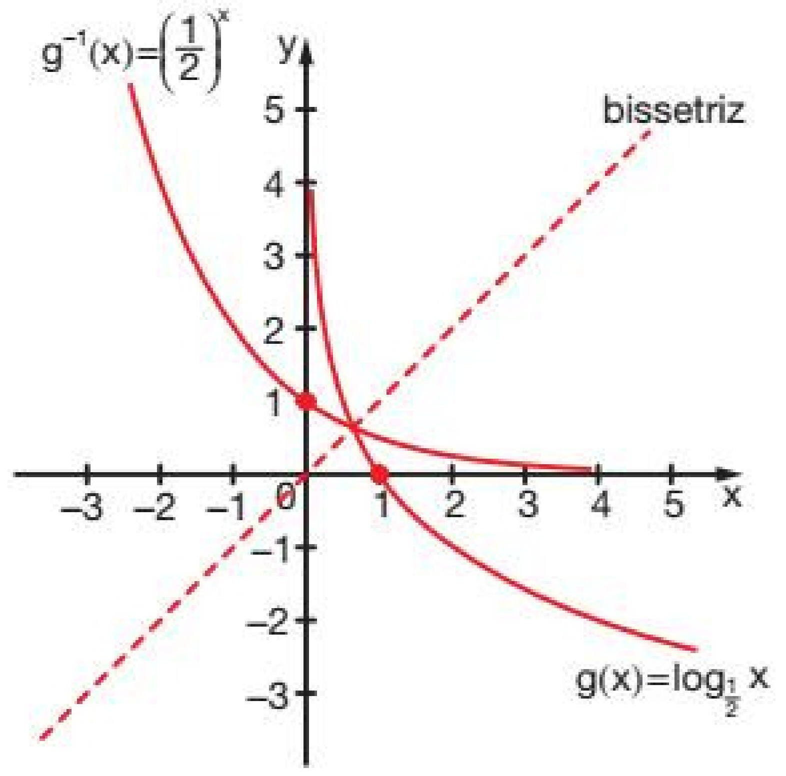
Estudamos anteriormente que os gráficos de duas funções inversas são simétricos em relação à bissetriz do 1º e do 3º quadrantes do plano cartesiano. Como a função exponencial e a função logarítmica são inversas, os gráficos que as representam são simétricos em relação a essa bissetriz.

Veja, em um mesmo plano cartesiano, os gráficos das funções inversas $f(x)=\log_2 x$ e $f^{-1}(x)=2^x$.



Nesse caso, as funções *f* e f^{-1} são crescentes, pois $a>1$.

Agora, veja os gráficos das funções inversas $g(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$ e $g^{-1}(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$.



Ilustrações: Acervo da editora

Nesse caso, as funções *g* e g^{-1} são decrescentes, pois $0<a<1$.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

39. Esboce o gráfico de cada função. Respostas nas Orientações para o professor.

a) $y=\log_4 x$

b) $y=\log_{\frac{1}{4}} x$

c) $y=2+\log_{\frac{2}{3}} x$

d) $y=\log_3(x+1)$

40. Classifique as funções em crescente ou decrescente. crescente: a, b, e; decrescente: c, d, f

a) $f(x)=\log_5 x$

b) $f(x)=\log x$

c) $f(x)=\log_{\frac{1}{6}} x$

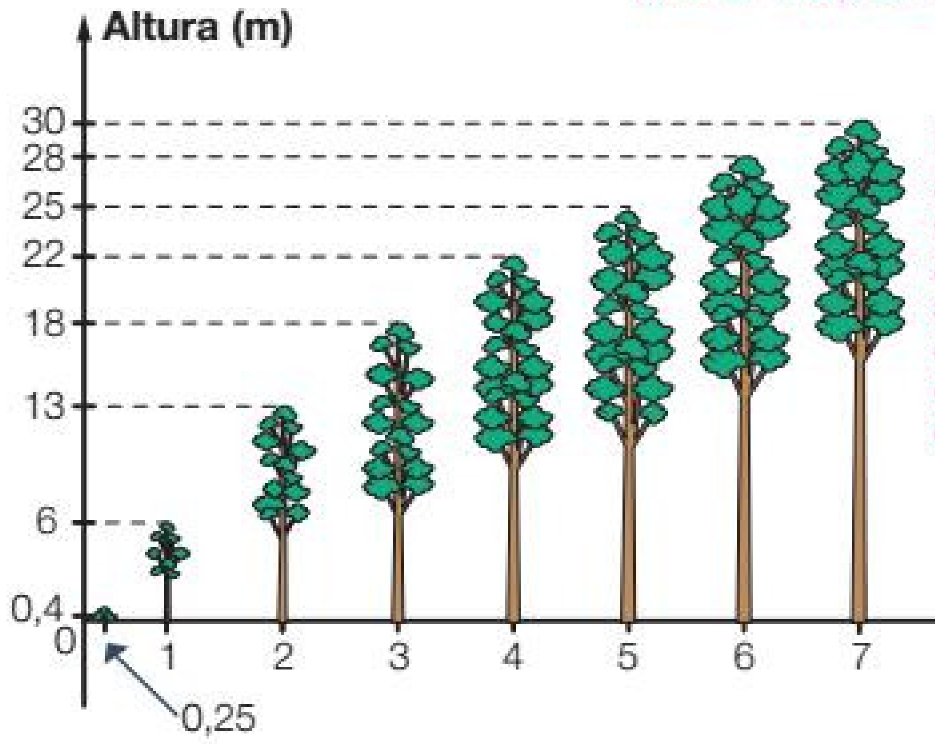
d) $f(x)=\log_{\frac{2}{\sqrt{7}}} x$

e) $f(x)=\log_{\frac{5}{2}} x$

f) $f(x)=\log_{\frac{8}{9}} x$

41. Esboce em um mesmo plano cartesiano o gráfico das funções $g(x)=\log_3 x$ e g^{-1}, identificando se são crescentes ou decrescentes. Resposta nas Orientações para o professor.

42. A altura $f(x)$ de certa espécie de eucalipto em função de sua idade *x* em anos, representada a seguir, pode ser descrita por $f(x)=c+\log_a x$, com $c>0$. O valor de *a* é maior do que 1 ou está entre 0 e 1? Por quê? O valor de *a* é maior do que 1, pois a função é crescente.



Diga aos alunos que no gráfico apresentado as escalas dos eixos são diferentes entre si.

Acervo da editora

Equação logarítmica

Toda equação cuja incógnita está no logaritmando, na base ou em ambos é denominada **equação logarítmica**.

São exemplos de equações logarítmicas:

- $\log_3(x-4)=27$
- $\log_2(x+6)+\log_2(x-1)=2$
- $\log_{5x} 12=18$

Ao resolvermos uma equação desse tipo, devemos verificar as condições de existência do logaritmo.

Lembre-se de que $\log_a b=c$ existe quando $a>0$, $b>0$ e $a\neq 1$.

Além dessa verificação, aplicaremos a seguinte propriedade:

$$\log_a b=\log_a c \Leftrightarrow b=c, \text{ com } a>0,\ b>0,\ c>0 \text{ e } a\neq 1$$

Veja, a seguir, a resolução de algumas equações logarítmicas.

Atividades resolvidas

R10. Resolva em $\mathbb{R}$ as seguintes equações.

a) $\log_2(x-3)=1$

b) $\log_{x-2}(2x-4)=2$

c) $\log(x^2-1)=\log(2x-1)$

d) $(\log_3 x)^2+\log_3 x=2$

e) $\log_2\left(\dfrac{8x+5}{x-4}\right)=3$

Nesta atividade são resolvidas equações envolvendo:
- igualdade entre logaritmo e número real
- igualdade entre dois logaritmos de mesma base
- mudança de incógnita

Resolução

a) $\log_2(x-3)=1$

Condição de existência: $x-3>0 \Rightarrow x>3$.

Resolvendo a equação, temos:

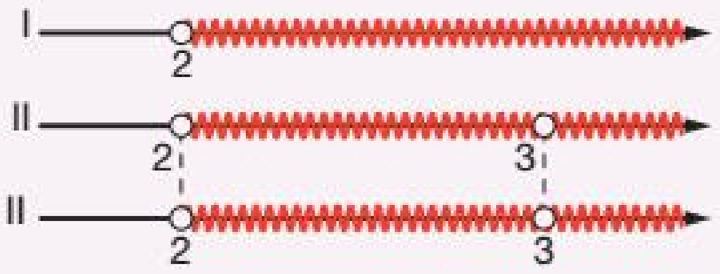
$$\log_2(x-3)=1 \Rightarrow 2^1=x-3 \Rightarrow x=5$$

Como $x=5$ satisfaz a condição de existência, temos $S=\{5\}$.

b) $\log_{x-2}(2x-4)=2$

Condições de existência:

- $2x-4>0 \Rightarrow 2x>4 \Rightarrow x>2$ (I)
- $x-2>0 \Rightarrow x>2$ e $x-2\neq 1 \Rightarrow x\neq 3$ (II)



Logo, as condições de existência são $x>2$ e $x\neq 3$.

Resolvendo a equação, temos:

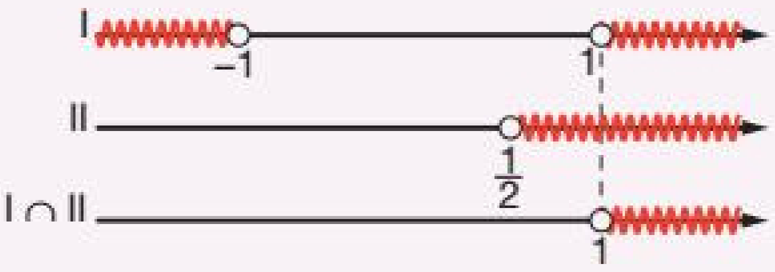
$$\log_{x-2}(2x-4)=2 \Rightarrow (x-2)^2=2x-4 \Rightarrow x^2-4x+4=2x-4 \Rightarrow x^2-6x+8=0 \left\langle \begin{array}{l} x_1=2 \\ x_2=4 \end{array} \right.$$

Nesse caso, como somente x_2 satisfaz as condições de existência, temos $S=\{4\}$.

c) $\log(x^2-1)=\log(2x-1)$

Condições de existência:

- $x^2-1>0 \Rightarrow x<-1$ ou $x>1$ (I)
- $2x-1>0 \Rightarrow 2x>1 \Rightarrow x>\dfrac{1}{2}$ (II)



Ilustrações: Acervo da editora

Logo, a condição de existência é $x>1$.

Resolvendo a equação, temos:

$$\log(x^2-1)=\log(2x-1) \Rightarrow x^2-1=2x-1 \Rightarrow x^2-2x=0 \left\langle \begin{array}{l} x_1=0 \\ x_2=2 \end{array} \right.$$

Nesse caso, como somente x_2 satisfaz a condição de existência, temos $S=\{2\}$.

d) $(\log_3 x)^2 + \log_3 x = 2$

Condição de existência: $x>0$.

Para resolver esta equação, substituímos $y=\log_3 x$.

$$(\log_3 x)^2 + \log_3 x = 2 \Rightarrow y^2 + y = 2 \Rightarrow y^2 + y - 2 = 0 \left\langle \begin{array}{l} y_1 = -2 \\ y_2 = 1 \end{array} \right.$$

Retornando o valor de *y* na igualdade $y=\log_3 x$, temos:

- $y_1 = -2 \Rightarrow \log_3 x_1 = -2 \Rightarrow x_1 = 3^{-2} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{9}$
- $y_2 = 1 \Rightarrow \log_3 x_2 = 1 \Rightarrow x_2 = 3^1 \Rightarrow x_2 = 3$

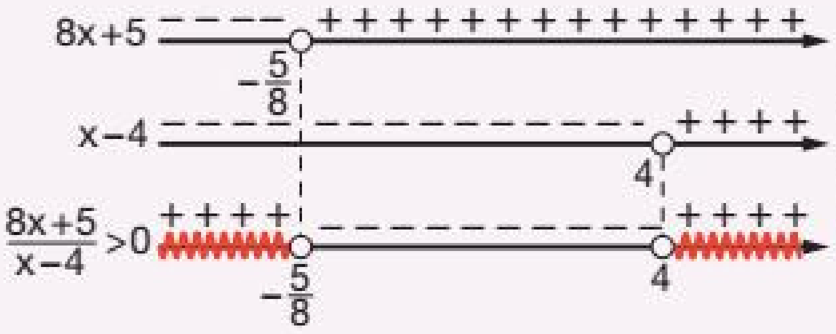
Nesse caso, como x_1 e x_2 satisfazem a condição de existência, temos $S=\left\{\frac{1}{9}, 3\right\}$.

e) $\log_2\left(\frac{8x+5}{x-4}\right) = 3$

Condição de existência: $\frac{8x+5}{x-4} > 0$ e $x \neq 4$.

Logo, $x < -\frac{5}{8}$ ou $x > 4$.

Segue que:



Acervo da editora

$$\log_2\left(\frac{8x+5}{x-4}\right) = 3 \Rightarrow 2^3 = \frac{8x+5}{x-4} \Rightarrow 8x - 32 = 8x + 5 \Rightarrow 8x - 8x = 5 + 32 \Rightarrow 0 = 37 \text{ (impossível)}$$

Portanto, $S=\varnothing$.

R11. Quantos meses, no mínimo, são necessários para que uma aplicação de R$ 200,00, a uma taxa mensal de 0,8%, resulte em um montante de R$ 250,00 ou mais? (Dados: $\log 1{,}25 = 0{,}097$ e $\log 1{,}008 = 0{,}003$) Lembre os alunos de que o montante corresponde à soma do capital aplicado e o juro obtido (rendimento da aplicação).

Resolução

Esse assunto será estudado com mais detalhes em um volume posterior dessa coleção.

A fórmula que determina o montante *M* obtido por um capital *C* aplicado à taxa de juros *i* durante *t* meses é $M = C(1+i)^t$. Para $M = 250$, $C = 200$ e $i = 0{,}008$, temos:

Lembre-se de que 0,8% pode ser escrito como $\frac{0{,}8}{100} = 0{,}008$.

$$M = C(1+i)^t \Rightarrow 250 = 200 \cdot (1+0{,}008)^t \Rightarrow 250 = 200 \cdot (1{,}008)^t \Rightarrow 1{,}25 = (1{,}008)^t$$

Para resolver essa equação, devemos aplicar o logaritmo decimal nos dois membros da igualdade.

$$1{,}25 = (1{,}008)^t \Rightarrow \log 1{,}25 = \log (1{,}008)^t \Rightarrow \overbrace{\log 1{,}25}^{0{,}097} = t \cdot \overbrace{\log 1{,}008}^{0{,}003} \Rightarrow t = \frac{0{,}097}{0{,}003} \Rightarrow t \simeq 32{,}333$$

Portanto, são necessários, no mínimo, 33 meses.

R12. Resolva o sistema $\begin{cases} x - y = 9 \\ \log x + \log y = 1 \end{cases}$.

Resolução

Condição de existência: $x>0$ e $y>0$.

Na 2ª equação do sistema, temos:

$$\log x + \log y = 1 \Rightarrow \log(x \cdot y) = 1 \Rightarrow 10^1 = x \cdot y \Rightarrow x = \frac{10}{y}$$

Substituindo $x = \frac{10}{y}$ na 1ª equação:

$$x - y = 9 \Rightarrow \frac{10}{y} - y = 9 \Rightarrow 10 - y^2 = 9y \Rightarrow y^2 + 9y - 10 = 0 \left\langle \begin{array}{l} y_1 = 1 \\ y_2 = -10 \end{array} \right.$$

Como y_2 não satisfaz a condição de existência, segue que $y=1$.

Substituindo $y=1$ na igualdade $x = \frac{10}{y}$:

$$x = \frac{10}{y} \Rightarrow x = \frac{10}{1} \Rightarrow x = 10$$

Portanto, a solução do sistema é $x=10$ e $y=1$.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

43. Resolva as equações logarítmicas.

a) $\log_4(x+5)=2$ $S=\{11\}$

b) $\log_6\sqrt{\frac{2+x}{3}}=\frac{1}{2}$ $S=\{16\}$

c) $\log_{-x-3}(2x-6)=7$ $S=\varnothing$

d) $\log_2(x+1)=\log_4(x^2+3)$ $S=\{1\}$

e) $\log_x{}^2 4-\log_x 16=-1$ $S=\{4\}$

f) $\log_3\left(\frac{x^2-9}{x+3}\right)=3$ $S=\{30\}$

44. Sabendo que $\log 2=0{,}301$, $\log 3=0{,}477$ e $\log 5=0{,}699$, resolva as equações exponenciais.

a) $3^{x-1}=5$ $x=2{,}465$

b) $30^x=100$ $x=1{,}354$

c) $20^x=3^{x-2}$ $x=-1{,}158$

d) $6^{x+1}=9^{\frac{x}{2}}$ $x=-2{,}585$

45. Sejam as funções $f(x)=\log_9 2x$ e $g(x)=\log_9(x+2)$, e *k* uma constante, tal que $k=\log_9 30$, determine para quais valores de *x* obtém-se $f(x)+g(x)=k$. $x=3$

46. Determine o conjunto-solução de cada equação.

a) $\log_8(\log^2 10+\log x)=0$ $S=\{1\}$

b) $\log^2(3-x)=\log(3-x)$ $S=\{-7, 2\}$

c) $\log_2{}^2(x+1)-\log_2(x+1)=6$ $S=\left\{-\frac{3}{4}, 7\right\}$

d) $\log_{27}\left[2+\log_5(x^2-11)\right]=\frac{1}{3}$ $S=\{-4, 4\}$

47. Resolva os sistemas.

a) $\begin{cases}\log_{2y} x=1\\ 3^{x+y}=27\end{cases}$ $x=2$ e $y=1$

b) $\begin{cases}x\cdot y=10^{\frac{5}{6}}\\ \log x-\log y=\frac{1}{6}\end{cases}$ $x=\sqrt{10}$ e $y=\sqrt[3]{10}$

48. Uma represa de 2 500 m² de superfície utilizada para a criação de peixes foi invadida por certa espécie de vegetação aquática. Como ela estava prejudicando o crescimento dos peixes, o proprietário contratou especialistas para realizar um estudo. Ao analisar os 50 m² já invadidos pela vegetação, concluiu-se que, se nenhuma providência fosse tomada, a vegetação aquática aumentaria 35% ao ano.

a) Escreva a função *f* que determina a área invadida pela vegetação, em função do tempo *t* em anos, considerando que o proprietário não tome qualquer providência. $f(t)=50(1{,}35)^t$

b) Em quantos anos aproximadamente a vegetação tomará completamente a represa? Considere as hipóteses anteriores e utilize $\log 5=0{,}699$ e $\log 1{,}35=0{,}130$. 13 anos

49. Ao fazer uso do limite de crédito da conta-corrente, o correntista está utilizando um empréstimo disponibilizado pelo banco que normalmente cobra juros altos por esse serviço. Supondo que um banco cobre juros de 8% ao mês, se um cliente utilizar R$ 700,00 do limite de crédito, em quantos meses aproximadamente a dívida será de R$ 1 200,00? $\left(\text{Dados: } \log\left(\frac{12}{7}\right)=0{,}234 \text{ e } \log 1{,}08=0{,}033\right)$ 8 meses

50. Um dos maiores acidentes nucleares da história aconteceu em 1986 na central atômica de Chernobyl, localizada na cidade de Prypiat, Ucrânia (antiga União Soviética). Nesse acidente, houve uma explosão, contaminando com radiação acima do índice máximo tolerado uma região de cerca de 160 000 km². A cidade de Prypiat foi abandonada às pressas, o que a tornou uma "cidade fantasma". Milhares de pessoas contaminadas pela radioatividade continuam morrendo, principalmente em decorrência de câncer. Com a explosão, foram liberados na atmosfera vários elementos radioativos, entre eles o estrôncio-90, cuja meia-vida é de cerca de 28 anos.

Fonte de pesquisa: BRADY, James E.; RUSSELL, Joel W.; HOLUM, John R. **Química**: a matéria e suas transformações. Tradução J. A. Souza. Rio de Janeiro: LTC, 2003.

Drop of Light/Shutterstock.com

Central nuclear de Chernobyl, na Ucrânia, em 2015.

a) Utilizando a fórmula $n=n_0\cdot 2^{-t}$, em que *n* é a quantidade restante de átomos radioativos, n_0 é a quantidade inicial e *t* é o número de períodos de meia-vida, determine a porcentagem de átomos radioativos de estrôncio-90 que se encontrará na atmosfera 140 anos após o acidente em Chernobyl. 3,125%

b) Considerando uma massa de 700 g de estrôncio-90 lançada na atmosfera, quanto tempo aproximadamente é necessário para que essa massa se reduza a 50 g? Se necessário, utilize $\log 2=0{,}301$ e $\log 7=0{,}845$. 110 anos

Contexto Terremotos

Placas tectônicas: blocos rochosos que compõem a superfície terrestre e sustentam os continentes e oceanos.

51. O terremoto é um fenômeno natural decorrente de movimentos da crosta terrestre, geralmente resultantes do choque entre duas placas tectônicas, que liberam grande quantidade de energia e ocasionam tremores na terra.

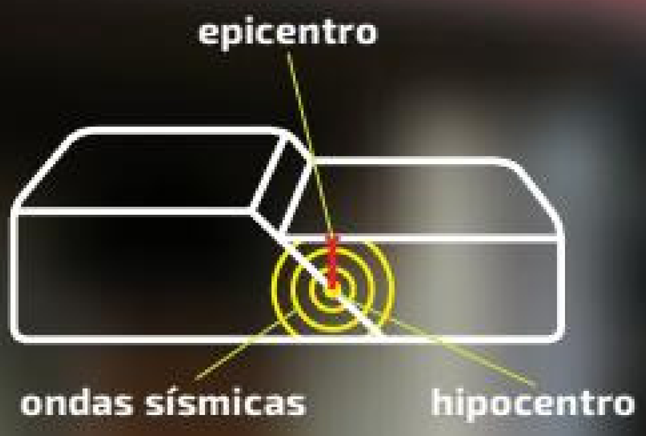
Com base na quantidade de energia liberada por um terremoto, é possível determinar, utilizando um aparelho chamado sismógrafo, sua magnitude na escala Richter, desenvolvida em 1935 pelo sismólogo norte-americano Charles Richter (1900-1985). Para sua elaboração, esse sismólogo atribuiu aos terremotos mais fracos, que já haviam sido registrados, valores próximos de zero, e adotou uma escala logarítmica.

Nos últimos anos, terremotos provocaram estragos que puderam ser vivenciados pela população de diversos países. Em abril de 2015, por exemplo, um terremoto de 7,8 graus atingiu o Nepal, onde milhares de pessoas foram mortas ou feridas. Em agosto de 2014 um terremoto com magnitude de 3,0 graus, atingiu a cidade de Montes Claros, em Minas Gerais, ocasionando estragos em algumas edificações.

Diante disso, apesar do enorme progresso já realizado pelos cientistas no sentido de identificar as causas de terremotos e desenvolver aparelhos que informam sua magnitude e origem, o empenho tem sido em encontrar uma maneira de prevê-los, para que a população possa ser alertada, e assim tomar medidas de segurança necessárias antes de sua ocorrência.

O terremoto gerado pelo movimento das placas tectônicas

O ponto de origem de um terremoto no interior da Terra é chamado de hipocentro ou foco. A energia acumulada pelo movimento das placas tectônicas é liberada sob a forma de ondas sísmicas.



O ponto localizado diretamente acima do hipocentro na superfície terrestre é denominado epicentro.

A partir do epicentro as ondas sísmicas se propagam sobre a superfície terrestre.

Ilustrações: Eduardo C. S.

As vibrações de um terremoto podem causar danos leves ou até mesmo destruir cidades inteiras.

Destroços do terremoto que atingiu o Nepal, em 2015.

prabhat kumar verma/Demotix/Corbis/Latinstock

De acordo com as informações apresentadas, resolva as questões.

a) Qual é o nome do ponto pelo qual se propaga o terremoto na superfície terrestre? epicentro

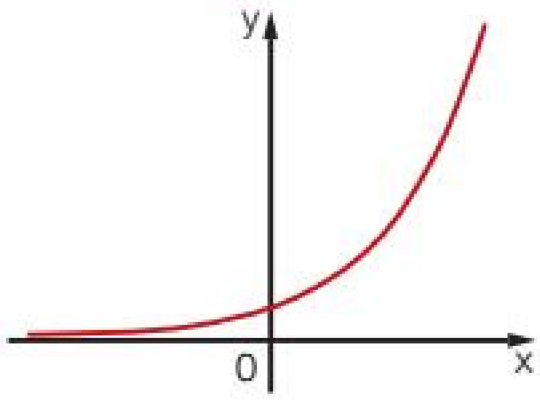
b) Sabendo-se que a magnitude *y* de um terremoto na escala Richter pode ser expressa pela função $y = \frac{2}{3}\log\left(\frac{x}{7 \cdot 10^{-3}}\right)$, na qual *x* representa a energia liberada em quilowatts-hora, pelo terremoto, determine:

- a energia liberada pelo terremoto ocorrido no Nepal e pelo ocorrido em Montes Claros; Nepal: $7 \cdot 10^{8,7}$ kWh; Montes Claros: $7 \cdot 10^{1,5}$ kWh
- a magnitude de um terremoto que liberar $7 \cdot 10^9$ kWh de energia e suas possíveis consequências. 8 graus na escala Richter. Com isso, as construções sofrem danos severos e podem ocorrer grandes rachaduras no solo.

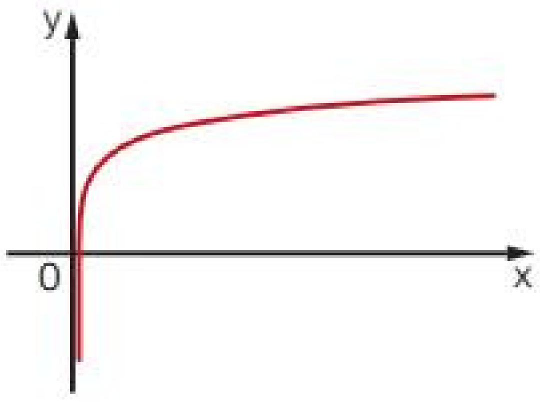
c) Dentre os gráficos a seguir, qual melhor representaria a função apresentada no item **b**? II

Fontes de pesquisas: <http://g1.globo.com/mundo/noticia/2015/05/numero-de-mortos-em-terremotos-no-nepal-passa-de-8500-e-bate-recorde.html>. Acesso em: 20 ago. 2015.
<http://g1.globo.com/mg/grande-minas/noticia/2014/04/tremor-no-fim-da-noite-de-segunda-acorda-moradores-de-montes-claros.html>. Acesso em: 21 ago. 2015.
<http://revistagalileu.globo.com/Galileu/0,6993,ECT803840-1716,00.html>. Acesso em: 9 dez. 2015.

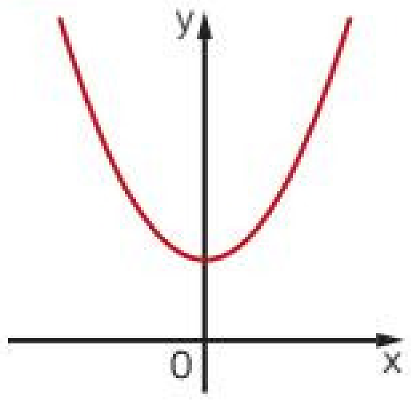
I



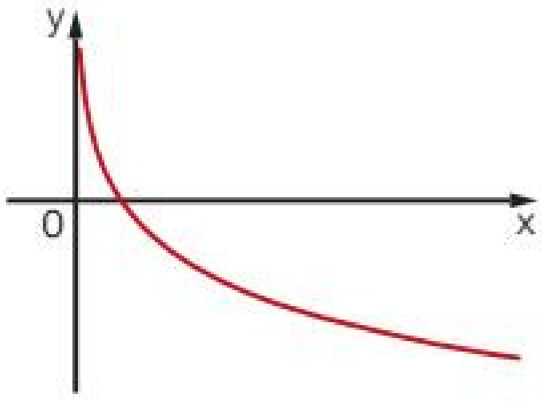
II



III



IV



Ilustrações: Acervo da editora

d) Pesquise sobre a magnitude, na escala Richter, de outros terremotos já registrados e suas consequências. Com base na magnitude obtida, determine a quantidade de energia liberada. Resposta pessoal.

O poder de um terremoto

De acordo com o grau de magnitude registrado na escala Richter, um terremoto pode acarretar as consequências indicadas ao lado.

Magnitude (graus)	Possíveis efeitos
9,0 ou maior	Tremores muito fortes, causa a destruição quase que total.
6,0 a 8,9	Terremoto destrutivo que pode acarretar severos danos às construções e provocar grandes rachaduras no solo.
3,0 a 5,9	Abalos perceptíveis sem a utilização de equipamentos, mas pouco destruidores. Pode derrubar objetos da mobília e trincar paredes.
menor que 3,0	Tremores pequenos, geralmente não perceptíveis, mas registrados por equipamentos apropriados.

Inequação logarítmica

Toda desigualdade cuja incógnita está no logaritmando, na base ou em ambos é denominada **inequação logarítmica**.

São exemplos de inequações logarítmicas:

- $\log_2(5-x)>27$
- $-\log_{0,5}(x^2-6x)<4$
- $\log_4(\log_2 x)\geq 0$
- $\log_{\frac{1}{3}}(x+2)+\log_{\frac{1}{3}} x<\log_{\frac{1}{3}} 8$

Note que, quando $a>1$, o sentido da desigualdade se mantém e, quando $0<a<1$, o sentido da desigualdade é invertido.

Para resolver uma inequação desse tipo, reduzimos os dois membros a logaritmos de mesma base. Depois, sabendo que a função logarítmica $f(x)=\log_a b$ é crescente quando $a>1$ e decrescente quando $0<a<1$, aplicamos a seguinte propriedade:

- se $a>1$: $x_1>x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1>\log_a x_2$
- se $0<a<1$: $x_1>x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1<\log_a x_2$

Veja, a seguir, a resolução de algumas inequações logarítmicas.

Atividades resolvidas

R13. Determine a solução das seguintes inequações.

a) $\log_{\frac{1}{2}}(x-4)\geq 2$

b) $\log_3(3x+6)<\log_3 x$

Resolução

a) $\log_{\frac{1}{2}}(x-4)\geq 2$

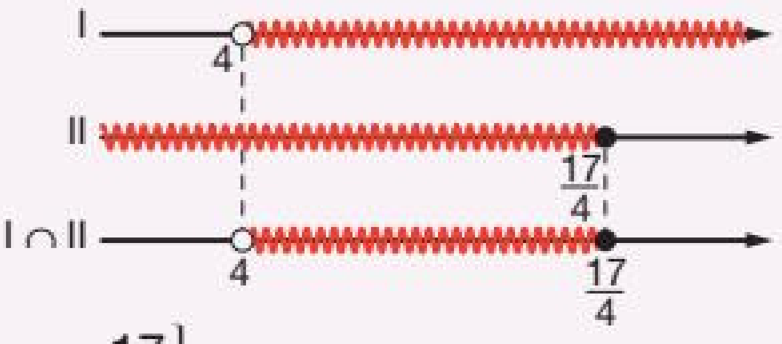
Condição de existência:

- $x-4>0 \Rightarrow x>4$ (I)

Como $a=\dfrac{1}{2}$ e $0<a<1$, o sentido da desigualdade é invertido.

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-4)\geq 2 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}(x-4)\geq 2\cdot\underbrace{\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}}_{1} \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}(x-4)\geq \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow x-4\leq\left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow x\leq\frac{1}{4}+4 \Rightarrow x\leq\frac{17}{4}\ \text{(II)}$$

A solução da equação é dada pela interseção de **I** e **II**.



Portanto, $S=\left\{x\in\mathbb{R}\,|\,4<x\leq\dfrac{17}{4}\right\}$.

b) $\log_3(3x+6)<\log_3 x$

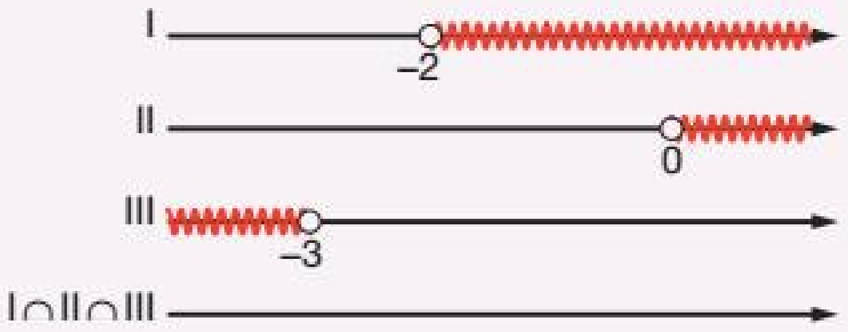
Condições de existência:

- $3x+6>0 \Rightarrow 3x>-6 \Rightarrow x>-2$ (I)
- $x>0$ (II)

Como $a=3>1$, o sentido da desigualdade se mantém.

$$\log_3(3x+6)<\log_3 x \Rightarrow 3x+6<x \Rightarrow 2x<-6 \Rightarrow x<-3\ \text{(III)}$$

A solução da equação é dada pela interseção de **I**, **II** e **III**.



Ilustrações: Acervo da editora

Portanto, $S=\varnothing$.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

52. Resolva as inequações logarítmicas.

a) $\log_3(x-17)<2$ $S=\{x\in\mathbb{R}\mid 17<x<26\}$

b) $1\leq\log_8\left(\frac{x}{2}+1\right)$ $S=\{x\in\mathbb{R}\mid x\geq 14\}$

c) $\log_{0,5}(2-x)\geq\log_{0,5}(x+6)$ $S=\{x\in\mathbb{R}\mid -2\leq x<2\}$

d) $\log_4 x>\log_4(2x-10)$ $S=\{x\in\mathbb{R}\mid 5<x<10\}$

53. Quantos números inteiros negativos satisfazem simultaneamente as inequações $\log_{\frac{7}{2}}(x+6)\geq 0$ e $\log_3(2x+x^2)\geq 1$? 3 números

54. Sejam $f(x)=\frac{1}{3}\log_9(19-2x)$ e $g(x)=\log_{27}(x-8)$. Para quais valores de *x* temos $f(x)\leq g(x)$? $9\leq x<\frac{19}{2}$

55. Determine o domínio de cada função.

a) $f(x)=\log_5\left[\log_{0,6}(x-3)\right]$ $D(f)=\{x\in\mathbb{R}\mid 3<x<4\}$

b) $f(x)=\sqrt{\log_9(5x+1)}$ $D(f)=\{x\in\mathbb{R}\mid x\geq 0\}$

c) $f(x)=\sqrt[3]{\log\left[\log_{0,7}(x+2)\right]}$ $D(f)=\{x\in\mathbb{R}\mid -2<x<-1\}$

56. Calcule a soma dos números inteiros que são solução da inequação $9^{\log_9(x^2-5x)}\leq 14$. 10

57. Se considerarmos que um imóvel foi comprado e que a cada ano se valoriza 4% em relação ao ano anterior, quantos anos são necessários para que esse imóvel se valorize em mais de 30% em relação ao valor da compra? Se necessário, utilize $\log 2=0,301$ e $\log 13=1,114$. 7 anos

58. Resolva os sistemas de inequações.

a) $\begin{cases}\log(3x+7)\leq 1\\ 5^{x^2}>25^{(2x-2)}\end{cases}$ $S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid -\frac{7}{3}<x\leq 1\right\}$

b) $\begin{cases}\log_2(2x^2+4x)<\log_2 6\\ \log_{\frac{5}{6}}(x+1)\geq\log_{\frac{5}{6}}(4x+7)\end{cases}$ $S=\{x\in\mathbb{R}\mid 0<x<1\}$

59. Existem vários métodos para determinar a qualidade dos ovos. Um dos mais utilizados é a unidade de Haugh, que se baseia na massa do ovo e na medida da altura do albúmen (clara), quando quebrado em uma superfície plana.

Para calcular a unidade Haugh (*UR*), usa-se a fórmula $UR=100\log\left(A-1,7M^{0,37}+7,6\right)$, em que *A* é a altura do albúmen em milímetros e *M* é a massa em gramas. Para que um ovo seja considerado de excelente qualidade, a unidade Haugh deve ser superior a 72.

a) Com o auxílio de uma calculadora científica, calcule a unidade Haugh de um ovo com massa de 56 g e altura do albúmen de 6 mm. Podemos afirmar que esse ovo é de excelente qualidade? Por quê? aproximadamente 78; Sim, pois a unidade Haugh é superior a 72.

b) Qual deve ser a altura mínima aproximada, com duas casas decimais, do albúmen de um ovo de 62 g para que seja considerado de excelente qualidade? 5,48 mm

60. Considere dois modelos A e B de películas de controle solar, muito utilizadas em janelas de veículos e edificações, que impedem a entrada de 80% e 10% de luminosidade, respectivamente. No mínimo, quantas camadas (n) de B são necessárias para que se obtenha no ambiente luminosidade menor do que se utilizada a película A? 16 camadas

Dados: $\log 2=0,301$ e $\log 3=0,477$.

61. A tireoide é uma glândula responsável por regular a "velocidade" do funcionamento do organismo. Essa glândula produz os chamados hormônios tiroidianos, como a tri-iodotironina (T3) e a tiroxina (T4). Os altos e baixos desses hormônios são as principais causas das doenças de tireoide: hipertiroidismo e hipotiroidismo, respectivamente. Para exames de tireoide, é utilizado o elemento químico radioativo Iodo-131, que tem meia-vida de 8 dias, ou seja, em oito dias metade do número de átomos radioativos se desintegra. A fórmula que calcula a quantidade de material radioativo em função do tempo de meia-vida é $n=n_0\cdot 2^{-t}$, em que *n* é a quantidade restante, n_0 é a quantidade inicial do elemento radioativo e *t* é o número de períodos de meia-vida.

Fontes de pesquisa:
PAULSEN, Friedrich; WASCHKE, Jens. **Sabotta**: atlas de anatomia humana: cabeça, pescoço e neuroanatomia. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan, 2012. v. 3.
BRADY, James E.; RUSSELL, Joel W.; HOLUM, John R. **Química**: a matéria e suas transformações. Tradução J. A. Souza. Rio de Janeiro: LTC, 2003.

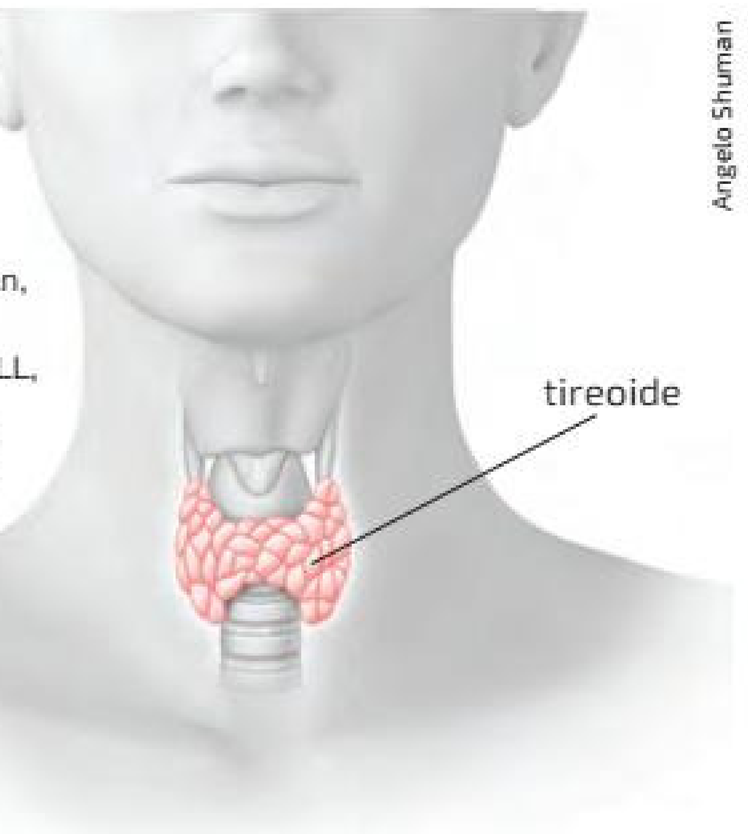


Ilustração elaborada com base em: PAULSEN, Friedrich; WASCHKE, Jens. **Sobotta**: atlas de anatomia humana: cabeça, pescoço e neuroanatomia. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan, 2012. v. 3. p. 192.

a) Qual é a quantidade de Iodo-131 restante de um material contaminado com 4 g, passados 6 períodos de meia-vida? 0,0625 g

b) Suponha que uma clínica especializada em exames de tireoide tenha em seu estoque 10 g de Iodo-131. No mínimo, quantos dias aproximadamente serão necessários para que o mesmo fique abaixo de 10^{-2} g? Use $\log_2 10=3,3$. 80 dias

c) Junte-se a um colega e pesquise os sintomas de uma pessoa que possui algum distúrbio de tireoide. Resposta pessoal.

capítulo

7

Função modular


planeta Terra

Matthias Kulka/Corbis/Latinstock

Veja mais informações sobre fuso horário no *site*:

- **<http://tub.im/833jx3>**

(acesso em: 10 fev. 2016)

Fuso horário

Em 1884, na Conferência Internacional do Meridiano, estabeleceu-se um sistema de convenções de horas, no qual o globo terrestre ficou dividido em 24 regiões denominadas fusos horários. Tendo o meridiano de Greenwich como o marco inicial, cada uma dessas regiões passou a registrar, em um mesmo instante, uma hora diferente do dia. A oeste do meridiano de Greenwich as horas diminuem e, a leste, as horas aumentam.

O território brasileiro, incluindo as ilhas oceânicas, está localizado a oeste do meridiano de Greenwich e possui quatro fusos horários distintos, que abrangem:

- as ilhas oceânicas, como o arquipélago Fernando de Noronha, entre outras;
- o Distrito Federal, as regiões Sul, Sudeste e Nordeste e os estados de Goiás, Tocantins, Pará e Amapá;
- os estados de Mato Grosso, Mato Grosso do Sul, Rondônia, Roraima e parte do Amazonas;
- o estado do Acre e parte do Amazonas.

Fonte de pesquisa: <www.planalto.gov.br/ccivil_03/decreto/Historicos/DPL/DPL2784.htm>. Acesso em: 9 dez. 2015.

Fusos horários do Brasil sem horário de verão

Oriente os alunos a escreverem as respostas no caderno.

Fonte: ATLAS geográfico escolar. 6. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2012.
Fonte: <http://pcdsh01.on.br/Fusbr.htm>. Acesso em: 18 nov. 2015.

*Para resolver o item **C**, oriente os alunos a observarem no mapa a diferença de horas do arquipélago de Fernando de Noronha e do Acre, em relação ao meridiano de Greenwich, ou seja, –2 h e –5 h.

A Os fusos horários brasileiros estão adiantados ou atrasados em relação ao meridiano de Greenwich? Justifique. atrasados; Resposta esperada: pois o território brasileiro está localizado a oeste do meridiano de Greenwich.

B Cite algumas situações em que seja importante o conhecimento acerca de fusos horários. Resposta pessoal.

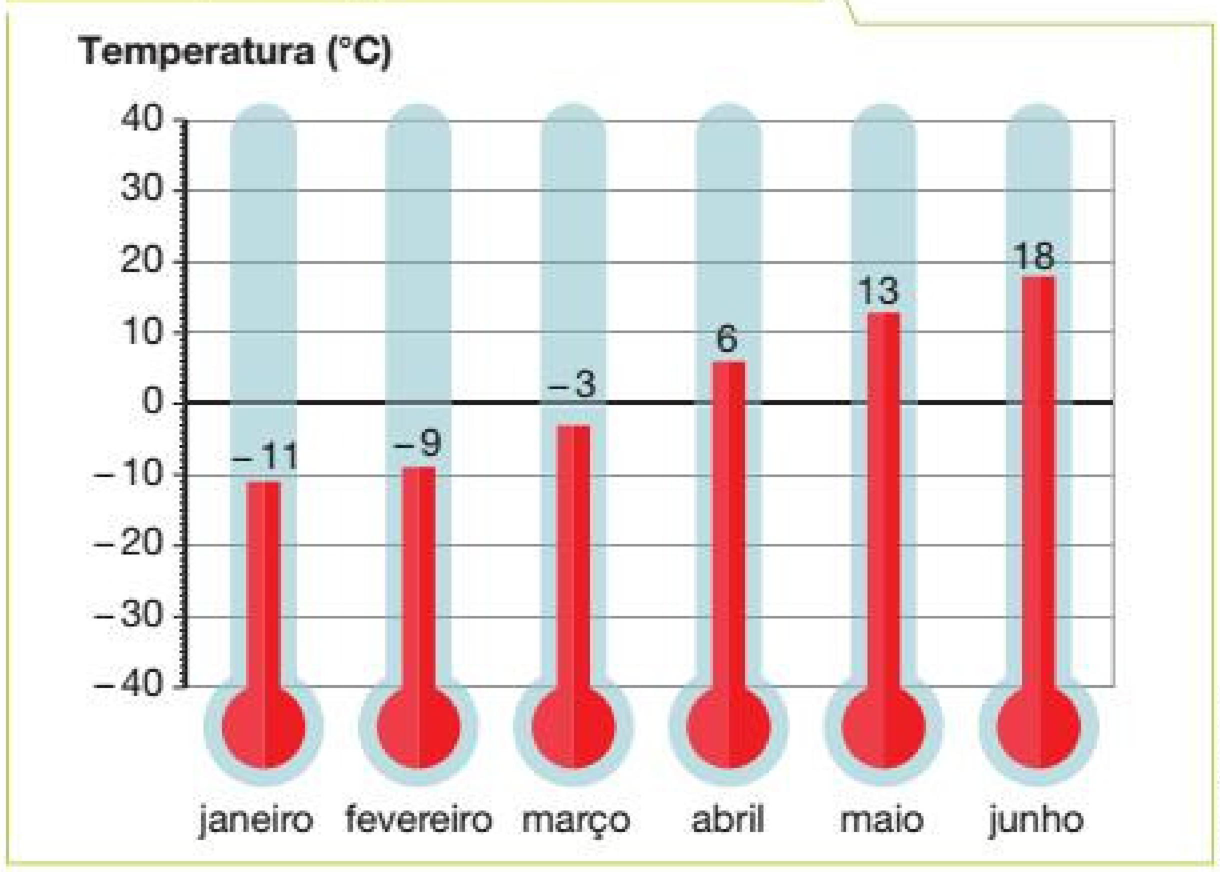
C Desconsiderando o horário de verão, quando no arquipélago de Fernando de Noronha são 18 h, que horas são no Acre? 15 h
*

Módulo de um número real

Ao final do estudo deste capítulo podem ser trabalhados o exemplo e as atividades da página **270** da seção **Acessando tecnologias**.

Diversas grandezas apresentam unidades que podem assumir valores positivos e negativos, como temperatura, altitude e coordenadas geográficas. Nessas unidades é tomado um valor como referência zero. Na temperatura medida em graus Celsius, por exemplo, esse valor de referência é 0 °C.

Temperatura média em Ottawa, Canadá, em alguns meses



Fonte: <www.weather.com/weather/monthly/l/CAXX0341:1:CA>. Acesso em: 18 set. 2015.

Ottawa, no Canadá

Fonte: WORLD atlas reference. 9. ed. Londres: Dorling Kindersley, 2013.

Note que a menor temperatura média registrada nessa cidade nos meses apresentados foi **–11** °C, ocorrida em janeiro. Nesse caso, o número, acompanhado do sinal "–", indica o **valor relativo** da temperatura.

Essa temperatura também costuma ser indicada por "11°C abaixo de zero". Nesse último caso, a temperatura negativa foi indicada a partir de seu **valor absoluto**, acompanhado do referencial "abaixo de zero".

O **valor absoluto** ou **módulo** de um número real *a*, indicado por $|a|$, é dado pelo próprio número *a*, se $a \geq 0$, ou por $-a$, se $a < 0$. Em resumo:

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ se } a \geq 0 \\ -a, \text{ se } a < 0 \end{cases}$$

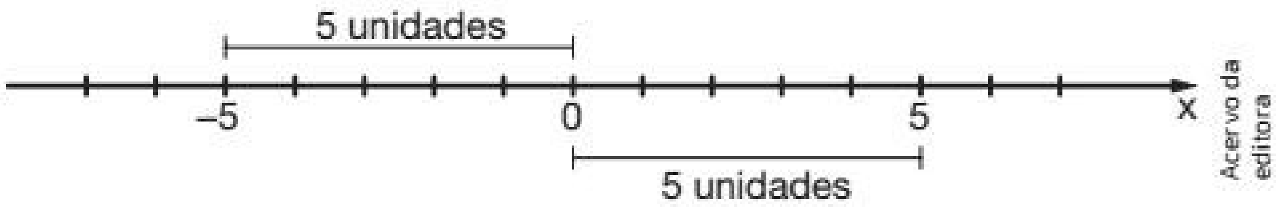
Note que o **módulo** de um número real qualquer é sempre maior ou igual a zero.

Exemplos

- $|8| = 8$
- $|131| = 131$
- $|-7| = -(-7) = 7$
- $\left|-\frac{4}{9}\right| = -\left(-\frac{4}{9}\right) = \frac{4}{9}$
- $|0| = 0$
- $|\sqrt{5}| = \sqrt{5}$
- $|-26| = -(-26) = 26$

Na reta real, podemos associar o módulo de um número *x* à distância da imagem *P* desse número à origem. Por simplicidade, diremos apenas "a distância de *x* à origem".

Observe na reta real abaixo que a distância de –5 à origem e de 5 à origem é 5 unidades, ou seja, $|-5| = 5$ e $|5| = 5$.



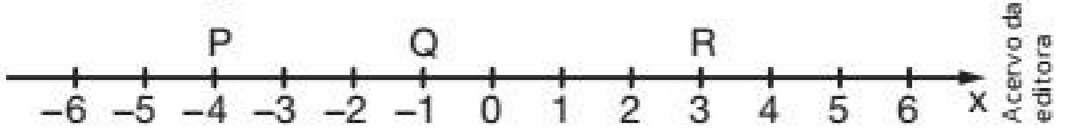
Na reta real, dados um ponto *P* e um número real *x* correspondentes, dizemos que:
- *P* é a imagem de *x*;
- x é a abscissa de *P*.

Utilizando a definição de módulo, podemos resolver equações do tipo $|x| = 9$. Essa equação pode ser entendida como: na reta real, quais números distam 9 unidades da origem?

Nesse caso, temos $x = 9$ ou $x = -9$, pois $|9| = 9$ e $|-9| = 9$.

Módulo e distância entre pontos na reta real

Uma aplicação de módulo acontece no cálculo da distância entre pontos em uma reta real. A distância entre dois pontos da reta real é dada pelo módulo da diferença entre as abscissas desses dois pontos. Por exemplo, considere os pontos *P*, *Q* e *R* na reta real a seguir.



Temos que a distância entre:

- *P* e *Q* é dada por: $|-4-(-1)|=|-4+1|=|-3|=3$ ou $|-1-(-4)|=|-1+4|=|3|=3$
- *P* e *R* é dada por: $|-4-3|=|-7|=7$ ou $|3-(-4)|=|3+4|=|7|=7$
- *Q* e *R* é dada por: $|-1-3|=|-4|=4$ ou $|3-(-1)|=|3+1|=|4|=4$

Note que $|a-b|=|b-a|$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

Atividades resolvidas

R1. Efetue:

a) $|4|+|-2|-|1|$

b) $|(-1)\cdot(-2)|\cdot|-4-1|$

c) $|-3+|-2+5||$

d) $-|-1|+|2+1||$

Resolução

a) $|4|+|-2|-|1|=4+2-1=5$

b) $|(-1)\cdot(-2)|\cdot|-4-1|=|2|\cdot|-5|=2\cdot5=10$

c) $|-3+|-2+5||=|-3+|3||=|-3+3|=|0|=0$

d) $-||-1|+|2+1||=-||1|+|3||=-|1+3|=-|4|=-4$

R2. Simplifique a expressão $|x-3|+|x+2|$, para:

a) $x>4$

b) $x<-5$

c) $0<x<1$

Resolução

Utilizando a definição de módulo, temos:

$$|x-3|=\begin{cases}x-3, \text{ se } x-3\geq 0, \text{ isto é, se } x\geq 3\\ -(x-3), \text{ se } x-3<0, \text{ isto é, se } x<3\end{cases}$$

$$|x+2|=\begin{cases}x+2, \text{ se } x+2\geq 0, \text{ isto é, se } x\geq -2\\ -(x+2), \text{ se } x+2<0, \text{ isto é, se } x<-2\end{cases}$$

a) Se $x>4$, então $x>3$ e $x>-2$, logo:

- $|x-3|=x-3$
- $|x+2|=x+2$

Portanto:

$|x-3|+|x+2|=(x-3)+(x+2)=$ $2x-1$

b) Se $x<-5$, então $x<3$ e $x<-2$, logo:

- $|x-3|=-(x-3)=-x+3$
- $|x+2|=-(x+2)=-x-2$

Portanto:

$|x-3|+|x+2|=(-x+3)+(-x-2)=$ $-2x+1$

c) Se $0<x<1$, então $x<3$ e $x>-2$, logo:

- $|x-3|=-(x-3)=-x+3$
- $|x+2|=x+2$

Portanto:

$|x-3|+|x+2|=(-x+3)+(x+2)=$ 5

Atividades

Anote as respostas no caderno.

1. Calcule:

a) $|-3-|-10||$ 13

b) $|-5|\cdot|-3|$ 15

c) $|-5+(-1)|$ 6

d) $|6\cdot(-4)|$ 24

e) $|-5+3|+|2-8|$ 8

2. A partir da reta real, calcule a distância entre:

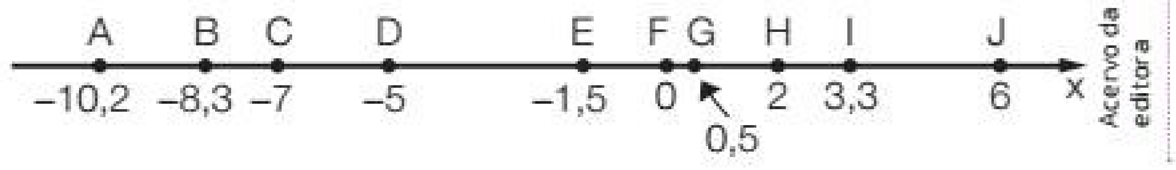
a) *A* e *B* 1,9

b) *C* e *J* 13

c) *E* e *G* 2

d) *D* e *I* 8,3

e) *A* e *F* 10,2



3. Observe.

Nessa reta real, temos que:

- a distância entre *A* e *B* é 6
- a distância entre *A* e *C* é 12,5
- a distância entre *C* e *D* é 7
- o valor da abscissa de *D* é 13,5

a) Qual é a abscissa dos pontos *A*, *B* e *C*? A: −6; B: 0; C: 6,5

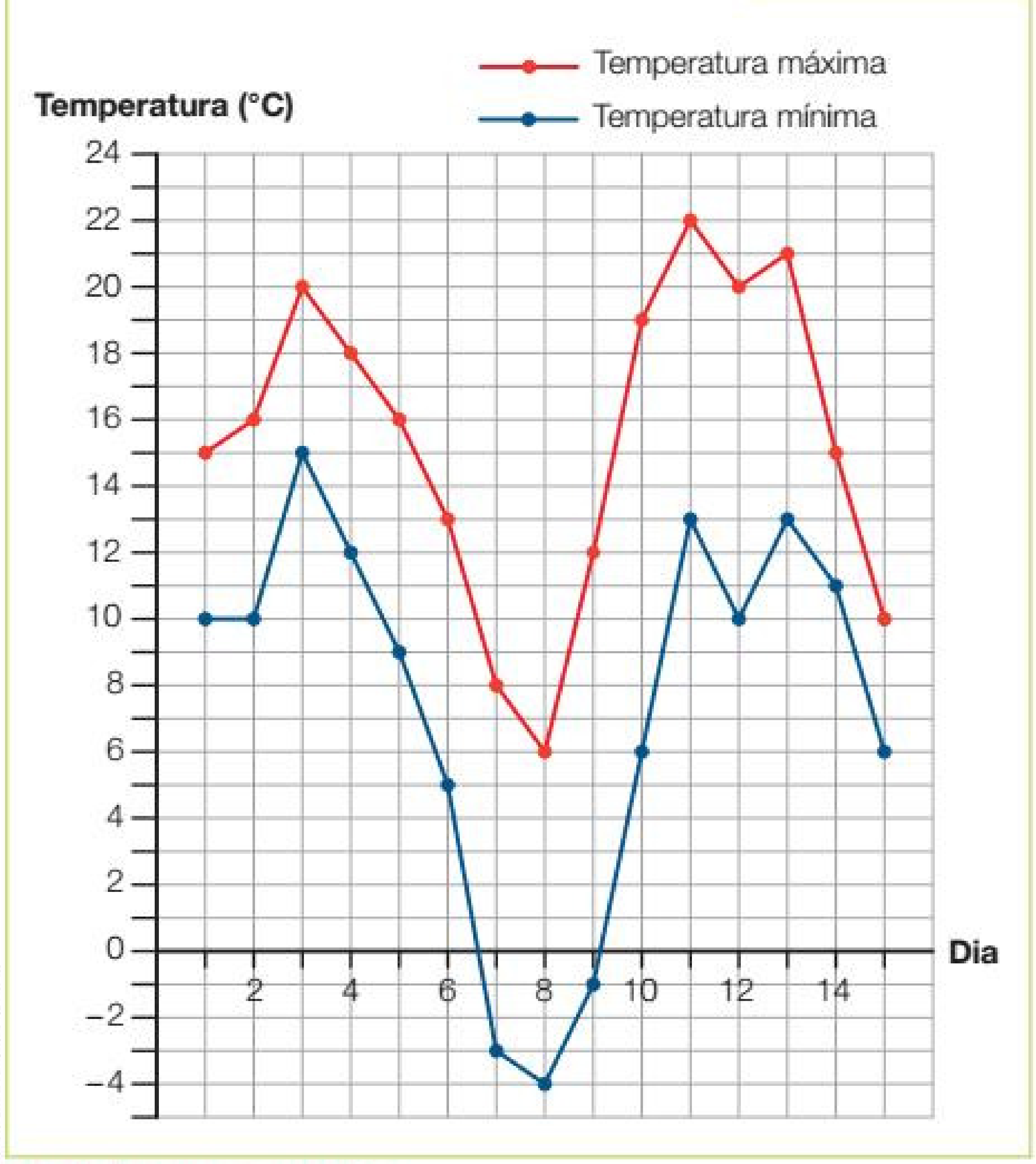
b) Qual é a distância entre *A* e *D*? E entre *B* e *C*? 19,5; 6,5

4. A falta de atmosfera na Lua faz com que a variação da temperatura em sua superfície seja muito grande, atingindo 107 °C durante o dia e −153 °C durante a noite. De quantos graus centígrados é a variação da temperatura na superfície lunar? 260 °C

Fonte de pesquisa: <www.if.ufrgs.br/ast/solar/portug/moon.htm>. Acesso em: 21 set. 2015.

5. A seguir são apresentadas as temperaturas máximas e mínimas na primeira quinzena de certo mês, em uma cidade.

Temperaturas máximas e mínimas



Acervo da editora

Os dados apresentados no gráfico são fictícios.

Fonte: Monitoramento do clima da cidade.

a) Calcule a variação de temperatura registrada no dia 8. 10 °C

b) Em quais dias a variação de temperatura ultrapassou 9 °C? dias 7, 8, 9, 10 e 12

c) Em qual dia houve a maior variação de temperatura? De quantos graus Celsius foi essa variação? dias 9 e 10; 13 °C

6. Por meio da definição de módulo, escreva as sentenças sem utilizar módulo. Respostas no final do livro.

a) $|x^2|$ com $x \in \mathbb{Z}$

b) $|-5x+10|^3$ com $-5 \leq x \leq 5$

c) $|x-2|+|2x+1|$ com $x \leq 2$

d) $|x-1|-|x+1|$ com $-3 \leq x \leq 3$

e) $|x^5|$ com $x \in \mathbb{R}$

7. Para quais valores de *x* as expressões $|2x-6|$ e $|2x|-6$ assumem o mesmo valor? $x \geq 3$

8. Segundo a resolução Cisa nº 10, de 31 de julho de 1984 (uma resolução conjunta dos Ministérios da Saúde e da Agricultura), os produtos congelados oferecidos ao consumidor, nos *freezers* de supermercados, devem estar à temperatura máxima de −8 °C. Certo instituto selecionou alguns supermercados e realizou a medição da temperatura nos *freezers*. Dos 31 supermercados analisados, 27 foram considerados **não conformes**, pois apresentavam *freezers* com temperaturas acima da estabelecida pela resolução Cisa nº 10. A seguir estão indicadas as temperaturas registradas nos *freezers* dos 5 supermercados que apresentaram as maiores temperaturas e dos 5 que apresentaram as menores temperaturas.

Supermercado	Temperatura (°C)
2	+0,7
5	−8,9
8	−2,0
10	−7,7
11	+3,5
19	−2,4
20	−2,7
29	−10,2
30	−10,0
31	−9,4

Os dados apresentados no quadro são fictícios.

a) Dos supermercados listados acima, quais foram considerados não conformes, de acordo com a resolução Cisa nº 10? supermercados 2, 8, 10, 11, 19 e 20

b) Qual supermercado apresentou a maior diferença na temperatura, em relação à prevista na resolução Cisa nº 10? De quantos graus Celsius foi essa diferença? supermercado 11; 11,5 °C

c) Qual foi a diferença entre a maior e a menor temperatura dos *freezers*, nesses supermercados? 13,7 °C

9. A distância rodoviária entre as cidades A e B é de 320 km. Em uma viagem entre essas cidades, certo motorista realiza duas paradas, uma em um restaurante que fica a 150 km de A e outra em um posto de combustíveis, que fica a *x* km de A. Utilizando módulo, escreva as expressões que indicam, no momento em que ele para no posto de combustíveis, sua distância em relação ao restaurante e à cidade B. $|x-150|$; $|320-x|$

Função modular

Estudamos anteriormente que $|x|$ existe para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Além disso, temos que qualquer número real *x* possui um único $|x|$ correspondente. Nessas condições, podemos estabelecer uma função *f* de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, denominada função modular.

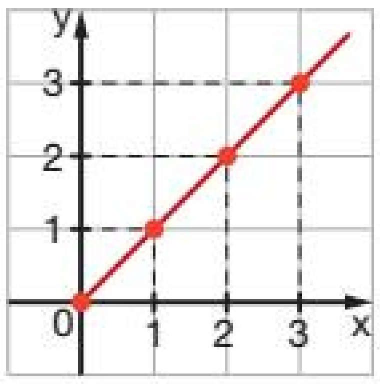
Denomina-se **função modular** a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$, isto é:

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ se } x \geq 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Vamos esboçar o gráfico de $f(x) = |x|$ considerando inicialmente os casos $x \geq 0$ e $x < 0$.

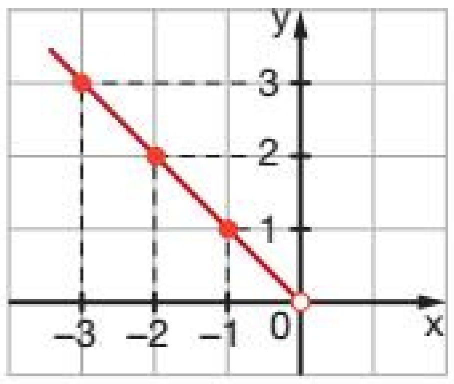
- $x \geq 0 \Rightarrow f(x) = |x| = x$

x	f(x) = y
0	$f(0) = \|0\| = 0$
1	$f(1) = \|1\| = 1$
2	$f(2) = \|2\| = 2$
3	$f(3) = \|3\| = 3$

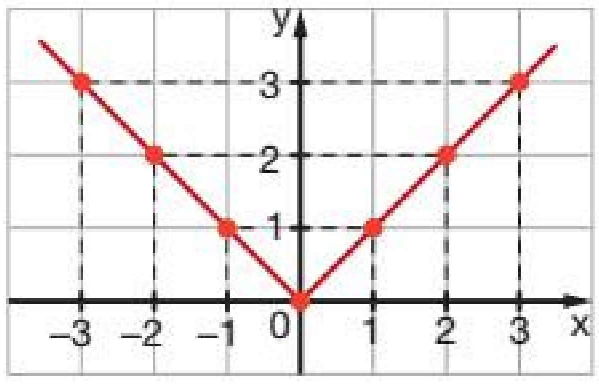


- $x < 0 \Rightarrow f(x) = |x| = -x$

x	f(x) = y
−1	$f(-1) = \|-1\| = -(-1) = 1$
−2	$f(-2) = \|-2\| = -(-2) = 2$
−3	$f(-3) = \|-3\| = -(-3) = 3$



O gráfico de $f(x) = |x|$ é obtido ao esboçarmos em um único plano cartesiano aqueles obtidos anteriormente.

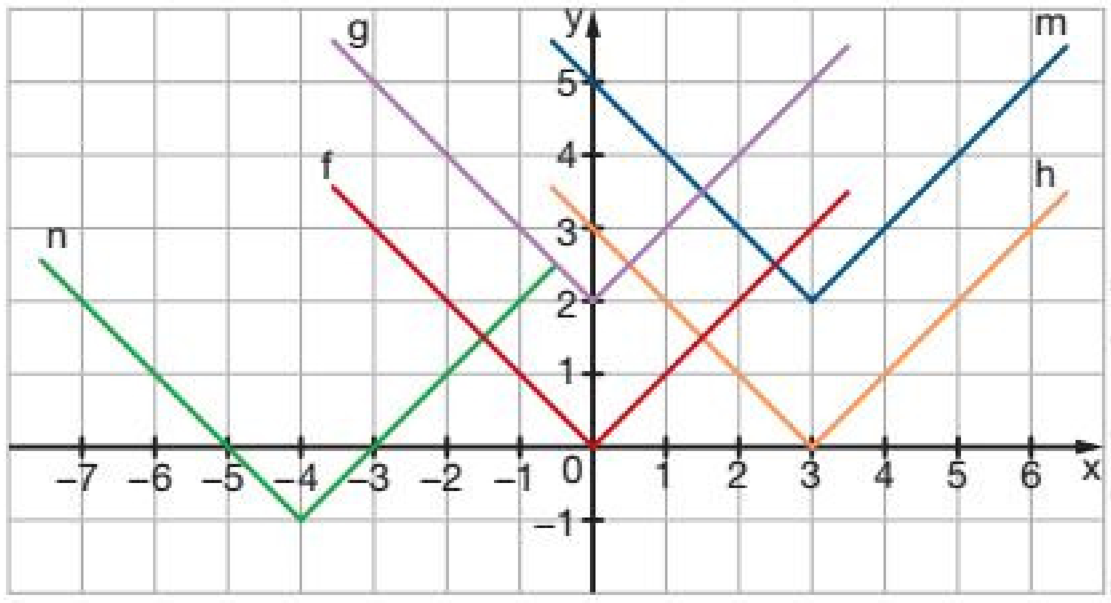


O gráfico de $f(x) = |x|$ é dado pela reunião das bissetrizes do 1º e do 2º quadrantes do plano cartesiano.

Note que, ao projetarmos o gráfico de *f* sobre o eixo das abscissas, obtemos $\mathbb{R}$, ou seja, $D(f) = \mathbb{R}$. Já ao projetarmos o gráfico de *f* sobre o eixo das ordenadas, obtemos $\mathbb{R}_+$, ou seja, $Im(f) = \mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$.

Translação do gráfico de uma função modular

Observe em um mesmo plano cartesiano o gráfico das funções $f(x) = |x|$, $g(x) = |x| + 2$, $h(x) = |x - 3|$, $m(x) = |x - 3| + 2$ e $n(x) = |x + 4| - 1$.



Ilustrações: Acervo da editora

Note que em relação ao gráfico da função modular $f(x) = |x|$, o gráfico de:

- $g(x) = |x| + 2$ é transladado 2 unidades para cima
- $h(x) = |x - 3|$ é transladado 3 unidades para a direita
- $m(x) = |x - 3| + 2$ é transladado 2 unidades para cima e 3 para a direita
- $n(x) = |x + 4| - 1$ é transladado 1 unidade para baixo e 4 para a esquerda

Dada uma função $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definida por $g(x)=|x+b|+a$, temos que o gráfico de *g* é semelhante ao da função modular $f(x)=|x|$, porém transladado $|a|$ unidades para cima (se $a>0$) ou para baixo (se $a<0$), e $|b|$ unidades para a esquerda (se $b>0$) ou para a direita (se $b<0$).

Se $a=0$, o gráfico de *g* não é transladado verticalmente; se $b=0$, o gráfico de *g* não é transladado horizontalmente.

Atividades resolvidas

R3. Sejam as funções $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, tais que $f(x)=x^2-6x+5$ e $g(x)=|x|$. Esboce o gráfico da função composta $g\circ f(x)$.

Resolução

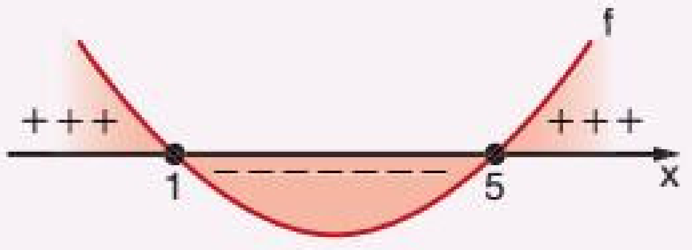
Inicialmente, realizamos o estudo de sinal de *f*:

$$f(x)=0\Rightarrow x^2-6x+5=0$$

$$a=1;\ b=-6;\ c=5$$

$$\Delta=(-6)^2-4\cdot1\cdot5=16$$

$$x=\frac{-(-6)\pm\sqrt{16}}{2\cdot1}=\frac{6\pm4}{2}\left\langle\begin{matrix}x_1=5\\x_2=1\end{matrix}\right.$$



Observando os intervalos em que $f(x)\geq0$ e $f(x)<0$, e as definições de função composta e de módulo, segue que:

$$g\circ f(x)=g(f(x))=|f(x)|=\begin{cases}f(x),\ \text{se } x\leq1 \text{ ou } x\geq5\\-f(x),\ \text{se } 1<x<5\end{cases}$$

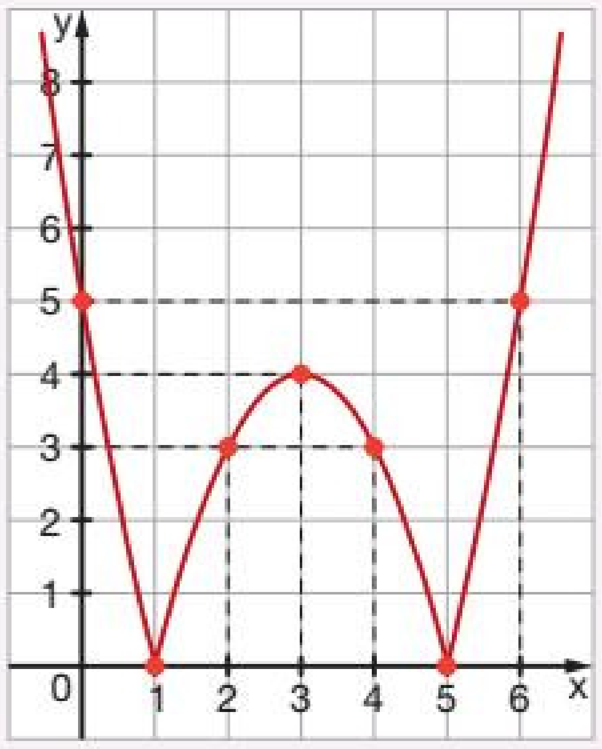
Esboçando o gráfico de $g(f(x))$, temos:

$x\leq1$ ou $x\geq5$

x	$y=f(x)=x^2-6x+5$	(x, y)
0	$y=0^2-6\cdot0+5=5$	(0, 5)
1	$y=1^2-6\cdot1+5=0$	(1, 0)
5	$y=5^2-6\cdot5+5=0$	(5, 0)
6	$y=6^2-6\cdot6+5=5$	(6, 5)

$1<x<5$

x	$y=-f(x)=-(x^2-6x+5)$	(x, y)
2	$y=-(2^2-6\cdot2+5)=3$	(2, 3)
3	$y=-(3^2-6\cdot3+5)=4$	(3, 4)
4	$y=-(4^2-6\cdot4+5)=3$	(4, 3)

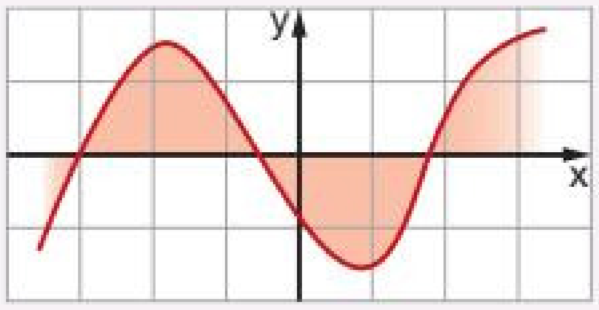


De modo geral, podemos aplicar a definição de módulo para a composição de funções:

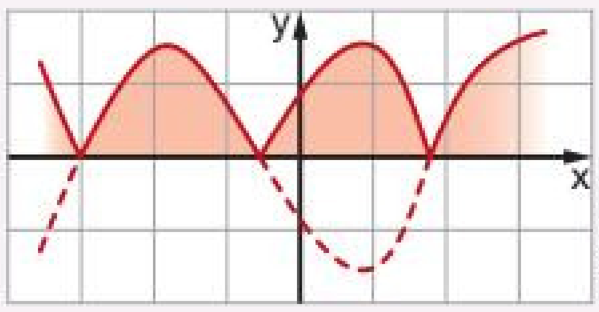
$$f(x)=|x|\Rightarrow f(g(x))=\begin{cases}g(x),\ \text{se } g(x)\geq0\\-g(x),\ \text{se } g(x)<0\end{cases}$$

Assim, toda a parte negativa do gráfico de *g* é refletida em relação ao eixo *x* para a parte positiva.

- gráfico de $g(x)$



- gráfico de $|g(x)|$



Ilustrações: Acervo da editora

R4. Faça um esboço do gráfico e determine o domínio e o conjunto imagem de cada função.

a) $h(x)=|x|-4$

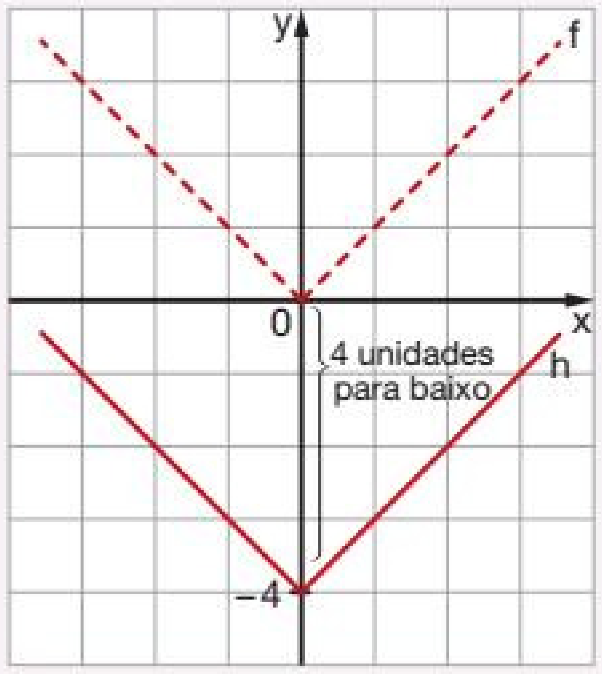
b) $m(x)=|x+1|+3$

Resolução

Note que podemos esboçar os gráficos das funções *h* e *m* realizando a translação do gráfico da função modular $f(x)=|x|$.

a) $h(x)=|x|-4$

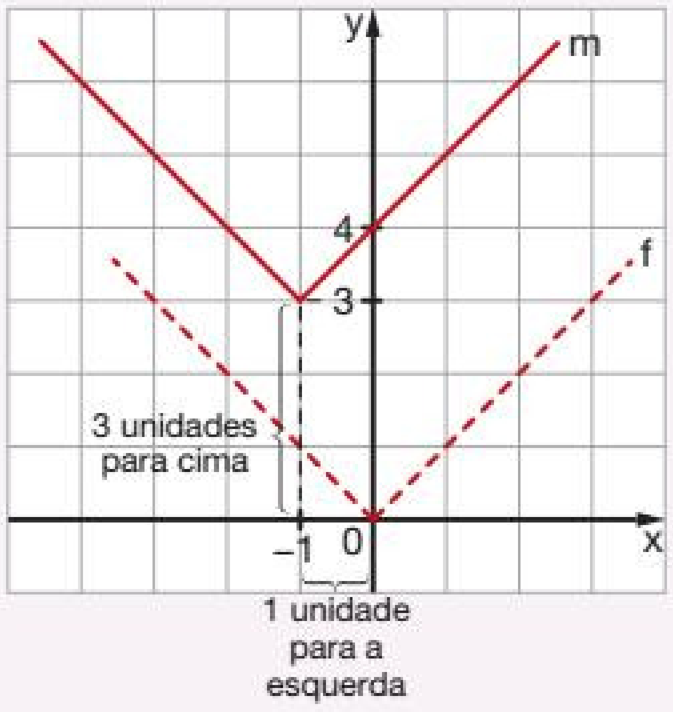
O gráfico da função *h* é semelhante ao gráfico da função *f*, transladado quatro unidades para baixo.



Assim, $D(h)=\mathbb{R}$ e $Im(h)=\{y\in\mathbb{R}\,|\,y\geq-4\}$

b) $m(x)=|x+1|+3$

O gráfico da função *m* é semelhante ao gráfico da função *f*, transladado três unidades para cima e uma para a esquerda.



Ilustrações: Acervo da editora

Assim, $D(m)=\mathbb{R}$ e $Im(m)=\{y\in\mathbb{R}\,|\,y\geq3\}$

Atividades

Anote as respostas no caderno.

10. Dada a função $f(x)=5-|-2x+1|$, calcule:

a) $f(-3)$ -2

b) $f(0)$ 4

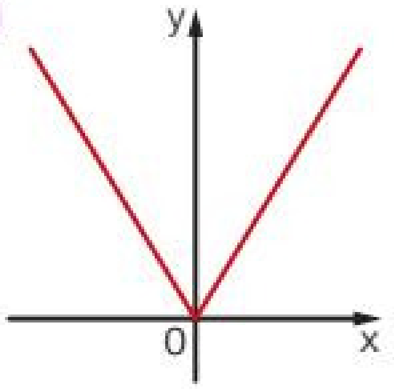
c) $f(5)$ -4

d) $f(-1)+f(1)$ 6

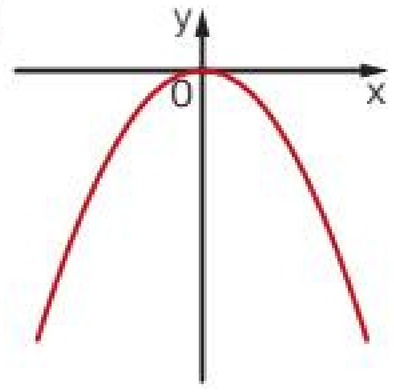
e) $2\cdot f\left(\frac{1}{2}\right)-f(8)$ 20

11. Qual dos gráficos representa a função $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, definida por $y=f(x)=|x|\cdot x$? d

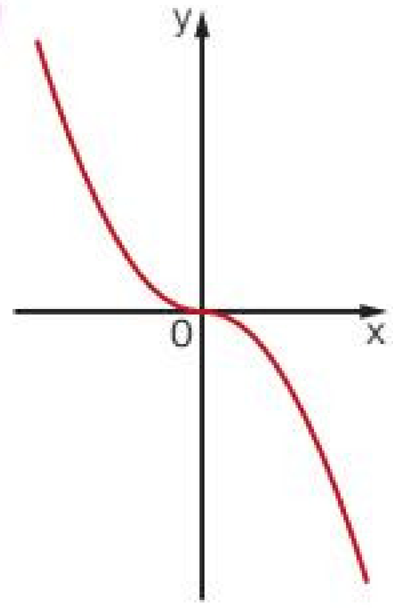
a)



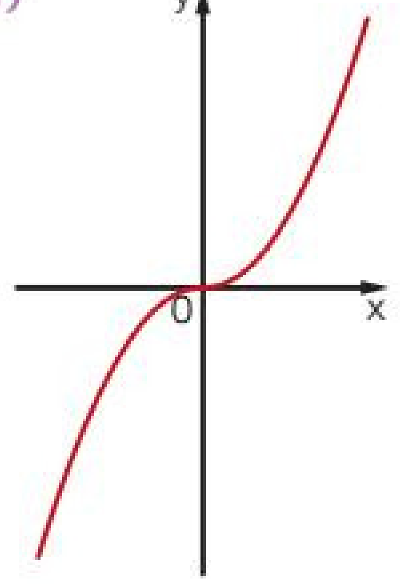
c)



b)



d)



Ilustrações: Acervo da editora

12. O gráfico que representa a função $g:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ é semelhante ao gráfico que representa a função $f(x)=|x-2|+1$, porém deslocado duas unidades para baixo e cinco unidades para a esquerda.

a) Escreva a lei da função *g*. $g(x)=|x+3|-1$

b) Esboce os gráficos das funções *f* e *g* em um mesmo plano cartesiano.
Resposta nas **Orientações para o professor**.

13. Esboce o gráfico da função $f(x)=|-2x^2+3x-1|$, e indique as intersecções com os eixos *x* e *y*.
Resposta nas **Orientações para o professor**.

14. Ao fazer um balanço de suas vendas, um *site* constatou que em certo mês o número de produtos vendidos em cada dia pode ser expresso pela função $n(d)=9\cdot|d-21|+5$, com $1\leq d\leq30$, em que *d* é o dia do mês e *n* é a quantidade de produtos vendidos nesse dia.

a) Quantos produtos foram vendidos no dia 28 desse mês? 68 produtos

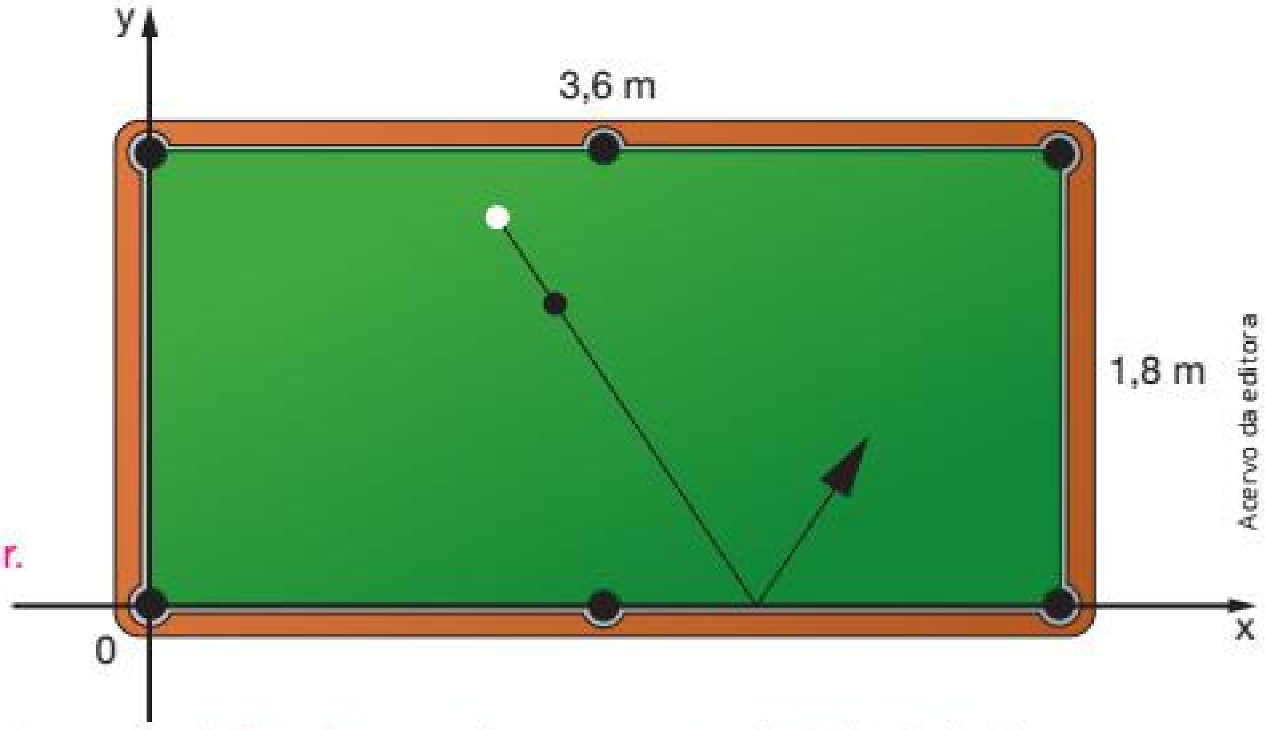
b) Em qual dia a quantidade de produtos vendidos foi a menor? Quantos produtos foram vendidos nesse dia? no dia 21; 5 produtos

c) Em quantos dias a quantidade de produtos vendidos foi maior ou igual a 86 unidades? 13 dias

d) Esboce o gráfico da função *n*.
Resposta nas **Orientações para o professor**.

15. Na final de certo campeonato de sinuca, um dos jogadores precisava acertar a bola preta em uma das caçapas para vencer a partida e o campeonato. Suponha que sobre a mesa de sinuca foi colocado um sistema de eixos. A bola preta, que estava na posição $(1{,}6; 1{,}2)$, foi impulsionada pelo jogador, atingindo a lateral da mesa no ponto de coordenadas $(2{,}4; 0)$. Sabendo que o objetivo desse jogador era acertar a caçapa que estava na posição $(3{,}6; 1{,}8)$, resolva.

Considere que na jogada a bola realizou movimentos retilíneos.



a) Escreva uma função do tipo $y = a|x - b|$ que descreva a trajetória da bola na jogada. $y = 1{,}5|x - 2{,}4|$

b) Esboce o gráfico da função que você escreveu no item **a**. Resposta nas Orientações para o professor.

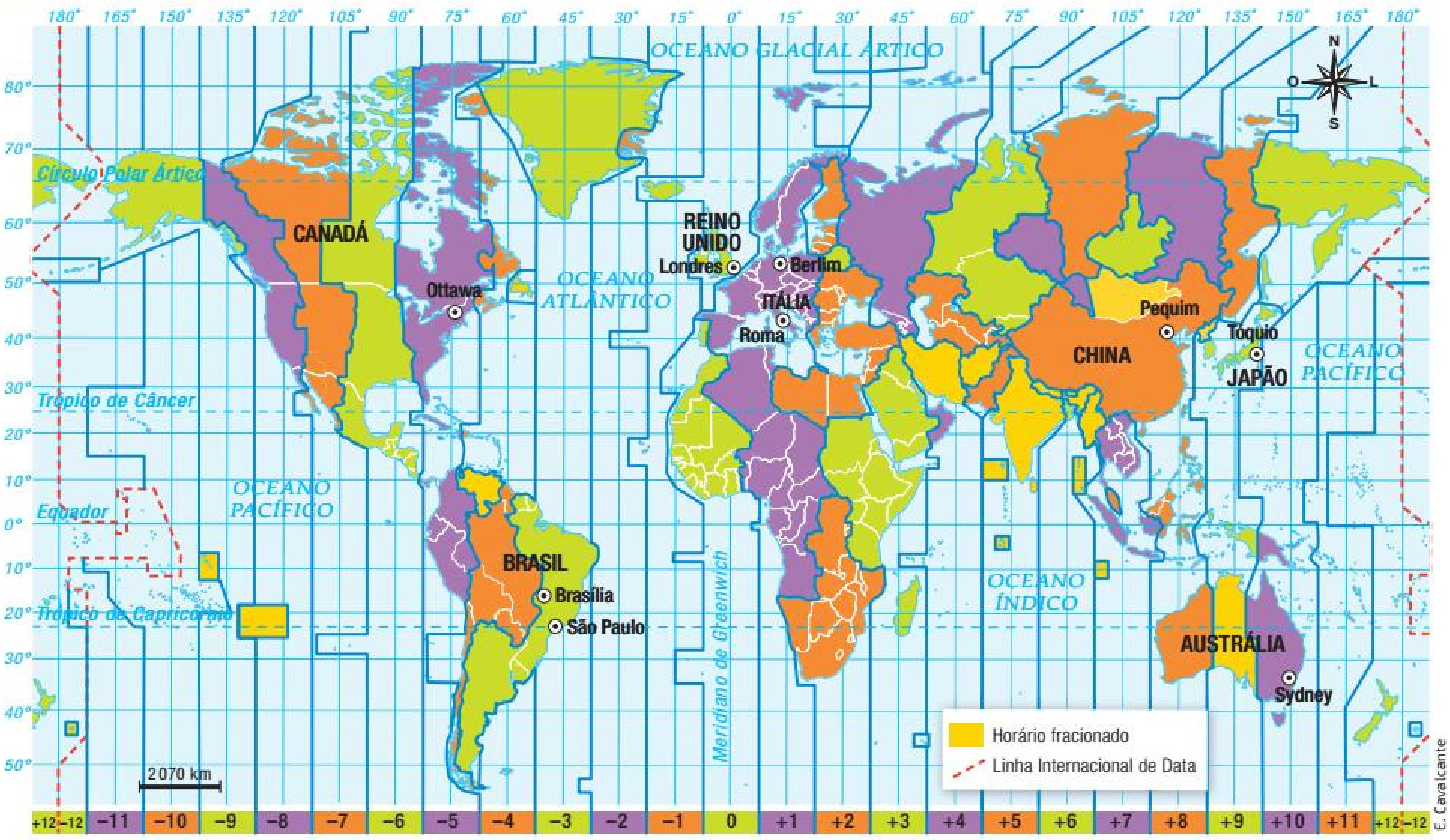
c) O jogador conseguiu acertar a bola na caçapa pretendida? Justifique.
Sim, pois a caçapa estava localizada em um ponto pertencente à função que descreve a trajetória da bola.

16. Nas páginas **178** e **179**, estudamos que, em um mesmo instante, diferentes regiões do planeta podem apresentar horários distintos, de acordo com o fuso horário em que estão situadas.

Uma maneira de determinar a diferença de horário entre duas cidades situadas em fusos distintos consiste em localizá-las no mapa e calcular o valor absoluto (ou módulo) da diferença entre os números que estão em cada fuso, os quais, por sua vez, representam a diferença de horas dessas cidades em relação ao horário de Greenwich.

Para resolver essa atividade, desconsidere os horários de verão.

Fusos horários



Fonte: ATLAS geográfico escolar. 6. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2012.

Observando o mapa, temos que a diferença de horários entre Brasília e Roma, por exemplo, é de 4 h, pois $|-3 - (+1)| = |+1 - (-3)| = 4$.

a) Qual a diferença de horário entre São Paulo e Tóquio? E entre Pequim e Sydney? 12 h; 2 h

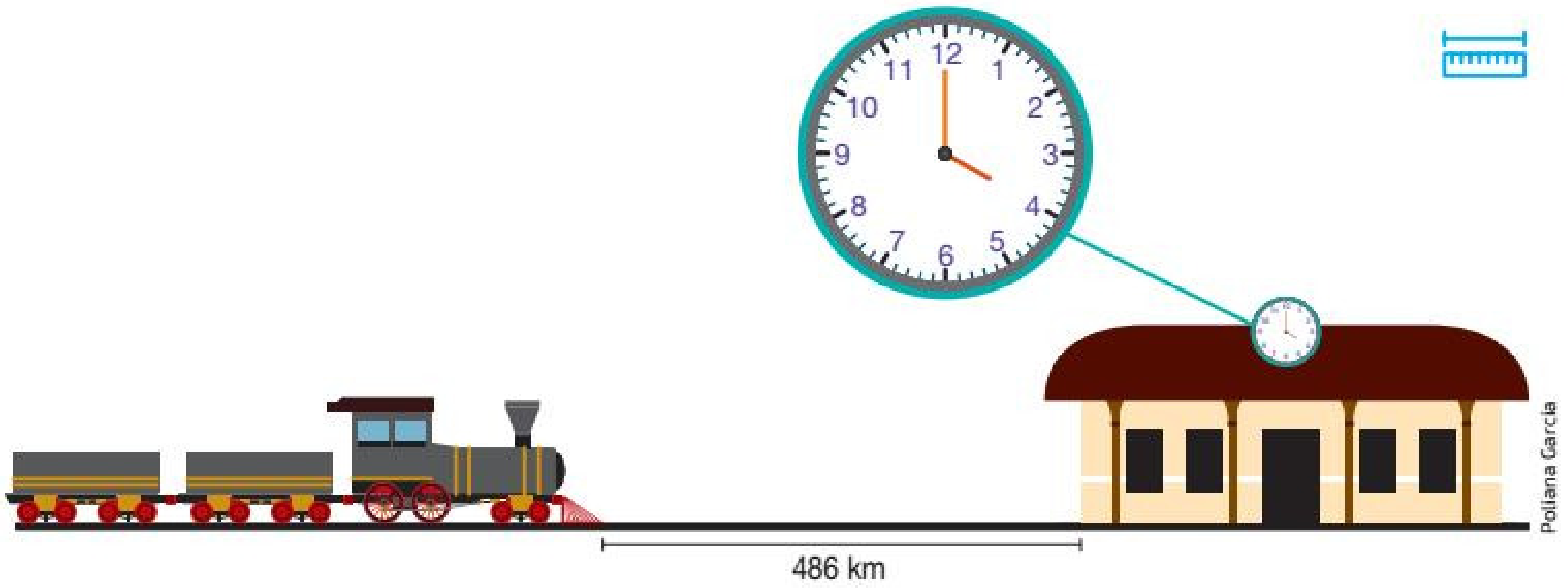
b) Quais duas cidades destacadas no mapa a diferença de horário é de 5 h? Ottawa e Londres.

c) Determine uma função *f* por meio da qual se possa obter a diferença de horário entre Brasília e qualquer outra cidade do planeta, cuja diferença de horário em relação a Greenwich seja dada por *x*.
Resposta esperada: $f(x) = |-3 - x|$ ou $f(x) = |x + 3|$.

Equação modular

Em uma viagem, a distância em quilômetros de um trem até certa estação ferroviária variou de acordo com a função $f(x)=|54x-702|$, em que *x* corresponde à hora do dia. Às 4 h, por exemplo, o trem estava a 486 km da estação, pois $f(4)=|54\cdot 4-702|=486$.

Os elementos que compõem o esquema são ilustrativos.



Poliana Garcia

A que horas do dia este trem estava a 216 km da estação?

Para resolver esta questão, devemos determinar para qual valor de *x* temos $f(x)=216$. Portanto, devemos resolver a equação $|54x-702|=216$.

Equações como essa, em que a incógnita está em um módulo, são denominadas **equações modulares.**

Em relação à equação modular acima, temos:

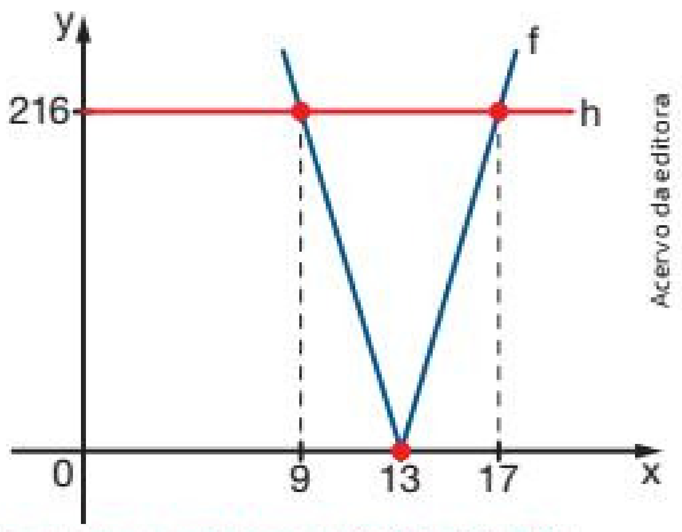
$$|54x-702|=216 \Leftrightarrow \begin{cases} 54x-702=216 \text{ (I)} \\ \text{ou} \\ 54x-702=-216 \text{ (II)} \end{cases}$$

Resolvemos as equações **I** e **II**:

- $54x-702=216 \Rightarrow x=17$
- $54x-702=-216 \Rightarrow x=9$

Portanto, o trem estava a 216 km da estação às 9 h e às 17 h.

Graficamente, a solução da equação $|54x-702|=216$ corresponde à abscissa dos pontos em que os gráficos das funções $f(x)=|54x-702|$ e $h(x)=216$ se intersectam.



Acervo da editora

No gráfico ao lado, os eixos *x* e *y* não apresentam a mesma escala.

Questione os alunos sobre como o trem pôde ter ficado a uma mesma distância da estação que estava 8 h antes, sendo que ele não mudou o sentido. Verifique se ele percebeu que às 9 h o trem ainda não havia passado pela estação, enquanto que às 17 h, já havia passado.

Atividades resolvidas

R5. Resolva em $\mathbb{R}$ cada equação.

a) $|x^2-7x+9|=3$

b) $|2x-1|=-x+3$

Resolução

a) $|x^2-7x+9|=3$

Pela definição de módulo: $|x^2-7x+9|=3 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-7x+9=3 \\ \text{ou} \\ x^2-7x+9=-3 \end{cases}$

Resolvendo cada equação, temos:

- $x^2-7x+9=3 \Rightarrow x^2-7x+6=0 \left\langle \begin{matrix} x_1=1 \\ x_2=6 \end{matrix} \right.$
- $x^2-7x+9=-3 \Rightarrow x^2-7x+12=0 \left\langle \begin{matrix} x_3=3 \\ x_4=4 \end{matrix} \right.$

Portanto, $S=\{1, 3, 4, 6\}$.

b) $|2x-1|=-x+3$

O primeiro membro da igualdade é um módulo, logo não pode ser negativo.

Condição: $-x+3\geq 0 \Rightarrow x\leq 3$

Pela definição de módulo:

$$|2x-1|=-x+3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1=-x+3 \\ \text{ou} \\ 2x-1=-(-x+3) \end{cases}$$

Resolvendo cada equação, temos:

- $2x-1=-x+3 \Rightarrow 3x=4 \Rightarrow x=\dfrac{4}{3}$
- $2x-1=-(-x+3) \Rightarrow 2x-1=x-3 \Rightarrow x=-2$

Como $x=\dfrac{4}{3}$ e $x=-2$ satisfazem a condição $x\leq 3$, segue que $S=\left\{-2, \dfrac{4}{3}\right\}$.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

17. Resolva em $\mathbb{R}$ as equações. Respostas no final do livro.

a) $|-x+3|-15=5$

b) $3|x+2|-5x=0$

c) $|2x-5|-|3x-8|=0$

d) $|x^2-4|-3=5$

e) $|-x^2+6|-2x=-2$

f) $|x^2-1|-|2x^2-10|=0$

18. Determine um intervalo real, de modo que a equação $|x|=x$ seja verdadeira para qualquer x pertencente a esse intervalo. $[0,+\infty[$

19. Na situação proposta no início da página 187, temos que a distância do trem à estação é dada pela função $f(x)=|54x-702|$.

a) A que distância o trem estará da estação às 12 h? 54 km

b) A que horas o trem passou pela estação? 13 h

20. Um ônibus parte da cidade **A** em direção à cidade **B**, que fica a 120 km, com velocidade constante de 75 km/h. Quinze minutos depois, um automóvel parte no mesmo trajeto, com velocidade constante de 100 km/h.

a) Escreva as funções que determinam a posição *s*, em quilômetros, de cada veículo, em função do tempo *t*, em horas, considerando como posição inicial a cidade **A** e como instante inicial a partida do ônibus. ônibus: $s(t)=75\,t$; carro: $s(t)=100(t-0{,}25)$

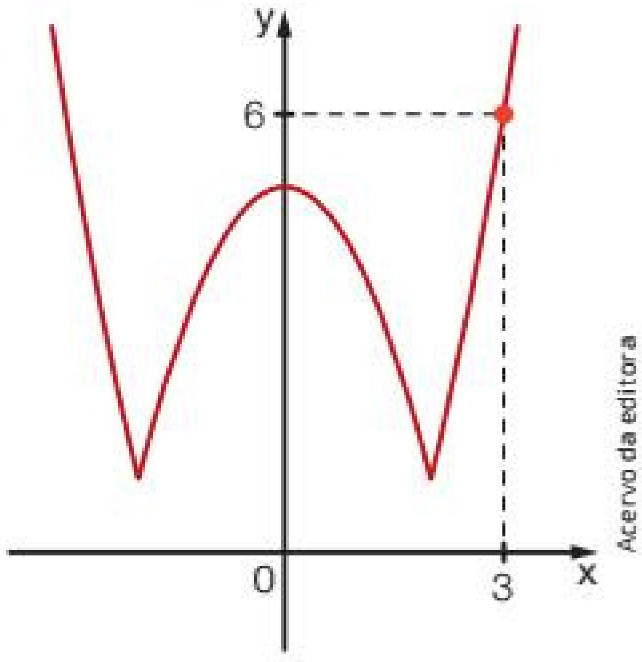
b) A que distância da cidade **B** o carro ultrapassou o ônibus? 45 km

c) Em quais instantes a distância entre os veículos era de 5 km? 48 min ou 1h12min

21. Dadas as funções $f(x)=|x-1|+2$ e $g(x)=3x+1$, determine o conjunto *S* dos valores de *x* para os quais os gráficos dessas funções se intersectam. $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$

22. Uma das soluções da equação $|2x+1|-5=m$, em que *m* é uma constante real, é -7. Qual é o valor de *m*? $m=8$

23. O gráfico representa a função $f(x)=|x^2+b|+1$. Calcule o valor de *b* e determine os valores de *x* tal que $f(x)=5$. $b=-4$; $-\sqrt{8}$, 0 e $\sqrt{8}$



Acervo da editora

24. Em um experimento realizado no laboratório de química, o professor aqueceu um gás e depois o resfriou com o objetivo de analisar algumas de suas propriedades durante o aquecimento e o resfriamento. O experimento teve duração de 16 minutos, nos quais a temperatura do gás variou de acordo com a função $T(t)=-|15t-120|+140$, em que *t* é o tempo de experimento em minutos e *T* é a temperatura, em graus Celsius, atingida pelo gás no tempo *t*.

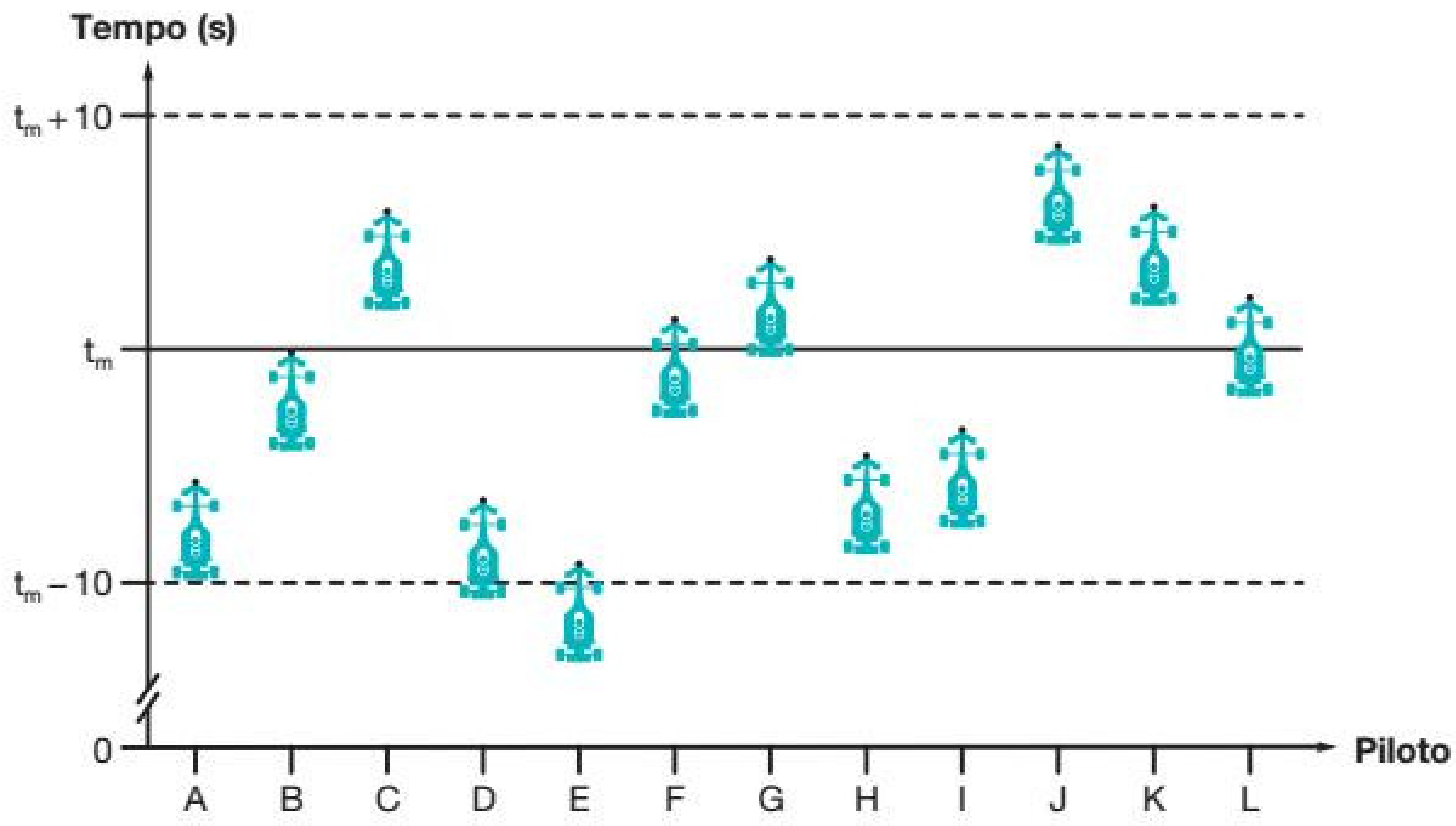
a) Qual foi a temperatura do gás no instante $t=4$? Em que outro instante a temperatura foi igual à atingida em $t=4$? 80 °C; $t=12$

b) Em que instante a temperatura atingida foi a maior durante o experimento? $t=8$

Inequação modular

Nas tomadas de tempo para uma corrida automobilística, a variação nas marcas obtidas pelos 12 pilotos foi inferior a 10 s em relação ao tempo médio.

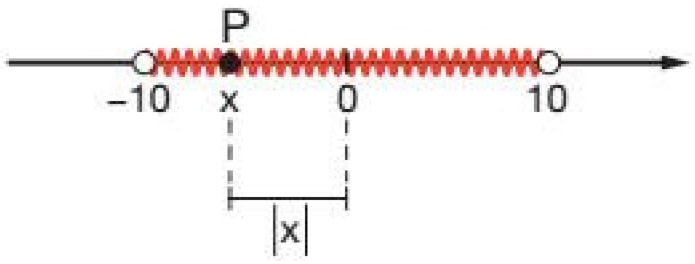
Observe, no esquema, a representação dos 12 tempos obtidos em relação ao tempo médio (t_m).



Gilberto Alicio

Também podemos representar as possíveis variações em uma reta real, conforme segue:

Chamando de *x* uma dessas variações e representando-a na reta real com um ponto *P*, de abscissa *x*, temos que a distância de *P* à origem é dada por $|x|$, sendo essa distância menor que 10 unidades. Dessa maneira, podemos escrever a inequação $|x| < 10$.

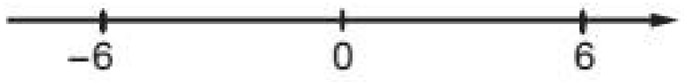


Inequações como essa, em que a incógnita está no módulo, são denominadas **inequações modulares.**

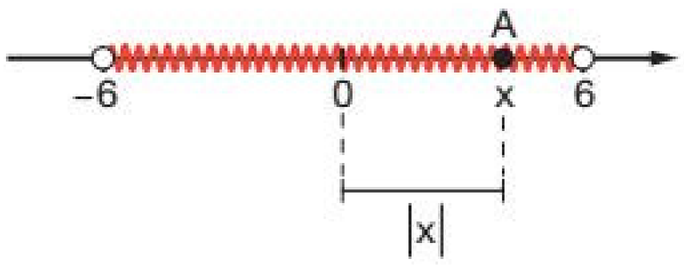
Veja outros exemplos de inequações modulares:

- $|x+5| > 3$
- $|3x^2 - 7| \geq \frac{1}{2}$
- $|2x+1| - |-7x+6| < 21$

Para resolvermos uma inequação modular, inicialmente temos de verificar algumas propriedades válidas para módulo. Para isso, consideramos a reta real e, por exemplo, a indicação das abscissas 6 e −6.



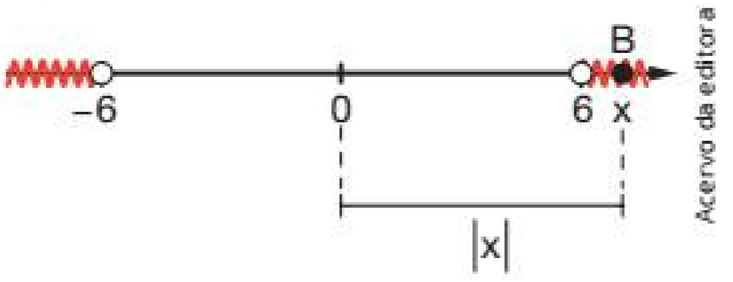
- Se considerarmos um ponto *A*, de abscissa *x*, em que a distância entre *A* e a origem é menor que 6 unidades, ou seja, $|x| < 6$, temos que $-6 < x < 6$.



Ilustrações: Acervo da editora

Assim, temos que $|x| < 6 \Rightarrow -6 < x < 6$.

- Se considerarmos um ponto *B*, de abscissa *x*, em que a distância entre *B* e a origem é maior que 6 unidades, ou seja $|x|>6$, temos que $x>6$ ou $x<-6$.



Acervo da editora

Assim, temos que $|x|>6 \Rightarrow x<-6$ ou $x>6$.

Generalizando as conclusões obtidas e considerando que as recíprocas também são verdadeiras, podemos escrever as seguintes propriedades para $k>0$:

- $|x|<k \Leftrightarrow -k<x<k$
- $|x|\le k \Leftrightarrow -k\le x\le k$
- $|x|>k \Leftrightarrow x<-k$ ou $x>k$
- $|x|\ge k \Leftrightarrow x\le -k$ ou $x\ge k$

Atividades resolvidas

R6. Resolva em $\mathbb{R}$ cada inequação.

a) $|x-5|\le 3$

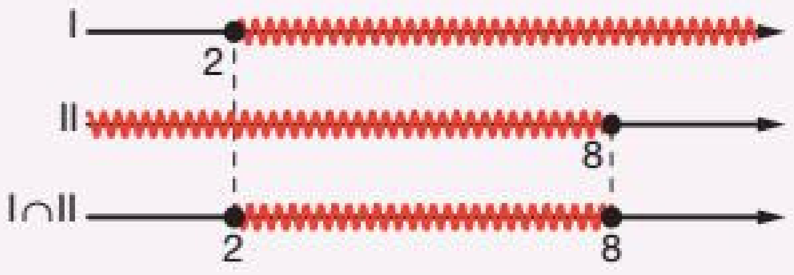
b) $|x-4|>5$

Resolução

a) Utilizando a propriedade $|x|\le k \Leftrightarrow -k\le x\le k$, temos:

$$|x-5|\le 3 \Leftrightarrow -3\le x-5\le 3 \Leftrightarrow \begin{cases} -3\le x-5 \Rightarrow x\ge 2 & \text{(I)} \\ \text{e} \\ x-5\le 3 \Rightarrow x\le 8 & \text{(II)} \end{cases}$$

A solução é dada pela interseção das inequações **I** e **II**.



Portanto, $S=\{x\in\mathbb{R} \mid 2\le x\le 8\}$.

b) Utilizando a propriedade $|x|>k \Leftrightarrow x<-k$ ou $x>k$, temos:

$$|x-4|>5 \Rightarrow \begin{cases} x-4>5 \Rightarrow x>9 & \text{(I)} \\ \text{ou} \\ x-4<-5 \Rightarrow x<-1 & \text{(II)} \end{cases}$$

A solução é dada pela união das inequações **I** e **II**.

Ilustrações: Acervo da editora

Portanto, $S=\{x\in\mathbb{R} \mid x<-1 \text{ ou } x>9\}$.

Note que:
- no item **a**, o conjunto-solução da inequação é I **e** II, ou seja, I∩II;
- no item **b**, o conjunto-solução da inequação é I **ou** II, ou seja, I∪II.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

25. Resolva as inequações. Respostas no final do livro.

a) $|3x-8|-2\leq 4$

b) $|-2x+4|\leq 2$

c) $-|x|+20\geq 0$

d) $|4x+11|-3\leq 6$

26. Os conjuntos *A* e *B* são subconjuntos de $\mathbb{R}$, definidos por $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,|2x+1|>5\}$ e $B=\{x\in\mathbb{R}\,|\,|x-3|\leq 10\}$.

a) Determine $A\cap B$ e $A\cup B$. Respostas no final do livro.

b) Escreva os conjuntos *A* e *B* sem utilizar módulo.

27. Represente graficamente a solução das inequações. Respostas no final do livro.

a) $|x|\leq 8$

b) $5-|2x-1|>2$

c) $|x-5|>3$

d) $|2x-3|>|x+6|$

28. Determine o domínio de cada uma das funções.

a) $f(x)=\sqrt{|2x-1|-5}$ $D(f)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\leq -2 \text{ ou } x\geq 3\}$

b) $m(x)=\log(|5x^3-20x-16|+1)$ $D(m)=\mathbb{R}$

29. Determine em $\mathbb{R}$ o conjunto-solução da inequação $|1-x^2|\leq \frac{4x+4}{3}$. $S=\left\{x\in\mathbb{R}\,|\,x=-1 \text{ ou } -\frac{1}{3}\leq x\leq -\frac{7}{3}\right\}$

30. Em certa fazenda, a produção média diária de *x* litros de leite varia de acordo com a inequação $|x-5\,000|\leq 3\,000$. Quantos litros de leite no máximo e no mínimo são produzidos diariamente nessa fazenda? máximo: 8 000 L; mínimo: 2 000 L

31. Um trem de carga e um de passageiros passam pela estação **A** e seguem por trilhos paralelos até a estação **B**. O trem de carga passou por **A** 20 min antes do trem de passageiros e seguiu com velocidade constante de 60 km/h, enquanto o trem de passageiros seguiu com velocidade média constante de 80 km/h.

a) Escreva duas funções, uma para cada trem, que expressem a posição *s* (em quilômetros) de cada um na ferrovia, em função do tempo *t* (em horas), após a passagem do trem de carga pela estação **A**. Resposta no final do livro.

b) Após quanto tempo o trem de passageiros ultrapassou o trem de carga? 1h20min

c) Durante quanto tempo, a partir da passagem do trem de carga por **A**, a distância entre os dois trens foi menor ou igual a 40 km? 3h20min

32. No balanço do mês de setembro, uma fábrica de calçados constatou que nesse mês foram vendidos 9 000 pares de certo modelo de tênis. Comparando as vendas de agosto (*V*) e setembro, houve uma diferença menor do que 450 pares desse modelo de tênis. Escreva uma inequação modular que represente essa situação e calcule quantos pares de tênis no modelo mencionado foram vendidos em agosto.
$|V-9\,000|<450$; entre 8 551 e 9 449 pares

33. Em uma cidade, a quantidade de chuva em certa semana, em litros por metro quadrado, pode ser expressa pela função $q(d)=100-|20d-100|$, em que *d* corresponde a um número associado a cada dia da semana (domingo: 1; segunda-feira: 2; terça-feira: 3;...; sábado: 7).

a) Esboce o gráfico da função *q*. Resposta nas Orientações para o professor.

b) A partir de qual dia a quantidade acumulada de chuva ultrapassou 120 L/m^2? quarta-feira

c) Em quantos dias choveu mais de 60 L/m^2? Quais são esses dias? 3 dias; quarta-feira, quinta-feira e sexta-feira

34. **Desafio**

A quantidade de visitantes em uma exposição de artesanato nordestino, em certo dia, pode ser expressa por uma função do tipo
$Q(t)=-|kt-4\,900|+1\,750$, em que *Q* é quantidade de visitantes, *t* é a hora do dia e *k* é uma constante real. Nesse dia, a exposição permaneceu aberta das 9 h às 19 h, e o horário de maior concentração de visitantes foi às 14 h.

a) Qual foi a quantidade de visitantes na exposição no horário de maior concentração?
1 750 visitantes

b) Determine o valor de *k* na função *Q* e escreva-a.
$k=350$; $Q(t)=-|350t-4\,900|+1\,750$

c) Quantos visitantes estavam na exposição 3 h antes de seu fechamento? 1 050 visitantes

d) Esboce o gráfico da função que você escreveu no item **b**. Resposta nas Orientações para o professor.

Marcio Jose Bastos Silva/Shutterstock.com

Escultura de argila que representa uma banda típica do Nordeste, em Caruaru (PE), em 2015.

35. Devido à entressafra, o preço de certa fruta varia, de acordo com o mês do ano em que é comercializada, conforme a função $P(n)=-|-0{,}3n+1{,}8|+4$, em que *n* é o número correspondente ao mês do ano e *P* é o preço do quilograma da fruta no mês *n*.

a) Em qual mês o preço da fruta é o menor? Qual é esse preço? dezembro; R$ 2,20

b) Em quais meses o preço da fruta é igual ou superior a R$ 3,40 por quilograma?
abril, maio, junho, julho e agosto

Contexto

Lei de Coulomb

36. Algumas vezes, principalmente em dias que o ar está mais seco, é comum sentirmos pequenos choques elétricos ao tocar em alguns objetos, como maçanetas ou até mesmo em outra pessoa.

Corpos possuem naturalmente a mesma quantidade de cargas elétricas positivas e negativas, estando assim eletricamente neutros. Quando essa quantidade não é igual, isto é, quando um corpo está eletrizado ou eletricamente carregado, o excesso de cargas é eliminado por descargas elétricas, causando assim o choque que sentimos.

Em 1784, o físico francês Charles Augustin Coulomb (1736-1806) estudou a força entre cargas elétricas. Tendo como base a realização de diversos experimentos, Coulomb observou que existe uma força atuando entre dois corpos eletricamente carregados, por causa do excesso de cargas, propondo assim uma forma de calcular a força elétrica, que em sua homenagem, ficou conhecida como lei de Coulomb. Desse modo, as cargas elétricas, por serem definidas como negativas ou positivas, são utilizadas em módulo na determinação da intensidade da força elétrica entre elas. Assim:

Fonte de pesquisa: HALLIDAY, David; RESNICK, Robert. **Fundamentos da física:** eletromagnetismo. Tradução e revisão técnica Sérgio de Biasi. Rio de Janeiro: LTC, 2013. v. 3.

$$F = k\frac{|q_1|\cdot|q_2|}{r^2}$$

Fotomontagem de Eduardo C. S. formada pelas imagens HeinSchlebusch/Shutterstock.com, Iriana Shiyan/Shutterstock.com, Kev Llewellyn/Shutterstock.com e DenisNata/Shutterstock.com

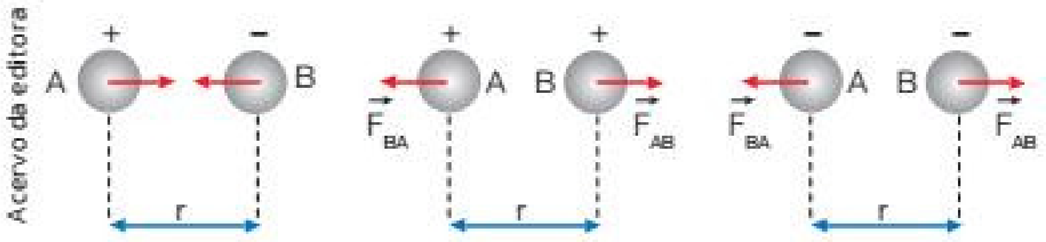
Um exemplo prático. Faça você também!

I Pique pedacinhos de papel.

O papel é eletricamente neutro, ou seja, contém cargas positivas e negativas em igual quantidade.

Lei de Coulomb

A força elétrica (F) de atração ou repulsão é diretamente proporcional ao produto das quantidades de cargas elétricas $(q_1 \text{ e } q_2)$ e inversamente proporcional ao quadrado da distância (r) que os separa, ou seja, $F = k\frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$.



Dois corpos eletrizados **A** e **B**, separados por uma distância *r*, se atraem eletricamente, quando possuem excesso de cargas elétricas de sinais opostos, e se repelem eletricamente, quando possuem excesso de cargas elétricas de mesmo sinal.

Explique aos alunos que *k* é a constante eletrostática.

De acordo com as informações apresentadas, resolva as questões.

a) Se dois corpos estão eletrizados, um com excesso de cargas positivas e outro com excesso de cargas negativas, a força elétrica entre eles é de atração ou repulsão? Justifique. Atração, pois cargas elétricas com sinais iguais se repelem e cargas elétricas com sinais diferentes se atraem.

b) Determine a intensidade da força elétrica entre quantidades de carga elétrica iguais a $3{,}5 \cdot 10^{-6}$ C e $-2 \cdot 10^{-6}$ C, separadas por uma distância de 0,2 m. Considere $k = 9 \cdot 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2}$. 1,575 N

c) Qual deve ser a quantidade de carga elétrica em excesso de um corpo que se encontra à distância de 0,3 m de outro corpo, com quantidade de carga elétrica em excesso igual a $-5 \cdot 10^{-6}$ C, para que a intensidade da força elétrica entre elas seja menor do que 2 N? Considere $k = 9 \cdot 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2}$. $4 \cdot 10^{-6}$ C ou $-4 \cdot 10^{-6}$ C

d) Em seu cotidiano, você provavelmente presencia diversos fenômenos elétricos que acontecem, por exemplo, no interior de lâmpadas e eletrodomésticos. Cite atividades realizadas diariamente em sua casa, nas quais o uso da energia elétrica é fundamental. Resposta pessoal.

Quando retiramos o módulo das quantidades de cargas elétricas $(q_1 \text{ e } q_2)$, é possível verificar se a força é positiva ou negativa, pois o sinal da carga elétrica indica se a força é de atração ou repulsão.

- Força positiva (+) repulsão:

  $q_1(+)$ e $q_2(+)$ ou

  $q_1(-)$ e $q_2(-)$

- Força negativa (−) atração:

  $q_1(+)$ e $q_2(-)$ ou

  $q_1(-)$ e $q_2(+)$

II Esfregue uma caneta de plástico na roupa por algumas vezes.*

Esse processo gera eletrização dos corpos, ou seja, ocorre uma transferência de elétrons entre os corpos envolvidos, onde aquele que receber elétrons apresentará excesso de carga negativa e aquele que ceder, excesso de carga positiva.

*Diga aos alunos que também é possível esfregar a caneta de plástico nos cabelos.

III Aproxime a caneta dos pedacinhos de papel.

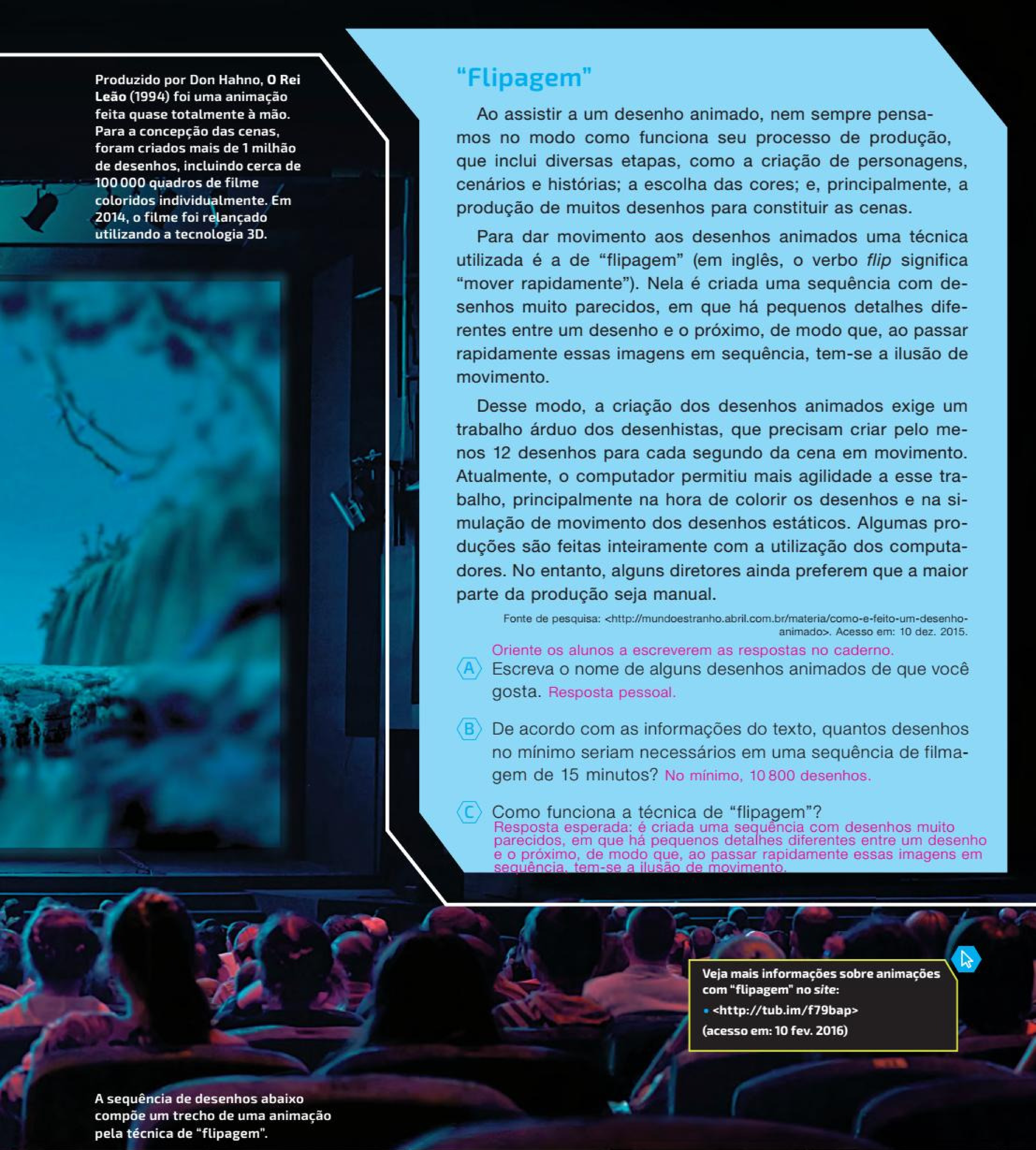
Suponha que a caneta ficou eletrizada com excesso de carga negativa. Essa carga vai repelir os elétrons que o papel naturalmente possui para a extremidade oposta à caneta, criando na extremidade próxima uma região com excesso de cargas positivas, atraindo, assim, o papel.

capítulo

8

As progressões

Fotomontagem de Eduardo C. S. formada pelas imagens Filme de Roger Allers e Rob Minkoff. O Rei Leão. EUA, 1994. Foto: Archives du 7e Art/Walt Disney Pictures/Glow Images, d13/Shutterstock.com e Biratan



Produzido por Don Hahno, **O Rei Leão** (1994) foi uma animação feita quase totalmente à mão. Para a concepção das cenas, foram criados mais de 1 milhão de desenhos, incluindo cerca de 100 000 quadros de filme coloridos individualmente. Em 2014, o filme foi relançado utilizando a tecnologia 3D.

“Flipagem”

Ao assistir a um desenho animado, nem sempre pensamos no modo como funciona seu processo de produção, que inclui diversas etapas, como a criação de personagens, cenários e histórias; a escolha das cores; e, principalmente, a produção de muitos desenhos para constituir as cenas.

Para dar movimento aos desenhos animados uma técnica utilizada é a de “flipagem” (em inglês, o verbo *flip* significa “mover rapidamente”). Nela é criada uma sequência com desenhos muito parecidos, em que há pequenos detalhes diferentes entre um desenho e o próximo, de modo que, ao passar rapidamente essas imagens em sequência, tem-se a ilusão de movimento.

Desse modo, a criação dos desenhos animados exige um trabalho árduo dos desenhistas, que precisam criar pelo menos 12 desenhos para cada segundo da cena em movimento. Atualmente, o computador permitiu mais agilidade a esse trabalho, principalmente na hora de colorir os desenhos e na simulação de movimento dos desenhos estáticos. Algumas produções são feitas inteiramente com a utilização dos computadores. No entanto, alguns diretores ainda preferem que a maior parte da produção seja manual.

Fonte de pesquisa: <http://mundoestranho.abril.com.br/materia/como-e-feito-um-desenho-animado>. Acesso em: 10 dez. 2015.

Oriente os alunos a escreverem as respostas no caderno.

A Escreva o nome de alguns desenhos animados de que você gosta. Resposta pessoal.

B De acordo com as informações do texto, quantos desenhos no mínimo seriam necessários em uma sequência de filmagem de 15 minutos? No mínimo, 10 800 desenhos.

C Como funciona a técnica de “flipagem”?
Resposta esperada: é criada uma sequência com desenhos muito parecidos, em que há pequenos detalhes diferentes entre um desenho e o próximo, de modo que, ao passar rapidamente essas imagens em sequência, tem-se a ilusão de movimento.

Veja mais informações sobre animações com “flipagem” no *site*:
- **<http://tub.im/f79bap>**

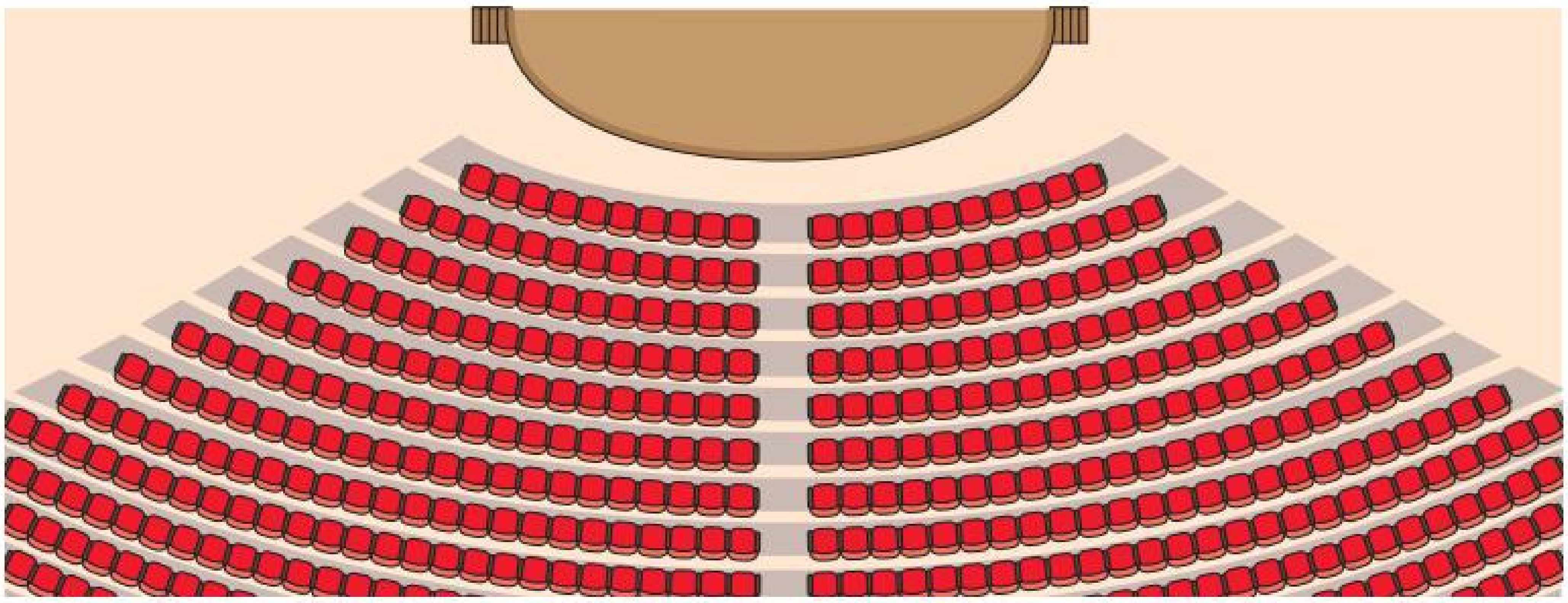
(acesso em: 10 fev. 2016)

A sequência de desenhos abaixo compõe um trecho de uma animação pela técnica de “flipagem”.

Sequências

Ao final do estudo deste capítulo podem ser trabalhados o exemplo e as atividades das páginas 273 e 274 da seção Acessando tecnologias.

Em determinado teatro, as poltronas da plateia são dispostas em 14 filas, de modo que a primeira fila possui 20 poltronas; a segunda, 24; a terceira, 28; e assim por diante. Dizemos então que, a partir da primeira fila, a seguinte possui 4 poltronas a mais que a anterior.


Ronaldo Lucena

Podemos representar a quantidade de poltronas de cada fila da seguinte maneira:

$$(20, 24, 28, 32, \ldots, 68, 72)$$

De acordo com essas informações, é possível responder a questões como:

- Quantas poltronas há na 10ª fila da plateia desse teatro? 56 poltronas
- É possível que uma das filas tenha um número ímpar de poltronas? Por quê? não; Resposta esperada: a sequência é formada apenas por números pares.
- Qual é a quantidade total de poltronas da plateia desse teatro? 644 poltronas

Note que as quantidades de poltronas de cada fila são elementos de um conjunto; esses elementos estão organizados em certa ordem, formando uma **sequência** ou **sucessão**. Nessa sequência, 20 é o 1º termo, 24 é o 2º termo, 28 é o 3º termo, e assim por diante.

Nem sempre os elementos de uma sequência são números, como na sequência dos meses do ano:

$$(\text{janeiro, fevereiro, março, abril}, \ldots, \text{dezembro})$$

Geralmente, os termos de uma sequência são representados por uma letra e um índice. Por exemplo, o 1º termo de uma sequência pode ser representado por a_1; o 2º termo, por a_2; o 3º termo, por a_3; e assim por diante. Para representar um termo qualquer, utilizamos a_n, ou seja, o **enésimo termo** ou **termo de ordem *n***. Escrevendo essa sequência, temos:

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots)$$

A **posição** (ou **ordem**) do termo de uma sequência é indicada por seu índice.
No caso, a sequência que representa a quantidade de poltronas de cada fila do teatro é:

- $a_1 = 20$
- $a_2 = 24$
- $a_3 = 28$
- $a_4 = 32$
- $\vdots$
- $a_{14} = 72$

Existem sequências finitas e sequências infinitas.

Costumamos representar apenas a imagem de uma sequência finita, já que o domínio está implícito.

Chamamos de **sequência finita** de *n* termos toda função cujo domínio é o conjunto dos *n* primeiros elementos de $\mathbb{N}^*$, ou seja, $\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n\}$, e cujo contradomínio seja um conjunto qualquer não vazio. Geralmente, o conjunto imagem dessa função é indicado por: $\{a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n\}$. Observe que ao escrevermos uma sequência estamos associando a cada posição (1ª, 2ª, 3ª, ...) um elemento que é o termo correspondente da sequência. Assim, podemos pensar em uma sequência como uma função, que a cada número natural não nulo associa um elemento.

Alguns exemplos de sequências finitas são:

- Sequência dos números naturais maiores que 7 e menores que 15.

$$(8, 9, 10, 11, 12, 13, 14)$$

- Sequência dos múltiplos de 6 entre 10 e 80.

$$(12, 18, 24, 30, 36, \ldots, 72, 78)$$

Chamamos de **sequência infinita** toda função de domínio $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n, \ldots\}$ e cujo contradomínio seja um conjunto qualquer não vazio. Geralmente, o conjunto imagem dessa função é indicado por: $\{a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots\}$. Costumamos representar apenas a imagem de uma sequência infinita, já que o domínio está implícito.

Alguns exemplos de sequências infinitas são:

- Sequência dos números inteiros menores que −2.

$$(-3, -4, -5, -6, -7, \ldots)$$

- Sequência dos números naturais.

$$(0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots)$$

Obtenção dos elementos de uma sequência

Neste capítulo estudaremos apenas as sequências cujos elementos podem ser determinados por meio de uma fórmula do termo geral da sequência ou por recorrência.

A fórmula do termo geral de uma sequência expressa o valor de cada termo a_n da sequência em função da posição *n* que ele ocupa.

Nem toda sequência apresenta fórmula do termo geral ou lei de recorrência.

Calculando o valor de alguns termos da sequência cuja fórmula do termo geral é $a_n = 2n - 3$, com $n \in \mathbb{N}^*$, temos:

- $n = 1 \Rightarrow a_1 = 2 \cdot 1 - 3 \Rightarrow a_1 = -1$
- $n = 2 \Rightarrow a_2 = 2 \cdot 2 - 3 \Rightarrow a_2 = 1$
- $n = 3 \Rightarrow a_3 = 2 \cdot 3 - 3 \Rightarrow a_3 = 3$
- $n = 4 \Rightarrow a_4 = 2 \cdot 4 - 3 \Rightarrow a_4 = 5$
- $n = 5 \Rightarrow a_5 = 2 \cdot 5 - 3 \Rightarrow a_5 = 7$

$\vdots$

Em uma sequência, os termos a_{n-1} e a_n são chamados de **termos consecutivos**, sendo a_{n-1} o antecessor de a_n, e a_n o sucessor de a_{n-1}.

Portanto, a sequência é dada por $(-1, 1, 3, 5, 7, \ldots)$.

Agora, considere a sequência dada por $a_1 = 5$ e $a_n = a_{n-1} - 2$, com $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$. Calculando o valor de alguns de seus termos, temos:

- $n = 2 \Rightarrow a_2 = a_{2-1} - 2 = a_1 - 2 = 5 - 2 \Rightarrow a_2 = 3$
- $n = 3 \Rightarrow a_3 = a_{3-1} - 2 = a_2 - 2 = 3 - 2 \Rightarrow a_3 = 1$
- $n = 4 \Rightarrow a_4 = a_{4-1} - 2 = a_3 - 2 = 1 - 2 \Rightarrow a_4 = -1$
- $n = 5 \Rightarrow a_5 = a_{5-1} - 2 = a_4 - 2 = -1 - 2 \Rightarrow a_5 = -3$

$\vdots$

Portanto, a sequência é dada por $(5, 3, 1, -1, -3, \ldots)$.

Note que, nesse caso, não foi utilizada a fórmula do termo geral para obter o valor dos termos da sequência. Com exceção do primeiro, cada termo foi obtido a partir de seu antecessor, ou seja, essa sequência foi definida por **recorrência**.

Dizemos que duas sequências são iguais quando possuem os mesmos termos, sendo estes dispostos em uma mesma ordem. Portanto, as sequências $(-1, 0, 1, 2)$ e $(2, 1, 0, -1)$ são diferentes, pois seus termos, apesar de serem iguais, não estão na mesma ordem.

Atividades resolvidas

R1. Determine o 20º termo de cada sequência.

a) $(4, 7, 10, 13, \ldots)$

b) $(3, 1, -1, -3, -5, \ldots)$

Resolução

a) $(4, 7, 10, 13, \ldots)$

- $n=1 \Rightarrow a_1=4=3+1=3\cdot\underbrace{1}_{n}+1$
- $n=2 \Rightarrow a_2=7=6+1=3\cdot\underbrace{2}_{n}+1$
- $n=3 \Rightarrow a_3=10=9+1=3\cdot\underbrace{3}_{n}+1$
- $n=4 \Rightarrow a_4=13=12+1=3\cdot\underbrace{4}_{n}+1$

$\vdots$

Nessa sequência, o termo a_n pode ser obtido pelo triplo de *n* mais 1, ou seja, a fórmula do termo geral é dada por $a_n=3n+1$, para $n \in \mathbb{N}^*$.

Assim, o 20º termo da sequência é dado por:

$$a_n=3n+1 \Rightarrow a_{20}=3\cdot 20+1=60+1=61$$

b) $(3, 1, -1, -3, -5, \ldots)$

- $n=1 \Rightarrow a_1=3=5-2=5-2\cdot\underbrace{1}_{n}$
- $n=2 \Rightarrow a_2=1=5-4=5-2\cdot\underbrace{2}_{n}$
- $n=3 \Rightarrow a_3=-1=5-6=5-2\cdot\underbrace{3}_{n}$
- $n=4 \Rightarrow a_4=-3=5-8=5-2\cdot\underbrace{4}_{n}$
- $n=5 \Rightarrow a_5=-5=5-10=5-2\cdot\underbrace{5}_{n}$

$\vdots$

Nessa sequência, o termo a_n pode ser obtido subtraindo de 5 o dobro de *n*, ou seja, a fórmula do termo geral é dada por $a_n=5-2n$, para $n \in \mathbb{N}^*$.

Assim, o 20º termo da sequência é dado por:

$$a_n=5-2n \Rightarrow a_{20}=5-2\cdot 20=5-40=-35$$

Diferentemente de sequências definidas por recorrência, cada termo a_n das sequências acima é determinado em função de sua posição *n*.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

1. Escreva a sequência dos nomes dos estados da região Norte do Brasil, em ordem alfabética.
Leve para a sala de aula um mapa político do Brasil.

Região Norte do Brasil

Fonte: ATLAS geográfico escolar. 6. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2012.

Acre, Amapá, Amazonas, Pará, Rondônia, Roraima, Tocantins

2. Determine os próximos 4 termos das sequências.

a) $(1, 7, 13, 19, \ldots)$ 25, 31, 37, 43

b) $(-20; -17{,}5; -15; -12{,}5; \ldots)$ $-10; -7{,}5; -5; -2{,}5$

c) $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \ldots)$ $\sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}$

d) $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{4}{11}, \ldots\right)$ $\frac{5}{14}, \frac{6}{17}, \frac{7}{20}, \frac{8}{23}$

3. Nas páginas **194** e **195** estudamos que para dar movimento aos desenhos animados uma técnica utilizada é a de "flipagem". Certa animação, produzida nessa técnica, tem na composição de cada segundo 60 desenhos. Do instante 13 s ao instante 45 s, quantos desenhos são necessários para gerar os movimentos dessa animação? 1 980 desenhos

Peça aos alunos que, para resolver esta atividade, considerem no intervalo de tempo o 13º e o 45º segundo da animação.

4. Copie a sequência $(2, 4, \ldots)$ continuando até o 6º termo. Em seguida, compare sua resposta com a de outros colegas.*

a) Todos escreveram sequências iguais? Resposta pessoal.

b) Todas as sequências estão corretas? Justifique. Resposta pessoal.

5. Escreva os 10 primeiros termos da sequência cuja fórmula do termo geral é:

a) $a_n=n+6,\ n \in \mathbb{N}^*$ $(7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, \ldots)$

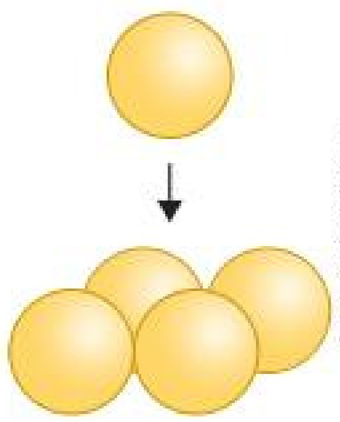
b) $a_n=3n-4,\ n \in \mathbb{N}^*$ $(-1, 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, \ldots)$

c) $a_n=\frac{1}{2^n},\ n \in \mathbb{N}$ $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \frac{1}{256}, \frac{1}{512}, \ldots\right)$

d) $a_n=\frac{n(n+5)}{2},\ n \in \mathbb{N}^*$ $(3, 7, 12, 18, 25, 33, 42, 52, 63, 75, \ldots)$

*Esta atividade tem como objetivo levar os alunos a perceber que certas situações admitem diferentes respostas e a propiciar uma oportunidade para que eles possam desenvolver a habilidade de argumentação. Nesse caso, duas possíveis respostas são: (2, 4, 6, 8, 10, 12,...) e (2, 4, 8, 16, 32, 64,...).

6. Camila pretende empilhar esferas de 1 cm de diâmetro em um suporte de base quadrada medindo 10 cm de lado e 0,5 cm de altura. Para isso, ela coloca 100 esferas na primeira camada, preenchendo toda a base do suporte. Cada esfera das camadas superiores será apoiada em 4 esferas da camada anterior, como na figura:


Acervo da editora

a) Quantas esferas haverá na 3ª camada? 64 esferas

b) Para empilhar as 3 primeiras camadas são necessárias quantas esferas? 245 esferas

c) Qual é a quantidade máxima de camadas que essa pilha pode ter? 10 camadas

d) Quantas esferas, no máximo, Camila poderá empilhar? 385 esferas

7. Escreva os 5 primeiros termos das sequências definidas pelas leis de recorrência a seguir.*

a) $a_1=1$, $a_n=a_{n-1}-4$, $n\in\mathbb{N}$ e $n>1$ (1, −3, −7, −11, −15, ...)

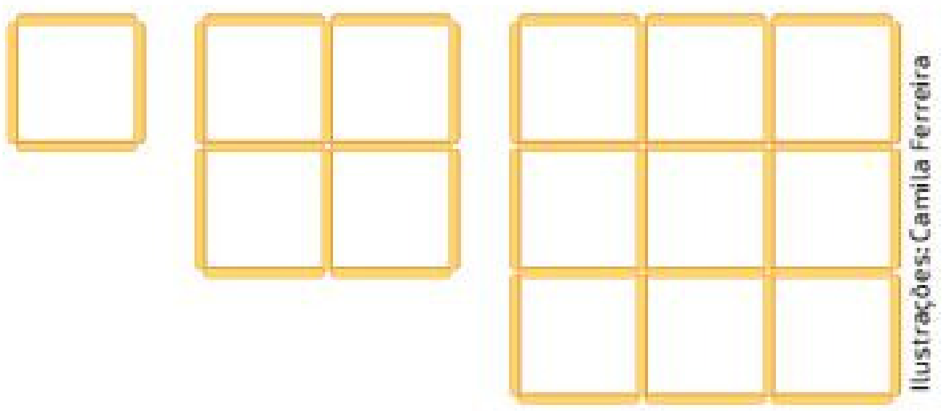
b) $a_1=a_2=1$, $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$, $n\in\mathbb{N}$ e $n>2$ (1, 1, 2, 3, 5, ...)

8. (Enem-MEC) Jogar baralho é uma atividade que estimula o raciocínio. Um jogo tradicional é a Paciência, que utiliza 52 cartas. Inicialmente são formadas sete colunas com as cartas. A primeira coluna tem uma carta, a segunda tem duas cartas, a terceira tem três cartas, a quarta tem quatro cartas, e assim sucessivamente até a sétima coluna, a qual tem sete cartas, e o que sobra forma o monte, que são as cartas não utilizadas nas colunas.

A quantidade de cartas que forma o monte é: b

a) 21 b) 24 c) 26 d) 28 e) 31

9. A sequência abaixo é formada por palitos de sorvete. Na primeira figura são utilizados 4 palitos; na segunda, 12; na terceira, 24; e assim por diante.


Ilustrações: Camila Ferreira

Quantos palitos serão utilizados para construir a 4ª figura da sequência? E a 8ª figura? 40 palitos; 144 palitos

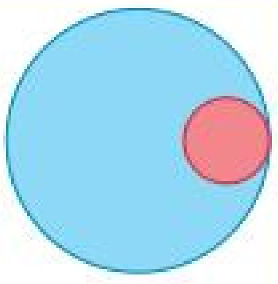
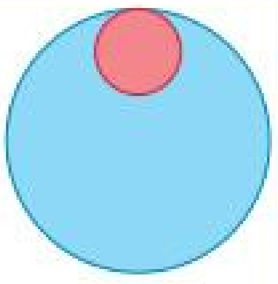
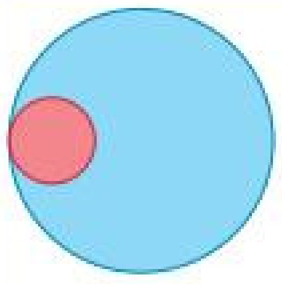
10. Escreva a fórmula do termo geral de cada sequência, com $n\in\mathbb{N}$ e $n\geq1$.

a) $(2, 3, 4, 5, 6, \ldots)$ $a_n=n+1$

b) $(-2, 3, 8, 13, 18, \ldots)$ $a_n=5n-7$

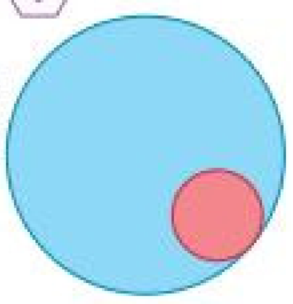
11. **Desafio**

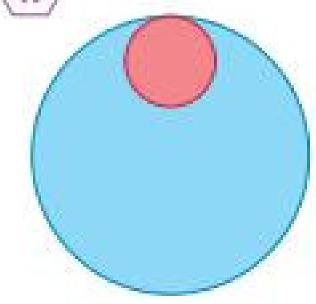
Observe a sequência em que cada figura, a partir da segunda, é obtida rotacionando a anterior em um ângulo de 90° no sentido anti-horário.

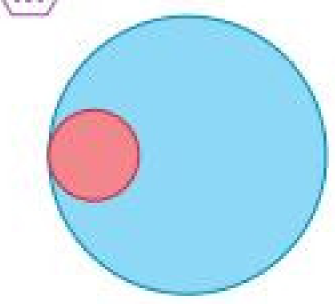
Figura				...
n	1	2	3	...

a) Escreva uma fórmula *f* que determine o ângulo de rotação da figura *n* em relação à primeira figura. $f(n)=90\cdot(n-1)$

b) Qual das figuras a seguir ocupa a 6ª posição na sequência? II

I


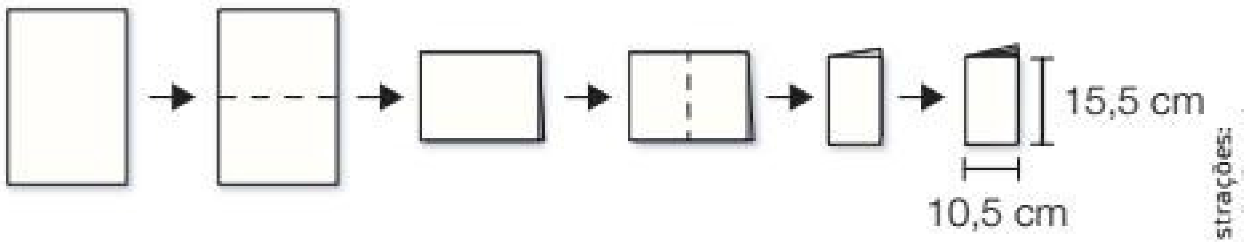
II


III


Ilustrações: Acervo da editora

c) Que posição na sequência ocupa a primeira figura repetida? 5ª posição

12. (Enem-MEC) Na literatura de cordel, os textos são impressos, em geral, com 8, 16, 24 ou 32 páginas de formato 10,5 cm × 15,5 cm. As razões históricas que explicam tal fato estão relacionadas à forma artesanal como são montadas as publicações e ao melhor aproveitamento possível do papel disponível. Considere, abaixo, a confecção de um texto de cordel com 8 páginas (4 folhas):



Ilustrações: Camila Ferreira

Utilizando o processo descrito acima, pode-se produzir um exemplar de cordel com 32 páginas de 10,5 cm × 15,5 cm, com o menor gasto possível de material, utilizando uma única folha de: d

a) 84 cm × 62 cm

b) 84 cm × 124 cm

c) 42 cm × 31 cm

d) 42 cm × 62 cm

e) 21 cm × 31 cm

13. Invente uma PA e proponha a um colega que determine a fórmula do termo geral. Em seguida, corrija a resposta dada pelo colega. Resposta pessoal.

*Nesta atividade, peça aos alunos que pesquisem sobre a sequência de Fibonacci e como ela está presente na natureza. Depois, peça-lhes que a identifiquem entre as sequências desta atividade.

Progressão aritmética (PA)

Certa companhia de transporte coletivo urbano fixou em seu guichê de vendas uma tabela de preços. Observe.

Tabela de preços

Quantidade de passagens	Preço (R$)
1	4
2	8
3	12
4	16
5	20
⋮	⋮

A direção.

Desenhorama Estúdio

Desenhorama Estúdio

Podemos representar o valor cobrado em função da quantidade de passagens nessa companhia por meio da seguinte sequência:

$$(4, 8, 12, 16, 20, \ldots)$$

Note que, a partir do 2º termo dessa sequência, se subtrairmos de qualquer termo o seu antecedente, obteremos sempre o mesmo resultado.

$$a_2 - a_1 = 8 - 4 = 4$$
$$a_3 - a_2 = 12 - 8 = 4$$
$$a_4 - a_3 = 16 - 12 = 4$$
$$a_5 - a_4 = 20 - 16 = 4$$
$$\vdots$$

Se adicionarmos 4 a qualquer termo dessa sequência, obteremos o sucessor desse termo.
$\underbrace{4}_{a_1} + 4 = \underbrace{8}_{a_2}$ $\underbrace{8}_{a_2} + 4 = \underbrace{12}_{a_3}$ $\underbrace{12}_{a_3} + 4 = \underbrace{16}_{a_4}$ ...

Sequências com essa característica são chamadas de **progressões aritméticas** (PA) e essa diferença constante entre os termos consecutivos é chamada de **razão** da PA.

Portanto, a razão dessa PA é igual a 4.

Chamamos de **progressão aritmética (PA)** toda sequência numérica em que, a partir do 2º termo, a diferença entre um termo qualquer e seu antecessor é igual a uma constante, chamada **razão** da progressão, indicada por *r*.

- Se $r = 0$, então a PA é **constante**.
- Se $r > 0$, então a PA é **crescente**.
- Se $r < 0$, então a PA é **decrescente**.

Exemplos

- Na PA $(9, 9, 9, 9, 9, \ldots)$, temos $r = 0$. Portanto, essa PA é constante.
- Na PA $(-5, -1, 3, 7, 11, \ldots)$, temos $r = 4$. Portanto, essa PA é crescente.
- Na PA $(12, 9, 6, 3, 0, \ldots)$, temos $r = -3$. Portanto, essa PA é decrescente.

Também podemos escrever os termos de uma PA em função de outros termos e de sua razão. Exemplos:
$a_3 = a_1 + 2r$
$a_4 = a_1 + 3r$
$a_6 = a_2 + 4r$
$a_{18} = a_8 + 10r$
$a_{18} = a_{20} - 2r$

Considerando a PA de termos $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \ldots)$, temos:

$$a_2 = a_1 + r \Rightarrow a_2 - a_1 = r$$
$$a_3 = a_2 + r \Rightarrow a_3 - a_2 = r$$
$$a_4 = a_3 + r \Rightarrow a_4 - a_3 = r$$
$$\vdots$$
$$a_n = a_{n-1} + r \Rightarrow a_n - a_{n-1} = r$$
$$\vdots$$

Logo, $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \ldots = a_n - a_{n-1} = \ldots = r$.

O enésimo termo de uma PA, em que o 1º termo é a_1 e a razão é *r*, é dado pela fórmula de recorrência:

$$a_n = a_{n-1} + r, \text{ para } n \in \mathbb{N} \text{ e } n \geq 2$$

Sabemos que, em uma PA, $a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$, então:

$$a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n \Rightarrow 2a_n = a_{n-1} + a_{n+1} \Rightarrow a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

Considerando $(\ldots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \ldots)$ três termos consecutivos de uma PA, o termo central a_n é dado por $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, ou seja, pela média aritmética dos outros dois.

Veja duas maneiras de representar uma PA de razão *r* e termos desconhecidos.

- Se $a_1 = x$, temos $(x, x+r, x+2r, \ldots)$.
- Se $a_1 = x - r$, temos $(x-r, x, x+r, \ldots)$.

Atividades resolvidas

R2. Determine a PA de quatro termos cuja soma dos dois primeiros é 15 e dos dois últimos é 51.

Resolução

Escrevemos a PA em função do termo a_1:

- $a_2 = a_1 + r$
- $a_3 = a_2 + r = (a_1 + r) + r = a_1 + 2r$
- $a_4 = a_3 + r = (a_1 + 2r) + r = a_1 + 3r$

Do enunciado, temos:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 15 \\ a_3 + a_4 = 51 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + (a_1 + r) = 15 \\ (a_1 + 2r) + (a_1 + 3r) = 51 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a_1 + r = 15 \\ 2a_1 + 5r = 51 \quad \cdot(-1) \end{cases}$$

$$-4r = -36 \Rightarrow r = 9$$

$$2a_1 + r = 15 \Rightarrow 2a_1 + 9 = 15 \Rightarrow a_1 = 3$$

Assim, $a_1 = 3$ e $r = 9$.

Portanto, a PA é $(3, 12, 21, 30)$.

R3. Escreva os cinco primeiros termos de uma PA tal que $a_5 = 30$ e $a_7 = 40$.

Resolução

Inicialmente determinamos a razão da PA escrevendo a_7 em função de a_5.

$$a_7 = \underbrace{a_5 + r}_{a_6} + r \Rightarrow 40 = 30 + 2r \Rightarrow 2r = 10 \Rightarrow r = 5$$

Em seguida, substituímos o valor de *r* e obtemos a_1.

$$a_5 = a_1 + 4r \Rightarrow 30 = a_1 + 4 \cdot 5 \Rightarrow a_1 = 30 - 20 = 10$$

Portanto, os cinco primeiros termos da PA são, nessa ordem: 10, 15, 20, 25 e 30.

Note que:
$a_5 = a_4 + r = a_3 + r + r = a_2 + r + r + r = a_1 + r + r + r + r = a_1 + 4r$

R4. Qual é o volume de um paralelepípedo cujas dimensões, em centímetros, formam a PA $(3x - 1, 4x, x + 5)$?

Resolução

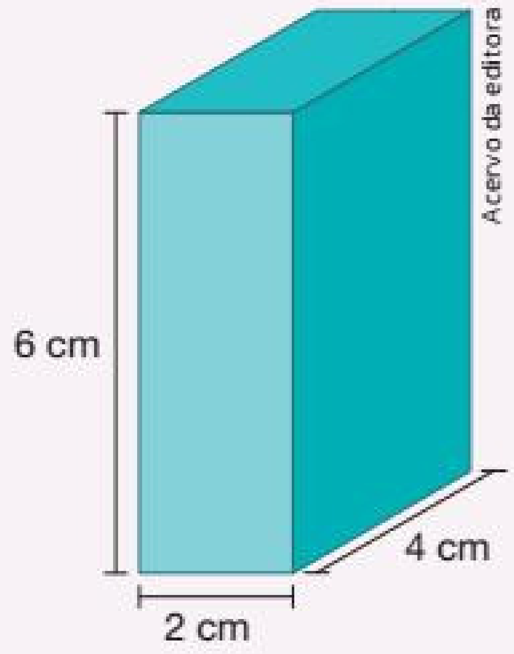
Inicialmente determinamos *x*, utilizando a relação $a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$:

$$4x = \frac{3x - 1 + x + 5}{2} \Rightarrow 8x = 4x + 4 \Rightarrow 4x = 4 \Rightarrow x = 1$$

Substituindo $x = 1$ na sequência $(3x - 1, 4x, x + 5)$, obtemos a PA $(2, 4, 6)$ cujos termos correspondem às dimensões do paralelepípedo.

Portanto, o volume do paralelepípedo é:

$$V = 2 \cdot 4 \cdot 6 = 48 \rightarrow \boxed{V = 48 \text{ cm}^3}$$



Acervo da editora

Atividades

Anote as respostas no caderno.

14. Calcule a razão das progressões aritméticas.

a) (3, 10, 17, ...) 7

b) (42, 39, 36, ...) −3

c) $(-7, -3, 1, \dots)$ 4

d) (5, −3, −11, ...) −8

e) $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \dots\right)$ $\frac{1}{4}$

f) $(2{,}3;\ 1{,}4;\ 0{,}5)$ −0,9

15. Escreva uma PA de 6 termos em que:

a) $a_1 = 4$ e $r = 9$ $(4, 13, 22, 31, 40, 49)$

b) $a_1 = 23$ e $a_2 = 18$ $(23, 18, 13, 8, 3, -2)$

c) $a_6 = 19$ e $r = 2$ $(9, 11, 13, 15, 17, 19)$

d) $a_4 = 3$ e $r = \frac{5}{2}$ $\left(-\frac{9}{2}, -2, \frac{1}{2}, 3, \frac{11}{2}, 8\right)$

e) $a_6 = -10$ e $r = -6$ $(20, 14, 8, 2, -4, -10)$

16. As idades de quatro amigos formam uma PA de razão 3. Daqui a 8 anos, as idades formarão uma: c

a) PA de razão 8

b) PA de razão 5

c) PA de razão 3

d) sequência que não é PA

17. Para cada item, calcule a razão da PA e classifique-a em crescente, decrescente ou constante.

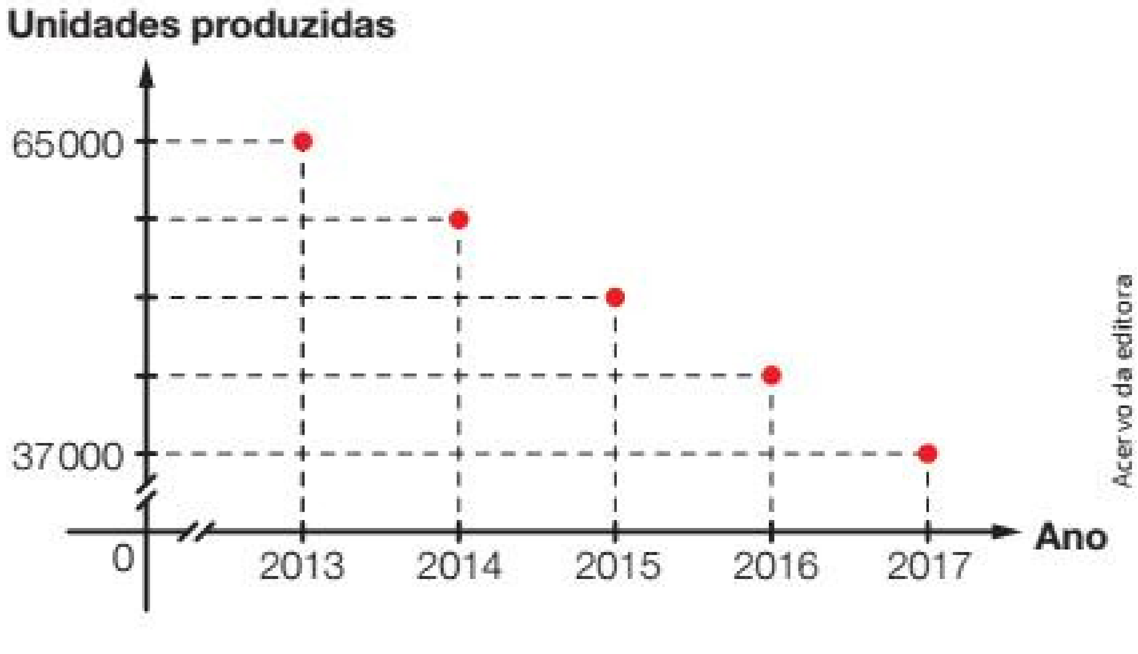
a) $a_n = -2 + 3n,\ n \in \mathbb{N}^*$ 3; crescente

b) $a_1 = 9,\ a_n = 3 \cdot a_{n-1} - 18,\ n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$ 0; constante

c) $a_n = 6 - 4n,\ n \in \mathbb{N}^*$ −4; decrescente

d) $a_n = 39 - \left(\frac{n-1}{10} - 1\right),\ n \in \mathbb{N}^*$ −0,1; decrescente

18. No início de 2013, uma empresa adquiriu uma máquina que produziu 65 000 unidades de determinado produto no decorrer desse ano. A produção dessa máquina diminuiu uma mesma quantidade de unidades ano após ano até 2017, conforme o gráfico.



Acervo da editora

Quantas unidades do produto foram produzidas por essa máquina nos anos de 2014, 2015 e 2016? 2014: 58 000; 2015: 51 000; 2016: 44 000

19. Calcule a razão de cada PA.

a) $(8x - 10, 5x - 8, 2x - 6)$ $-3x + 2$

b) $(1{,}\overline{6};\ 2;\ 2{,}\overline{3};\ \dots)$ $0{,}\overline{3}$ ou $\frac{1}{3}$

20. A soma dos 3 termos de uma PA é 3, e o produto é −15. Determine a razão *r* e escreva essa PA.
$r = \pm 4$; $(-3, 1, 5)$ ou $(5, 1, -3)$

21. Dada a PA $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ determine $a_{10} - a_4$ quando:

a) $a_3 = 5$ e $r = 4$ 24

b) $a_{15} = 6$ e $r = -3$ −18

22. Calcule o valor de *x* para que a sequência $(\dots, 3x + 13, 6x + 23, 1 - 7x, \dots)$ seja uma PA. $x = -2$

23. Determine o valor de *x* e *y* para que cada sequência seja uma PA.

a) $\left(2, x, \frac{2}{3}, y, \dots\right)$ $x = \frac{4}{3}$; $y = 0$

b) $\left(a^2 + x, (a-b)^2, (a+b)^2 + 6y, (a-3b)^2 - 8x, \dots\right)$
$x = b^2$; $y = -ab$

24. Considere a PA (a_1, a_2, a_3) decrescente e de termos positivos. Sabendo que a soma de seus termos é 15 e $a_3 - a_1 = -1 - a_2$, verifique quais das afirmativas são verdadeiras. a; d

a) O 3º termo é divisor do 1º termo.

b) O 1º termo é um número primo.

c) A razão da PA é dada por $\frac{a_3}{2}$.

d) Nessa PA temos que $a_2 - 1 = \sqrt{a_1 \cdot a_3}$.

25. Cada letra indicada no esquema está associada a um número natural. Sabendo que em cada linha, diagonal e coluna deve-se obter uma PA, determine o valor de cada letra.

A	B	C	13
D	14	E	F
18	G	H	I
J	K	L	34

A = 4; B = 7;
C = 10; D = 11;
E = 17; F = 20;
G = 21; H = 24;
I = 27; J = 25;
K = 28; L = 31

A ordem dos termos de cada PA é dada pela disposição em que aparecem no esquema.

26. Determine o quociente entre a área e o perímetro do triângulo retângulo cujos lados formam uma PA de razão 2. 1

27. **Desafio**

Da PA $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ sabe-se que $20 < a_1 < 30$, que sua razão é 9 e que um de seus termos é 77. Nessas condições, qual é o valor de a_1? 23

28. Sejam *h*, *ℓ* e *c* a altura, a largura e o comprimento, respectivamente, do quarto de Antônio. Sabendo que, nessa ordem, essas dimensões formam uma progressão aritmética de razão 2 m e que a área do quarto é 35 m², determine *h*, *ℓ* e *c*.
h = 3 m; ℓ = 5 m; c = 7 m

Fórmula do termo geral de uma PA

Considere a PA $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots)$, infinita e de razão *r*. Como cada termo, a partir do segundo, pode ser obtido adicionando a razão *r* ao termo anterior, temos:

$$
\begin{aligned}
&a_1 = a_1 + 0r\\
&a_2 = a_1 + r\\
&a_3 = \underbrace{a_2}_{a_1+r} + r \Rightarrow a_3 = a_1 + 2r\\
&a_4 = \underbrace{a_3}_{a_1+2r} + r \Rightarrow a_4 = a_1 + 3r\\
&a_5 = \underbrace{a_4}_{a_1+3r} + r \Rightarrow a_5 = a_1 + 4r\\
&\vdots\\
&a_n = a_{n-1} + r \Rightarrow a_n = a_1 + (n-1)r\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Note que qualquer termo de uma PA pode ser escrito em função de a_1 e *r*. O termo de ordem *n* é igual a a_1 mais $(n-1)$ vezes a razão.

A fórmula do termo geral de uma PA é dada por:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

Nessa fórmula:

- a_n: enésimo termo
- a_1: primeiro termo
- n: ordem do termo
- r: razão

Atividades resolvidas

R5. Determine o 65º termo da PA $(-45, -52, -59, \ldots)$.

Resolução

Temos que $a_1 = -45$ e $r = -7$.

Determinamos a_{65} aplicando a fórmula do termo geral para $n = 65$.

$$a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow a_{65} = -45 + (65-1)\cdot(-7) = -45 - 448 \Rightarrow a_{65} = -493$$

R6. Qual é o número de termos da PA $(9, 13, 17, \ldots, 149)$?

Resolução

Temos que $a_1 = 9$, $r = 4$ e $a_n = 149$.

Obtemos a posição *n* do último termo da PA aplicando a fórmula do termo geral.

$$a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow 149 = 9 + (n-1)\cdot 4 \Rightarrow 140 = 4n - 4 \Rightarrow 4n = 144 \Rightarrow n = 36$$

Portanto, a PA possui 36 termos.

R7. Quantos múltiplos de 5 existem entre os números 12 e 71?

Resolução

Os múltiplos de 5 no intervalo dado formam a sequência $(15, 20, 25, \ldots, 70)$. Note que a sequência é uma PA tal que $a_1 = 15$, $r = 5$ e $a_n = 70$.

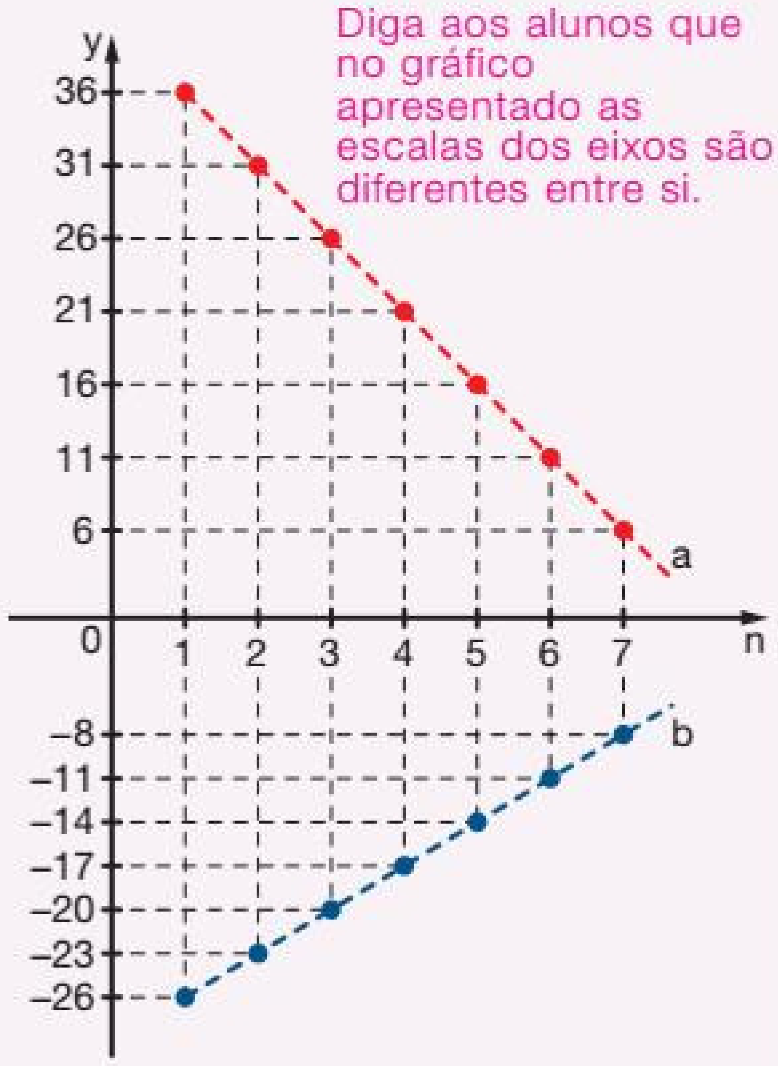
Utilizando a fórmula do termo geral da PA, obtemos a posição *n* do último termo.

$$a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow 70 = 15 + (n-1)\cdot 5 \Rightarrow 55 = 5n - 5 \Rightarrow 5n = 60 \Rightarrow n = 12$$

Portanto, existem 12 múltiplos de 5 entre 12 e 71.

Os múltiplos de 5 entre 12 e 71 são: 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65 e 70.

R8. Observe a representação gráfica das progressões aritméticas $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ e $(b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots)$.



Diga aos alunos que no gráfico apresentado as escalas dos eixos são diferentes entre si.

> Uma PA é uma **função afim** $a(n) = a_1 + (n-1)r$ de domínio $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n, \ldots\}$. Assim, a representação gráfica dos termos da PA é formada pelos pares ordenados (n, a_n).

a) Classifique cada PA em crescente, decrescente ou constante.

b) Determine o 1º termo negativo da PA $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$.

c) Determine o 1º termo positivo da PA $(b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots)$.

d) A partir de qual termo $b_n > a_n$?

Resolução

a) Sejam r_a e r_b as razões de $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ e $(b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots)$, respectivamente. Observando o gráfico, temos:

$$r_a = a_2 - a_1 = 31 - 36 = -5$$

$$r_b = b_2 - b_1 = -23 - (-26) = 3$$

Como $r_a < 0$ e $r_b > 0$, então $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ é decrescente e $(b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots)$ é crescente.

> Note que o coeficiente angular de cada função é igual à razão da PA. Logo a função:
> - $a(n)$ é decrescente, pois $r_a < 0$
> - $b(n)$ é crescente, pois $r_b > 0$

b) Inicialmente, escrevemos a fórmula do termo geral da PA.

$$a_n = a_1 + (n-1)r_a \Rightarrow a_n = 36 + (n-1)\cdot(-5) \Rightarrow a_n = 41 - 5n$$

Em seguida, determinamos a posição do primeiro termo, tal que $a_n < 0$.

$$a_n < 0 \Rightarrow 41 - 5n < 0 \Rightarrow -5n < -41 \Rightarrow n > \frac{41}{5} \Rightarrow n > 8{,}2$$

O menor inteiro que satisfaz a condição é $n = 9$. Segue que:

$$a_9 = 41 - 5\cdot 9 = -4$$

Portanto, $a_9 = -4$ é o primeiro termo negativo da PA $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$.

c) Temos que:

$$b_n = b_1 + (n-1)r_b \Rightarrow b_n = -26 + (n-1)\cdot 3 \Rightarrow b_n = 3n - 29$$

Logo, para $b_n > 0$, segue:

$$b_n > 0 \Rightarrow 3n - 29 > 0 \Rightarrow 3n > 29 \Rightarrow n > \frac{29}{3} \Rightarrow n > 9{,}666\ldots$$

O menor inteiro que satisfaz a condição é $n = 10$.

$$b_{10} = 3\cdot 10 - 29 = 1$$

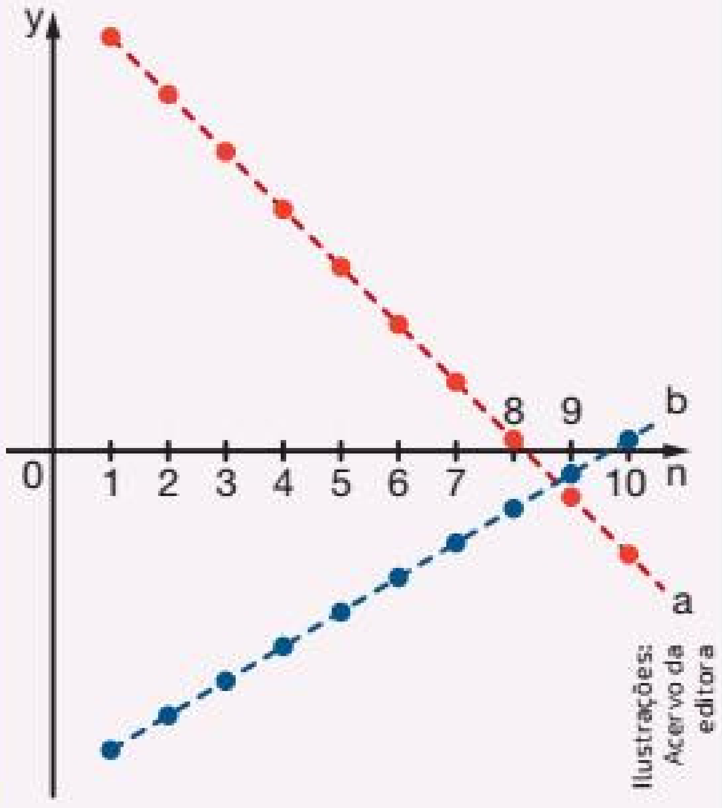
Portanto, $b_{10} = 1$ é o primeiro termo positivo da PA $(b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots)$.

d) Resolvendo a inequação $b_n > a_n$, temos:

$$b_n > a_n \Rightarrow 3n - 29 > 41 - 5n \Rightarrow 8n > 70 \Rightarrow n > \frac{70}{8} \Rightarrow n > 8{,}75$$

O menor inteiro que satisfaz a condição é $n = 9$. Portanto, a partir do 9º termo, $b_n > a_n$.

> Representando mais alguns termos da PA, podemos observar no gráfico as conclusões dos itens **b**, **c** e **d**.



Ilustrações: Acervo da editora

R9. Interpole nove meios aritméticos entre −7 e 23.

Resolução

Inicialmente, devemos considerar a PA tal que $a_1 = -7$ e $a_{11} = 23$, conforme o esquema a seguir.

$$\underbrace{-7}_{a_1}, \underbrace{\underset{a_2}{\_\_}, \underset{a_3}{\_\_}, \underset{a_4}{\_\_}, \underset{a_5}{\_\_}, \underset{a_6}{\_\_}, \underset{a_7}{\_\_}, \underset{a_8}{\_\_}, \underset{a_9}{\_\_}, \underset{a_{10}}{\_\_}}_{\text{9 meios aritméticos}}, \underbrace{23}_{a_{11}}$$

Utilizando a fórmula do termo geral da PA, calculamos a razão *r*:

$$a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow a_{11} = a_1 + (11-1)r \Rightarrow 23 = -7 + 10r \Rightarrow 10r = 30 \Rightarrow r = 3$$

Portanto, a sequência é $(-7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23)$.

Interpolar meios aritméticos significa colocar números reais entre dois números dados, de forma que a sequência formada por todos esses números seja uma PA.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

29. Determine:

a) o 20º termo da PA $(2, 7, ...)$ 97

b) o 7º termo da PA $(1, -1, ...)$ −11

c) o 100º termo da PA em que $a_1 = 3$ e $r = 0$ 3

d) a quantidade de termos da PA $(5, 8, ..., 92)$ 30

e) a razão da PA em que $a_1 = 17$ e $a_{32} = -45$ −2

30. Obtenha os três primeiros termos da PA na qual $a_{12} = 7$ e $a_{14} = -9$. 95, 87, 79

31. Considere todos os números inteiros compreendidos entre 101 e 1 001.

a) Quantos desses números são múltiplos de 15? 60 números

b) E quantos são divisíveis por 3 ou por 5? 420 números

32. O primeiro termo positivo da PA $(-73, -67, -61, ...)$ é: d

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

33. Carlos comprou algumas mudas de laranjeira, as quais serão plantadas em uma única fileira, alinhadas com uma fonte de água, da qual a primeira muda ficará a 30 m de distância. Considerando que a distância entre duas mudas consecutivas será de 4 m e que a última muda da fileira ficará a 86 m da fonte de água, responda:

a) Quantas mudas de laranjeira serão plantadas? 15 mudas

b) Se forem utilizados 5 L de água para regar cada muda e considerando que Carlos consiga carregar no máximo 20 L de cada vez, quantas vezes, no mínimo, ele irá até a fonte de água? 4 vezes

34. Determine o 100º número natural que ao ser dividido por 7 deixa resto igual a 5. 698

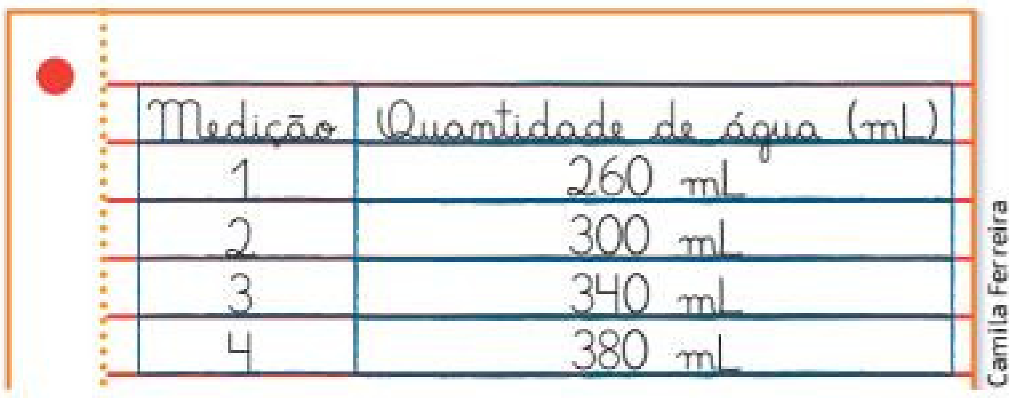
35. Em uma PA em que $a_1 = 2$, $a_n = 3$ e $r = \frac{1}{10}$, qual é o valor de *n*? 11

36. Qual dos termos da PA $(19{,}5; 18; 16{,}5; ...)$ é nulo? a_{14}

37. Quantos números pares existem entre 3 e 3 001? 1 499 números

38. **Desafio**

Mônica colocou um recipiente graduado vazio, com capacidade para 1,5 L, a fim de acumular a água que goteja de uma torneira. Após algum tempo, ela observa que a água acumulada no recipiente era de 260 mL. A partir daí, Mônica registra a quantidade de água no recipiente a cada 10 min, conforme as anotações a seguir.



Medição	Quantidade de água (mL)
1	260 mL
2	300 mL
3	340 mL
4	380 mL

Camila Ferreira

Considerando que seja mantido o ritmo de gotejamento, resolva as questões.

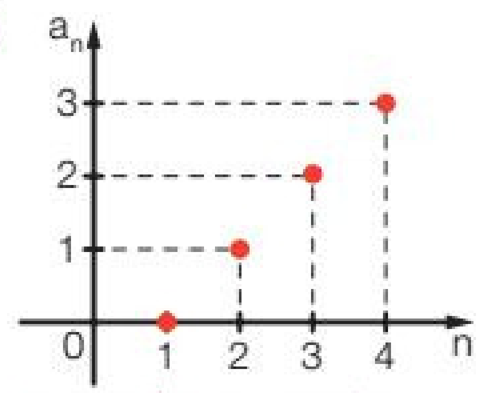
a) Estime quantos mililitros de água haverá no recipiente 2 h após Mônica realizar a primeira medição. Depois, realize os cálculos e confirme sua resposta. 700 mL

b) Quantos minutos se passou desde que Mônica colocou o recipiente abaixo da torneira até realizar a primeira medição? 65 min

c) A partir do momento em que Mônica colocou o recipiente abaixo da torneira, quantos minutos foram necessários para que ele ficasse completamente cheio? 375 min

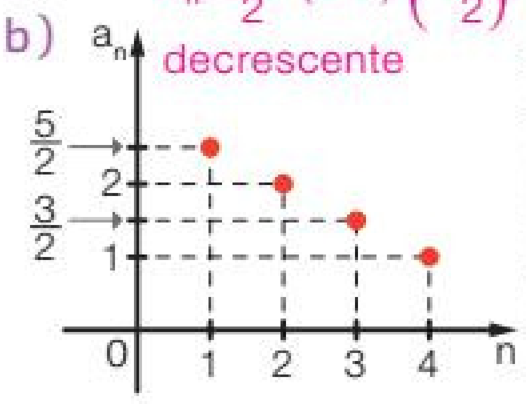
39. Determine a fórmula do termo geral e classifique cada PA representada graficamente em crescente, decrescente ou constante.

a)



$a_n = n - 1$; crescente

b)



$a_n = \frac{5}{2} + (n-1)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$; decrescente

Ilustrações: Acervo da editora

40. (Enem-MEC) O ciclo de atividade magnética do Sol tem um período de 11 anos. O início do primeiro ciclo registrado se deu no começo de 1755 e se estendeu até o final de 1765. Desde então, todos os ciclos de atividade magnética do Sol têm sido registrados.

Disponível em: http://g1.globo.com. Acesso em: 27 fev. 2013.

No ano de 2101, o Sol estará no ciclo de atividade magnética de número: a

a) 32 b) 34 c) 33 d) 35 e) 31

41. (OBMEP) Os termos de uma sequência são formados usando-se apenas os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5, como segue:

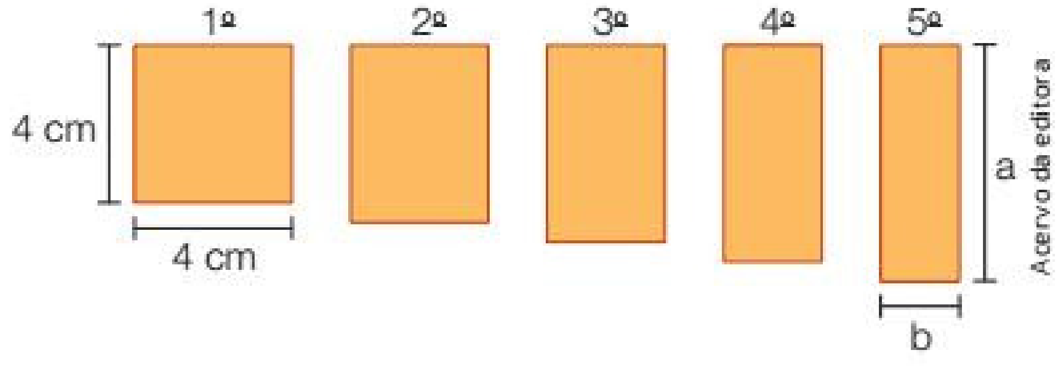
- 1º termo: 123454321
- 2º termo: 12345432123454321
- 3º termo: 1234543212345432123454321
  e assim por diante.

Quantas vezes o algarismo 4 aparece no termo que tem 8 001 algarismos? c

a) 1000
b) 1001
c) 2 000
d) 2 001
e) 4 000

Observe quantas vezes o algarismo 4 aparece em cada termo.

42. A sequência abaixo é formada por um quadrado de 4 cm de lado seguido de 4 retângulos. As medidas das bases desses quadriláteros decrescem e as das alturas crescem, em razões constantes *x* e *y*, respectivamente. Sabendo que todos os quadriláteros têm o mesmo perímetro e que no 5º quadrilátero $\frac{a}{b}=3$, calcule a área do 3º quadrilátero. 15 cm²



43. O computador de Marcela foi comprado em 1º de março de 2016 e sofreu depreciação de R$ 25,00 a cada mês. Sabendo que em 1º de março de 2018 esse computador foi avaliado em R$ 800,00, escreva a fórmula do termo geral de uma PA que expresse seu valor a cada mês. Depois, determine o valor desse computador em 1º de julho de 2016. $a_n=1\,400+(n-1)\cdot(-25)$; R$ 1 300,00

44. Um professor de Matemática pediu aos alunos da sala que escrevessem uma PA. Duas progressões aritméticas escritas por eles foram $(2, 8, 14, \ldots, 458)$ e $(6, 10, 14, \ldots, 386)$. Quantos termos em comum possuem essas progressões? 32 termos

45. Um sinalizador eletrônico contém três lâmpadas nas cores vermelha, azul e branca. Essas lâmpadas piscam respectivamente a cada 4, 3 e 7 segundos.

Uma pessoa observa que exatamente às 13 h as três lâmpadas piscaram juntas. Responda:

a) Quais lâmpadas piscaram juntas às 13h3min24s? E seis segundos depois? vermelha e azul; azul e branca

b) Até as 14 h, quantas vezes a lâmpada branca terá piscado? 514 vezes

c) Escreva os horários exatos das três últimas piscadas da lâmpada branca até as 14 h. 13h59min58s; 13h59min51s; 13h59min44s

d) A lâmpada azul piscou junto com a branca em algum dos horários que você determinou no item anterior? Qual? Sim, às 13h59min51s.

e) A lâmpada vermelha piscou junto com a branca em algum dos horários determinados no item **c**? Qual? Sim, às 13h59min44s.

46. **Desafio**

Considere a sequência formada por todos os naturais não nulos menores ou iguais a 201, exceto os múltiplos de 4 ou de 9. Com relação a essa sequência, responda:

a) Qual é o total de termos? 134 termos

b) Quantos termos estão compreendidos entre 20 e 60? 27 termos

c) Do total de termos, quantos são quadrados perfeitos? 5 termos Se necessário, lembre aos alunos o que é um número quadrado perfeito.

47. Existem 6 praças de pedágio entre as cidades **X** e **Y**, que distam 420 km uma da outra. As praças de pedágio estão à mesma distância uma da outra, e esta distância também é a mesma entre as cidades **X** e **Y** e suas respectivas praças de pedágio mais próximas. Considerando as informações, calcule a distância percorrida por um automóvel que se desloca da 2ª à 5ª praça de pedágio. 180 km

Faça um esquema para resolver essa atividade.

48. Determine a razão da progressão aritmética que se obtém inserindo 5 termos entre 3 e 27. 4

49. Interpole 11 meios aritméticos entre −16 e 20 e calcule o valor de $a_5+a_6+a_8$. 0

50. Deseja-se interpolar 5 meios aritméticos entre cada termo da PA $(1, 3, 5)$.

a) Determine a razão da PA obtida. $\frac{1}{3}$

b) Qual é a quantidade de termos dessa PA? 13 termos

c) Quantos e quais são os termos dessa nova PA que pertencem a $\mathbb{N}$? 5 termos: 1, 2, 3, 4 e 5

PA e função afim

Sabemos que as sequências numéricas são funções de domínio $\mathbb{N}^*$ e contradomínio um conjunto numérico qualquer não vazio, e que as progressões aritméticas são sequências numéricas nas quais a diferença entre um termo (a partir do 2º) e seu antecessor é uma constante *r* chamada razão da progressão.

Considere a PA $(-2, 0, 2, 4, 6, \ldots)$ de razão 2 e a função afim $f(x) = 3x + 5$. Podemos verificar que a sequência $(f(-2), f(0), f(2), f(4), f(6), \ldots)$ também é uma PA. Observe:

$$\begin{aligned} f(-2) &= 3 \cdot (-2) + 5 = -1 \\ f(0) &= 3 \cdot 0 + 5 = 5 \\ f(2) &= 3 \cdot 2 + 5 = 11 \\ f(4) &= 3 \cdot 4 + 5 = 17 \\ f(6) &= 3 \cdot 6 + 5 = 23 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Note que $(-1, 5, 11, 17, 23, \ldots)$ é uma PA de razão 6. A razão dessa nova PA é igual ao produto entre o coeficiente *a* $(a = 3)$ da função afim e a razão da PA anterior $(r = 2)$, ou seja, $6 = 3 \cdot 2$.

> Considerando a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n, \ldots$ elementos de uma PA de razão *r*, *f* será uma função afim, definida por $f(x) = ax + b$, se, e somente se, $f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4), \ldots, f(x_n), \ldots$ for uma PA de razão $a \cdot r$.

Exemplos

- Sejam a função afim $f(x) = 4x - 2$ e a PA $(-6, -1, 4, 9, 14, 19, \ldots)$ de razão 5. A sequência $(f(-6), f(-1), f(4), f(9), f(14), f(19), \ldots)$, dada por $(-26, -6, 14, 34, 54, 74, \ldots)$, é uma PA de razão $20 = 4 \cdot 5$.
- Sejam a função afim $f(x) = \frac{2}{3}x + 1$ e a PA $(12, 6, 0, -6, -12, -18, \ldots)$ de razão -6. A sequência $(f(12), f(6), f(0), f(-6), f(-12), f(-18), \ldots)$, dada por $(9, 5, 1, -3, -7, -11, \ldots)$, é uma PA de razão $-4 = \frac{2}{3} \cdot (-6)$.

PA e função quadrática

Considere a PA $(1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots)$ de razão 1 e a função quadrática $f(x) = 2x^2$. Nesse caso, a sequência $(f(1), f(2), f(3), f(4), f(5), f(6), \ldots)$ não é uma PA, ou seja, a diferença entre termos consecutivos não é constante. Observe:

$$\begin{aligned} f(2) - f(1) &= 8 - 2 = 6 \\ f(3) - f(2) &= 18 - 8 = 10 \\ f(4) - f(3) &= 32 - 18 = 14 \\ f(5) - f(4) &= 50 - 32 = 18 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Porém, a sequência $(6, 10, 14, 18, \ldots)$, formada por essas diferenças, é uma PA, nesse caso, de razão 4.

A função $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ será uma função quadrática, definida por $f(x)=ax^2+bx+c$ com $a\neq 0$, se, e somente se, para toda PA $(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n, \ldots)$ de razão não nula *r* as diferenças $f(x_2)-f(x_1), f(x_3)-f(x_2), f(x_4)-f(x_3), \ldots, f(x_n)-f(x_{n-1}), \ldots$ formam uma nova PA.
A razão dessa nova PA será $2ar^2$.

Exemplos

- Sejam a função quadrática $f(x)=-x^2+2x-2$ e a PA $(3, 5, 7, 9, 11, 13, \ldots)$ de razão 2. A sequência $(f(5)-f(3), f(7)-f(5), f(9)-f(7), f(11)-f(9), f(13)-f(11), \ldots)$, dada por $(-12, -20, -28, -36, -44, \ldots)$, é uma PA de razão $-8=2\cdot(-1)\cdot 2^2$.
- Sejam a função quadrática $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+4x$ e a PA $(-12, -6, 0, 6, 12, 18, \ldots)$ de razão 6. A sequência $(f(-6)-f(-12), f(0)-f(-6), f(6)-f(0), f(12)-f(6), f(18)-f(12), \ldots)$, dada por $(78, 42, 6, -30, -66, \ldots)$, é uma PA de razão $-36=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 6^2$.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

51. A função $f(x)=2x-4$ determina os termos de uma PA a partir da PA $(-4, -1, 2, 5, 8, 11, 14, 17)$. Quanto a essa nova PA, determine seus termos e sua razão. $(-12, -6, 0, 6, 12, 18, 24, 30)$; 6

52. Em uma promoção, certa concessionária vendeu 35 automóveis em 5 domingos de feirão. A quantidade de veículos comercializados em cada feirão forma uma PA de razão *r*. O número de pessoas que visitou o feirão em cada domingo é dado pela função afim $f(x)=8x-3$, em que *x* é a quantidade de veículos comercializados em cada domingo, e as imagens de *f* formam outra PA.


Kekyalyaynen/Shutterstock.com

Carros em uma concessionária.

a) Se no 1º domingo de feirão a concessionária vendeu 3 veículos, determine a quantidade de veículos que foi vendida a mais no 2º domingo. O que esse valor representa em relação à PA de razão *r*? 2 veículos; razão

b) Escreva os termos da PA que representa a quantidade de veículos vendidos. $(3, 5, 7, 9, 11)$

c) Determine a sequência da quantidade de visitantes nos 5 domingos. $(21, 37, 53, 69, 85)$

53. Calcule o valor de *a* para o qual a função $f(x)=ax+7$ determina uma PA de razão -10, a partir da PA $(-8, -3, 2, 7, 12, 17, 22, 27, \ldots)$. $a=-2$

54. Escreva a lei da função afim que determina a PA $(-26, -5, 16, \ldots)$ a partir da PA $(10, 3, -4, \ldots)$.
$f(x)=-3x+4$

55. Sabendo que a sequência (x_1, x_2, x_3, x_4) é uma PA, verifique quais das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ a seguir pode ser quadrática. f; h

a) $f(x_1)=2, f(x_2)=7, f(x_3)=33$ e $f(x_4)=80$

b) $g(x_1)=6, g(x_2)=7, g(x_3)=12,$ e $g(x_4)=15$

c) $h(x_1)=-15, h(x_2)=-4, h(x_3)=-15$ e $h(x_4)=-48$

d) $m(x_1)=-2, m(x_2)=-5, m(x_3)=94$ e $m(x_4)=355$

56. Sejam a PA $(f(x_2)-f(x_1), f(x_3)-f(x_2), f(x_4)-f(x_3), \ldots)$ de razão 64 e $f(x)=2x^2-3$ uma função quadrática. Determine a razão da PA $(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots)$.
4 ou -4

57. Considere a PA (x_1, x_2, x_3) de razão 7 e $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ uma função quadrática definida por $f(x)=ax^2+bx+c$, de modo que $f(x_1)=-4$, $f(x_2)=3$ e $f(x_3)=-88$. A função *f* possui ponto de máximo ou de mínimo? Justifique. Máximo, pois $a=-1<0$.

58. Verifique numericamente que a afirmação a seguir é verdadeira. Justifique sua resposta.
Respostas nas **Orientações para o professor**.

> Se $f(x)=ax^2+bx+c$ for uma função quadrática e $(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n, \ldots)$ for uma PA de razão *r*, então a razão da PA $(f(x_2)-f(x_1), f(x_3)-f(x_2), f(x_4)-f(x_3), \ldots, f(x_n)-f(x_{n-1}), \ldots)$ será dada por $2ar^2$.

Soma dos *n* primeiros termos de uma PA

Voltemos a analisar a situação apresentada no início deste capítulo, relacionada à quantidade de poltronas de certo teatro. Lembre-se de que as poltronas da plateia são dispostas em 14 filas, sendo que a 1ª fila possui 20 poltronas; a 2ª fila, 24 poltronas; a 3ª fila, 28 poltronas; e assim por diante, formando a seguinte PA de razão 4:

$$(20, 24, 28, 32, \ldots, 60, 64, 68, 72)$$

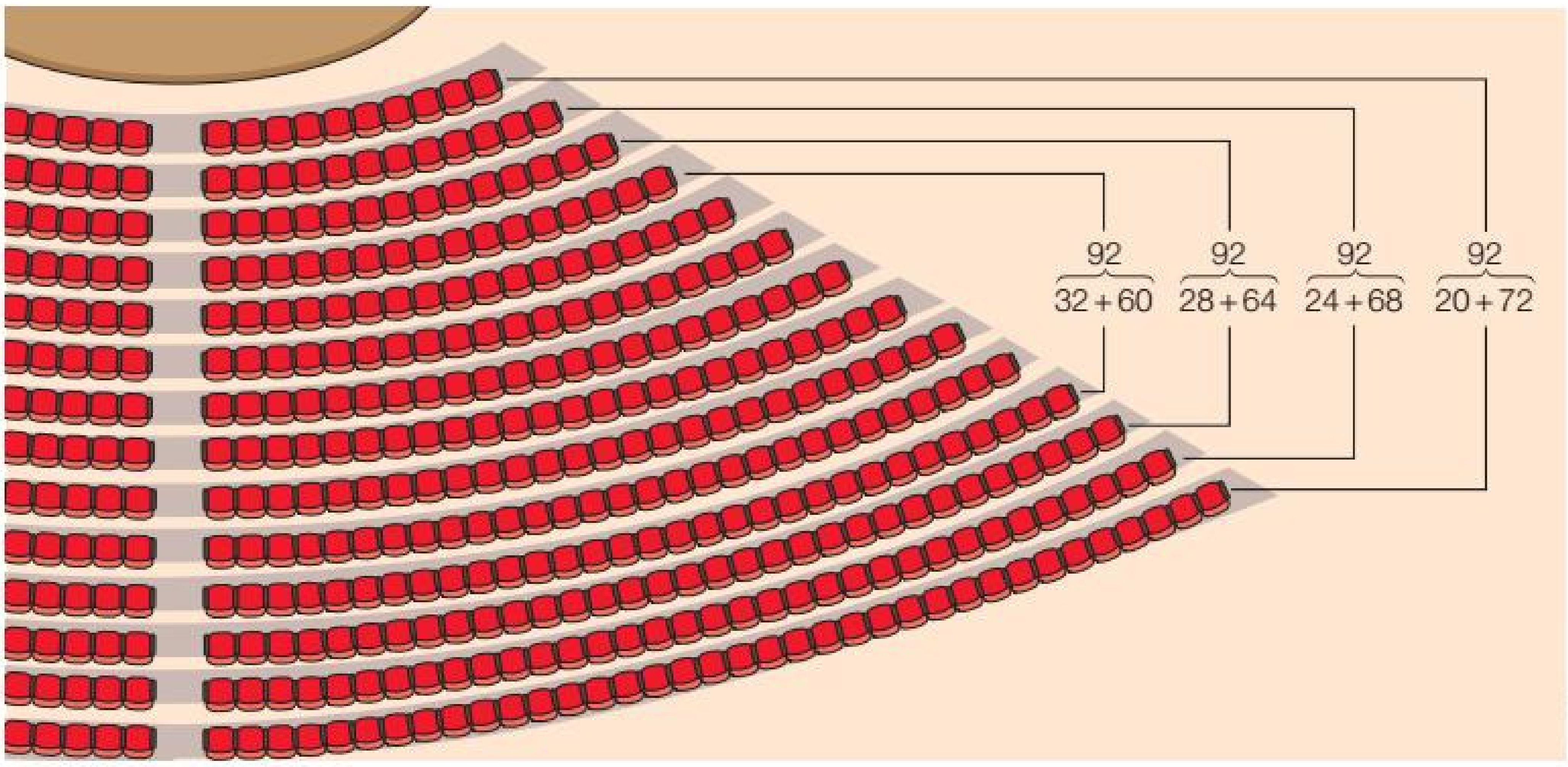
Em uma PA finita, a_1 e a_n são chamados de **termos extremos**; os termos a_2 e a_{n-1}, a_3 e a_{n-2}, a_4 e a_{n-3}, e assim por diante, são chamados de **termos equidistantes** dos extremos.

Podemos calcular a quantidade total de poltronas desse teatro realizando a adição a seguir. Com isso, obteremos a soma dos termos de uma PA.

$$20+24+28+32+\ldots+60+64+68+72$$

De acordo com a quantidade de termos da PA, esse cálculo pode ser muito trabalhoso, se realizado termo a termo. Outra maneira de obter esse resultado é por meio de uma fórmula.

Em uma PA, adicionando os termos extremos ou os termos equidistantes dos extremos, obtemos o mesmo resultado. Observe:



Ronaldo Lucena

Em uma PA finita, a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos.

Indicamos a soma dos *n* primeiros termos de uma PA por S_n. Escrevendo essa soma de duas maneiras, temos:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \text{ (I)}$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1 \text{ (II)}$$

Adicionando **I** e **II** membro a membro, temos:

$$\begin{array}{rl} + & S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \\ & S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1 \\ \hline & 2S_n = \underbrace{(a_1+a_n) + \underbrace{(a_2+a_{n-1})}_{a_1+a_n} + \underbrace{(a_3+a_{n-2})}_{a_1+a_n} + \ldots + \underbrace{(a_{n-2}+a_3)}_{a_1+a_n} + \underbrace{(a_{n-1}+a_2)}_{a_1+a_n} + (a_n+a_1)}_{n \text{ vezes}} \end{array}$$

Note que existem *n* parcelas $(a_1 + a_n)$, então podemos escrever essa igualdade da seguinte forma:

$$2S_n = n(a_1 + a_n) \Rightarrow S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

A fórmula que permite calcular a soma dos *n* primeiros termos de uma PA é dada por:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

Nessa fórmula:

- S_n: soma dos *n* primeiros termos
- a_1: primeiro termo
- a_n: enésimo termo
- n: quantidade de termos

Exemplo

Na PA $(20, 24, 28, 32, \ldots, 68, 72)$, apresentada na página anterior e no início deste capítulo, $a_n = 72$, $a_1 = 20$ e $n = 14$. Calculando S_n, temos:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \Rightarrow S_{20} = \frac{14 \cdot (20 + 72)}{2} = 644$$

Assim, a quantidade de poltronas do teatro é 644.

Atividades resolvidas

R10. Calcule a soma dos 15 primeiros termos da PA $(-3, 4, 11, \ldots)$.

Resolução

Temos que:

- $a_1 = -3$
- $r = 4 - (-3) = 7$
- $a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow a_{15} = -3 + (15-1) \cdot (7) = 95$

Substituindo os valores na fórmula da soma dos *n* primeiros termos, segue que:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \Rightarrow S_{15} = \frac{15 \cdot (-3 + 95)}{2} = \frac{15 \cdot 92}{2} = \boxed{690}$$

R11. Determine o valor do produto $P = (-1)^1 \cdot (-1)^2 \cdot (-1)^3 \cdot \ldots \cdot (-1)^{50}$.

Resolução

Podemos escrever o produto da seguinte forma:

$$P = (-1)^1 \cdot (-1)^2 \cdot (-1)^3 \cdot \ldots \cdot (-1)^{50} = (-1)^{1+2+3+\ldots+50}$$

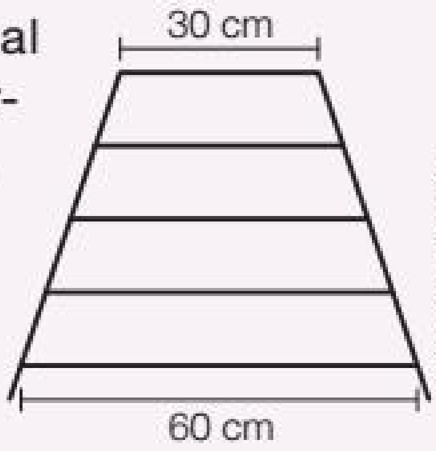
Note que os termos da soma $(1+2+3+\ldots+50)$ formam uma PA tal que $a_1 = 1$, $r = 1$ e $a_{50} = 50$. Logo:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \Rightarrow S_{50} = \frac{50(1+50)}{2} = 1\,275$$

Portanto, $P = (-1)^{1+2+3+\ldots+50} = (-1)^{1\,275} = -1$.

Lembre-se de que $(-1)^n = \begin{cases} 1, \text{ se } n \text{ é par} \\ -1, \text{ se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$.

R12. (Enem-MEC) Um marceneiro deseja construir uma escada trapezoidal com 5 degraus, de forma que o mais baixo e o mais alto tenham larguras respectivamente iguais a 60 cm e a 30 cm, conforme a figura.



Acervo da editora

Os degraus serão obtidos cortando-se uma peça linear de madeira cujo comprimento mínimo, em cm, deve ser:

a) 144 b) 180 c) 210 d) 225 e) 240

Resolução

As medidas dos cinco degraus da escada, em centímetros, formam uma progressão aritmética, em que $a_1 = 30$ e $a_5 = 60$.

Assim, a soma desta PA será o comprimento mínimo linear de madeira, em centímetros, necessário para construir os degraus. Temos que:

$$S = \frac{(a_1 + a_5) \cdot 5}{2} = \frac{(30 + 60) \cdot 5}{2} = 225$$

Desse modo, o comprimento mínimo deve ser de 225 cm. Portanto, a alternativa correta é a **d**.

Anote as respostas no caderno.

59. Leia o texto a seguir sobre o alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855), considerado o maior matemático do século XIX.

Carl Friedrich Gauss

Autor desconhecido. Séc. XIX. Gravura. Smithsonian Libraries, Washington (EUA)

> [...] Há uma história segundo a qual o professor de Carl na escola pública, quando ele tinha dez anos de idade, teria passado à classe, para mantê-la ocupada, a tarefa de somar os números de 1 a 100. Quase que imediatamente Carl colocou sua lousa sobre a escrivaninha do irritado professor. Quando as lousas foram finalmente viradas, o professor surpreso verificou que Carl tinha sido o único a acertar a resposta, 5 050, mas sem fazê-la acompanhar de nenhum cálculo. Carl havia mentalmente calculado a soma da progressão aritmética 1+2+3+...+98+99+100 observando que 100+1=101, 99+2=101, 98+3=101 e assim por diante com os cinquenta pares possíveis dessa maneira, sendo a soma portanto $50 \cdot 101 = 5\,050$. [...]

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução Hygino H. Domingues. Campinas: Ed. da Unicamp, 2004. p. 519.

De maneira semelhante a Gauss, realize a soma dos números naturais de 1 a 1 000. Depois, converse com um colega sobre o feito de Gauss e os cálculos que vocês realizaram.
500 500; Resposta pessoal. *

60. Calcule a soma dos primeiros:

a) 15 termos da PA (5, 9, 13, ...) 495

b) 36 termos da PA (17, 11, 5, ...) −3 168

61. Determine a soma dos termos de cada PA.

a) (3, 11, 19, ..., 115) 885

b) (86, 83, 80, ..., 35) 1 089

c) (−8, −5, −2, ..., 22) 77

62. A soma dos 25 termos iniciais de uma PA é 225. Calcule o 18º termo dessa progressão sabendo que a razão é 4. 29

63. Na PA $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_7)$, de razão −7, a soma de todos os termos é 0. Determine o valor a_1. 21

64. Sabendo que o 21º termo de uma PA é 32 e sua razão equivale a 5% do 1º termo, verifique qual das afirmativas é verdadeira. a

a) O 1º termo é um quadrado perfeito.

b) A soma dos 11 primeiros termos é um quadrado perfeito.

c) a_{44} é maior que 550.

65. Determine o valor de *x* na equação:

a) $(x+1)+(x+2)+\ldots+(x+n)+\ldots+$
$+(x+100)=7\,450$ $x=24$

b) $(3x+2)+(3x+5)+\ldots+(3x+3n-1)+\ldots+$
$+(3x+59)=630$ $x=\frac{1}{3}$

66. (Enem-MEC) As projeções para a produção de arroz no período de 2012-2021, em uma determinada região produtora, apontam para uma perspectiva de crescimento constante da produção anual. O quadro apresenta a quantidade de arroz, em toneladas, que será produzida nos primeiros anos desse período, de acordo com essa projeção.

Ano	Projeção da produção (t)
2012	50,25
2013	51,50
2014	52,75
2015	54,00

A quantidade total de arroz, em toneladas, que deverá ser produzida no período de 2012 a 2021 será de: d

a) 497,25
b) 500,85
c) 502,87
d) 558,75
e) 563,25

67. Qual é o valor do produto
$(a)\cdot(ab)\cdot(ab^2)\cdot(ab^3)\cdot(ab^4)\cdot\ldots\cdot(ab^{n-1})$? $a^n \cdot b^{\frac{n(n-1)}{2}}$

68. Observe os esquemas.

I) 2	II) 1
2+4=6	1+3=4
2+4+6=12	1+3+5=9
2+4+6+8=20	1+3+5+7=16
2+4+6+8+10=30	1+3+5+7+9=25
⋮	⋮

a) A sequência (2, 6, 12, 20, 30, ...) é uma PA? E a sequência (1, 4, 9, 16, 25, ...)? Justifique.
não; não; Ambas não possuem razões constantes.

b) Determine a fórmula do termo geral das sequências citadas no item **a**. $n(n+1)$; n^2

c) Determine o 20º termo de ambas as sequências e explique o que esses termos representam.
Resposta no final do livro.

69. Determine a soma dos 50 primeiros termos de uma PA sabendo que a soma dos 18 primeiros termos é 540 e a soma dos 30 primeiros termos também é 540. −100

70. Considere a soma dos *n* primeiros termos da PA (47, 41, 35, ...). Qual é o menor valor de *n* para que essa soma seja negativa? 17

*Converse com os alunos sobre as dificuldades na execução da atividade que supostamente o professor de Gauss propôs, uma vez que naquela época não havia disponíveis equipamentos eletrônicos de cálculo, como computadores e calculadoras.

Contexto Colmeia

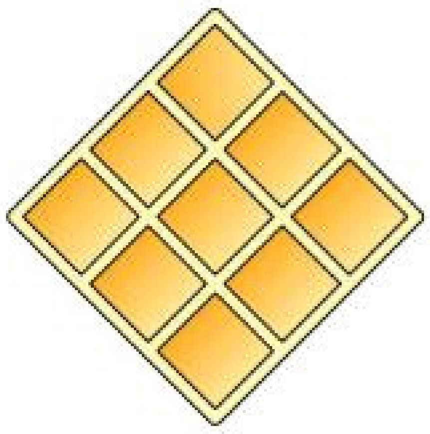
Entomólogo: profissional especialista no estudo dos insetos.

71. As abelhas são insetos cujo comportamento peculiar motiva estudos não apenas de **entomólogos** ou biólogos, mas também de outros profissionais. A construção da colmeia, por exemplo, desperta a curiosidade de profissionais da área de Matemática. A forma hexagonal dos alvéolos que as abelhas constroem para depositar mel, por exemplo, é uma questão justificada matematicamente.

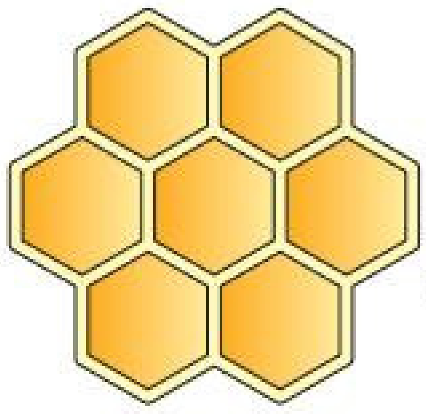
Para compreender o porquê da forma hexagonal, observe as opções regulares que as abelhas poderiam ter escolhido, a fim de compartilhar as paredes entre os alvéolos.

triangular

quadrangular



hexagonal



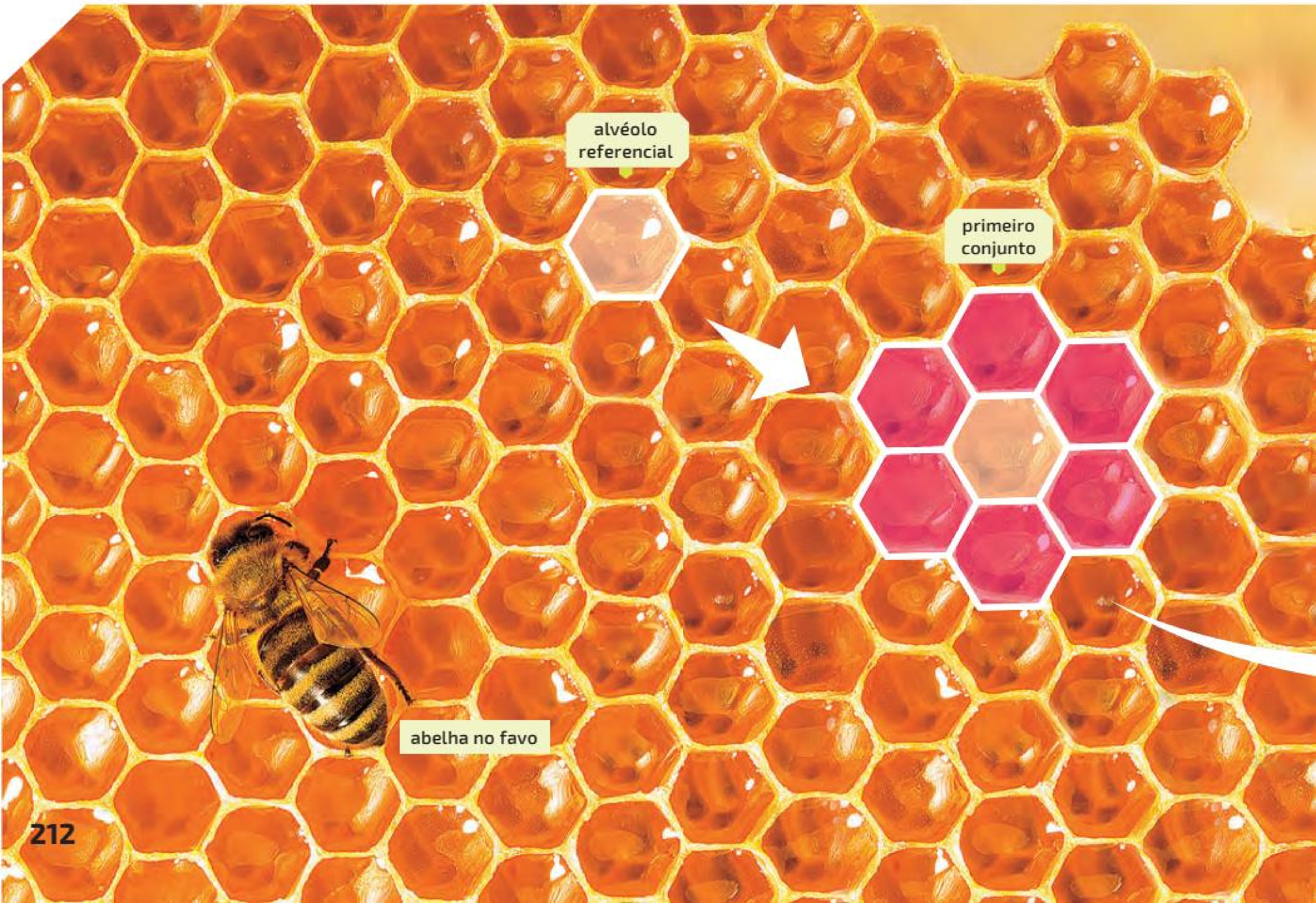
Mario Henrique

Informe aos alunos que o livro do 3º ano desta coleção contém mais informações sobre este assunto.

Fonte de pesquisa: <http://super.abril.com.br/ciencia/a-geometria-instintiva-das-abelhas>. Acesso em: 26 nov. 2015.

No entanto, cálculos mais elaborados demonstram que, utilizando a mesma quantidade de material, a forma hexagonal é a que proporciona a maior capacidade de armazenamento.

Outro fato matematicamente interessante, também relacionado à construção da colmeia, consiste na quantidade de alvéolos presentes em cada um dos sucessivos conjuntos construídos ao redor de um alvéolo qualquer, tomado como referência. Observe no esquema.



Fotomontagem de Eduardo C. S. formada pelas imagens StudioSmart/Shutterstock.com e Olena Brodetska/Shutterstock.com

De acordo com as informações apresentadas, resolva as questões.

a) Por que as abelhas utilizam a forma hexagonal na construção dos seus alvéolos? Para compartilhar as paredes entre os alvéolos e obter a maior capacidade de armazenamento.

b) Determine o número de alvéolos que formam:

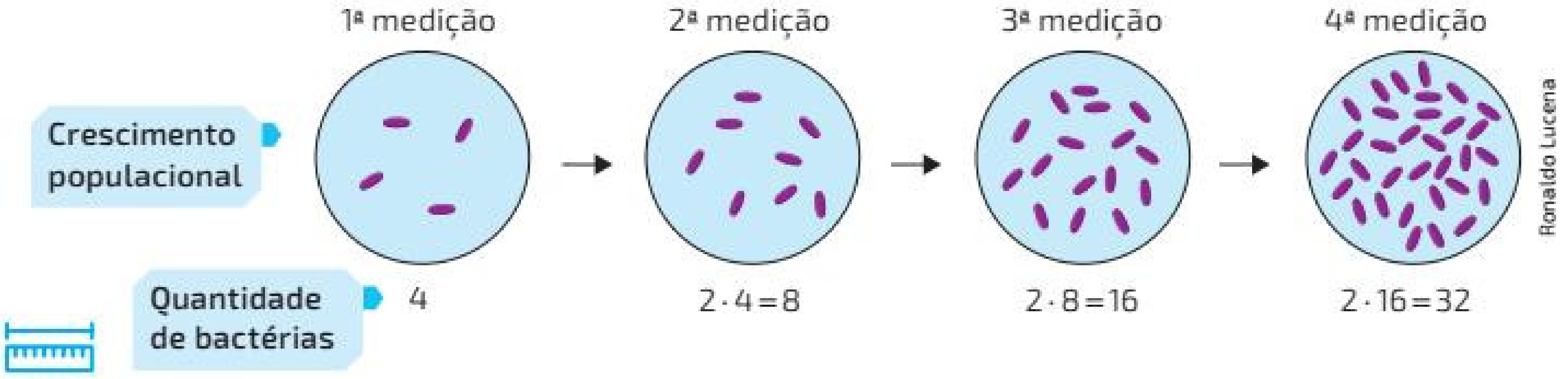
- o 1º conjunto 6
- o 2º conjunto 12
- o 3º conjunto 18
- o 4º conjunto 24

c) O número de alvéolos que compõem cada conjunto forma que tipo de sequência? Obtenha a fórmula do termo geral dessa sequência. Forma uma PA cuja fórmula do termo geral é $a_n = 6n$.

d) Qual é o total de alvéolos existentes em uma região da colmeia formada por 8 conjuntos consecutivos de alvéolos? 217 alvéolos

Progressão geométrica (PG)

Em certo experimento, foi observado que a quantidade de bactérias de uma amostra duplica a cada dia, conforme o esquema.



Ronaldo Lucena

Se multiplicarmos por 2 qualquer termo dessa sequência, obteremos o sucessor desse termo.

$\underbrace{4}_{a_1}\cdot\underbrace{2}_{\text{razão}}=\underbrace{8}_{a_2}$

$\underbrace{8}_{a_2}\cdot\underbrace{2}_{\text{razão}}=\underbrace{16}_{a_3}$

$\underbrace{16}_{a_3}\cdot\underbrace{2}_{\text{razão}}=\underbrace{32}_{a_4}$

$\vdots$

A quantidade de bactérias dessa amostra, a cada dia, pode ser representada por meio da sequência $(4, 8, 16, 32, 64, \ldots)$.

Note que, a partir do 2º termo, se dividirmos qualquer termo pelo seu antecedente, obteremos um mesmo quociente.

$$a_2 : a_1 = 8 : 4 = 2$$
$$a_3 : a_2 = 16 : 8 = 2$$
$$a_4 : a_3 = 32 : 16 = 2$$
$$a_5 : a_4 = 64 : 32 = 2$$
$$\vdots$$

Sequências com essa característica são chamadas de **progressões geométricas** (PG) e esse quociente constante entre os termos consecutivos é chamado de **razão** da PG.

Portanto, a razão dessa PG é igual a 2.

Chamamos de **progressão geométrica (PG)** toda sequência numérica em que, a partir do 2º termo, o quociente entre um termo e seu antecessor é igual a uma constante, chamada **razão** da progressão e indicada por *q*.

- Se $q=1$, então a PG é **constante**.
- Se $q>1$ e $a_1>0$ ou $0<q<1$ e $a_1<0$, então a PG é **crescente**.
- Se $q>1$ e $a_1<0$ ou $0<q<1$ e $a_1>0$, então a PG é **decrescente**.
- Se $q<0$, então a PG é **alternante**.

Exemplos

- Na PG $(5, 5, 5, 5, 5, \ldots)$, temos $q=1$. Como $q=1$, essa PG é constante.
- Na PG $\left(-8, -4, -2, -1, -\frac{1}{2}, \ldots\right)$, temos $q=\frac{1}{2}$ e $a_1=-8$. Como $0<q<1$ e $a_1<0$, essa PG é crescente.
- Na PG $(-3, -9, -27, -81, -243, \ldots)$, temos $q=3$ e $a_1=-3$. Como $q>1$ e $a_1<0$, essa PG é decrescente.
- Na PG $\left(\frac{1}{25}, -\frac{1}{5}, 1, -5, 25, \ldots\right)$, temos $q=-5$. Como $q<0$, essa PG é alternante.

Considerando a PG $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \ldots)$, temos:

$$a_2 = a_1 \cdot q \Rightarrow a_2 : a_1 = q$$
$$a_3 = a_2 \cdot q \Rightarrow a_3 : a_2 = q$$
$$a_4 = a_3 \cdot q \Rightarrow a_4 : a_3 = q$$
$$\vdots$$
$$a_n = a_{n-1} \cdot q \Rightarrow a_n : a_{n-1} = q$$
$$\vdots$$

Logo, $a_2 : a_1 = a_3 : a_2 = a_4 : a_3 = \ldots = a_n : a_{n-1} = \ldots = q$.

Também podemos escrever os termos de uma PG em função de outros termos e de sua razão. Exemplos:

- $a_3 = a_2 \cdot q$
- $a_4 = \underbrace{a_2 \cdot q}_{a_3} \cdot q \Rightarrow a_4 = a_2 \cdot q^2$
- $a_5 = a_1 \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q \Rightarrow a_5 = a_1 \cdot q^4$
- $a_9 = \frac{a_{10}}{q}$

O enésimo termo de uma PG em que o 1º termo é a_1 e a razão é *q* é dado pela fórmula de recorrência:

$$a_n = a_{n-1} \cdot q, \text{ para } n \text{ natural com } n \geq 2$$

Sabemos que em uma PG $a_n : a_{n-1} = a_{n+1} : a_n$, então:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \Rightarrow a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$$

Para três termos consecutivos de uma PG, temos:

Considerando $(\ldots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \ldots)$ termos consecutivos de uma PG, o termo central a_n é dado por $a_n{}^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$.

Veja algumas maneiras de representar uma PG de razão *q* e termos desconhecidos.

- Se $a_1 = x$, temos $(x, x \cdot q, x \cdot q^2, \ldots)$.
- Se $a_1 = \frac{x}{q}$, temos $\left(\frac{x}{q}, x, x \cdot q, \ldots\right)$.

Atividades resolvidas

R13. Determine a razão da PG de cinco termos, tal que $a_1 + a_4 = 505$ e $a_2 + a_5 = 2\,525$.

Resolução

Inicialmente, escrevemos a PG em função do termo a_1.

- $a_2 = a_1 \cdot q$
- $a_3 = a_2 \cdot q = (a_1 \cdot q) \cdot q = a_1 \cdot q^2$
- $a_4 = a_3 \cdot q = (a_1 \cdot q^2) \cdot q = a_1 \cdot q^3$
- $a_5 = a_4 \cdot q = (a_1 \cdot q^3) \cdot q = a_1 \cdot q^4$

Do enunciado, temos:

$$\begin{cases} a_1 + a_4 = 505 \\ a_2 + a_5 = 2525 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + a_1 \cdot q^3 = 505 \\ a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^4 = 2525 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1(1+q^3) = 505 \\ a_1 \cdot q(1+q^3) = 2525 \end{cases}$$

Utilizando o método da substituição, isolamos a_1 na primeira equação e substituímos na segunda.

- $a_1(1+q^3) = 505 \Rightarrow a_1 = \dfrac{505}{(1+q^3)}$
- $a_1 \cdot q(1+q^3) = 2525 \Rightarrow \dfrac{505}{\cancel{(1+q^3)}} \cdot q\cancel{(1+q^3)} = 2525 \Rightarrow q = \dfrac{2525}{505} \Rightarrow \boxed{q = 5}$

R14. Escreva os seis primeiros termos da PG crescente tal que $a_3 = 8$ e $a_5 = 32$.

Resolução

Inicialmente, determinamos a razão da PG escrevendo a_5 em função de a_3.

$$a_5 = \underbrace{a_3 \cdot q}_{a_4} \cdot q \Rightarrow a_5 = a_3 \cdot q^2 \Rightarrow 32 = 8 \cdot q^2 \Rightarrow q^2 = \frac{32}{8} \Rightarrow q^2 = 4 \left\langle \begin{matrix} q_1 = -2 \\ q_2 = 2 \end{matrix} \right.$$

Como a PG é crescente $(q > 0)$, a razão é $q = 2$.

Em seguida, substituímos o valor de *q* e obtemos a_1.

$$a_3 = \underbrace{a_1 \cdot q}_{a_2} \cdot q \Rightarrow a_3 = a_1 \cdot q^2 \Rightarrow 8 = a_1 \cdot 2^2 \Rightarrow a_1 = \frac{8}{4} = 2$$

Portanto, os seis primeiros termos da PG são, nessa ordem: 2, 4, 8, 16, 32 e 64.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

72. Determine a razão de cada PG e classifique-a em crescente, decrescente, constante ou alternante.

a) $(5, 10, 20, \ldots)$ $q = 2$; crescente

b) $\left(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}, -\sqrt{3}\right)$ $q = 1$; constante

c) $\left(3, 2, \frac{4}{3}, \ldots\right)$ $q = \frac{2}{3}$; decrescente

d) $(27, -18, 12, \ldots)$ $q = -\frac{2}{3}$; alternante

e) $(-12, -6, -3, \ldots)$ $q = \frac{1}{2}$; crescente

73. Identifique em cada item se a sequência cuja fórmula do termo geral dada é uma PG. Nos casos em que for PG, determine sua razão.

a) $a_n = 5(-1)^n, n \in \mathbb{N}^*$ sim; $q = -1$

b) $a_n = -3n,\ n \in \mathbb{N}^*$ não

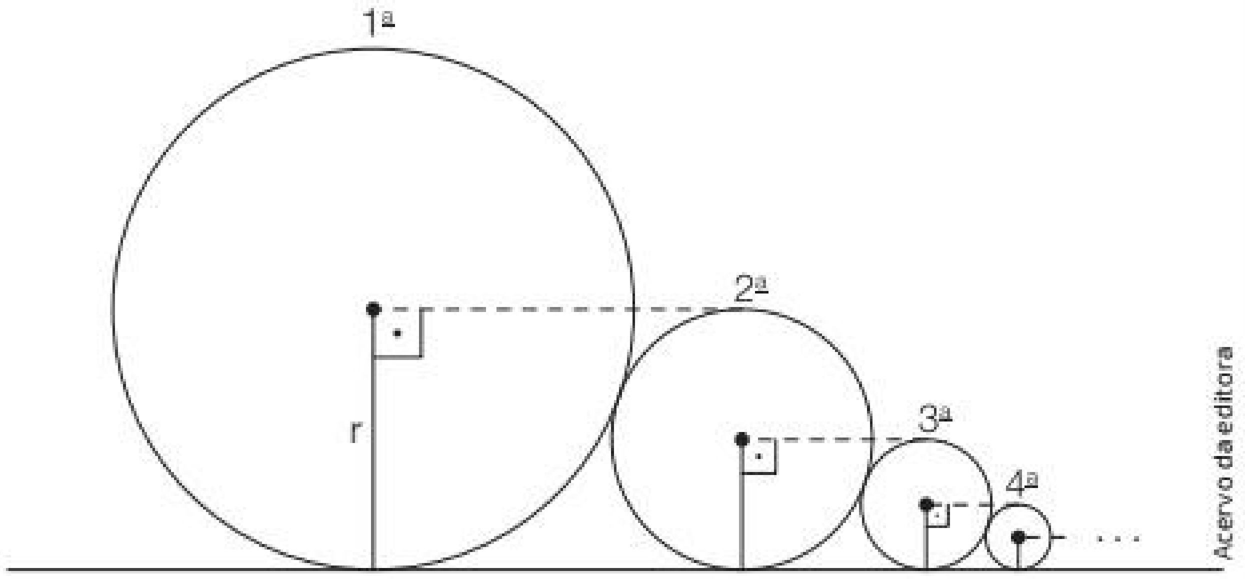
c) $a_n = 4^n,\ n \in \mathbb{N}^*$ sim; $q = 4$

74. Sabendo que os termos da PG $(x - 3, x - 1, x + 5, \ldots)$ são números reais, escreva os sete primeiros termos numéricos dessa progressão.
$(1, 3, 9, 27, 81, 243, 729)$

75. Classifique a PG $(8 - 5b, 14 + b, 18 + 5b)$ em crescente, decrescente, constante ou alternante.
$b = -1$, PG constante; $b = -2$, PG decrescente

76. A partir da imagem, determine, em função de *r*, os cinco primeiros termos da sequência:

- dos raios das circunferências
- dos comprimentos das circunferências
- das áreas dos círculos delimitados pelas circunferências



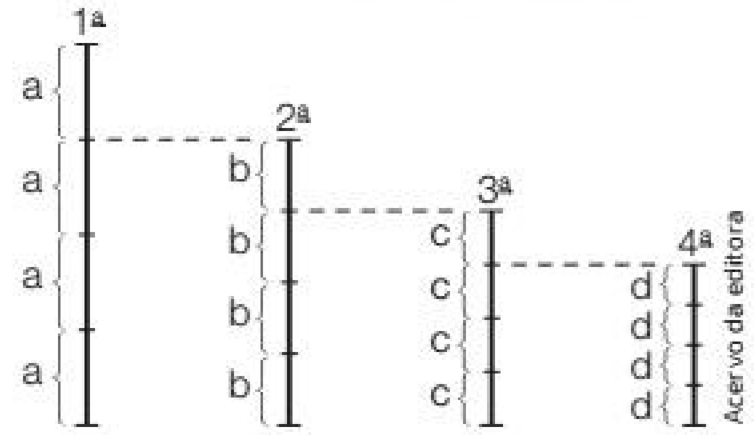
Acervo da editora

As sequências que você escreveu são progressões geométricas? Se forem, determine a razão de cada uma delas. Respostas no final do livro.

O comprimento de uma circunferência de raio *r* e a área de um círculo delimitado por ela são dados, respectivamente, por $C = 2\pi r$ e $A = \pi r^2$.

77. A soma dos três termos de uma PG é 14, e o produto, -216. Determine essa PG e sua razão.
$(2, -6, 18)$ e $q = -3$ ou $(18, -6, 2)$ e $q = -\frac{1}{3}$

78. A partir das imagens, elabore duas questões acerca de progressões geométricas e dê para um colega resolver. Resposta pessoal.



Acervo da editora

79. Calculadora

Veja como podemos determinar, com a ajuda de uma calculadora, os termos de uma PG em que $a_1 = 1000$ e $q = 1{,}007$, ou seja, os termos de uma PG cujos valores crescem a uma taxa de 0,7%.

- Temos que $a_1 = 1000$ e efetuando $1{,}007 \times 1000$ obtemos a_2.

Caso não haja calculadoras para todos os alunos, reúna-os em grupos para que possam realizar a atividade ou, então, veja a possibilidade de trazer algumas calculadoras para a sala de aula.

- Digitando a tecla (=) pela 2ª vez, obtemos a_3.

- Digitando a tecla (=) pela 3ª vez, obtemos a_4.

Ilustrações: Camila Ferreira

Assim, para calcular a_n, devemos digitar a tecla (=) uma quantidade de vezes correspondente a $(n - 1)$.

Segundo estimativas do IBGE, a população brasileira saltou de 202 768 562 para 204 450 649 habitantes no período de julho de 2014 a julho de 2015, o que representa uma taxa de crescimento de aproximadamente 0,83% ao ano.

Fonte de pesquisa: <ftp://ftp.ibge.gov.br/Estimativas_de_Populacao>. Acesso em: 29 out. 2015.

Supondo que essa taxa se mantenha no decorrer dos anos, e utilizando os procedimentos apresentados, responda às seguintes questões:

a) Qual era a quantidade aproximada de habitantes no Brasil em julho de 2016? aproximadamente 206 147 589 habitantes

b) Em qual ano a população brasileira ultrapassará os 210 milhões de habitantes? 2019

c) Você considera importante a existência de políticas públicas que incentivem o controle da natalidade? Justifique. Resposta pessoal.

Fórmula do termo geral de uma PG

Considere a PG $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots)$, infinita e de razão *q*. Como cada termo, a partir do segundo, pode ser obtido pela multiplicação do termo anterior por *q*, temos:

$$
\begin{aligned}
&a_1 = a_1 \cdot q^0\\
&a_2 = a_1 \cdot q\\
&a_3 = \underbrace{a_2}_{a_1 \cdot q} \cdot q \Rightarrow a_3 = a_1 \cdot q \cdot q \Rightarrow a_3 = a_1 \cdot q^2\\
&a_4 = \underbrace{a_3}_{a_1 \cdot q^2} \cdot q \Rightarrow a_4 = a_1 \cdot q^2 \cdot q \Rightarrow a_4 = a_1 \cdot q^3\\
&a_5 = \underbrace{a_4}_{a_1 \cdot q^3} \cdot q \Rightarrow a_5 = a_1 \cdot q^3 \cdot q \Rightarrow a_5 = a_1 \cdot q^4\\
&\vdots\\
&a_n = a_{n-1} \cdot q \Rightarrow a_n = a_1 \cdot q^{n-1}\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Note que qualquer termo de uma PG pode ser escrito em função de a_1 e *q*. O termo de ordem *n* é igual a a_1 multiplicado pela razão elevada a $(n-1)$.

A fórmula do termo geral de uma PG é dada por:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Nessa fórmula:

• a_n: enésimo termo	• n: ordem do termo
• a_1: primeiro termo	• q: razão

Atividades resolvidas

R15. Qual é o 8º termo da PG (3, 12, 48,...)?

Resolução

Inicialmente, determinamos a razão da PG.

$$q = \frac{a_2}{a_1} \Rightarrow q = \frac{12}{3} = 4$$

Em seguida, calculamos a_8 utilizando a fórmula do termo geral.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_8 = 3 \cdot 4^{8-1} = 3 \cdot 4^7 = 3 \cdot 16\,384 = 49\,152$$

R16. Determine o número de termos da PG $\left(81, 27, 9, \ldots, \frac{1}{9}\right)$.

Resolução

Temos que $a_1 = 81$, $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{27}{81} = \frac{1}{3}$ e $a_n = \frac{1}{9}$.

Aplicando a fórmula do termo geral, obtemos a posição do último termo da PG.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow \frac{1}{9} = 81 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \Rightarrow \frac{1}{9 \cdot 81} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \Rightarrow \frac{1}{3^2 \cdot 3^4} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{3^{2+4}}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^6 = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \Rightarrow 6 = n-1 \Rightarrow n = 7$$

Portanto, a PG possui 7 termos.

R17. Interpole três meios geométricos entre 1 e 625.

Resolução

Inicialmente, devemos considerar a PG tal que $a_1=1$ e $a_5=625$, conforme o esquema.

$$\underset{a_1}{1}, \underbrace{\underset{a_2}{\_\_}, \underset{a_3}{\_\_}, \underset{a_4}{\_\_}}_{\text{3 meios geométricos}}, \underset{a_5}{625}$$

Interpolar **meios geométricos** significa colocar números reais entre dois números dados, de tal forma que a sequência formada por todos esses números seja uma PG.

Utilizando a fórmula do termo geral da PG, temos:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_5 = a_1 \cdot q^{5-1} \Rightarrow 625 = 1 \cdot q^4 \Rightarrow 625 = q^4 \Rightarrow q = \pm\sqrt[4]{625}$$

Nesse caso temos $q=5$ ou $q=-5$.

Portanto, são duas sequências possíveis:

- para $q=5$, a sequência é crescente $(1, 5, 25, 125, 625)$;
- para $q=-5$, a sequência é alternante $(1, -5, 25, -125, 625)$.

R18. Certo investimento é remunerado mensalmente a uma taxa fixa de 0,65%. Por exemplo, se uma pessoa investiu R$ 100,00, com índice do mês em 0,65%, após um mês será aplicada a seguinte correção:

$$100 \cdot \underbrace{1{,}0065}_{100{,}65\%} = 100{,}65$$

Nesse caso, os R$ 100,00 renderam R$ 0,65 em 1 mês.

Qual será a quantia obtida ao final de dois anos por um capital de R$ 12 000,00 aplicado nesse investimento?

Resolução

Inicialmente calculamos a quantia (com todas as casas decimais) obtida ao final do:

- 1º mês: $12\,000 \cdot 1{,}0065 = 12\,078$
- 2º mês: $12\,078 \cdot 1{,}0065 = 12\,156{,}507$
- 3º mês: $12\,156{,}507 \cdot 1{,}0065 = 12\,235{,}5243$

A partir do segundo mês, a quantia obtida é calculada sobre o capital do mês anterior.

A sequência $(12\,078; 12\,156{,}507; 12\,235{,}5243; \ldots)$ é uma PG, tal que $a_1=12\,078$ e $q=1{,}0065$. Desse modo, ao final do 24º mês, teremos:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_{24} = 12\,078 \cdot 1{,}0065^{24-1} = 12\,078 \cdot 1{,}0065^{23} \Rightarrow a_{24} \simeq 14\,018{,}84$$

Portanto, a quantia obtida ao final de dois anos será, aproximadamente, R$ 14 018,84.

O cálculo aproximado de $1{,}0065^{23}$ pode ser feito com uma calculadora científica:

1 → • → 0 → 0 → 6 → 5 → ^ → 2 → 3 → =

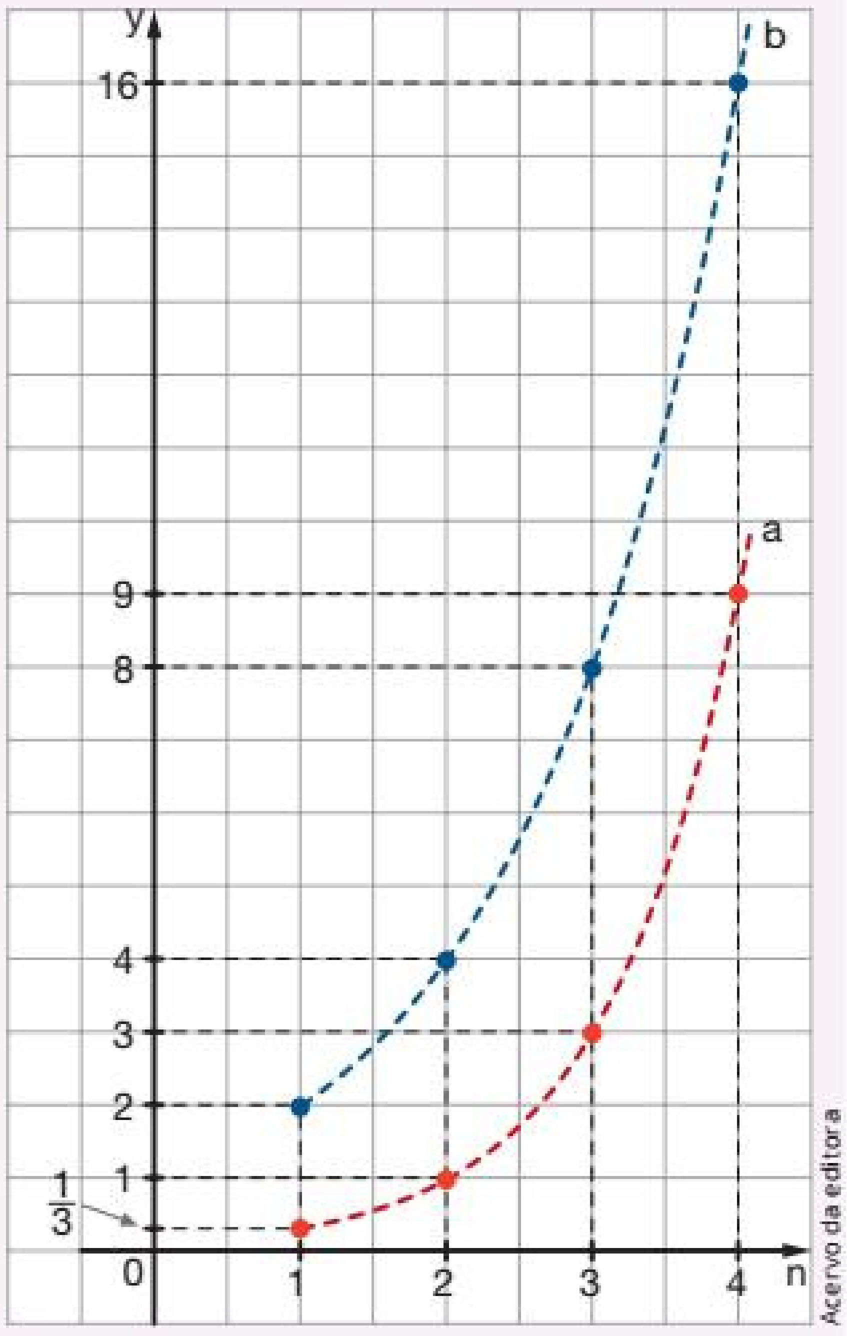
Camila Ferreira

Em algumas calculadoras, a tecla x^y substitui a tecla ^.

R19. Observe a representação gráfica das progressões geométricas $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ e $(b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots)$.

Diga aos alunos que no gráfico apresentado as escalas dos eixos são diferentes entre si.

Uma PG é uma **função do tipo exponencial** $a(n) = a_1 \cdot q^{n-1}$ de domínio $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n, \ldots\}$. Assim, a representação gráfica dos termos da PG é formada pelos pares ordenados (n, a_n).



Acervo da editora

a) Qual PG tem uma razão maior?

b) A partir de qual termo $a_n > b_n$?

Resolução

a) Sejam q_a e q_b as razões das progressões geométricas $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ e $(b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots)$, respectivamente. Observando o gráfico, temos:

- $q_a = \frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$
- $q_b = \frac{b_2}{b_1} = \frac{4}{2} = 2$

Assim, $q_a > q_b$.

b) Inicialmente, escrevemos a fórmula do termo geral das sequências.

$$a_n = a_1 \cdot q_a^{n-1} \Rightarrow a_n = \frac{1}{3} \cdot 3^{n-1} \Rightarrow a_n = 3^{-1} \cdot 3^{n-1} \Rightarrow a_n = 3^{n-2}$$

$$b_n = b_1 \cdot q_b^{n-1} \Rightarrow b_n = 2 \cdot 2^{n-1} \Rightarrow b_n = 2^1 \cdot 2^{n-1} \Rightarrow b_n = 2^n$$

Para resolver a inequação exponencial $a_n > b_n$, podemos aplicar o logaritmo de base 10 nos membros da desigualdade.

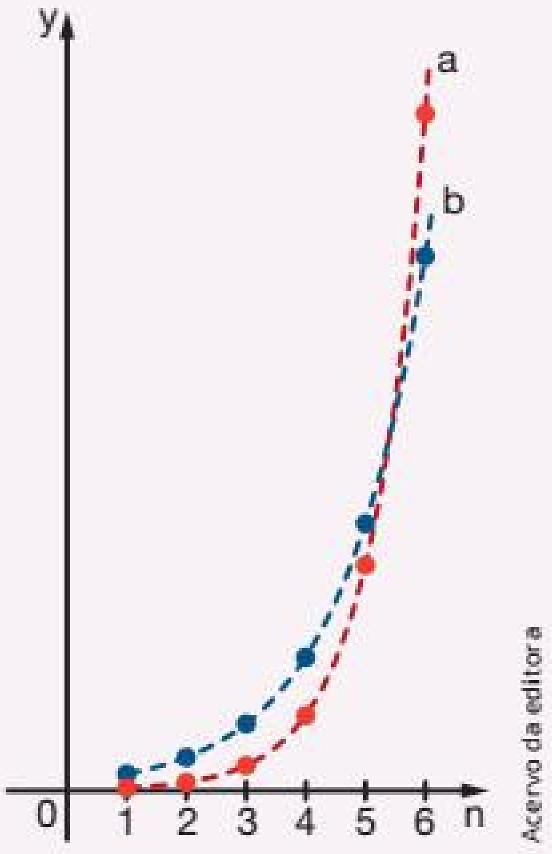
$$a_n > b_n \Rightarrow 3^{n-2} > 2^n \Rightarrow \overbrace{\log 3^{n-2} > \log 2^n \Rightarrow (n-2) \cdot \underbrace{\log 3}_{0,477} > n \cdot \underbrace{\log 2}_{0,301}}^{\text{logaritmo da potência}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (n-2) \cdot 0,477 > 0,301 \cdot n \Rightarrow 0,477n - 0,954 > 0,301n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0,176n > 0,954 \Rightarrow n > 5,42$$

O menor inteiro que satisfaz a condição é n=6.
Portanto, $a_n > b_n$ a partir do 6º termo.

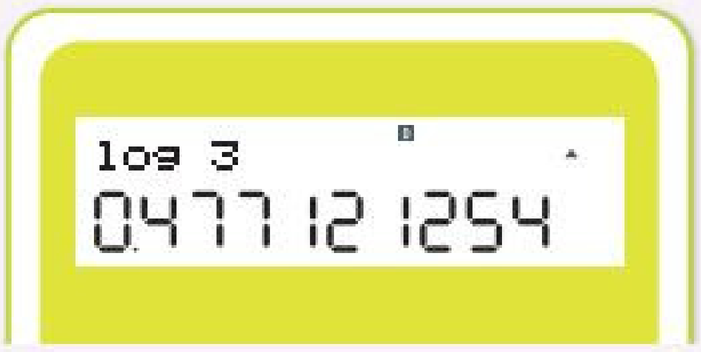
Representando mais alguns termos das progressões geométricas, podemos observar no gráfico as conclusões dos itens **a** e **b**.



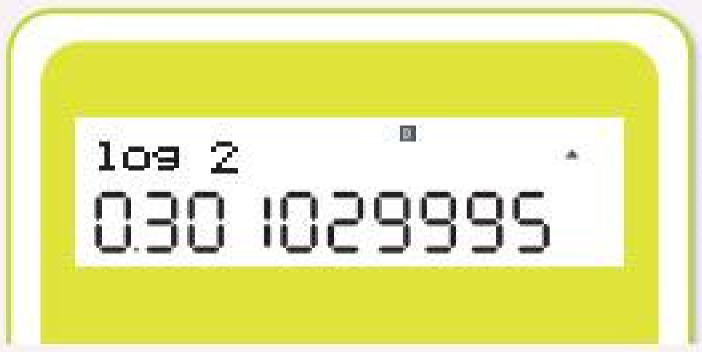
Acervo da editora

O cálculo da aproximação de log 3 e log 2 pode ser feito com uma calculadora científica:

log → 3 → =



log → 2 → =



Ilustrações: Camila Ferreira

Em algumas calculadoras, a tecla log deve ser digitada depois do número.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

80. Determine a fórmula do termo geral e calcule o valor de a_6 em cada PG. Respostas no final do livro.

a) $(2, 8, 32, \ldots)$

b) $(-48, -24, -12, \ldots)$

c) $(-7, 14, -28, \ldots)$

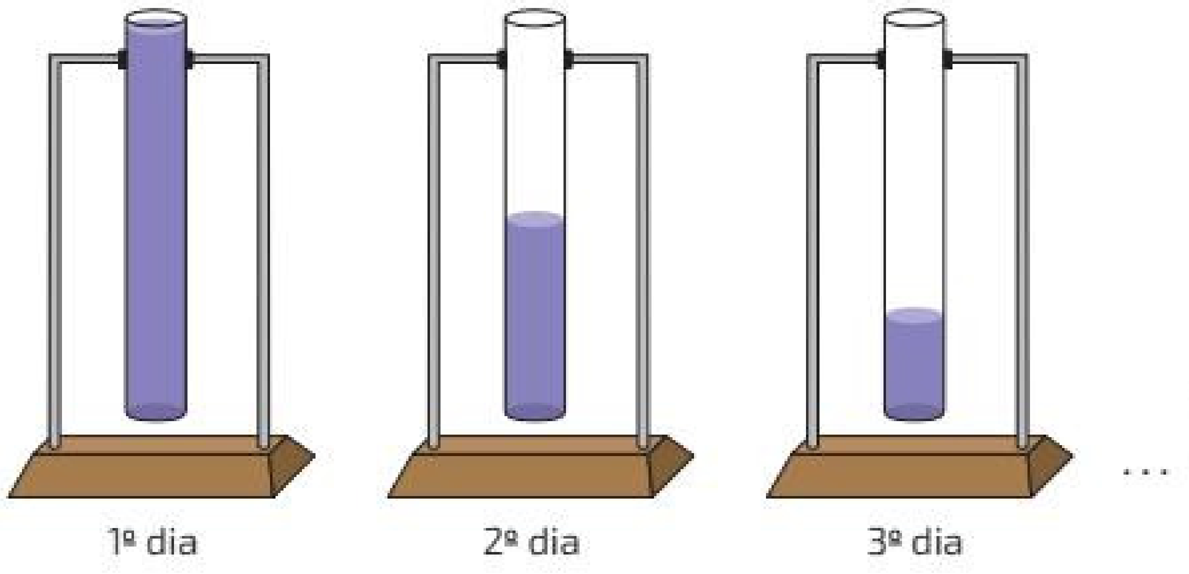
d) $\left(\frac{64}{25}, \frac{8}{5}, 1, \ldots\right)$

81. Qual termo da PG $(729, 2\,430, 8\,100, \ldots)$ é igual a $1\,000\,000$? a_7

82. Dada a PG $\left(1, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \ldots\right)$, determine a razão e o valor de $a_5 : a_7$. $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2

83. Em uma progressão geométrica de *n* termos, $a_5 = 648$, $a_n = 2\,187$ e $q = 1{,}5$. Determine a quantidade de termos dessa PG. 8

84. Um cientista observou que certa substância volátil, ao ficar exposta ao ambiente, perde uma porcentagem *x* do seu volume a cada dia. O volume inicial da substância é dado por v_1; passado um dia, o volume é dado por v_2; mais um dia, por v_3; e assim sucessivamente.



Ronaldo Lucena

a) A sequência $(v_1, v_2, v_3, \ldots)$ é uma PA ou uma PG? PG

b) Sabendo que $v_6 = 800\text{ mm}^3$ e $v_7 = 400\text{ mm}^3$, determine v_{10}. $v_{10} = 50\text{ mm}^3$

c) De acordo com os dados do item **b**, calcule o volume inicial dessa substância. $25\,600\text{ mm}^3$

> **Volátil:** que tem a propriedade de vaporização à pressão e à temperatura ambientes.

85. Júlio realiza um tratamento médico no qual deve ingerir doses semanais de certo medicamento, durante 6 semanas. Nesse tratamento, a dose do medicamento deve aumentar semanalmente conforme uma PG. Sabe-se que na primeira semana Júlio ingeriu 32 mg desse medicamento, e na terceira semana, 72 mg.

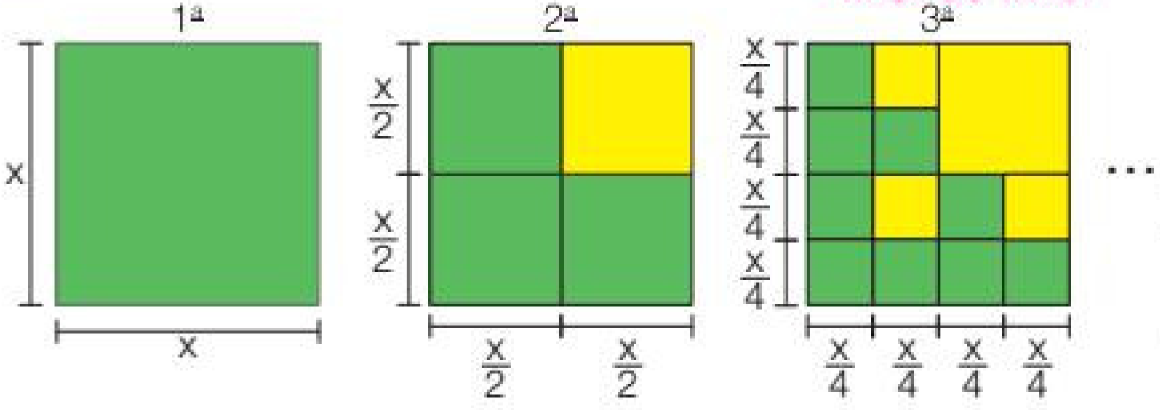
a) Qual a PG que representa a quantidade de medicamento ingerido por Júlio semanalmente, durante todo o tratamento?

b) O que representa o quarto termo dessa sequência? A quantidade de medicamento ingerida por Júlio na quarta semana de tratamento.

c) Determine a fórmula do termo geral dessa progressão. $a_n = 32 \cdot (1{,}5)^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$ e $n \leq 6$

85. a) $(32, 48, 72, 108, 162, 243)$

86. Observe a sequência de figuras. Respostas no final do livro.



Acervo da editora

a) Escreva, em função de *x*, os 5 primeiros termos da sequência que representa os valores das áreas em:

- verde
- amarelo

b) Qual das sequências que você escreveu é uma PG? Justifique.

c) Determine o 10º termo de cada uma dessas sequências.

87. Calcule o valor de *b* de modo que cada sequência seja uma PG.

a) $(45, b, 20)$ 30 ou -30

b) $(b+3, b+17, b+59)$ 4

c) $(b+1, b-3, b-15)$ -3

88. Que número devemos somar a 3, 18 e 48 para que, nessa ordem, formem uma PG? 12

89. Cláudia recebeu de um banco duas propostas de aplicação financeira. Na 1ª aplicação, R$ 10 000,00 renderão uma quantia fixa de R$ 260,00 a cada trimestre. Na 2ª aplicação, o mesmo capital renderá juros mensais a uma taxa de 0,83%.

a) Em qual das aplicações os montantes obtidos ao final de cada período formarão uma PG? 2ª aplicação

b) Qual das aplicações é mais rentável ao final de dois anos de investimento? Justifique.

90. **Desafio**

Meia-vida de um elemento radioativo é o tempo necessário para que sua atividade seja reduzida pela metade, por desintegração. O trítio (^3H) é o terceiro isótopo do hidrogênio, considerado raro é utilizado na fabricação de bombas nucleares, e tem meia-vida de 12 anos.

De acordo com essas informações, qual o tempo necessário, em anos, para que 1 kg de trítio seja reduzido, por desintegração, a 31,25 g? 60 anos

Fontes de pesquisa: SALEM, Lionel (Dir.). **Dicionário das ciências**. Petrópolis: Vozes; São Paulo: Ed. da Unicamp, 1995.

GERALD, Karp. **Biologia celular e molecular**: conceitos e experimentos. Barueri: Manole, 2005.

91. Interpole 4 meios geométricos entre 3 e 96. (3, 6, 12, 24, 48, 96)

92. Ao inserir 3 meios geométricos entre 2 e 8, tem-se uma PG crescente. Calcule a razão dessa PG. $\sqrt{2}$

89. b) 2ª aplicação; O montante obtido ao final de 2 anos na 1ª e na 2ª aplicação é, respectivamente, R$ 12 080,00 e R$ 12 194,23.

PG e função

Considere a PA $(0, 2, 4, 6, 8, \ldots)$ de razão 2, e a função do tipo exponencial $f(x) = 2 \cdot 3^x$. Podemos verificar que a sequência $(f(0), f(2), f(4), f(6), f(8), \ldots)$ é uma PG. Observe:

$$\begin{aligned}
f(0) &= 2 \cdot 3^0 = 2 \cdot 1 = 2\\
f(2) &= 2 \cdot 3^2 = 2 \cdot 9 = 18\\
f(4) &= 2 \cdot 3^4 = 2 \cdot 81 = 162\\
f(6) &= 2 \cdot 3^6 = 2 \cdot 729 = 1458\\
f(8) &= 2 \cdot 3^8 = 2 \cdot 6\,561 = 13\,122\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Calculando a razão entre cada termo e seu antecessor, verificamos que $(2, 18, 162, 1\,458, 13\,122, \ldots)$ é uma PG de razão 9.

$$\frac{18}{2} = \frac{162}{18} = \frac{1\,458}{162} = \frac{13\,122}{1\,458} = 9$$

A razão dessa PG é igual ao coeficiente *a* da função $f(x) = b \cdot a^x$ elevado à razão *r* da PA, ou seja, $a^r = 3^2 = 9$.

Dados a função do tipo exponencial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = b \cdot a^x$ e $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n, \ldots$ elementos de uma PA, a sequência $(f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4), \ldots, f(x_n), \ldots)$ é uma progressão geométrica (PG) de razão a^r.

Atividades resolvidas

R20. Sejam a PA $(5, -1, -7, \ldots)$ de razão $r = -6$ e a função $f(x) = 7 \cdot 2^x$. Determine os cinco primeiros termos da PG $(f(5), f(-1), f(-7), \ldots)$ e sua razão.

Resolução

Inicialmente, obtemos os cinco primeiros termos da PA: $5, -1, -7, \underbrace{-13}_{-7+(-6)}, \overbrace{-19}^{-13+(-6)}$

Agora calculamos os cinco primeiros termos da PG:

x	5	−1	−7	−13	−19
$f(x) = 7 \cdot 2^x$	224	$\frac{7}{2}$	$\frac{7}{128}$	$\frac{7}{8\,192}$	$\frac{7}{524\,288}$

Logo, os cinco primeiros termos da PG são, nessa ordem:

$$224, \frac{7}{2}, \frac{7}{128}, \frac{7}{8\,192}, \frac{7}{524\,288}$$

A razão da PG é:

$$q = a^r \Rightarrow q = 2^{-6} = \frac{1}{64}$$

A razão da PG também pode ser obtida por:

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{7}{2}}{224} = \frac{1}{64}$$

R21. Determine o valor de *a* de modo que a função do tipo exponencial $f(x) = 2 \cdot a^x$, aplicada aos termos de uma PA de razão $r = 3$, gere uma PG de razão $q = 125$.

Resolução

A razão da PG é igual ao coeficiente *a* da função elevado à razão *r* da PA. Assim:

$$q = a^r \Rightarrow 125 = a^3 \Rightarrow a = \sqrt[3]{125} \Rightarrow a = 5$$

Atividades

Anote as respostas no caderno.

93. Sejam a PA $(-4, -1, 2, 5, 8)$ e as funções $f(x)=3x+2$ e $g(x)=3\cdot 2^x$. Para cada sequência a seguir, calcule o valor dos seus termos, classifique-as em PA ou PG e determine suas razões. Respostas no final do livro.

a) $(f(-4), f(-1), f(2), f(5), f(8))$

b) $(g(-4), g(-1), g(2), g(5), g(8))$

94. Em um laboratório, observou-se que o número de indivíduos de uma colônia de bactérias dobrava a cada hora. A função que representa a quantidade de bactérias em função do tempo *t*, em horas, é dada por $f(t)=x\cdot a^t$, em que *x* é a quantidade de bactérias no instante inicial $(t=0)$.

a) Determine o valor de *a*. 2

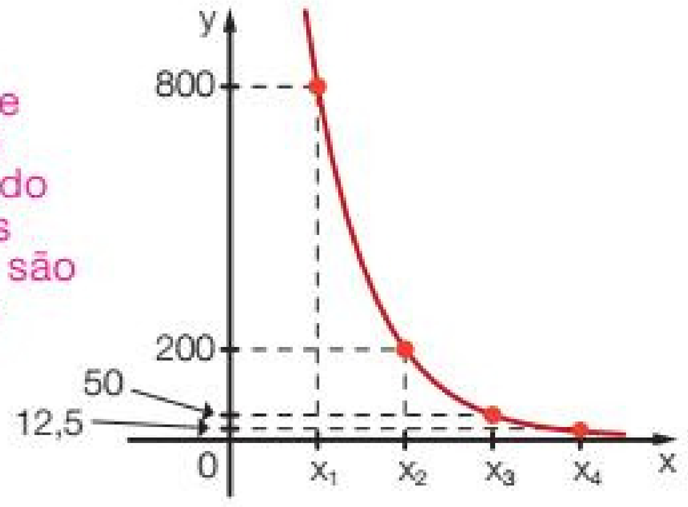
b) Escreva a PG que representa a quantidade de indivíduos dessa colônia no início de cada uma das quatro primeiras horas. $(x, 2x, 4x, 8x)$

c) Qual era a quantidade de indivíduos no início da 10ª hora? $512x$

95. Sabendo que $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ é uma PA de razão 3, determine a razão da PG $(f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots)$, em que $f(x)=-2\cdot 9^x$. 729

96. Observe o gráfico da função $f(x)=b\cdot a^x$.

Diga aos alunos que no gráfico apresentado as escalas dos eixos são diferentes entre si.



Acervo da editora

Sabendo que $x_2-x_1=x_3-x_2=x_4-x_3=2$, calcule o valor de *a*. $\frac{1}{2}$

97. Daniel comprou um terreno de R\$ 180 000,00 em uma região da cidade cuja valorização média é de, aproximadamente, 12% ao ano. Calcule o valor aproximado do terreno de Daniel ao final de 5 anos.
R\$ 317 221,50

Soma dos *n* primeiros termos de uma PG

Assim como obtivemos uma fórmula para a soma dos *n* primeiros termos de uma PA, também podemos determinar uma fórmula para obter a soma dos *n* primeiros termos de uma PG. Para isso, vamos considerar a PG $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{n-1}, a_n, \ldots)$ de razão *q*.

Também indicamos a soma dos *n* primeiros termos de uma PG por S_n. Escrevendo essa soma, temos:

$$S_n=a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n \text{ (I)}$$

Multiplicando os dois membros dessa igualdade pela razão *q*:

$$S_n\cdot q=a_1\cdot q+a_2\cdot q+a_3\cdot q+a_4\cdot q+\ldots+a_{n-2}\cdot q+a_{n-1}\cdot q+a_n\cdot q\Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_n\cdot q=a_2+a_3+a_4+a_5+\ldots+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n+a_n\cdot q \text{ (II)}$$

Realizando, membro a membro, a subtração $(\text{I})-(\text{II})$, temos:

$$\begin{array}{rl} & S_n = a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n \\ - & S_n\cdot q = a_2+a_3+a_4+\ldots+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n+a_n\cdot q \\ \hline & S_n-S_n\cdot q=a_1-a_n\cdot q \end{array}$$

Sabemos que $a_n=a_1\cdot q^{n-1}$, logo:

$$S_n-S_n\cdot q=a_1-a_n\cdot q\Rightarrow S_n(1-q)=a_1-a_1\cdot \underbrace{q^{n-1}\cdot q}_{q^n}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_n(1-q)=a_1-a_1\cdot q^n\Rightarrow S_n(1-q)=a_1(1-q^n)\Rightarrow S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, \text{ para } q\neq 1$$

Se realizássemos $(\text{II})-(\text{I})$, obteríamos $S_n=\frac{a_1(q^n-1)}{q-1}$, para $q\neq 1$. Essa fórmula pode ser escrita como $S_n=\frac{a_n\cdot q-a_1}{q-1}$, para $q\neq 1$.

A fórmula que permite calcular a soma dos *n* primeiros termos de uma PG é dada por:

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, \text{ para } q\neq 1$$

Nessa fórmula:

- S_n: soma dos *n* primeiros termos
- a_1: primeiro termo
- n: quantidade de termos
- q: razão

Atividades resolvidas

R22. Calcule a soma dos termos da PG $(5, 15, 45, \ldots, 3\,645)$.

Resolução

Temos que $a_1 = 5$, $q = \frac{15}{5} = 3$ e $a_n = 3\,645$.

Aplicando a fórmula $S_n = \frac{a_n \cdot q - a_1}{q-1}$, segue que:

$$S_n = \frac{3\,645 \cdot 3 - 5}{3-1} = \frac{10\,935 - 5}{2} = \frac{10\,930}{2} = 5\,465$$

Portanto, a soma dos termos da PG é 5 465.

R23. Eduardo recebeu um *e-mail* dizendo “Ganhe dinheiro fácil”, com a seguinte proposta: ele deveria ser vendedor de uma empresa e recrutar 10 novos vendedores (1º nível), sendo que cada um desses recrutaria mais 10 vendedores (2º nível), e assim sucessivamente. Ao atingir o 10º nível, Eduardo ganharia uma grande quantia em dinheiro. Sabendo que cada vendedor pode ser recrutado uma única vez e que a população mundial é menor que 8 bilhões, é possível que Eduardo ganhe esse dinheiro?

Resolução

Inicialmente, calculamos o número de vendedores recrutados nos primeiros níveis:

- 1º nível: $1 \cdot 10 = 10 \rightarrow 10$ vendedores
- 2º nível: $10 \cdot 10 = 100 \rightarrow 100$ vendedores
- 3º nível: $100 \cdot 10 = 1\,000 \rightarrow 1\,000$ vendedores

Note que a sequência $(10, 100, 1\,000, \ldots)$ é uma PG, tal que $a_1 = 10$ e $q = 10$.

No 10º nível, o total de vendedores recrutados é:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow S_{10} = \frac{10 \cdot (1-10^{10})}{1-10} = \frac{10 \cdot (-9\,999\,999\,999)}{-9} = \frac{-99\,999\,999\,990}{-9} = 11\,111\,111\,110$$

Assim, no 10º nível, o total de vendedores é maior que 11 bilhões.

Portanto, não é possível que Eduardo ganhe esse dinheiro, pois a quantidade de vendedores que devem ser recrutados é superior à população mundial.

> Embora o que é proposto nesse tipo de *e-mail* possa ser tentador para muitos, em geral, as metas solicitadas são inatingíveis.

R24. Em uma PG de cinco termos, a razão é $q = 1$ e a soma de seus termos é $S_5 = 175$. Escreva os termos dessa PG.

Resolução

Somando termo a termo na PG, temos:

$$S_5 = a_1 + \underbrace{a_1 \cdot q}_{a_2} + \underbrace{a_1 \cdot q^2}_{a_3} + \underbrace{a_1 \cdot q^3}_{a_4} + \underbrace{a_1 \cdot q^4}_{a_5} \Rightarrow 175 = a_1 + a_1 \cdot 1 + a_1 \cdot 1^2 + a_1 \cdot 1^3 + a_1 \cdot 1^4 \Rightarrow 175 = 5a_1 \Rightarrow a_1 = 35$$

Portanto, a PG é $(35, 35, 35, 35, 35)$.

> De modo geral, se uma PG tem razão $q = 1$, então:
>
> $$S_n = a_1 + a_1 \cdot 1 + a_1 \cdot 1^2 + \ldots + a_1 \cdot 1^{n-1} \Rightarrow S_n = \underbrace{a_1 + a_1 + a_1 + \ldots + a_1}_{n \text{ parcelas}} \Rightarrow S_n = n \cdot a_1$$

Atividades

Anote as respostas no caderno.

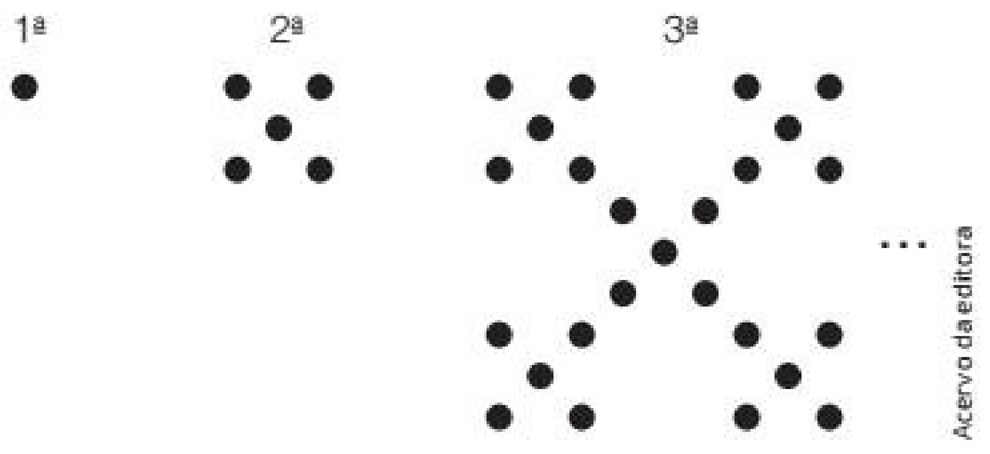
98. Determine a soma dos 8 primeiros termos de cada PG.

a) $(3, 12, 48, \ldots)$ 65 535

b) $(-4, 8, -16, \ldots)$ 340

c) $(5\,000, 500, 50, \ldots)$ 5 555,5555

99. Débora desenhou uma sequência de pontos conforme a imagem:



Acervo da editora

a) Determine a quantidade de pontos da 5ª figura da sequência. 625 pontos

b) Quantos pontos Débora terá desenhado ao concluir a 5ª figura da sequência? 781 pontos

100. A soma dos *n* primeiros termos da PG $(3, -6, 12, \ldots)$ é 129. Qual é o valor de *n*? 7

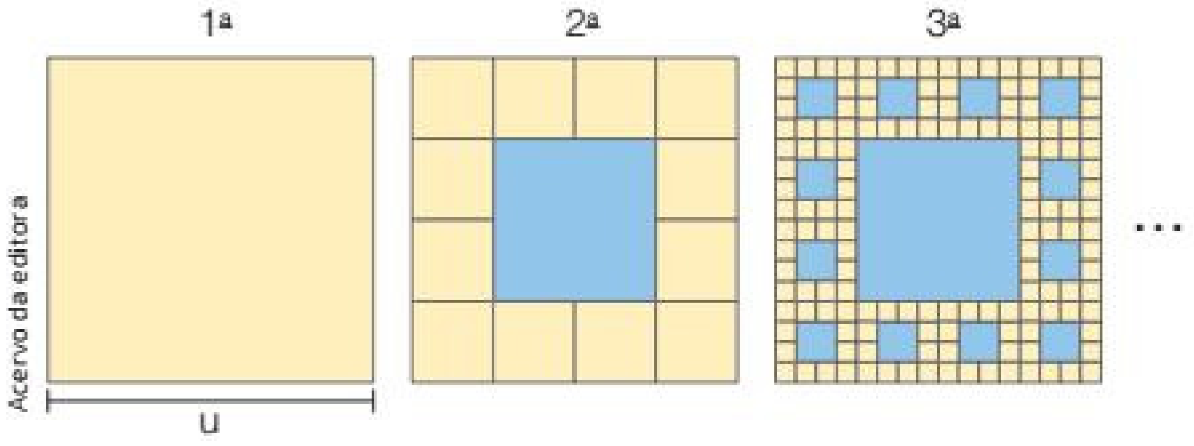
101. Calcule o valor de *x* e a quantidade de termos da PG $(2x, 8x, \ldots, 512x)$, sabendo que a soma dos seus termos é -1364. $x = -2$; 5

102. Em uma PG temos que $S_6 = 756$. Se a razão dessa PG é 2, determine o valor de a_1. 12

103. As figuras da sequência são formadas por quadrados. Considerando as 5 primeiras figuras, determine a soma das áreas em:

a) amarelo $\frac{781}{256}u^2$

b) azul $\frac{499}{256}u^2$



Acervo da editora

104. Uma bola, a uma altura de 18 m, cai em queda livre e, a cada vez que se choca com o solo, recupera apenas 40% de sua altura anterior.

a) Determine a altura máxima aproximada, em metros, atingida pela bola logo após o 3º choque. 1,152 m

b) Calcule a distância total mínima percorrida pela bola quando ela tiver se chocado com o solo pela 3ª e pela 4ª vez. 38,16 m; 40,464 m

105. Para o controle de populações de baratas, certo laboratório desenvolveu um veneno em que uma barata contaminada por ele, enquanto viva, contamina todas as que entrarem em contato com ela.

Supondo que uma barata contaminada leve um minuto para morrer e que nesse período contamine outras três baratas, e estas a outras três cada uma, e assim por diante, determine:

a) a quantidade mínima de baratas mortas em 5 min numa população de 300 baratas. 121 baratas

b) o tempo máximo para que morram 300 baratas. 6 min

106. Desafio

Há indícios de que a civilização babilônica já conhecia fórmulas gerais para a soma de progressões geométricas. Em uma tábula babilônica datada por volta de 300 a.C., Otto Neugebauer encontrou um problema com a seguinte afirmação (em notação atual):

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^9 = 2^9 + 2^9 - 1$$

a) Em relação à PG, cuja soma é apresentada acima:

- qual o primeiro termo? $a_1 = 1$
- qual a razão? $q = 2$
- quantos termos são? $n = 10$

b) Mostre por meio de cálculos que a igualdade obtida pelos babilônios está correta.

107. Certo programa de televisão ofereceu prêmios em dinheiro às pessoas que participassem de uma gincana de perguntas e respostas. O apresentador do programa faria a primeira pergunta e, se o participante respondesse corretamente, ganharia R$ 100,00. Caso ele continuasse respondendo corretamente às perguntas, ganharia R$ 200,00 pela segunda pergunta, R$ 400,00 pela terceira, e assim sucessivamente. Quando o participante errasse a resposta, sua participação se encerraria e ele levaria apenas as quantias ganhas anteriormente.

a) Sabendo que nesse jogo o maior valor que se paga por uma resposta correta é R$ 51 200,00, qual a quantidade máxima de perguntas que podem ser realizadas a um mesmo participante? 10 perguntas

b) Para que um participante ganhe mais de R$ 10 000,00 nessa gincana, ele deve responder corretamente a no mínimo quantas perguntas? 7 perguntas

c) Se um participante responder corretamente a todas as perguntas que lhe forem propostas, sendo esta a quantidade máxima, qual será o valor de sua premiação? R$ 102 300,00

106. b) $S_{10} = \frac{1 \cdot (1 - 2^{10})}{1 - 2} = \frac{1 - 2^{10}}{-1} = 2^{10} - 1 = 2 \cdot 2^9 - 1 = 2^9 + 2^9 - 1$

Série geométrica convergente

Considere a PG $\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{243}, \frac{1}{729}, \ldots\right)$, de razão $q=\frac{1}{3}$ cuja fórmula do termo geral é dada por $a_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

Note que, quanto maior o valor de *n*, mais próximo de zero é o termo da PG. Por exemplo:

- $a_5=\frac{1}{81}\simeq 0{,}01235$
- $a_8=\frac{1}{2\,187}\simeq 0{,}00046$
- $a_9=\frac{1}{6\,561}\simeq 0{,}00015$

Podemos dizer que, à medida que *n* cresce indefinidamente, a_n aproxima-se de zero, ou seja, tende a zero.

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=0$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=0$ lê-se "limite de $\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ tende a zero quando *n* tende ao infinito".

De modo geral, se $0<|q|<1$, então $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=0$.

Estudamos anteriormente que $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$, para $q\neq 1$. Calculando o limite de S_n quando *n* tende ao infinito e $0<|q|<1$, temos:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n=\frac{a_1(1-0)}{1-q}=\frac{a_1}{1-q}$$

Calculando a soma dos termos da PG $\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{243}, \frac{1}{729}, \ldots\right)$, temos:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n=\frac{a_1}{1-q}=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}$$

Portanto, o limite da soma dos termos dessa PG é $\frac{3}{2}$, ou seja, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=\frac{3}{2}$.

Na PG $\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots\right)$, temos:

- $S_2=\frac{4}{3}=1{,}\overline{3}$
- $S_3=\frac{13}{9}=1{,}\overline{4}$
- $S_4=\frac{40}{27}=1{,}\overline{481}$

$\vdots$

- $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=\frac{3}{2}=1{,}5$

A fórmula que permite calcular o limite da soma dos termos de uma PG infinita de razão *q*, com $0<|q|<1$, é dada por:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n=\frac{a_1}{1-q}$$

Chamamos essa soma de **série geométrica convergente**.

Quando $q\geq 1$ ou $q\leq -1$, chamamos a soma da PG de **série geométrica divergente**.

Atividades resolvidas

R25. Determine a fração geratriz da dízima 1,252525…

Resolução

Podemos resolver esta atividade utilizando uma série geométrica convergente.

$$1{,}252525\ldots=1+0{,}25+0{,}0025+0{,}000025+\ldots=1+\frac{25}{100}+\frac{25}{10\,000}+\frac{25}{1\,000\,000}+\ldots$$

Note que a soma é uma série geométrica convergente, com $a_1=\frac{25}{100}$ e $q=\frac{\frac{25}{10\,000}}{\frac{25}{100}}=\frac{1}{100}$.

Logo: $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=\frac{a_1}{1-q}=\frac{\frac{25}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{\frac{25}{100}}{\frac{99}{100}}=\frac{25}{99}$

Assim, temos: $1{,}252525\ldots=1+\overbrace{\frac{25}{100}+\frac{25}{10\,000}+\frac{25}{1\,000\,000}+\ldots}^{\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=\frac{25}{99}}=1+\frac{25}{99}=\frac{124}{99}$

Atividades

Anote as respostas no caderno.

108. Calcule o limite das seguintes somas:

a) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots$ 2

b) $5+3+\frac{9}{5}+\ldots$ $\frac{25}{2}$

c) $3-2+\frac{4}{3}-\frac{8}{9}+\ldots$ $\frac{9}{5}$

d) $-2-\frac{2}{5}-\frac{2}{25}-\ldots$ $-\frac{5}{2}$

109. Calcule o valor de $2^2 \cdot 2^{\frac{6}{5}} \cdot 2^{\frac{18}{25}} \cdot \ldots$ 32

110. Simplifique a expressão abaixo sabendo que tanto o numerador quanto o denominador são séries geométricas convergentes. $\frac{1}{2}$

$$\frac{1+\frac{3}{4}+\frac{9}{16}+\ldots}{3+\frac{15}{8}+\frac{75}{64}+\ldots}$$

111. Obtenha a fração geratriz de cada dízima.

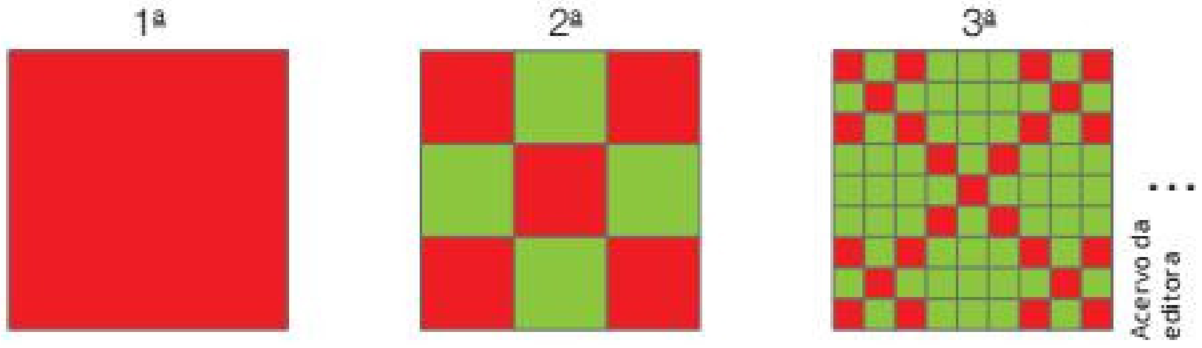
a) $1,\overline{5}$ $\frac{14}{9}$

b) $0,\overline{12}$ $\frac{4}{33}$

c) $0,05\overline{7}$ $\frac{13}{225}$

d) $92,\overline{63}$ $\frac{1019}{11}$

112. Na sequência a seguir, o lado de cada quadrado maior mede 1u.



Acervo da editora

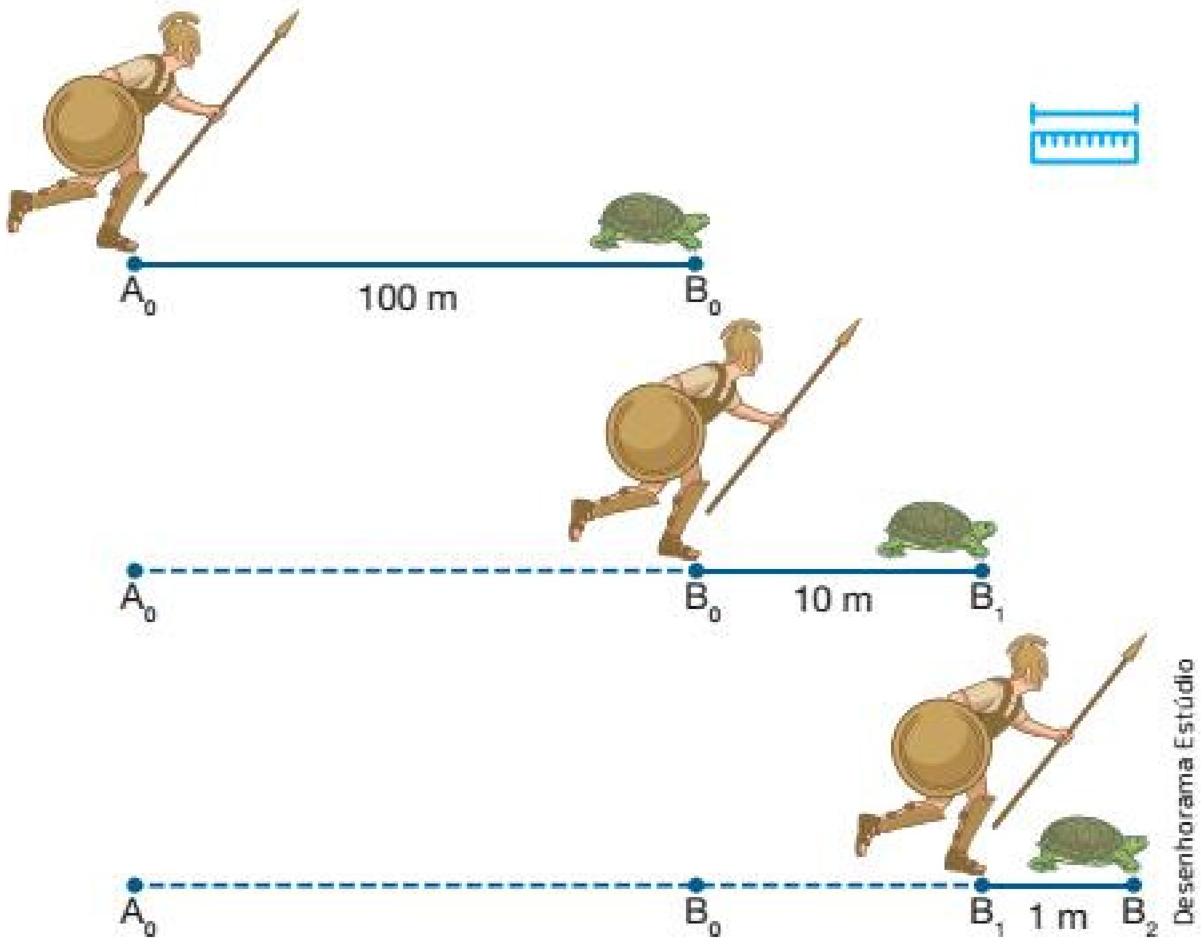
a) Qual é a área em vermelho na 2ª figura dessa sequência? E na 4ª figura? $\frac{5}{9}u^2$; $\frac{125}{729}u^2$

b) Sabendo que essa sequência é infinita, calcule a soma da área em vermelho. $\frac{9}{4}u^2$

113. **Desafio**

Na tela de um computador, um ponto α se desloca sempre em linha reta. Em certo instante ele parte de um ponto fixo *A* em direção a outro ponto fixo *B*; ao chegar em *B*, α volta em direção ao ponto *A*, parando em *C*, ponto médio de $\overline{AB}$. Em seguida, parte de *C* em direção a *B* novamente, parando em *D*, ponto médio de $\overline{CB}$. Sabendo que α continua esses deslocamentos indefinidamente, qual é a localização, em relação ao segmento AB, do ponto ao qual α está tendendo? $\frac{2}{3}$ do segmento AB, partindo de *A*.

114. O paradoxo de Aquiles e a tartaruga, proposto por Zenão, por volta de 450 a.C., retrata uma situação hipotética em que, numa corrida entre os dois personagens, Aquiles jamais alcançaria a tartaruga, embora sua velocidade fosse maior que a da tartaruga. Para que se entenda melhor esse paradoxo, vamos supor que Aquiles esteja em um ponto A_0, e a tartaruga, em um ponto B_0, 100 m à frente de A_0 e, ainda, que a velocidade de Aquiles seja dez vezes a da tartaruga. Então, quando Aquiles parte de A_0 e chega à B_0, a tartaruga terá se movido um décimo dessa distância e estará em B_1, 10 m à frente de B_0. Quando Aquiles percorrer esses 10 m, a tartaruga estará em B_2, e assim sucessivamente. Aquiles estará sempre se aproximando da tartaruga, mas eles nunca estarão no mesmo ponto simultaneamente.



Desenhorama Estúdio

A partir do paradoxo apresentado, resolva.

a) Determine, em metros, a distância entre:

- B_0 e B_1 10 m
- B_1 e B_2 1 m
- B_2 e B_3 0,1 m

114. b) Sim, pois cada termo, a partir do 2º, é igual ao anterior multiplicado pela razão $\frac{1}{10}$.

b) A sequência de distâncias obtidas no item **a** forma uma PG? Justifique.

c) A soma dos termos dessa sequência é convergente? Qual é essa soma? sim; $\frac{100}{9}$

d) Você concorda com as ideias desse paradoxo de Zenão? Por quê? Converse com o professor e os colegas. Resposta pessoal.

115. Elabore uma questão que envolva a soma infinita dos termos de uma PG e dê para um colega resolver. Não esqueça de conferir se a resposta dada por ele está correta. Resposta pessoal.

Situações envolvendo PA e PG

Existem problemas que envolvem, ao mesmo tempo, conceitos de PA e de PG. Veja a seguir alguns desses problemas.

Atividades resolvidas

R26. Um capital de R$ 1500,00 foi aplicado à taxa de 5% ao mês, durante 8 meses. Determine o montante obtido ao final do período se o sistema for de:

a) juro simples b) juro composto

Resolução

a) No sistema de juro simples, a taxa é aplicada sempre sobre o capital inicial. Nesse caso, o juro mensal é:

$$1\,500 \cdot \underbrace{0,05}_{5\%} = 75$$

Assim, o montante obtido ao final de cada mês será:

- 1º mês: $1\,500+75=1\,575$
- 2º mês: $1\,575+75=1\,650$
- 3º mês: $1\,650+75=1\,725$

Note que a sequência $(1\,575, 1\,650, 1\,725, \dots)$ é uma PA, em que $a_1=1\,575$ e $r=75$. Logo:

$$a_n=a_1+(n-1)r \Rightarrow a_8=1\,575+(8-1)\cdot 75=2\,100$$

Assim, o montante obtido após 8 meses a juro simples é R$ 2100,00.

b) No sistema de juro composto, a taxa é aplicada sempre sobre o montante obtido no mês anterior.

Nesse caso, o montante (com todas as casas decimais) obtido ao final de cada mês será:

- 1º mês: $1\,500+1\,500\cdot\dfrac{5}{100}=1\,575$
- 2º mês: $1\,575+1\,575\cdot\dfrac{5}{100}=1\,653,75$
- 3º mês: $1\,653,75+1\,653,75\cdot\dfrac{5}{100}=1\,736,4375$

Note que a sequência $(1\,575; 1\,653,75; 1\,736,4375; \dots)$ é uma PG, em que $a_1=1\,575$ e $q=1,05$. Logo:

$$a_n=a_1\cdot q^{n-1} \Rightarrow a_8=1\,575\cdot 1,05^{8-1} \simeq 2\,216,18$$

Assim, o montante obtido após 8 meses a juro composto será de aproximadamente R$ 2216,18.

O sistema de juro composto também é conhecido por "**juro sobre juro**", pois consiste num sistema de acréscimos sucessivos.

Diga aos alunos que no volume 3 desta coleção serão dadas mais informações sobre juro.

R27. Determine a condição para que uma sequência $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ seja, simultaneamente, PA e PG.

Resolução

Considere que $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ é PA e PG de razões *r* e *q* respectivamente. Então:

- $\underbrace{a_1+r}_{a_2}=\underbrace{a_1\cdot q}_{a_2} \Rightarrow r=a_1(q-1)$ (I)
- $\underbrace{a_2+r}_{a_3}=\underbrace{a_2\cdot q}_{a_3} \Rightarrow r=a_2(q-1)$ (II)

Igualando II e I, segue que:

$$a_2(q-1)=a_1(q-1) \Rightarrow a_2(q-1)-a_1(q-1)=0 \Rightarrow (a_2-a_1)(q-1)=0$$

Para que o produto seja igual a zero, temos duas possibilidades:

- $a_2-a_1=0 \Rightarrow r=0$, ou seja, a PA deve ser constante
- $q-1=0 \Rightarrow q=1$, ou seja, a PG deve ser constante

Portanto, para que a sequência seja PA e PG simultaneamente, ela deve ser constante.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

116. Leila realizou um empréstimo de R$ 40 000,00 a fim de comprar maquinário e insumos agrícolas para sua propriedade rural. Ela irá quitar a dívida em 36 parcelas mensais e, para isso, dispõe de duas opções de pagamento.

Opção **1**: R$ 1000,00 no 1º mês e, a partir do 2º mês, R$ 30,00 a mais que no mês anterior.

Opção **2**: R$ 3 000,00 no 1º mês e, a partir do 2º mês, cada parcela com um desconto de 5% em relação à parcela do mês anterior.

Em qual das opções Leila pagará o menor valor total? Qual é esse valor?
opção 2; aproximadamente R$ 50 533,25

117. Tanto a PA (a_1, a_2, a_3, a_4) quanto a PG (b_1, b_2, b_3, b_4) possuem razão igual a 2. Sabendo que $a_2 = b_2$ e $a_3 = b_3$, escreva essas sequências.
PA: $(0, 2, 4, 6)$; PG: $(1, 2, 4, 8)$

118. Determine os valores de *x* e *y* para que as sequências $(x, y, 21)$ e $(x, y, 48)$ sejam uma PA e uma PG crescentes, respectivamente. $x = 3$; $y = 12$

119. Calcule a soma dos 10 primeiros termos da sequência dada por: $a_n = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n, \text{ se } n \in \mathbb{N}^* \text{ é ímpar} \\ \frac{n}{2}, \text{ se } n \in \mathbb{N}^* \text{ é par} \end{cases}$ $\frac{8\,021}{512}$

120. Considerando a PA de razão $r = 25$ e 1º termo $a_1 = 100$, e a PG de razão $q = 2$ e 1º termo $b_1 = 1$, é correto afirmar que: c

a) $a_9 < b_9$

b) $\frac{a_3}{b_3} = 10a_7$

c) $a_n < b_n$, para $n \geq 10$

d) Os termos da PG passam a ser maiores que os termos da PA só a partir do 11º termo.

121. Em uma sequência de circunferências, em que a 1ª tem raio $r = 1$, os diâmetros formam uma PA de razão 6. Podemos afirmar então que os valores dos raios e dos comprimentos dessas circunferências, respectivamente, formam uma: d

a) PA de razão 3 e uma PG de razão 6π

b) PG de razão 3 e uma PA de razão 3π

c) PA de razão 6 e uma PA de razão 6π

d) PA de razão 3 e uma PA de razão 6π

e) PG de razão 6 e uma PG de razão 3π

122. A cada três sucções de uma bomba a vácuo, consegue-se retirar 5% de certo gás existente em um recipiente. Aproximadamente, quantas sucções serão necessárias para se retirar cerca de 99% desse gás do recipiente? 273 sucções

(Dado: $\log 0{,}95 = -0{,}0222$.)

123. **Desafio**

No mês de janeiro, uma pesquisa realizada por uma revista de grande circulação revelou que certo automóvel sofre uma desvalorização anual de aproximadamente 10% do seu valor, enquanto que um terreno de R$ 62 000,00 valoriza-se, em média, R$ 1000,00 a cada ano. Calcule o valor inicial aproximado do automóvel considerado, sabendo que 6 anos após a pesquisa os valores de ambos são praticamente iguais. R$ 127 954,00

124. Com folhas de papel de 0,1 mm de espessura são feitas pilhas, da seguinte maneira:

- 1ª pilha: colocam-se 6 folhas e, em seguida, retiram-se 5
- 2ª pilha: colocam-se 18 folhas e, em seguida, retiram-se 10
- 3ª pilha: colocam-se 54 folhas e, em seguida, retiram-se 15

⋮

a) Quantas folhas há na 10ª pilha? 118 048 folhas

b) Qual é a altura, em centímetros, da 10ª pilha? 1 180,48 cm

c) Calcule, em centímetros, a soma das alturas das 10 primeiras pilhas. 1 768,69 cm

125. Durante uma chuva, para conter a água de uma goteira, coloca-se um recipiente vazio com capacidade de 1 L. No 1º minuto cai uma gota-d'água no recipiente, 2 gotas no 2º minuto, 4 gotas no 3º, e assim por diante. Sabendo que cada três gotas de água correspondem a 1 mL, em quantos minutos a água no recipiente transbordará? 12 min

Ronaldo Lucena

126. Com uma alimentação balanceada, exercícios físicos, acompanhamento médico e muita disciplina é possível emagrecer de maneira saudável sem comprometer o organismo. Se uma pessoa emagrece 320 g em uma semana e, a partir da 2ª semana, emagrece 75% do que emagreceu na semana anterior, determine, em quilogramas, o quanto essa pessoa emagrecerá no período de 8 semanas. 1,152 kg

127. Determine três sequências que sejam, ao mesmo tempo, PA e PG. Troque-as com um colega e verifiquem se estão corretas. Resposta pessoal.

128. Em 1798, o economista inglês Thomas Robert Malthus (1766-1834) desenvolveu uma teoria na qual afirmava que a população mundial tenderia a crescer em progressão geométrica, e a produção de alimentos, em progressão aritmética, o que levaria a população mundial a passar fome.

Até o século XX, a teoria de Malthus não pôde ser comprovada – pois a produção mundial de alimentos foi suficiente para o número de habitantes do planeta. De acordo com economistas, Malthus teria ignorado, por exemplo, que os avanços tecnológicos permitiriam que a curva da produção de alimentos se mantivesse acima da curva de crescimento da população.

Outro fator que não comprovou a teoria de Malthus foi o crescimento populacional, que não aumentou no ritmo esperado por ele. Os dados para a época eram limitados e Malthus apoiou suas conclusões apenas observando o comportamento demográfico de uma determinada região. Na década de 1960, por exemplo, a população mundial crescia, em média, cerca de 2% ao ano e, de 2005 a 2015, a população cresceu, em média, aproximadamente 1,2% ao ano.

a) Escreva os 10 primeiros termos das seguintes sequências numéricas:

- PA, em que $a_1=2$ e $r=2$ (2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20)
- PG, em que $a_1=2$ e $q=2$ (2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1 024)

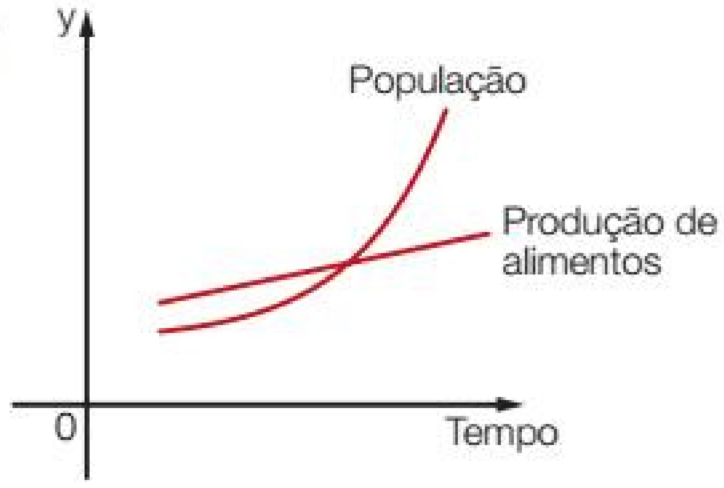
b) Observando as sequências obtidas no item **a**, em qual há um crescimento maior quando comparamos um termo qualquer ao seu anterior? PG

c) A partir da resposta ao item **b**, explique com suas palavras a conclusão de Malthus de que, se a população mundial crescesse em PG e a de alimentos em PA, a população mundial passaria fome a partir de determinado momento. Resposta pessoal.

d) Qual dos gráficos a seguir pode representar a lei de Malthus? II

I

II



Ilustrações: Acervo da editora

129. (Enem-MEC) **Fractal** (do latim *fractus*, fração, quebrado) – objeto que pode ser dividido em partes que possuem semelhança com o objeto inicial. A geometria fractal, criada no século XX, estuda as propriedades e o comportamento dos fractais – objetos geométricos formados por repetições de padrões similares.

O triângulo de Sierpinski, uma das formas elementares da geometria fractal, pode ser obtido por meio dos seguintes passos:

1. comece com um triângulo equilátero (figura 1);
2. construa um triângulo em que cada lado tenha a metade do tamanho do lado do triângulo anterior e faça três cópias;
3. posicione essas cópias de maneira que cada triângulo tenha um vértice comum com um dos vértices de cada um dos outros dois triângulos, conforme ilustra a figura 2;
4. repita sucessivamente os passos 2 e 3 para cada cópia dos triângulos obtidos no passo 3 (figura 3).

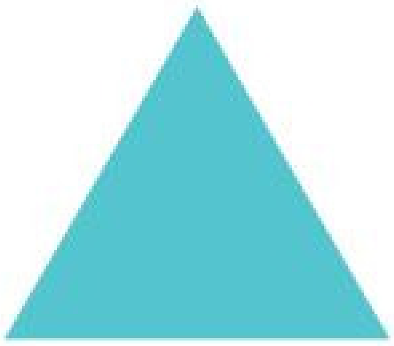


Figura 1

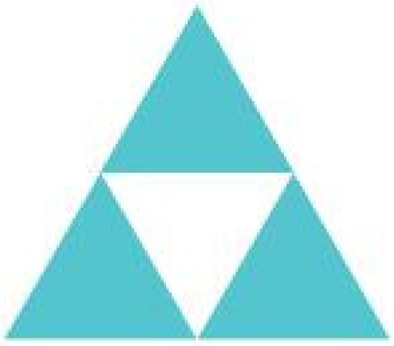
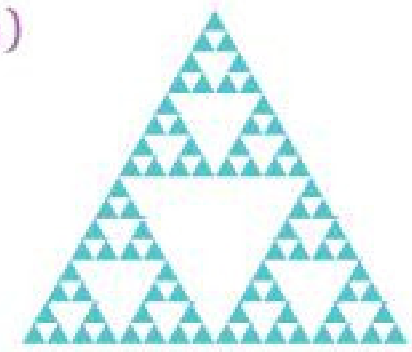


Figura 2

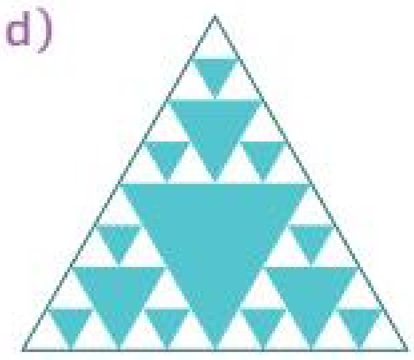
Figura 3

De acordo com o procedimento descrito, a figura 4 da sequência apresentada acima é: c

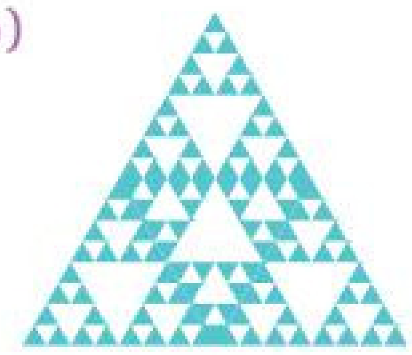
a)



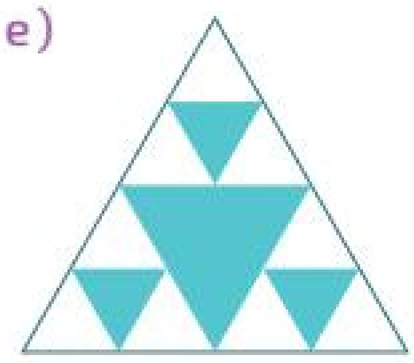
d)



b)

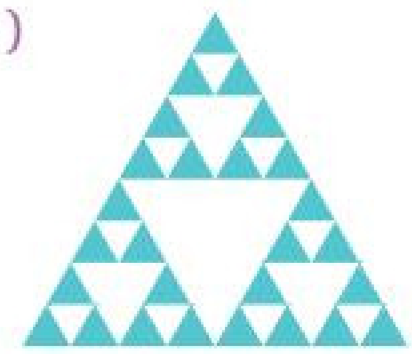


e)



Ilustrações: Acervo da editora

c)



Ser consciente

Combate à dengue

A dengue é uma doença viral que afeta milhares de brasileiros todos os anos e é um dos principais problemas de saúde pública. Em 2014, cerca de 590 mil pessoas foram diagnosticadas com a doença no Brasil, causando 475 mortes. Em geral, a dengue é mais comum em países tropicais e subtropicais, onde o clima é propício para a proliferação do mosquito *Aedes aegypti*, seu principal transmissor.

Quando uma pessoa é picada por um mosquito fêmea infectado, os sintomas da doença começam a aparecer entre 3 e 15 dias; a média é de 5 ou 6 dias. Entre os sintomas, podemos citar febre, dores no corpo (principalmente nos ossos e articulações), dores de cabeça e atrás dos olhos, manchas e erupções na pele, náuseas e vômito, tontura, extremo cansaço e perda de paladar e apetite.

Ao suspeitar que está com dengue, observando alguns desses sintomas, é importante consultar um médico em um hospital ou unidade básica de saúde, a fim de realizar o tratamento adequado. Também é indicado ingerir bastante líquido durante o período da doença, para evitar a desidratação.

A forma mais eficaz de prevenir a dengue é por meio de ações que combatam o acúmulo de água, pois é o local propício para a procriação do *Aedes aegypti*. Os órgãos públicos devem ter iniciativas para este fim, como a visitação às casas por agentes de saúde que verificam a existência de focos e orientam os moradores. Portanto, a contribuição da população é essencial para o controle e combate da proliferação do mosquito. Veja no esquema algumas ações que combatem a dengue.

Fontes de pesquisa: <http://portalsaude.saude.gov.br/index.php/o-ministerio/principal/secretarias/svs/dengue>. Acesso em: 2 out. 2015. <www.dengue.org.br/dengue_prevenir.html>. Acesso em: 2 out. 2015.

Maneiras de combater criadouros

Prevenir a dengue é adotar simples ações que evitem que a água parada se torne criadouro do mosquito *Aedes aegypti*.

Se tiver plantas em casa, encha de areia os pratinhos que ficam embaixo dos vasos.

Nunca descarte lixo na rua ou em terrenos baldios. Armazene-os em sacos plásticos e lixeiras bem tampadas.

Analisando com cidadania

a) Que consequências pode haver se deixarmos água parada em alguns locais de nossa casa?

b) Realize uma pesquisa sobre outras ações que devemos ter para evitar criadouros do *Aedes aegypti* em casa. Com base nisso, verifique se sua casa está protegida desses criadouros. Em caso negativo, busque auxílio e realize as ações propostas e pesquisadas para protegê-la.

Analisando com Matemática

c) Suponha que uma fêmea do mosquito *Aedes aegypti* (1ª geração), com o vírus da dengue, coloque 200 ovos em um reservatório com água parada no quintal de uma casa. Além disso, considere que nas gerações futuras:

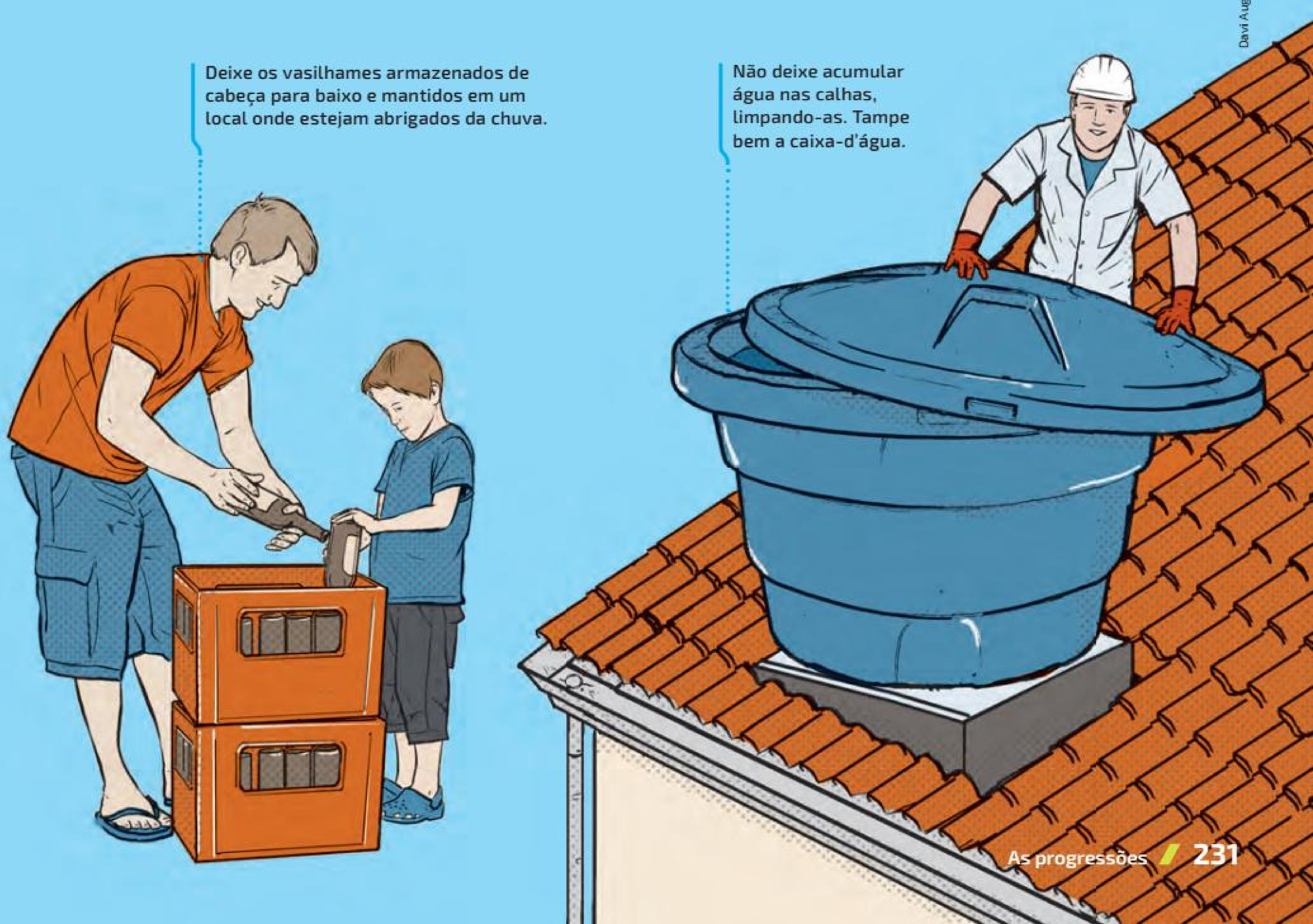
- metade das crias serão fêmeas;
- 30% das fêmeas nascerão infectadas com o vírus;
- as crias se reproduzirão no mesmo local e com a mesma proporção de sua mãe.
  - Qual será a quantidade de fêmeas do *Aedes aegypti* infectadas nesse reservatório na 2ª geração? E na 3ª geração? 30; 900
  - Escreva a sequência das quantidades de fêmeas infectadas nas 5 primeiras gerações. Esta sequência é uma PA ou PG? (1, 30, 900, 27 000, 810 000); PG

a) Resposta esperada: esses locais podem tornar-se criadouros do mosquito *Aedes aegypti*, possibilitando a transmissão da dengue para as pessoas que moram na casa e em regiões próximas, além da proliferação do mosquito para outras regiões.

b) Algumas possíveis respostas: manter pneus velhos sem água e em local coberto, protegido da chuva; manter tonéis e barris com água bem tampados; lavar com escova e sabão tanques utilizados para armazenar água; higienizar ralos que são raramente utilizados na casa.

Veja mais informações sobre a dengue no *site*:
- <http://tub.im/j55de4>

(acesso em: 11 fev. 2016)



Davi Augusto

Deixe os vasilhames armazenados de cabeça para baixo e mantidos em um local onde estejam abrigados da chuva.

Não deixe acumular água nas calhas, limpando-as. Tampe bem a caixa-d'água.

capítulo

9

Trigonometria no triângulo

Área para cadeirante, no estádio do Maracanã, no Rio de Janeiro (RJ), em 2013. Esse estádio foi um dos reformados para a Copa do Mundo de 2014, sediada no Brasil.

Rogério Reis/Pulsar

Veja mais informações sobre acessibilidade no *site*:

- <http://tub.im/4udwgr>

(acesso em: 11 fev. 2016)

Acessibilidade

A acessibilidade busca garantir o uso, com segurança e autonomia, dos espaços e serviços que a cidade oferece independentemente da necessidade de cada um, sendo ela permanente ou temporária, fornecendo a maior independência possível.

Para garantir a melhoria da qualidade de vida das pessoas com algum tipo de necessidade especial medidas podem ser adotadas, como:

- legendas ou intérpretes de libras em programas de televisão, para deficientes auditivos;
- livros escritos em braille e *softwares* especiais para navegação na internet, para deficientes visuais;
- espaços físicos planejados, em locais públicos e privados, para o deslocamento de deficientes físicos ou pessoas com mobilidade reduzida.

Algumas dessas melhorias são regulamentadas por leis e normas, uma delas é a que estabelece a inclinação máxima que uma rampa de acesso deve ter, informando que a razão entre a altura *a* que se deseja acessar e o comprimento horizontal *c* da rampa deve ser no máximo 0,0833.

$$\frac{a}{c} \leq 0,0833$$

Assim, por exemplo, para acessar uma altura de 1 m, é necessário que o comprimento horizontal da rampa não seja inferior a 12 m, pois $\frac{1}{12} \simeq 0,0833$.

Caso julgue necessário, explique aos alunos que, em situações excepcionais, podem ser utilizadas inclinações um pouco superiores a 8,33%.

Fonte de pesquisa: <www.pessoacomdeficiencia.gov.br/app/sites/default/files/arquivos/%5Bfield_generico_imagens-filefield-description%5D_24.pdf>. Acesso em: 10 dez. 2015.

Desenhorama Estúdio

A acessibilidade é direito de todos e responsabilidade de cada um de nós.

Oriente os alunos a escreverem as respostas no caderno.

A) Em sua opinião, qual a importância de estabelecer leis e normas que garantam a acessibilidade? Resposta pessoal.

B)* Cite algumas medidas, além das apresentadas no texto, que podem auxiliar pessoas com alguma necessidade especial. Algumas possíveis respostas: banheiros adaptados para cadeirantes, piso tátil para deficientes visuais.

C) Para acessar uma altura de 50 cm, qual deve ser, aproximadamente, o comprimento horizontal mínimo da rampa? 600 cm ou 6 m

*Se julgar necessário, peça aos alunos que realizem uma pesquisa para responder ao item B.

Teorema de Tales

Ao final do estudo deste capítulo podem ser trabalhados o exemplo e as atividades das páginas 274 e 275 da seção Acessando tecnologias.

Autor desconhecido. Séc. XVIII. Gravura. Coleção particular. Foto: Sammlung Rauch/Interfoto/Latinstock

Tales de Mileto

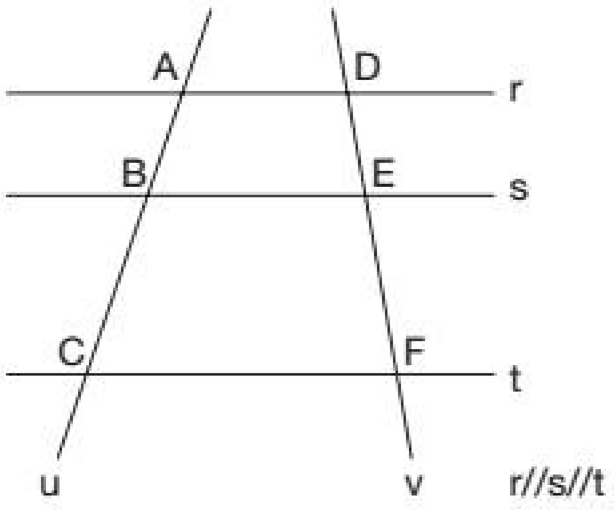
Diga aos alunos que a atividade 7 apresenta mais detalhes acerca do método utilizado por Tales no cálculo da altura da pirâmide.

O grego Tales de Mileto, que viveu por volta da primeira metade do século VI a.C., é considerado o pai da **Geometria Demonstrativa**, na qual se faz necessário justificar, por meio de demonstrações lógicas, os conhecimentos geométricos. Os estudos de Tales contribuíram em diversas áreas do conhecimento, como Matemática, Filosofia e Astronomia, tornando-o conhecido como um dos sete sábios da Antiguidade.

Acredita-se que Tales tenha vivido parte de sua vida no Egito, onde se deparou com um problema: calcular a altura de uma pirâmide; e ao resolvê-lo, tornou-se muito admirado.

Na resolução desse problema, Tales utilizou conhecimentos acerca de semelhança de triângulos. O método empregado por ele resultou no que atualmente denominamos **Teorema de Tales**.

Para enunciar o Teorema de Tales, consideraremos inicialmente um feixe de retas paralelas *r*, *s* e *t*, e as retas transversais *u* e *v*.



Um feixe de retas paralelas é um conjunto de três ou mais retas contidas em um mesmo plano, paralelas duas a duas.

Na figura, temos:

- *A* e *D*, *B* e *E*, *C* e *F*, determinados nas retas transversais pela mesma reta paralela, denominados pontos correspondentes;
- $\overline{AB}$ e $\overline{DE}$, $\overline{BC}$ e $\overline{EF}$, $\overline{AC}$ e $\overline{DF}$, determinados nas retas transversais pelo mesmo par de retas paralelas, denominados segmentos correspondentes.

De acordo com o Teorema de Tales:

> Se duas retas transversais são cortadas por um feixe de retas paralelas, então a razão entre quaisquer dois segmentos determinados em uma das transversais é igual à razão entre os segmentos correspondentes da outra transversal.

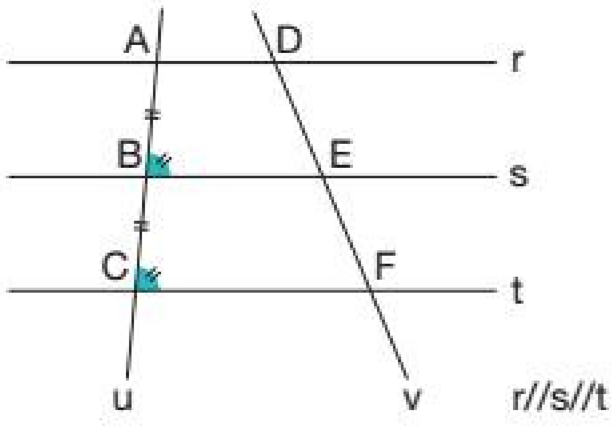
A partir deste teorema, em relação à figura anterior, temos:

- $\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$
- $\frac{AC}{AB}=\frac{DF}{DE}$
- $\frac{AC}{BC}=\frac{DF}{EF}$

Para demonstrar o Teorema de Tales, consideraremos dois casos:

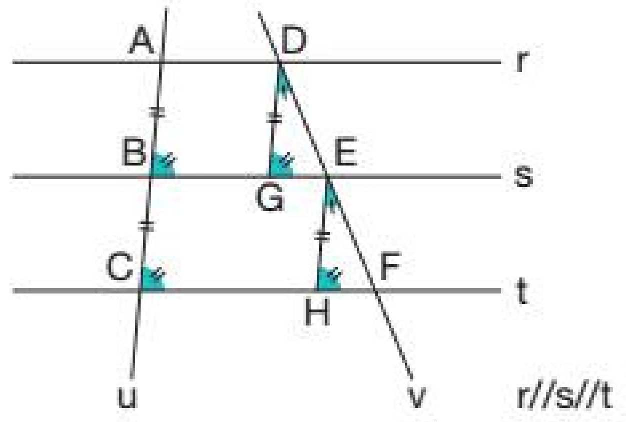
- 1º caso

  Considerando um feixe de retas paralelas *r*, *s* e *t*, que divide duas transversais *u* e *v* de maneira que $\overline{AB}\equiv\overline{BC}$, vamos demonstrar que $\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$.



Ilustrações: Acervo da editora

Traçando os segmentos congruentes $\overline{DG}$ e $\overline{EH}$, paralelos à reta *u*, obtemos os triângulos DEG e EFH, com $E\hat{D}G \equiv F\hat{E}H$ e $E\hat{G}D \equiv F\hat{H}E$, pois são, respectivamente, ângulos correspondentes. Dessa maneira, pelo caso ALA (ângulo, lado, ângulo), os triângulos DEG e EFH são congruentes.

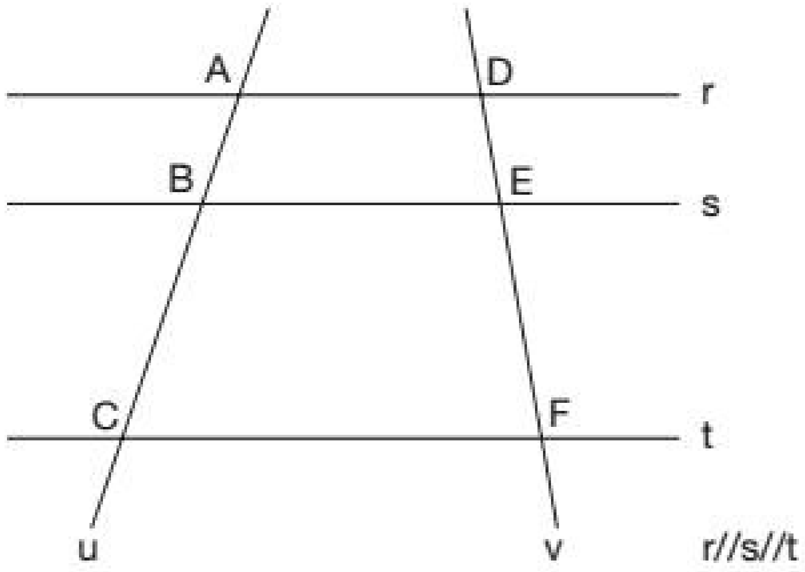


Verifique se os alunos perceberam que, ao traçar $\overline{DG}$ e $\overline{EH}$ foram obtidos os paralelogramos ABGD e BCHE, de maneira que $\overline{AB} \equiv \overline{DG}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{EH}$.

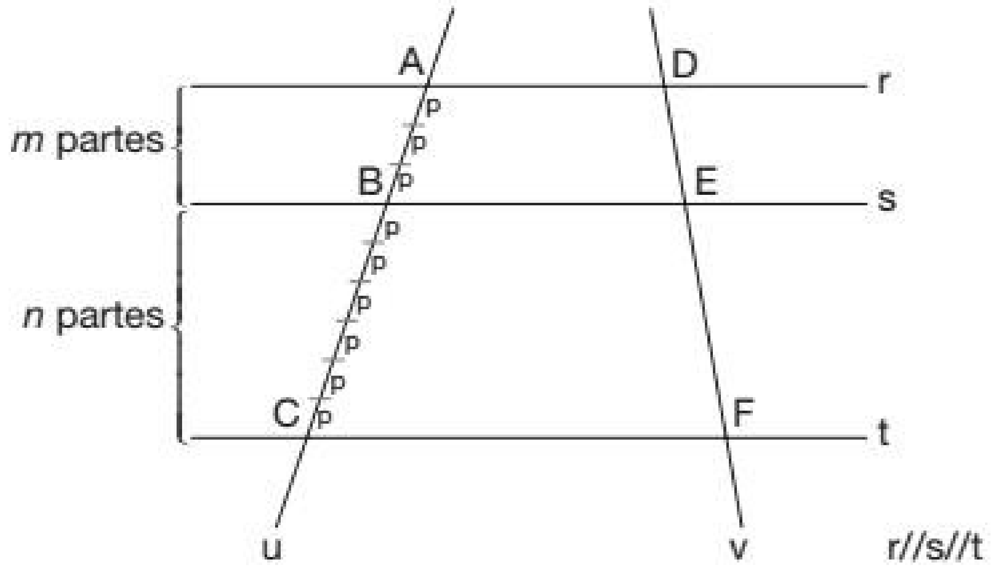
Portanto, $\overline{DE} \equiv \overline{EF}$, ou seja, $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF} = 1$.

- 2º caso

Considerando um feixe de retas paralelas *r*, *s* e *t*, que divide duas transversais *u* e *v* de maneira que $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ tenham medidas racionais, vamos demonstrar que $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$.

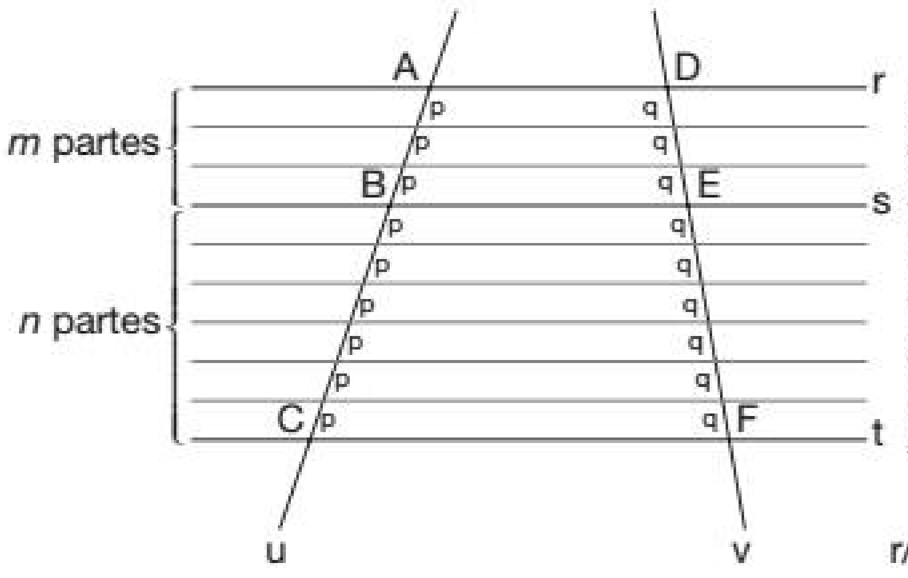


Dividimos $\overline{AB}$ em *m* partes de medida *p* $(AB = mp)$ e $\overline{BC}$ em *n* partes de medida *p* $(BC = np)$.



Pelos pontos que dividem $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ traçamos retas paralelas ao feixe de retas *r*, *s* e *t*.

De acordo com o 1º caso, as retas paralelas determinam em $\overline{DE}$ e em $\overline{EF}$, respectivamente, *m* e *n* segmentos congruentes, cuja medida está indicada por *q*.



Ilustrações: Acervo da editora

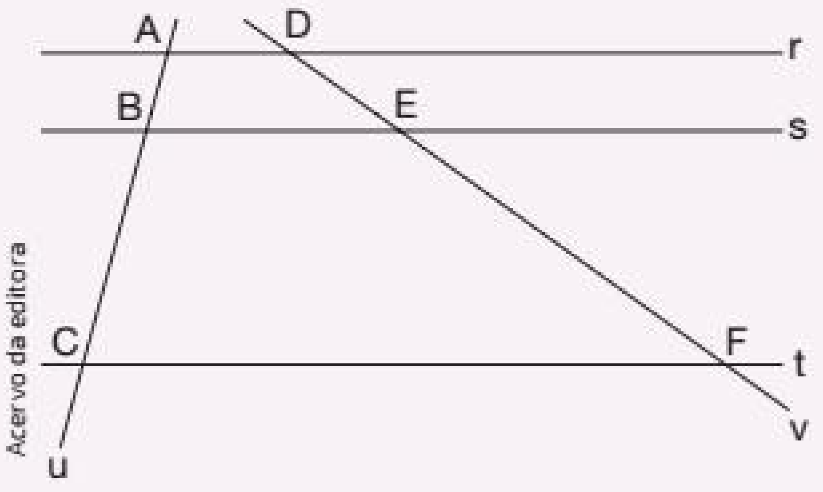
Se julgar necessário, explique aos alunos que a demonstração do Teorema de Tales foi realizada para os casos em que o feixe de retas paralelas divide as transversais em segmentos comensuráveis entre si, ou seja, que podem ter as medidas expressas por uma quantidade inteira de certa unidade. Contudo, diga que este teorema também é válido para o caso de os segmentos obtidos nas transversais serem incomensuráveis.

Assim, temos $\frac{AB}{BC} = \frac{mp}{np} = \frac{m}{n}$ e $\frac{DE}{EF} = \frac{mq}{nq} = \frac{m}{n}$.

Portanto, $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF} = \frac{m}{n}$.

Atividades resolvidas

R1. Na figura, AB = 3, BC = 9 e DE = 5. Determine o valor de EF, sabendo que as retas *r*, *s* e *t* são paralelas.



Acervo da editora

Resolução

Pelo Teorema de Tales, temos:

$$\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}\Rightarrow\frac{3}{9}=\frac{5}{EF}\Rightarrow 3\cdot EF=45\Rightarrow \boxed{EF=15}$$

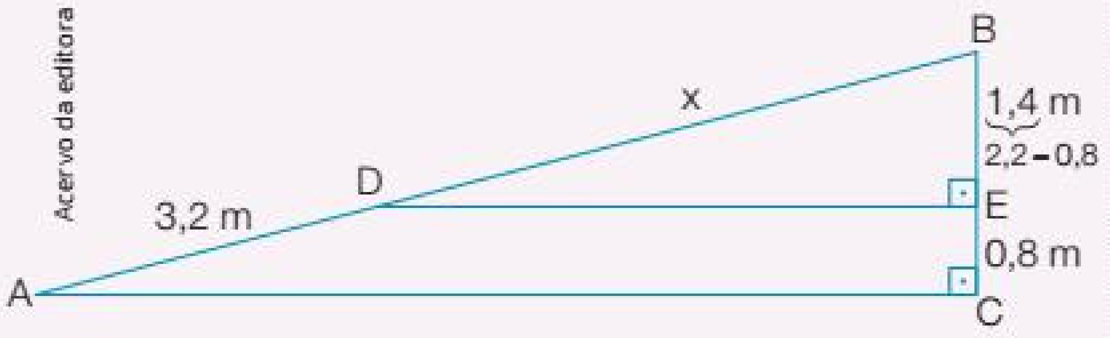
R2. (Enem-MEC) A rampa de um hospital tem na sua parte mais elevada uma altura de 2,2 metros. Um paciente ao caminhar sobre a rampa percebe que se deslocou 3,2 metros e alcançou uma altura de 0,8 metro.

A distância em metros que o paciente ainda deve caminhar para atingir o ponto mais alto da rampa é:

a) 1,16 metro
b) 3,0 metros
c) 5,4 metros
d) 5,6 metros
e) 7,04 metros

Resolução

Nomeando de *x* a distância que o paciente ainda precisa caminhar sobre a rampa, e com base nas informações do enunciado, podemos construir o seguinte esquema:



Acervo da editora

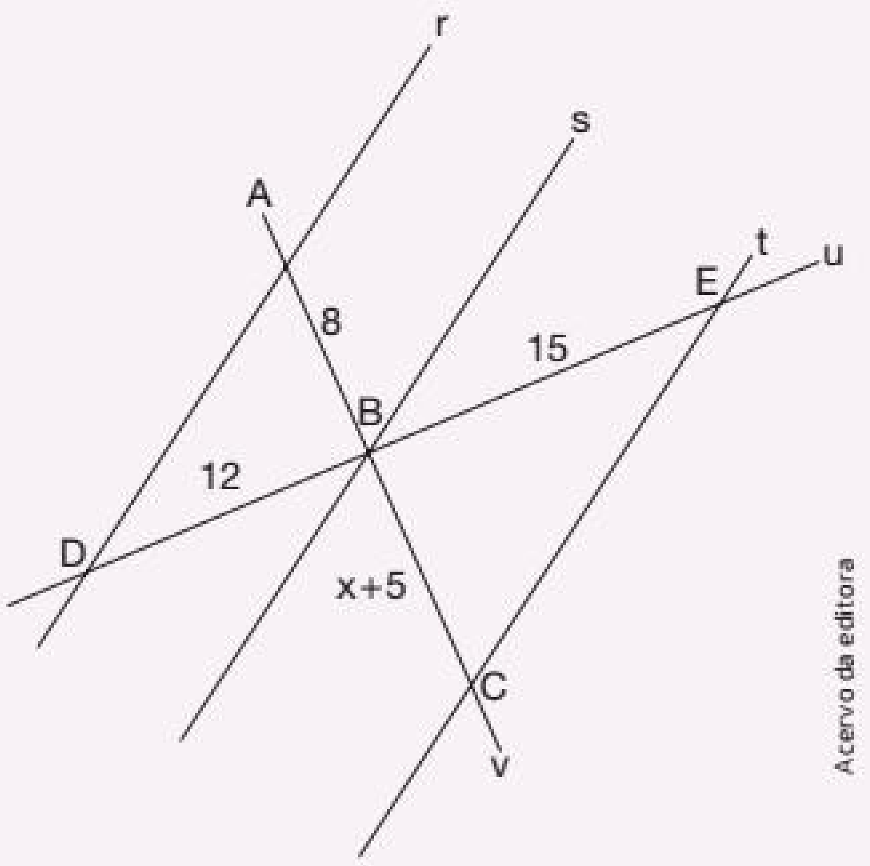
Como $\overline{AC}\,/\,/\overline{DE}$, temos pelo teorema de Tales:

$$\frac{x}{1,4}=\frac{3,2}{0,8}\Rightarrow x=5,6$$

Logo, a distância que falta caminhar para atingir o ponto mais alto é de 5,6 metros.

Portanto, a alternativa correta é a **d**.

R3. Calcule o valor de *x* sabendo que r//s//t.



Acervo da editora

Resolução

Note que $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ estão contidos na reta *v* e $\overline{DB}$ e $\overline{BE}$ estão contidos na reta *u*.

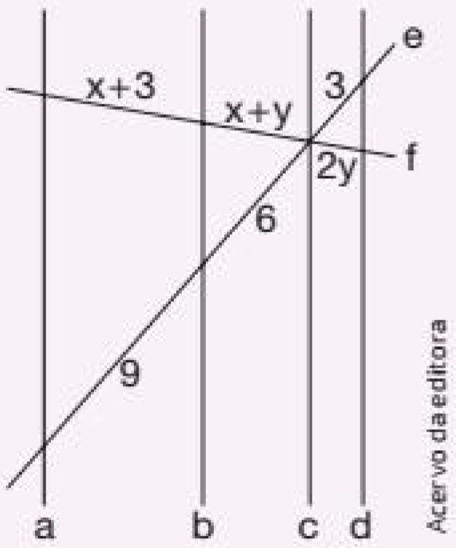
De acordo com o Teorema de Tales:

$$\frac{AB}{BC}=\frac{DB}{BE}\Rightarrow\frac{8}{x+5}=\frac{12}{15}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12x+60=120\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12x=60\Rightarrow \boxed{x=5}$$

R4. Determine os valores de *x* e *y*, sabendo que a//b//c//d.



Acervo da editora

Resolução

Utilizando o Teorema de Tales, temos:

- $\frac{3}{6}=\frac{2y}{x+y}\Rightarrow 3x+3y=12y\Rightarrow 3x=9y\Rightarrow x=3y$ (I)
- $\frac{6}{9}=\frac{x+y}{x+3}\Rightarrow 6x+18=9x+9y\Rightarrow 3x+9y=18$ (II)

Substituindo **I** em **II**, obtemos *y*.

$$3x+9y=18\Rightarrow 3\cdot(3y)+9y=18\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 18y=18\Rightarrow y=1$$

Calculamos *x* substituindo o valor de *y* na igualdade x = 3y.

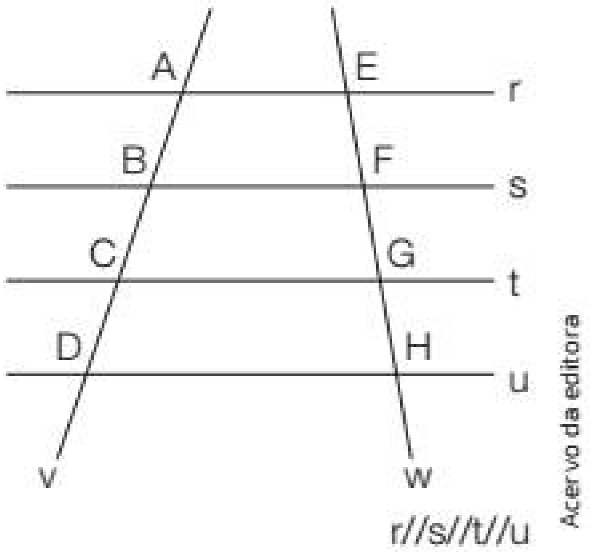
$$x=3y\Rightarrow x=3\cdot 1\Rightarrow x=3$$

Portanto, x = 3 e y = 1.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

1. Na figura, as retas *r*, *s*, *t* e *u*, paralelas entre si, são cortadas por duas transversais que determinam os pontos *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G* e *H*.



Acervo da editora

Nessas condições, verifique quais das igualdades estão incorretas. c; e; f; h

a) $\frac{AB}{AC}=\frac{EF}{EG}$

b) $\frac{AC}{AD}=\frac{EG}{EH}$

c) $\frac{AC}{AB}=\frac{EF}{EG}$

d) $\frac{BD}{BC}=\frac{FH}{FG}$

e) $\frac{AD}{BD}=\frac{EG}{EH}$

f) $\frac{EG}{FH}=\frac{BD}{AC}$

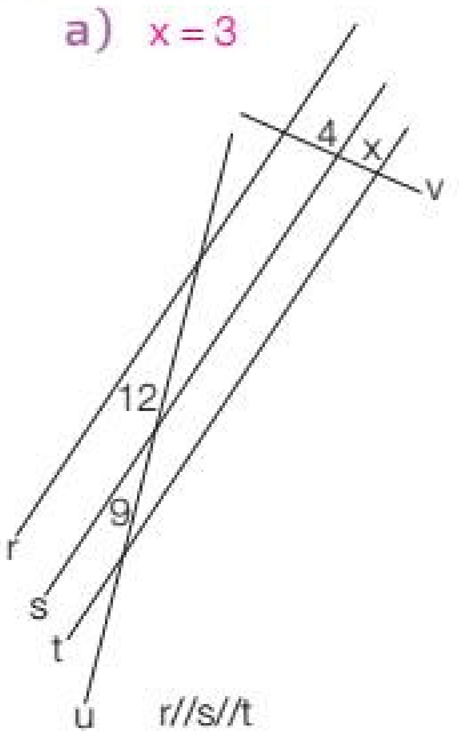
g) $\frac{EH}{EF}=\frac{AD}{AB}$

h) $\frac{GH}{EF}=\frac{AB}{CD}$

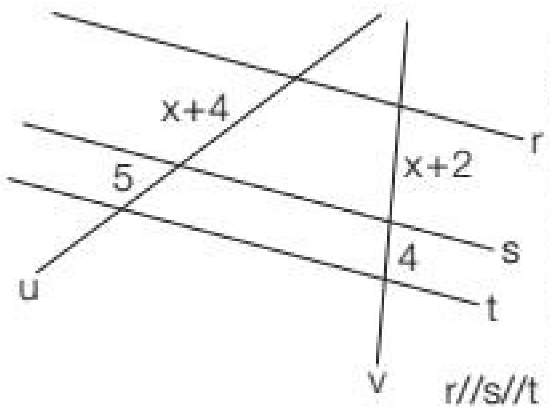
i) $\frac{BC}{CD}=\frac{FG}{GH}$

2. Determine o valor de *x* em cada figura.

a) x = 3

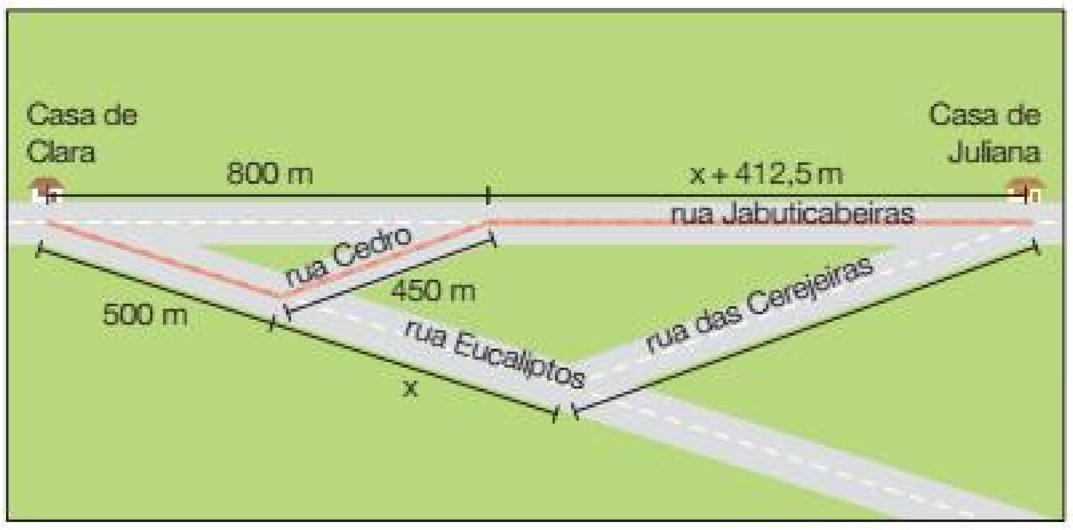


b) x = 6



Ilustrações: Acervo da editora

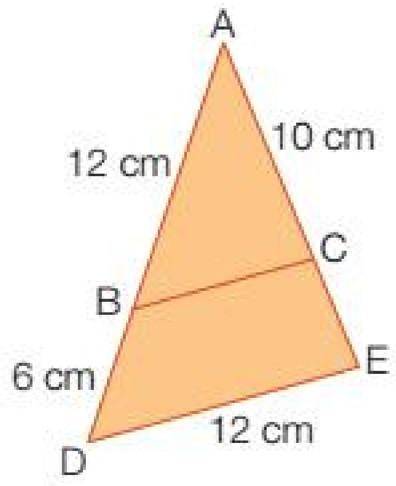
3. Observe um mapa em que estão representadas as ruas que circundam as casas das amigas Clara e Juliana. Para que Clara vá de sua casa à casa de sua amiga, passando pelas ruas Eucaliptos, Cedro e Jabuticabeiras, respectivamente, quantos metros ela terá de percorrer? 2 050 m



Sergio Lima

Considere que as ruas Cedro e Cerejeiras são paralelas.

4. Calcule o perímetro do ΔADE, sabendo que $\overline{BC}//\overline{DE}$. 45 cm



Acervo da editora

5. Observe parte do mapa de uma cidade.

Acervo da editora

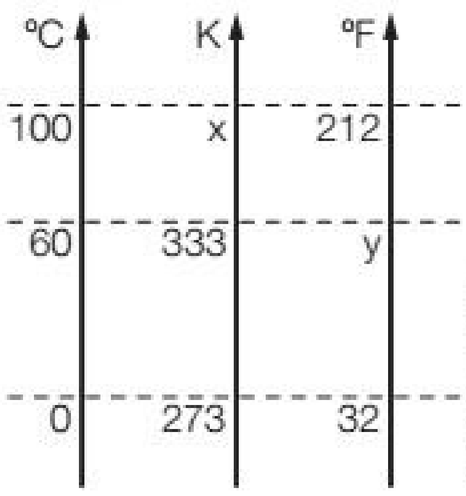
As ruas Brasil, Sergipe e Araguaia são paralelas e interceptadas pelas avenidas Triunfo e Paraná. De acordo com as medidas indicadas, determine quantos metros um pedestre irá percorrer se caminhar em linha reta da esquina da rua:

a) Araguaia com a avenida Paraná à esquina da rua Brasil com a avenida Paraná. 300 m

b) Brasil com a avenida Triunfo à esquina da rua Araguaia com a avenida Triunfo. 240 m

6. Existem diferentes unidades de medida de temperatura. No Brasil, por exemplo, é muito utilizada a Celsius (°C). Já outros países, geralmente de língua inglesa, utilizam também a Fahrenheit (°F). A unidade Kelvin (K) é utilizada principalmente no meio científico.

De acordo com a figura abaixo, determine as medidas *x* e *y*, que representam temperaturas nas escalas Kelvin e Fahrenheit, respectivamente.
x = 373 K; y = 140 °F



Acervo da editora

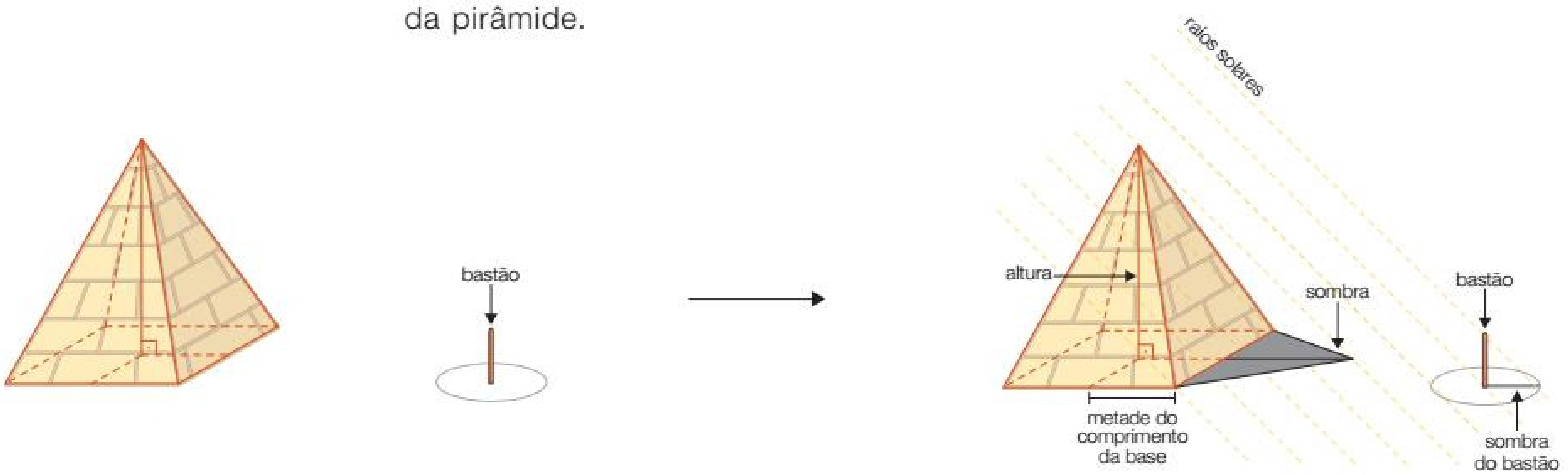
Contexto Tales e as pirâmides do Egito

7. Estudamos, no início do capítulo, a possibilidade de Tales de Mileto ter vivido no Egito, onde teria realizado o cálculo da altura de uma pirâmide por meio de medições de sombras. Para essa história, há duas versões sobre os procedimentos utilizados por Tales.

A primeira versão, Tales teria medido a altura de uma pirâmide do Egito observando o comprimento de sombras. Ele teria fincado um bastão verticalmente no chão, próximo à pirâmide e aguardado até que o comprimento da sombra do bastão atingisse a mesma medida da altura do bastão.

Como os raios solares que atingem a Terra são paralelos entre si, Tales sabia, naquele momento, que a altura da pirâmide também tinha a mesma medida de sua sombra. Assim, ele mediu o comprimento da sombra e adicionou metade do comprimento da base (que coincidia com parte da sombra), obtendo a altura da pirâmide.

Fonte de pesquisa: EVES, Howard. Introdução à história da matemática. Tradução Hygino H. Domingues. Campinas: Ed. da Unicamp, 2004.




WitR/Shutterstock.com

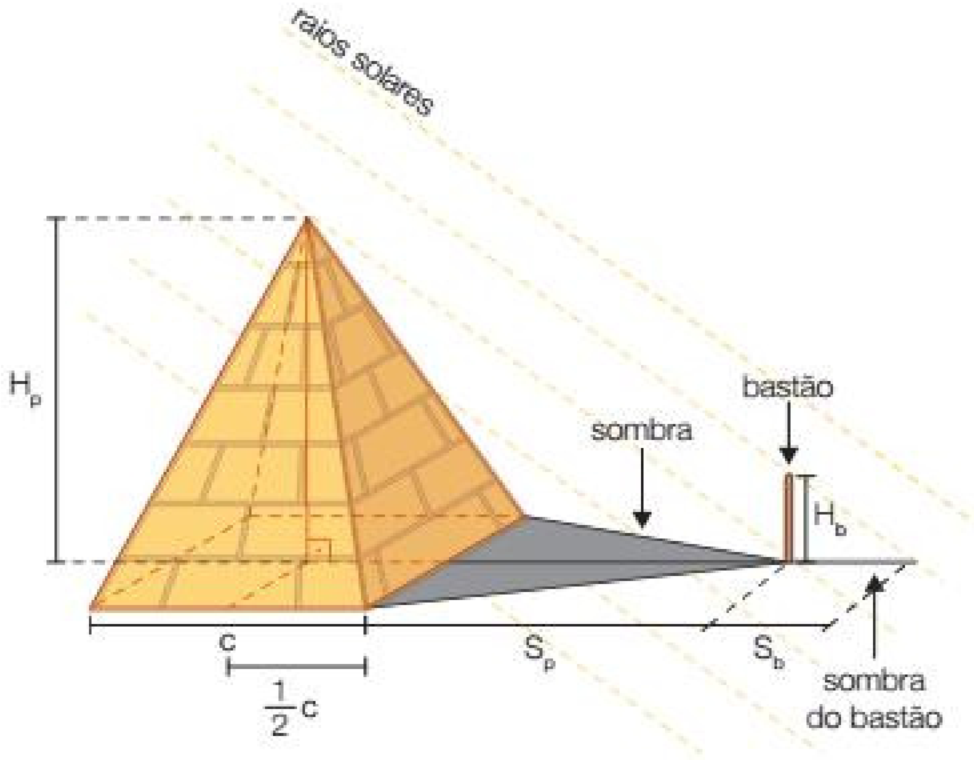
Construídas para servirem de túmulos aos faraós e seus familiares, as pirâmides estão entre as maiores construções já feitas pelos homens. Dentre elas, recebem grande destaque as chamadas pirâmides de Gizé.

A segunda versão relata que Tales teria determinado a altura da pirâmide por meio de uma proporção estabelecida entre as medidas da altura do bastão, quando fixado verticalmente no chão, da sombra do mesmo, da altura da pirâmide e da sombra projetada pela pirâmide adicionada à metade do comprimento de sua base.

a) Utilizando o método descrito na primeira versão, a medição teria que ocorrer no momento em que a sombra do bastão fosse igual ao comprimento do mesmo, portanto em um momento específico. Já na segunda versão, a medição poderia ser realizada em diferentes momentos do dia, pois, para estabelecer a proporção entre as medidas, a medida da sombra do bastão não precisaria ser igual ao seu comprimento.

b) Sim, pois a utilização da proporção permite que a medição seja realizada em diferentes momentos do dia, inclusive no descrito na primeira versão.

Proporção: $\dfrac{H_p}{H_b} = \dfrac{\frac{1}{2}c + S_p}{S_b}$



Ilustrações: acervo da editora

De acordo com as informações apresentadas, resolva as questões.

a) Se Tales tivesse utilizado o método descrito na primeira versão, a medição da altura da pirâmide teria sido realizada em um momento específico do dia? E o da segunda versão? Justifique.

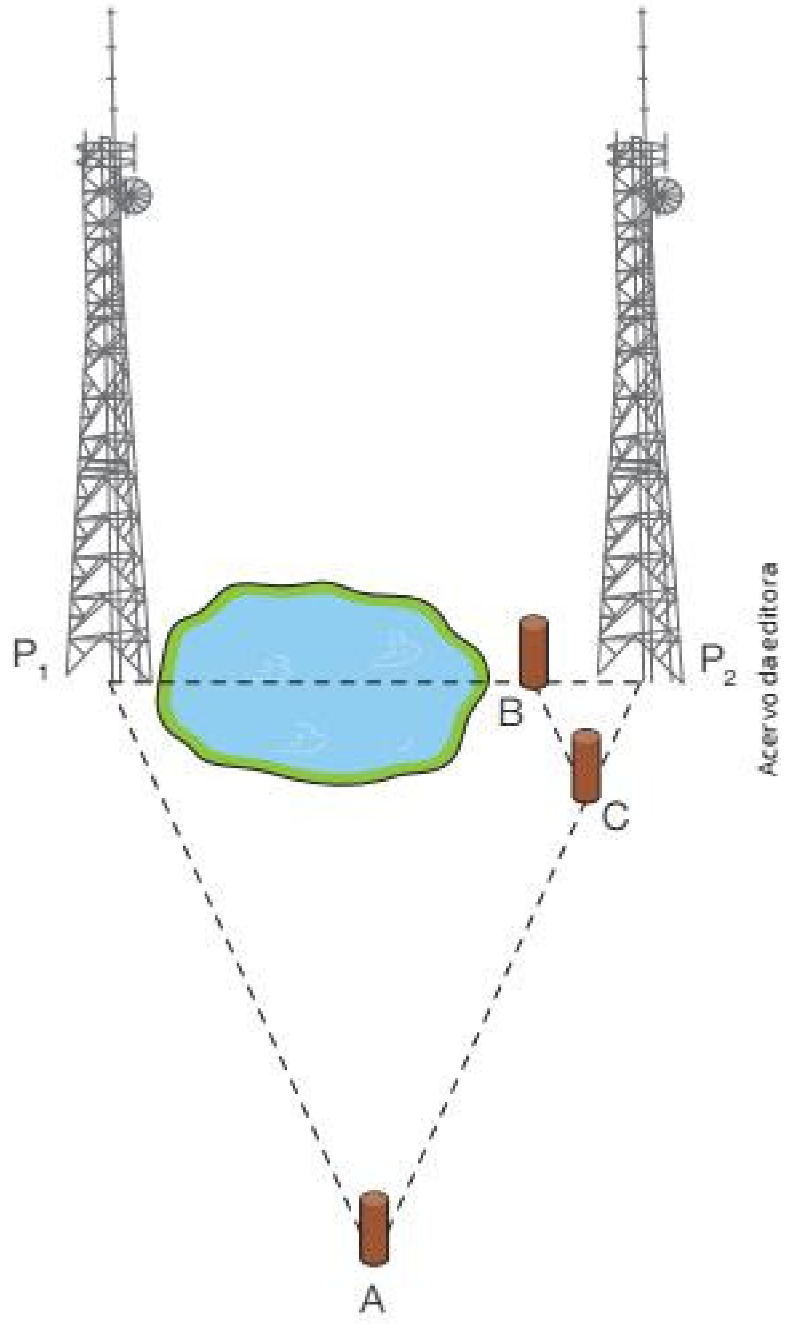
b) É correto afirmar que o método apresentado na primeira versão seria um caso particular do apresentado na segunda versão? Por quê?

c) Com base no método utilizado por Tales na segunda versão, determine a altura de um poste cuja sombra, em determinado momento do dia, mede 3 m, tendo como referência uma pessoa de 1,6 m de altura, cuja sombra nesse mesmo momento mede 1,2 m. 4 m

Peça aos alunos que desconsiderem o diâmetro da base do poste na resolução do item **c** desta atividade.

d) Imagine que uma pirâmide possua uma base quadrada de 234 m de aresta e que sua sombra, em determinado momento do dia, tenha 63 m. Comparando-a com um bastão que, no mesmo instante, a sombra representa $\frac{6}{5}$ de sua altura, determine a altura aproximada da pirâmide. 150 m

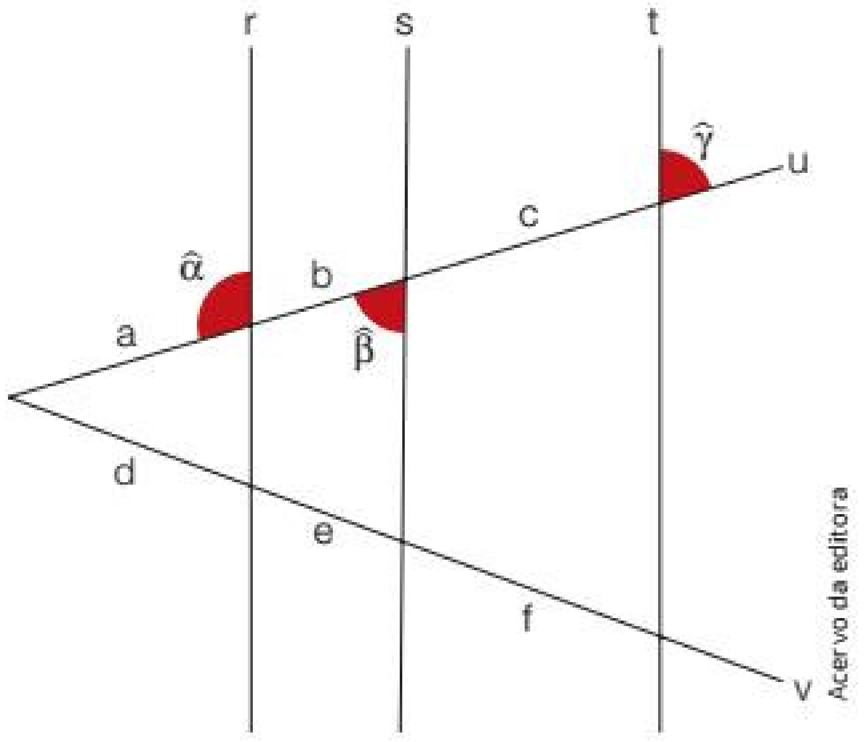
8. Uma empresa de telefonia instalou duas torres idênticas (P_1 e P_2), uma em cada lado de uma lagoa, conforme o esquema abaixo, para passar por elas um cabo telefônico.



Para calcular o comprimento mínimo necessário de cabo (P_1P_2), foram fincadas estacas nos pontos *A*, *B* e *C*, de modo que $\overline{BC} // \overline{P_1A}$, e medidas as distâncias $AP_2 = 60$ m, $CP_2 = 12$ m e $BP_2 = 10$ m.

Quantos metros de cabo, no mínimo, foram utilizados entre P_1 e P_2? 50 m

9. Na figura, os ângulos α e γ são suplementares e $med(\beta) \neq med(\gamma)$.



a) As retas *r* e *s* são paralelas? E as retas *r* e *t*? não; sim

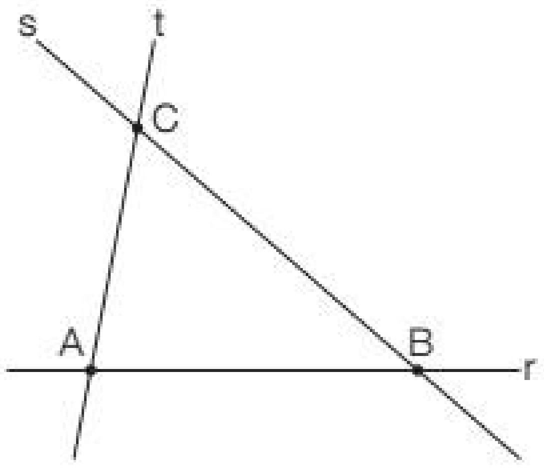
b) Supondo que $\frac{a}{b}$ e $\frac{d}{e}$ sejam frações irredutíveis, é possível que a=d? Em caso afirmativo, apresente um exemplo. sim; Uma possível resposta: a=d=5, b=3 e e=4.

c) Escreva três igualdades verdadeiras envolvendo razões entre as medidas dos segmentos indicadas na figura. Resposta no final do livro.

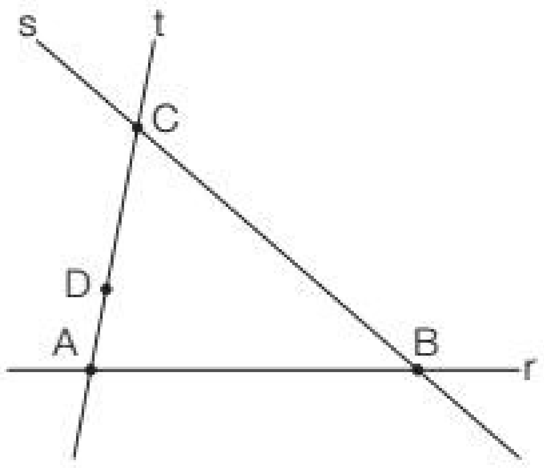
10. Em um triângulo qualquer, se traçarmos uma reta passando pelos pontos médios de dois de seus lados, ela será paralela ou concorrente a uma reta que contém o terceiro lado? Por quê? Resposta no final do livro.

11. Veja como pode ser traçada uma reta paralela a uma reta *r* dada.

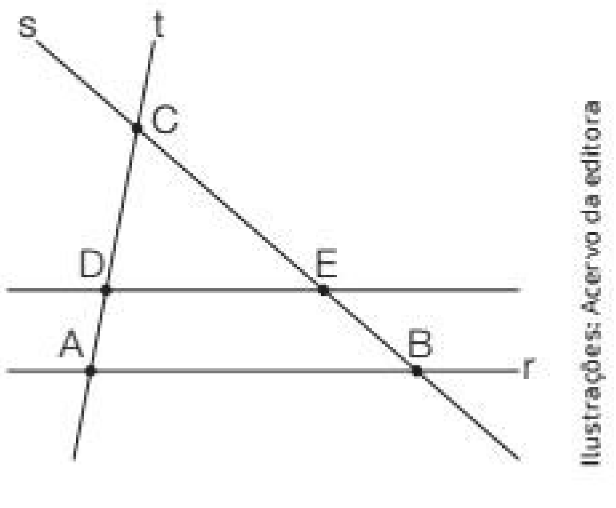
- Traçamos duas retas *s* e *t*, concorrentes à *r* nos pontos *A* e *B*, tal que *s* e *t* se intersectem em *C*.



- Marcamos sobre *t* um ponto *D* a uma distância conveniente de *A*.



- Para obter o ponto *E* sobre a reta *s*, de maneira que $r // \overleftrightarrow{DE}$, utilizamos a igualdade $\frac{BE}{BC} = \frac{AD}{AC}$ para calcular a distância BE.
- Por fim, traçamos a reta $\overleftrightarrow{DE}$, paralela à *r*.



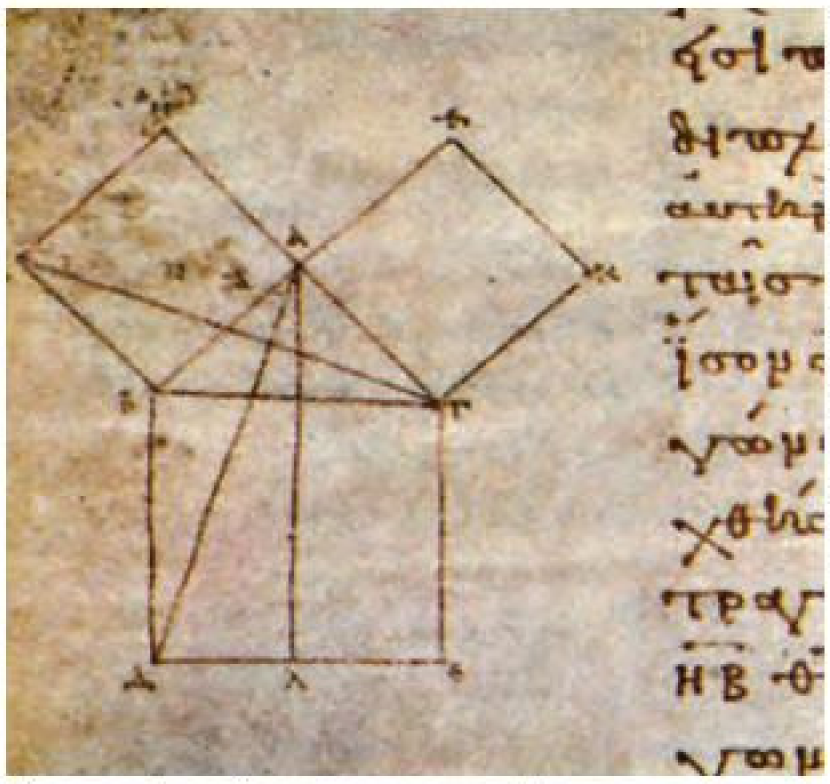
a) Utilizando esse método, trace em uma folha de papel duas retas paralelas para o caso em que AC=6 cm, AD=2 cm e BC=9 cm. Resposta no final do livro.

b) De acordo com as medidas indicadas no item a, quantos centímetros tem $\overline{CE}$? 6 cm

c) Com base no método apresentado, descreva o procedimento para traçar uma reta externa a um triângulo, que seja paralela a um de seus lados. Resposta no final do livro.

Teorema de Pitágoras

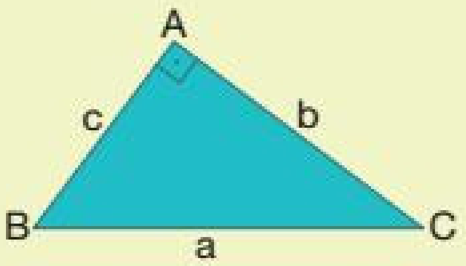
Um dos teoremas matemáticos mais conhecidos é o **Teorema de Pitágoras**. Demonstrado pela primeira vez há cerca de 2 500 anos, pelo matemático grego Pitágoras (c. 585-500 a.C.), esse teorema é um dos que possuem maior número de demonstrações. A imagem ao lado é um fragmento de um texto grego de cerca de 800 d.C., que apresenta a demonstração do Teorema de Pitágoras dada por Euclides de Alexandria.


c. 800. Biblioteca Bodleian, Oxford (Inglaterra)

Demonstração grega, por volta do ano 800 d.C.

O Teorema de Pitágoras apresenta a seguinte relação entre os três lados de um triângulo retângulo:

Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

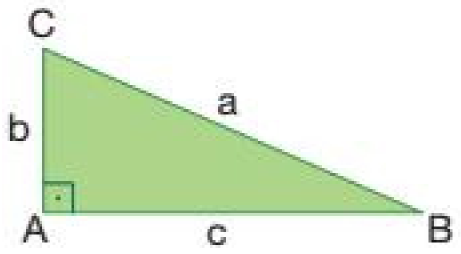


$$a^2 = b^2 + c^2$$

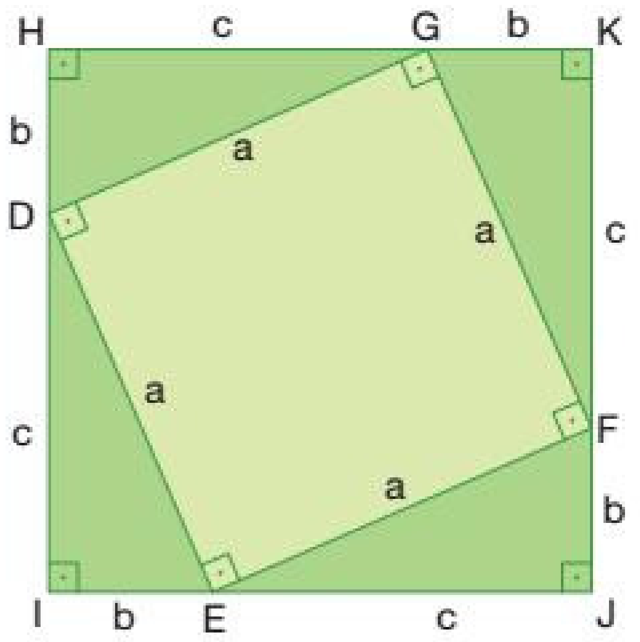
Em um triângulo retângulo, a hipotenusa corresponde ao lado oposto, e os catetos aos lados adjacentes ao ângulo reto.

Para demonstrar esse teorema, consideramos inicialmente o triângulo retângulo ABC.

Explique aos alunos que o teorema recebe esse nome em homenagem a Pitágoras, o primeiro a demonstrá-lo. Contudo, casos particulares desse teorema já eram conhecidos por povos anteriores a Pitágoras, como os egípcios.



Sobre os lados de um quadrado DEFG, de lado *a*, dispomos quatro triângulos congruentes ao triângulo retângulo ABC dado, obtendo um quadrado HIJK, de lado b+c.



Ilustrações: Acervo da editora

Note que a área do quadrado HIJK pode ser obtida de duas maneiras:

- adicionando a área do quadrado DEFG e a dos quatro triângulos retângulos: $a^2 + 4 \cdot \frac{bc}{2}$
- elevando ao quadrado a medida de seu lado: $(b+c)^2$

Dessa maneira, segue que:

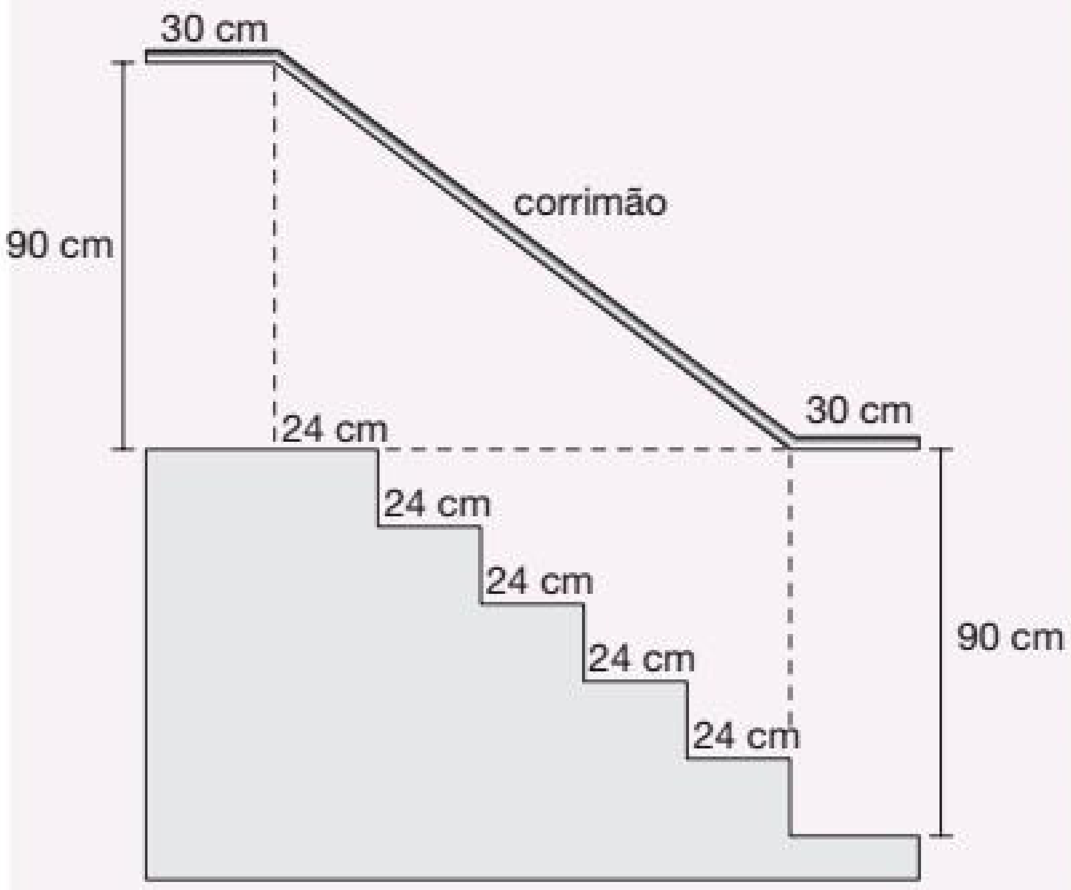
$$a^2 + 4 \cdot \frac{bc}{2} = (b+c)^2$$

$$a^2 + \cancel{2bc} = b^2 + \cancel{2bc} + c^2$$

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

Atividades resolvidas

R5. (Enem-MEC)

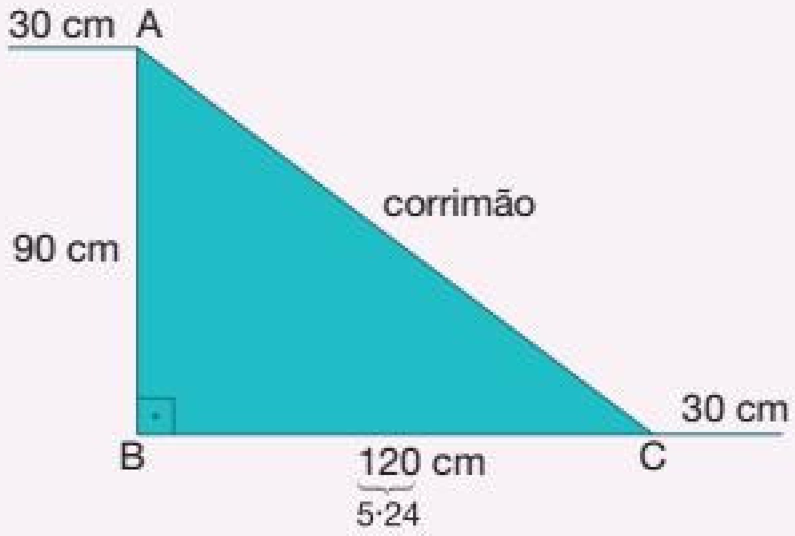


Na figura acima, que representa o projeto de uma escada com 5 degraus de mesma altura, o comprimento total do corrimão é igual a:

a) 1,8 m
b) 1,9 m
c) 2,0 m
d) 2,1 m
e) 2,2 m

Resolução

Parte do corrimão da escada pode ser representado pela hipotenusa do ΔABC, como indicado no esquema.



Ilustrações: Acervo da editora

Pelo Teorema de Pitágoras:

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 \Rightarrow (AC)^2 = 90^2 + 120^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (AC)^2 = 22\,500 \Rightarrow AC = \sqrt{22\,500} = 150$$

Logo, o comprimento total do corrimão é:

$$30 + AC + 30 = 30 + 150 + 30 = 210 \rightarrow 210 \text{ cm}$$

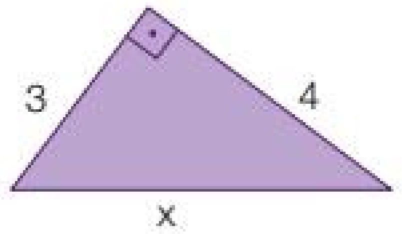
Portanto, a alternativa correta é a **d**.

Atividades

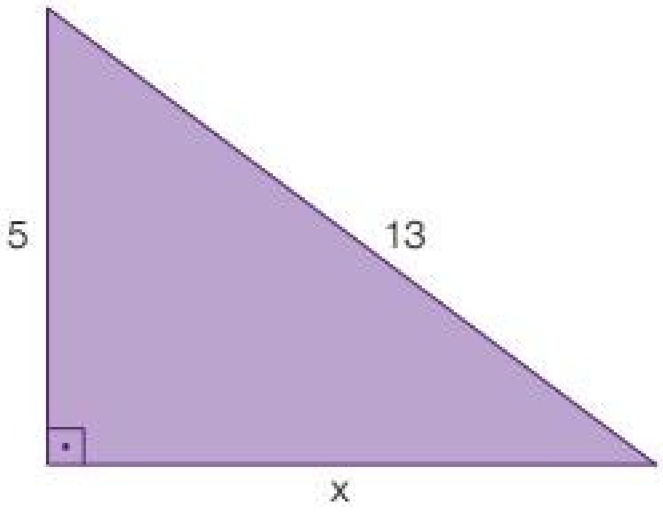
Anote as respostas no caderno.

12. Determine o valor de *x* em cada triângulo.

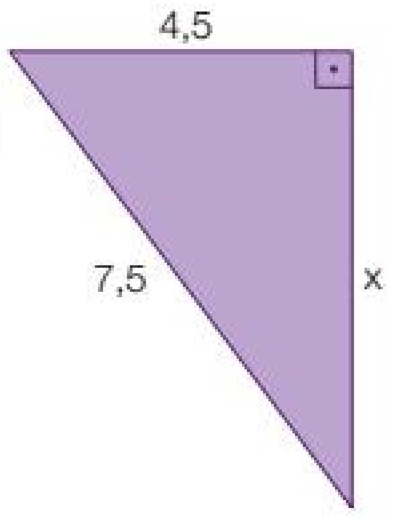
a) x = 5



b) x = 12



c) x = 6



Ilustrações: Acervo da editora

13. Escreva uma fórmula que expresse a altura *h* de um triângulo equilátero em função da medida ℓ de seu lado. Em seguida, a partir dessa fórmula, calcule a altura de um triângulo equilátero cujo lado mede 8 cm. $h=\frac{\ell\sqrt{3}}{2}$; $4\sqrt{3}$ cm

14. Um dos pontos turísticos mais famosos de São Paulo é o Parque do Ibirapuera. Sua infraestrutura conta com pistas de corrida, planetário, museus, lanchonetes, entre outros. Uma de suas principais atrações no fim do ano é a gigantesca árvore de Natal, de forma cônica, que encanta turistas de todos os lugares com seu espetáculo de luzes. Em 2014, a árvore do Ibirapuera media cerca de 54 m de altura e 30 m de diâmetro de base.

Fonte de pesquisa: <www1.folha.uol.com.br/cotidiano/2014/12/1561504-arvore-de-natal-do-ibirapuera-sera-inaugurada-neste-sabado.shtml>. Acesso em: 9 dez. 2015.

De acordo com as informações apresentadas, calcule quantos metros, no mínimo, deve ter um fio que ligue o topo à base da árvore passando por sua lateral. aproximadamente 56 m

Leonardo Benassatto/Futura Press

Inauguração da árvore de natal do Parque do Ibirapuera, em São Paulo (SP), em 13 de dezembro de 2014.

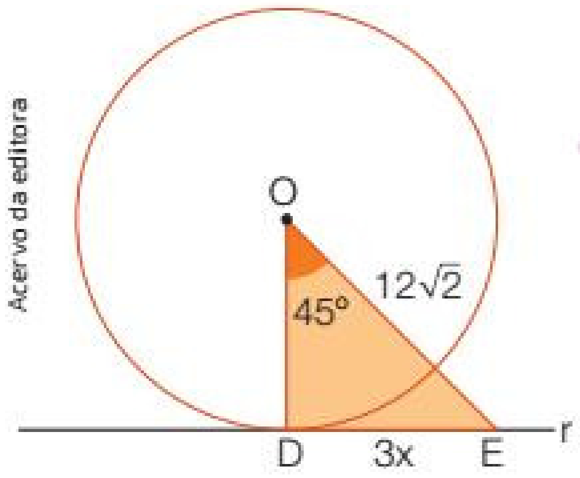
15. Em cada item estão indicadas as medidas, em centímetros, dos lados de um triângulo.

- ΔABC: 3, 2 e 4
- ΔDEF: 10, $\sqrt{149}$ e 7
- ΔGHI: 8, 16 e $8\sqrt{5}$
- ΔJKL: $9\sqrt{3}$, 14 e 13

a) Quais dos triângulos possuem um ângulo reto? ΔDEF e ΔGHI

b) Em relação aos triângulos que você indicou no item **a**, determine a medida da hipotenusa. ΔDEF: $\sqrt{149}$ cm; ΔGHI: $8\sqrt{5}$ cm

16. Na figura a seguir, *O* é o centro da circunferência, e as medidas indicadas são dadas em centímetros. Calcule o diâmetro da circunferência. 24 cm

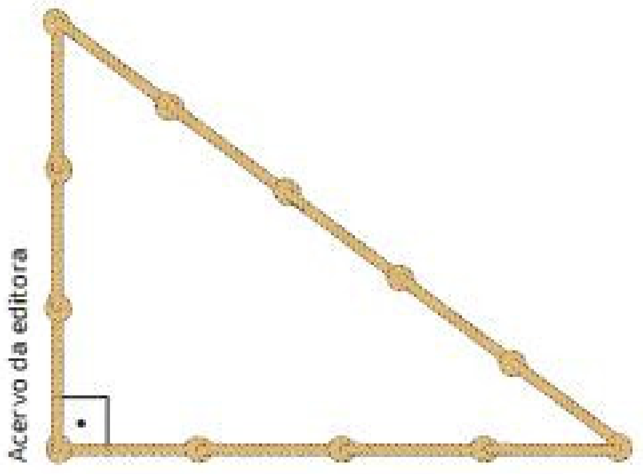


Acervo da editora

- *r* tangencia a circunferência no ponto *D*

17. Determine a medida da diagonal de um retângulo de perímetro 98 cm, sabendo que a razão entre as medidas do menor e do maior lado é $\frac{3}{4}$. 35 cm

18. Acredita-se que, além dos gregos, outros povos conheciam ao menos casos particulares da relação atualmente conhecida como Teorema de Pitágoras. Os egípcios, por exemplo, utilizavam um triângulo de lados 3, 4 e 5, construído com cordas, para demarcar ângulos retos.



Acervo da editora

Cúbito: unidade de medida que equivale ao comprimento do antebraço de uma pessoa.

Alguns problemas relacionados a triângulos retângulos foram encontrados no Papiro Matemático Cairo, que data de cerca de 300 a.C. Nele, estão propostos 40 problemas matemáticos, nove deles tratando exclusivamente do Teorema de Pitágoras.

Resolva os problemas a seguir encontrados no Papiro Matemático Cairo.

[...]

a) Uma escada de 10 cúbitos está com seus pés a 6 cúbitos da parede. Que distância a escada alcança? 8 cúbitos

b) Um retângulo de área 60 cúbitos quadrados tem diagonal de 13 cúbitos. Determine os lados do retângulo. 5 e 12 cúbitos

[...]

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** Tradução Hygino H. Domingues. Campinas: Ed. da Unicamp, 2004. p. 87.

19. (Enem-MEC) Diariamente, uma residência consome 20 160 Wh. Essa residência possui 100 células solares retangulares (dispositivos capazes de converter a luz solar em energia elétrica) de dimensões 6 cm × 8 cm. Cada uma das tais células produz, ao longo do dia, 24 Wh por centímetro de diagonal. O proprietário dessa residência quer produzir, por dia, exatamente a mesma quantidade de energia que sua casa consome.

Qual deve ser a ação desse proprietário para que ele atinja o seu objetivo? a

a) Retirar 16 células

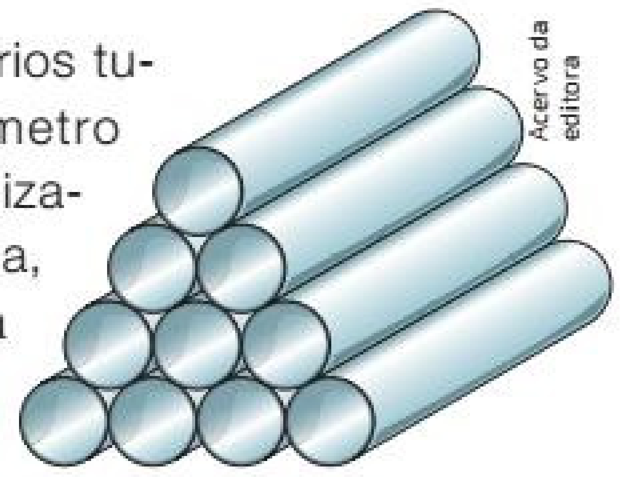
b) Retirar 40 células

c) Acrescentar 5 células

d) Acrescentar 20 células

e) Acrescentar 40 células

20. Em um depósito, há vários tubos de 30 cm de diâmetro que deverão ser organizados em uma única pilha, de maneira que cada camada tenha um tubo a menos que a imediatamente abaixo, como indicado na figura.



Acervo da editora

Quantos tubos, no mínimo, terá a pilha assim que ela alcançar a altura aproximada de 1,86 m? 28 tubos

21. Atualmente, os televisores e monitores em formato *widescreen* têm ganhado muita popularidade entre os consumidores. A principal diferença entre esse formato e o convencional é o tamanho. No *widescreen* a proporção da tela é de 16:9, já no convencional, 4:3.

Por exemplo, em um televisor de 20” (20 polegadas), que é o tamanho da diagonal da tela, as dimensões da região de imagem são, aproximadamente, no formato *widescreen*, 17,4” por 9,8”, e no convencional, 16” por 12”.

a) De acordo com as informações apresentadas, calcule as dimensões aproximadas de um televisor *widescreen* de:

- 29” 25,3” por 14,2”
- 32” 27,9” por 15,7”
- 42” 36,6” por 20,6”

b) Qual é a medida da diagonal, em polegadas, de um monitor de dimensões 17,6” por 13,2”? O formato desse televisor é *widescreen* ou convencional? 22”; convencional

c) Utilizando uma régua ou uma trena, meça o comprimento e a largura da tela de um monitor ou de um televisor. Depois, considerando 1” = 2,54 cm, calcule quantas polegadas tem essa tela e se o formato é convencional ou *widescreen*. Resposta pessoal.

Trigonometria no triângulo retângulo

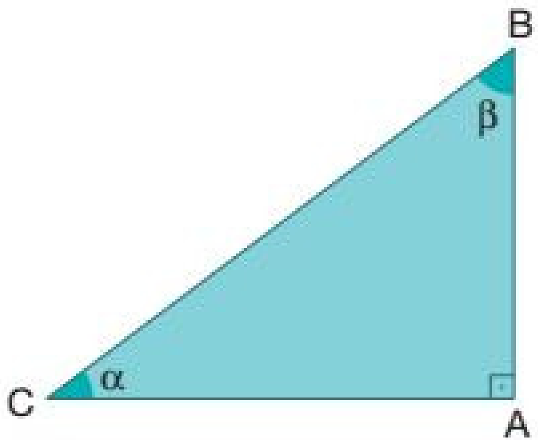
Autor desconhecido. Séc. XIX. Gravura. Coleção particular. Foto: Granger, NYC/Glow Images

Um dos mais importantes astrônomos da Antiguidade foi o grego Hiparco, que viveu por volta de 146 a.C. Além de feitos notáveis na Astronomia, Hiparco realizou diversas contribuições para o desenvolvimento da Trigonometria.

Conforme estudamos anteriormente, o Teorema de Pitágoras corresponde a uma relação que envolve as medidas dos lados de um triângulo retângulo. Contudo, existem relações que envolvem tanto as medidas dos lados quanto as dos ângulos de um triângulo. O estudo dos métodos para calcular as medidas dos lados ou dos ângulos de um triângulo faz parte do ramo da Geometria denominado **Trigonometria** (*trigon* = triângulo e *metria* = medida).

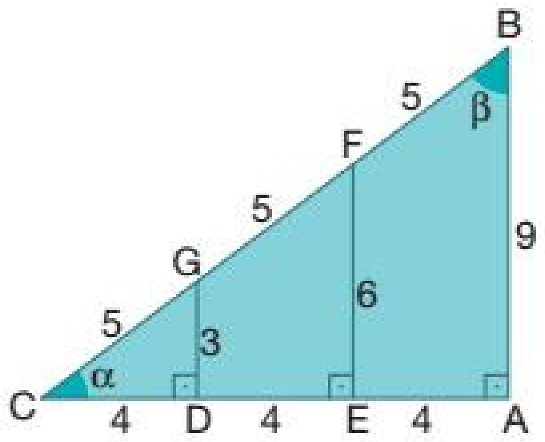
Não se sabe ao certo a origem da Trigonometria; porém, há registros relacionados a ela no Papiro de Rhind, que data de cerca de 1650 a.C. É provável que seu estudo inicial esteja diretamente ligado à Astronomia. Atualmente, a Trigonometria é utilizada por profissionais de diversas áreas, como engenheiros, astrônomos e geógrafos.

Para iniciarmos o estudo da Trigonometria, consideramos o triângulo retângulo a seguir.



Nesse triângulo, em relação ao ângulo α, $\overline{AB}$ é o **cateto oposto** e $\overline{AC}$ é o **cateto adjacente**. Já em relação ao ângulo β, $\overline{AC}$ é o cateto oposto e $\overline{AB}$ é o cateto adjacente.

Agora, considere a figura a seguir. Nela podemos identificar os triângulos retângulos semelhantes ABC, EFC e DGC.



Ilustrações: Acervo da editora

Como $\overline{AB}//\overline{EF}//\overline{DG}$, em relação ao ângulo α, por semelhança de triângulos, temos que:

- as razões entre o cateto oposto a α e a hipotenusa em cada triângulo são iguais.

$$\frac{AB}{BC}=\frac{EF}{FC}=\frac{DG}{GC}=\frac{9}{15}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}=0{,}6$$

  A razão entre o cateto oposto a α e a hipotenusa é denominada **seno do ângulo** α e é indicada por $\text{sen}\,\alpha$. Nesse caso, $\text{sen}\,\alpha=0{,}6$.

- as razões entre o cateto adjacente a α e a hipotenusa em cada triângulo são iguais.

$$\frac{AC}{BC}=\frac{EC}{FC}=\frac{DC}{GC}=\frac{12}{15}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}=0{,}8$$

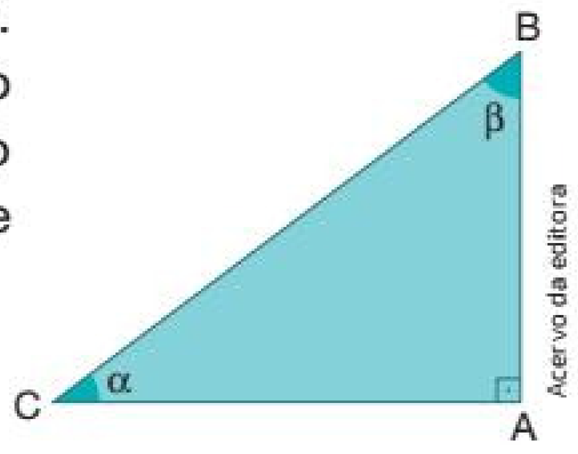
  A razão entre o cateto adjacente a α e a hipotenusa é denominada **cosseno do ângulo** α e é indicada por $\cos\alpha$. Nesse caso, $\cos\alpha=0{,}8$.

- as razões entre o cateto oposto e o cateto adjacente a α em cada triângulo são iguais.

$$\frac{AB}{AC}=\frac{EF}{EC}=\frac{DG}{DC}=\frac{9}{12}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}=0{,}75$$

  A razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente a α é denominada **tangente do ângulo** α e é indicada por $\text{tg}\,\alpha$. Nesse caso, $\text{tg}\,\alpha=0{,}75$.

As razões seno, cosseno e tangente são denominadas **razões trigonométricas**. Em um triângulo retângulo, o seno de um ângulo agudo é dado pela razão entre o cateto oposto a ele e a hipotenusa; o cosseno desse ângulo é dado pela razão entre o cateto adjacente a ele e a hipotenusa; e a tangente é dada pela razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente a esse ângulo.



Acervo da editora

Considere, por exemplo, o triângulo retângulo ao lado.

Com base nesse triângulo, temos:

- em relação ao ângulo α:

$$\text{sen}\alpha=\frac{\overbrace{AB}^{\text{medida do cateto oposto a }\alpha}}{\underbrace{BC}_{\text{medida da hipotenusa}}}$$

$$\cos\alpha=\frac{\overbrace{AC}^{\text{medida do cateto adjacente a }\alpha}}{\underbrace{BC}_{\text{medida da hipotenusa}}}$$

$$\text{tg}\alpha=\frac{\overbrace{AB}^{\text{medida do cateto oposto a }\alpha}}{\underbrace{AC}_{\text{medida do cateto adjacente a }\alpha}}$$

- em relação ao ângulo β:

$$\text{sen}\beta=\frac{\overbrace{AC}^{\text{medida do cateto oposto a }\beta}}{\underbrace{BC}_{\text{medida da hipotenusa}}}$$

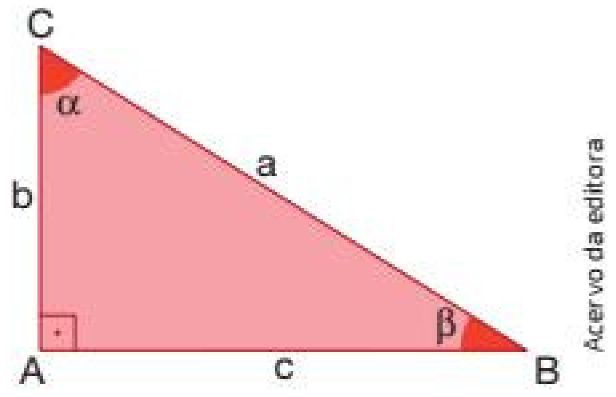
$$\cos\beta=\frac{\overbrace{AB}^{\text{medida do cateto adjacente a }\beta}}{\underbrace{BC}_{\text{medida da hipotenusa}}}$$

$$\text{tg}\beta=\frac{\overbrace{AC}^{\text{medida do cateto oposto a }\beta}}{\underbrace{AB}_{\text{medida do cateto adjacente a }\beta}}$$

Relações envolvendo seno, cosseno e tangente

Observe algumas relações envolvendo o seno, o cosseno e a tangente de um ângulo agudo.

Considerando o triângulo ABC, temos:



Acervo da editora

- $\text{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

  Para demonstrar essa relação, aplicamos o Teorema de Pitágoras no triângulo ABC: $a^2=b^2+c^2$. Dividindo ambos os membros por a^2, temos:

$$\frac{a^2}{a^2}=\frac{b^2+c^2}{a^2}\Rightarrow 1=\left(\frac{b}{a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}\right)^2$$

  Como $\text{sen}\alpha=\frac{c}{a}$ e $\cos\alpha=\frac{b}{a}$, segue que:

$$1=(\cos\alpha)^2+(\text{sen}\alpha)^2\Rightarrow \text{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

A relação $\text{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ é denominada **relação fundamental** entre as razões seno e cosseno de um ângulo agudo.

- $\text{tg}\alpha=\dfrac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}$

  No triângulo ABC, temos:

$$\frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{c}{a}}{\frac{b}{a}}=\frac{c}{b}=\text{tg}\alpha\Rightarrow \text{tg}\alpha=\frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

- $\text{sen}\alpha=\cos\beta$

  Essa relação estabelece que o seno de um ângulo agudo é igual ao cosseno do complementar desse ângulo, e vice-versa.

  A demonstração dessa relação é imediata. Do triângulo ABC, temos:

$$\text{sen}\alpha=\frac{c}{a}=\cos\beta\Rightarrow \text{sen}\alpha=\cos\beta \qquad \cos\alpha=\frac{b}{a}=\text{sen}\beta\Rightarrow \cos\alpha=\text{sen}\beta$$

Dois ângulos são complementares quando a soma de suas medidas é $90°$. Logo, podemos interpretar a relação $\text{sen}\alpha=\cos\beta$ como $\text{sen}\alpha=\cos(90°-\alpha)$ e $\cos\alpha=\text{sen}(90°-\alpha)$, para $0°<\alpha<90°$.

Atividades resolvidas

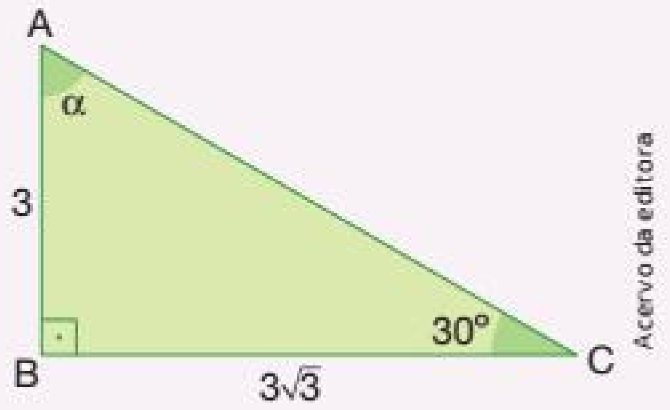
R6. Observe o triângulo retângulo ao lado.

Em relação a esse triângulo, determine:

a) $\text{sen}\,30°$, $\cos 30°$ e $\text{tg}\,30°$

b) o ângulo α

c) $\text{sen}\,\alpha$, $\cos\alpha$ e $\text{tg}\,\alpha$



Acervo da editora

Resolução

Inicialmente, determinamos a medida de $\overline{AC}$, utilizando o Teorema de Pitágoras:

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 \Rightarrow (AC)^2 = 3^2 + \left(3\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow (AC)^2 = 36 \Rightarrow AC = \sqrt{36} = 6$$

a) $\text{sen}\,30° = \dfrac{AB}{AC} \Rightarrow \text{sen}\,30° = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

$$\cos 30° = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \cos 30° = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg}\,30° = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \text{tg}\,30° = \frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

b) A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, logo:

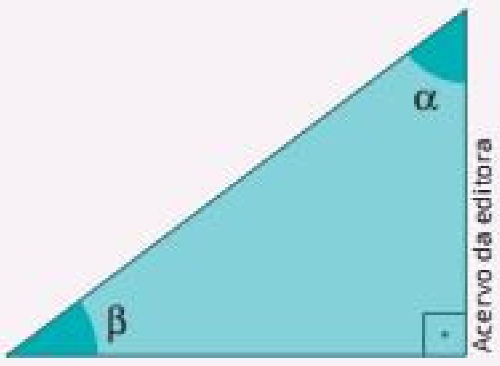
$$\alpha + 30° + 90° = 180° \Rightarrow \alpha = 180° - 120° = 60°$$

c) $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{BC}{AC} \Rightarrow \text{sen}\,60° = \dfrac{3\sqrt{3}}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$\cos\alpha = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \cos 60° = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{BC}{AB} \Rightarrow \text{tg}\,60° = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$$

R7. Calcule $\text{tg}\,\beta$ no triângulo retângulo a seguir, sabendo que $\text{sen}\,\alpha = 0,8$.



Acervo da editora

As razões trigonométricas $\text{sen}\,\alpha$, $\cos\alpha$ e $\text{tg}\,\alpha$ são sempre positivas no triângulo retângulo, pois são calculadas a partir das medidas de seus lados.

Resolução

Da relação $\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$, temos:

$$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow 0,8^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - 0,64 \Rightarrow \cos^2\alpha = 0,36 \Rightarrow \underbrace{\cos\alpha}_{\cos\alpha > 0} = \sqrt{0,36} = 0,6$$

Como α e β são complementares, temos $\text{sen}\,\beta = \cos\alpha$ e $\cos\beta = \text{sen}\,\alpha$. Para calcular $\text{tg}\,\beta$, podemos utilizar a relação $\text{tg}\,\beta = \dfrac{\text{sen}\,\beta}{\cos\beta}$:

$$\text{tg}\,\beta = \frac{\text{sen}\,\beta}{\cos\beta} = \frac{\overbrace{\cos\alpha}^{\text{sen}\,\beta = \cos\alpha}}{\underbrace{\text{sen}\,\alpha}_{\cos\beta = \text{sen}\,\alpha}} \Rightarrow \text{tg}\,\beta = \frac{0,6}{0,8} \Rightarrow \boxed{\text{tg}\,\beta = 0,75}$$

Note que, de maneira geral, $\text{sen}^2\,\alpha \neq \text{sen}\,\alpha^2$, pois:

- $\text{sen}^2\,\alpha = \left(\text{sen}\,\alpha\right)^2 = \text{sen}\,\alpha \cdot \text{sen}\,\alpha$
- $\text{sen}\,\alpha^2 = \text{sen}\left(\alpha^2\right) = \text{sen}\left(\alpha \cdot \alpha\right)$

Atividades

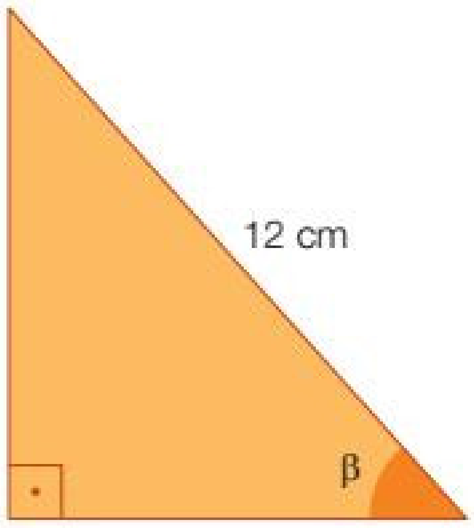
Anote as respostas no caderno.

22. Calcule o seno, o cosseno e a tangente de β.

$\text{sen}\beta = \frac{\sqrt{5}}{3}$,

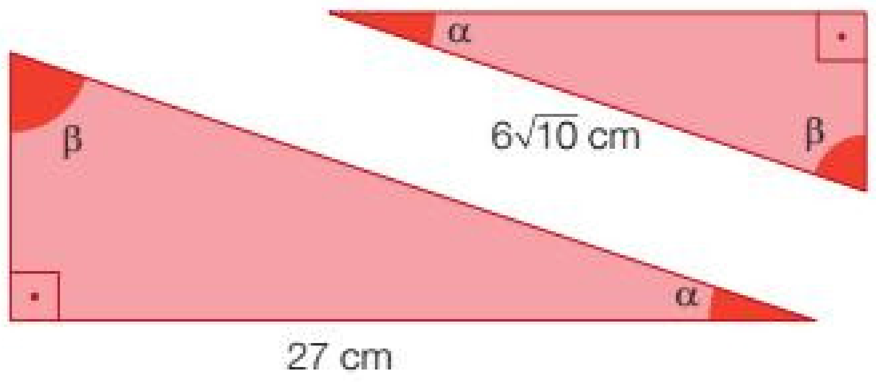
$\cos\beta = \frac{2}{3}$ e

$\text{tg}\beta = \frac{\sqrt{5}}{2}$



Acervo da editora

23. Os triângulos a seguir são semelhantes, com razão de semelhança $\frac{3}{2}$.



Ilustrações: Acervo da editora

De acordo com as medidas indicadas, calcule:

a) senα $\frac{\sqrt{10}}{10}$

b) cosα $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

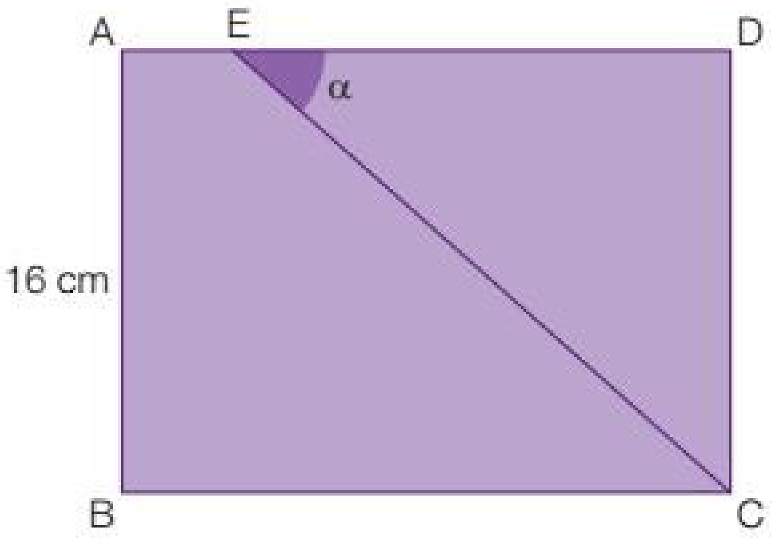
c) tgα $\frac{1}{3}$

d) senβ $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

e) cosβ $\frac{\sqrt{10}}{10}$

f) tgβ 3

24. Calcule a tangente de α, sabendo que o retângulo ABCD tem 352 cm^2 de área, e o trapézio ABCE, 208 cm^2. $\text{tg}\alpha = \frac{8}{9}$



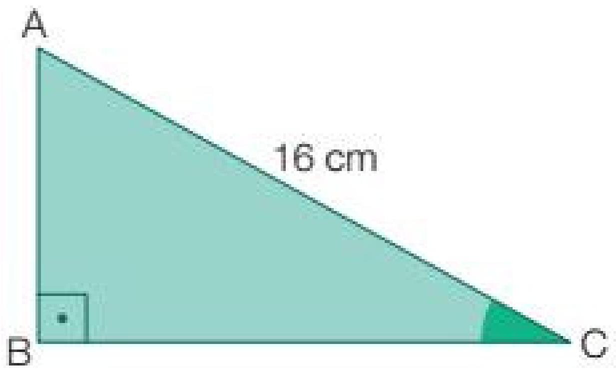
Acervo da editora

25. Se α e β são ângulos complementares, mostre que $\text{tg}\alpha = \frac{1}{\text{tg}\beta}$.

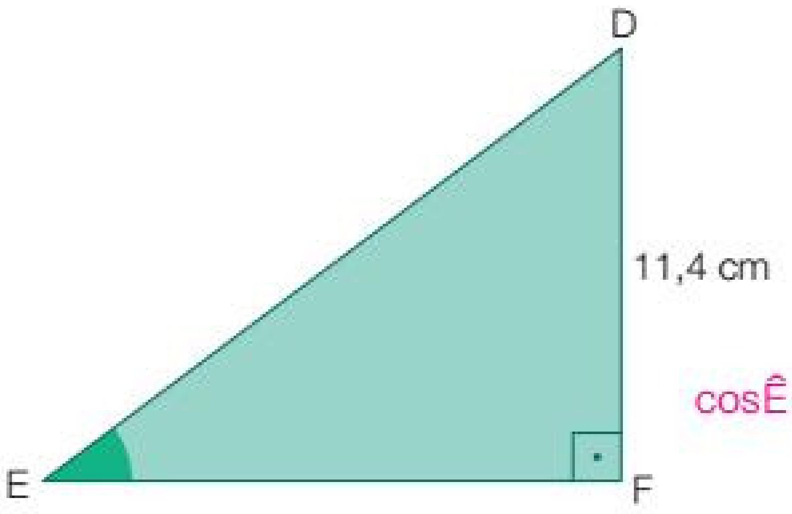
$$\text{tg}\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos\beta}{\text{sen}\beta} = \frac{1}{\text{sen}\beta} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\cos\beta}} = \frac{1}{\frac{\text{sen}\beta}{\cos\beta}} = \frac{1}{\text{tg}\beta}$$

Note que $\cos\beta = \frac{1}{\frac{1}{\cos\beta}}$.

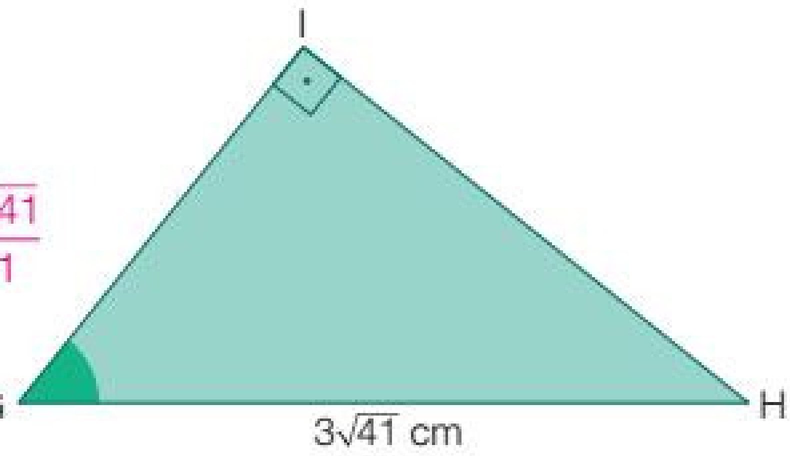
26. Calcule o cosseno dos ângulos $\hat{C}$, $\hat{E}$ e $\hat{G}$, sabendo que seus senos são respectivamente $\frac{\sqrt{15}}{8}$, $\frac{3}{5}$ e $\frac{5\sqrt{41}}{41}$.



$\cos\hat{C} = \frac{7}{8}$



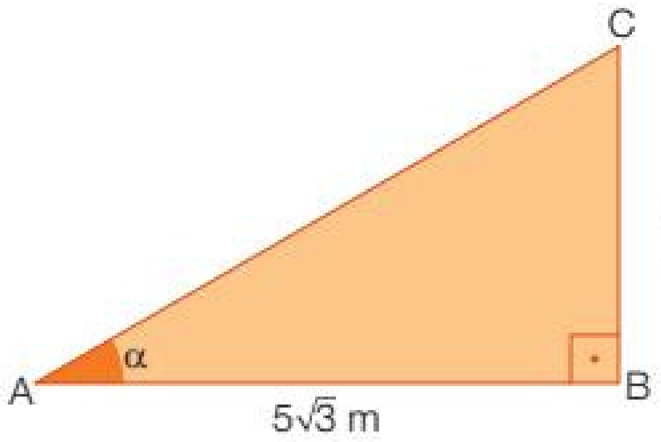
$\cos\hat{E} = \frac{4}{5}$



$\cos\hat{G} = \frac{4\sqrt{41}}{41}$

Ilustrações: Acervo da editora

27. Sabendo que no triângulo retângulo ABC, $\text{sen}\alpha = \frac{1}{2}$ e $AB = 5\sqrt{3}$ m, calcule:



Acervo da editora

a) cosα $\frac{\sqrt{3}}{2}$

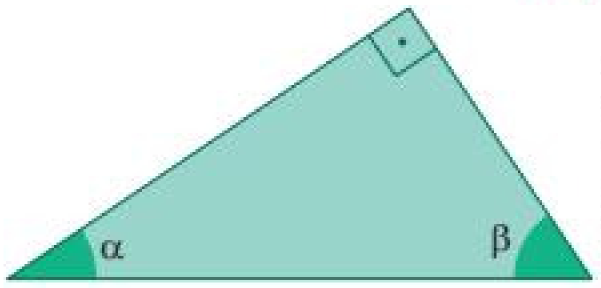
b) tgα $\frac{\sqrt{3}}{3}$

c) a medida da hipotenusa 10 m

d) a medida do cateto oposto a α 5 m

28. **Desafio**

Em um triângulo retângulo de ângulos agudos α e β, a tangente de α é igual a $\frac{2}{3}$. Determine o seno de β. $\text{sen}\beta = \frac{3\sqrt{13}}{13}$

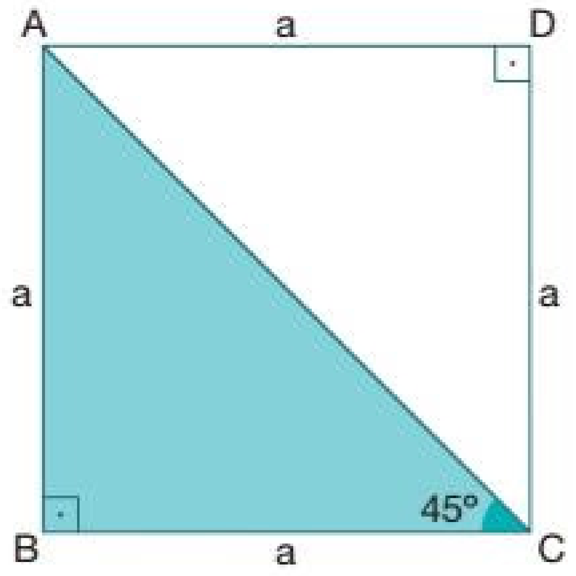


Acervo da editora

Ângulos notáveis

Com a finalidade de auxiliar no estudo da Trigonometria, veremos agora como obter o seno, o cosseno e a tangente dos ângulos de 30°, 45° e 60°. Esses ângulos são denominados **ângulos notáveis**, pois costumam aparecer com frequência no estudo da Trigonometria.

Para determinar o seno, o cosseno e a tangente de 45°, consideraremos o quadrado ABCD a seguir.



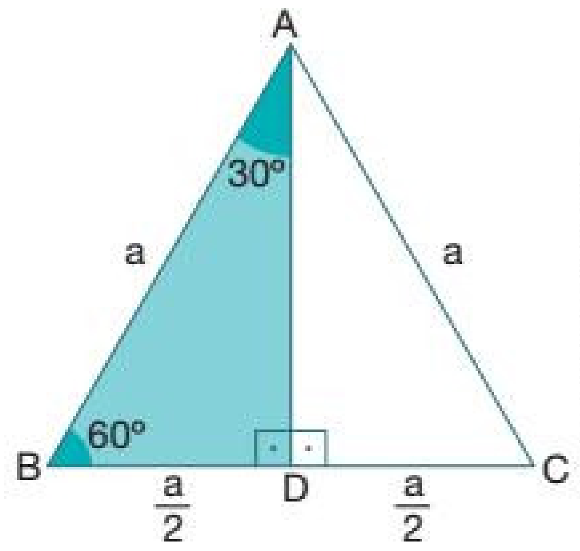
Pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (AC)^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (AC)^2 = 2a^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow AC = a\sqrt{2}$$

Considerando o triângulo ABC, temos:

- $\text{sen}\,45° = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{\cancel{a}}{\cancel{a}\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \text{sen}\,45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- $\cos 45° = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{\cancel{a}}{\cancel{a}\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- $\text{tg}\,45° = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{\cancel{a}}{\cancel{a}} \Rightarrow \text{tg}\,45° = 1$

Agora, consideraremos o triângulo equilátero ABC a seguir.



Ilustrações: Acervo da editora

Pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$$(AB)^2 = (AD)^2 + (BD)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a^2 = (AD)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (AD)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (AD)^2 = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow AD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Em relação ao ângulo de 30°, temos:

- $\text{sen}\,30° = \dfrac{BD}{AB} = \dfrac{\frac{a}{2}}{a} = \dfrac{\cancel{a}}{2} \cdot \dfrac{1}{\cancel{a}} \Rightarrow \text{sen}\,30° = \dfrac{1}{2}$
- $\cos 30° = \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \dfrac{\cancel{a}\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{1}{\cancel{a}} \Rightarrow \cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- $\text{tg}\,30° = \dfrac{BD}{AD} = \dfrac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{\cancel{a}}{\cancel{2}} \cdot \dfrac{\cancel{2}}{\cancel{a}\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \text{tg}\,30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Com base em relações estudadas, temos:

- $\text{sen}\,60° = \cos(90° - 60°) = \cos 30° \Rightarrow \text{sen}\,60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- $\cos 60° = \text{sen}(90° - 60°) = \text{sen}\,30° \Rightarrow \cos 60° = \dfrac{1}{2}$
- $\text{tg}\,60° = \dfrac{\text{sen}\,60°}{\cos 60°} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} \Rightarrow \text{tg}\,60° = \sqrt{3}$

Sugira aos alunos que organizem, no caderno, os resultados obtidos, conforme segue:

	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Tabela trigonométrica

A tabela a seguir apresenta valores aproximados do seno, do cosseno e da tangente de ângulos, cujas medidas são inteiras e variam de 1° a 89°. Esses valores são úteis para a resolução de alguns problemas que envolvem triângulos retângulos.

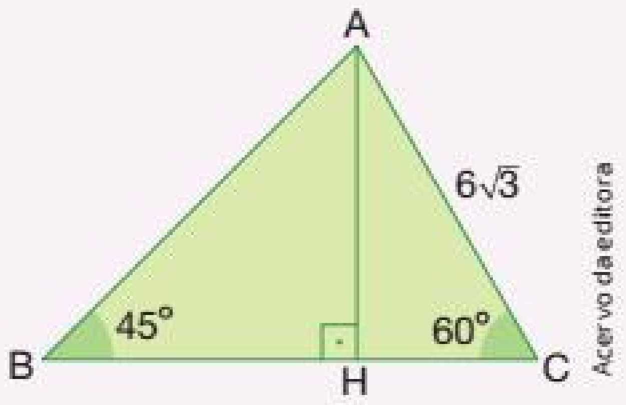
Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
1°	0,017	1,000	0,017
2°	0,035	0,999	0,035
3°	0,052	0,999	0,052
4°	0,070	0,998	0,070
5°	0,087	0,996	0,087
6°	0,105	0,995	0,105
7°	0,122	0,993	0,123
8°	0,139	0,990	0,141
9°	0,156	0,988	0,158
10°	0,174	0,985	0,176
11°	0,191	0,982	0,194
12°	0,208	0,978	0,213
13°	0,225	0,974	0,231
14°	0,242	0,970	0,249
15°	0,259	0,966	0,268
16°	0,276	0,961	0,287
17°	0,292	0,956	0,306
18°	0,309	0,951	0,325
19°	0,326	0,946	0,344
20°	0,342	0,940	0,364
21°	0,358	0,934	0,384
22°	0,375	0,927	0,404
23°	0,391	0,921	0,424
24°	0,407	0,914	0,445
25°	0,423	0,906	0,466
26°	0,438	0,899	0,488
27°	0,454	0,891	0,510
28°	0,469	0,883	0,532
29°	0,485	0,875	0,554
30°	0,500	0,866	0,577
31°	0,515	0,857	0,601
32°	0,530	0,848	0,625
33°	0,545	0,839	0,649
34°	0,559	0,829	0,675
35°	0,574	0,819	0,700
36°	0,588	0,809	0,727
37°	0,602	0,799	0,754
38°	0,616	0,788	0,781
39°	0,629	0,777	0,810
40°	0,643	0,766	0,839
41°	0,656	0,755	0,869
42°	0,669	0,743	0,900
43°	0,682	0,731	0,933
44°	0,695	0,719	0,966
45°	0,707	0,707	1,000
46°	0,719	0,695	1,036
47°	0,731	0,682	1,072
48°	0,743	0,669	1,111
49°	0,755	0,656	1,150
50°	0,766	0,643	1,192
51°	0,777	0,629	1,235
52°	0,788	0,616	1,280
53°	0,799	0,602	1,327
54°	0,809	0,588	1,376
55°	0,819	0,574	1,428
56°	0,829	0,559	1,483
57°	0,839	0,545	1,540
58°	0,848	0,530	1,600
59°	0,857	0,515	1,664
60°	0,866	0,500	1,732
61°	0,875	0,485	1,804
62°	0,883	0,469	1,881
63°	0,891	0,454	1,963
64°	0,899	0,438	2,050
65°	0,906	0,423	2,145
66°	0,914	0,407	2,246
67°	0,921	0,391	2,356
68°	0,927	0,375	2,475
69°	0,934	0,358	2,605
70°	0,940	0,342	2,747
71°	0,946	0,326	2,904
72°	0,951	0,309	3,078
73°	0,956	0,292	3,271
74°	0,961	0,276	3,487
75°	0,966	0,259	3,732
76°	0,970	0,242	4,011
77°	0,974	0,225	4,331
78°	0,978	0,208	4,705
79°	0,982	0,191	5,145
80°	0,985	0,174	5,671
81°	0,988	0,156	6,314
82°	0,990	0,139	7,115
83°	0,993	0,122	8,144
84°	0,995	0,105	9,514
85°	0,996	0,087	11,430
86°	0,998	0,070	14,301
87°	0,999	0,052	19,081
88°	0,999	0,035	28,636
89°	1,000	0,017	57,290

Note que os valores da tabela para as razões trigonométricas estão aproximados aos milésimos. Contudo, é possível obter uma aproximação com um número maior de casas decimais, utilizando, por exemplo, uma calculadora científica.

Explique aos alunos que a maior parte dos valores apresentados na tabela corresponde a aproximações de números irracionais. Peça-lhes, por exemplo, que comparem o seno, o cosseno e a tangente dos ângulos notáveis obtidos anteriormente e os apresentados na tabela.

Atividades resolvidas

R8. Determine as medidas de $\overline{AH}$, $\overline{HC}$ e $\overline{BC}$ na figura a seguir.



Resolução

Inicialmente, obtemos as medidas AH e HC, calculando, respectivamente, o seno e o cosseno de 60° no triângulo AHC.

- $\text{sen}\,60° = \dfrac{AH}{AC} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{AH}{6\sqrt{3}} \Rightarrow AH = \dfrac{6\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AH = 9$
- $\cos 60° = \dfrac{HC}{AC} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{HC}{6\sqrt{3}} \Rightarrow HC = \dfrac{6\sqrt{3}}{2} \Rightarrow HC = 3\sqrt{3}$

Em seguida, obtemos a medida BH, calculando a tangente de 45° no triângulo ABH.

- $\text{tg}\,45° = \dfrac{AH}{BH} \Rightarrow 1 = \dfrac{9}{BH} \Rightarrow BH = 9$

Calculando BC, temos:

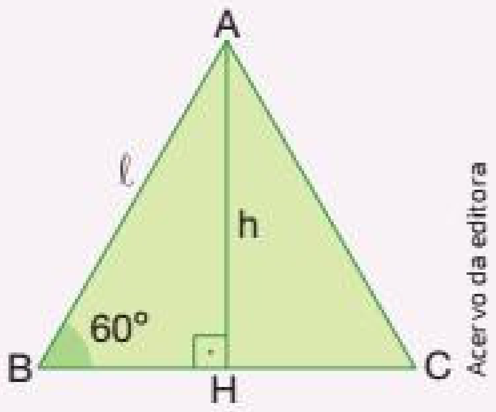
$$BC = BH + HC \Rightarrow BC = 9 + 3\sqrt{3}$$

Portanto, $AH = 9$, $HC = 3\sqrt{3}$ e $BC = 9 + 3\sqrt{3}$.

R9. Mostre que a altura *h* de um triângulo equilátero de lado ℓ é dada por $h = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2}$.

Resolução

Na página **248**, vimos essa relação utilizando o Teorema de Pitágoras e, agora, vamos utilizar a razão seno. Para isso, considere o triângulo equilátero ABC, de lado ℓ e altura *h*.



Lembre-se de que os ângulos internos de um triângulo equilátero são iguais a 60°.

Calculando o seno do ângulo $A\hat{B}H$, temos:

$$\text{sen}\,60° = \frac{AH}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{\ell} \Rightarrow 2h = \ell\sqrt{3} \Rightarrow h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

Portanto, a altura de um triângulo equilátero de lado ℓ é dada por $h = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2}$.

R10. Mostre que em um triângulo retângulo que possui um ângulo interno de 30°, o cateto oposto a esse ângulo mede a metade da hipotenusa.

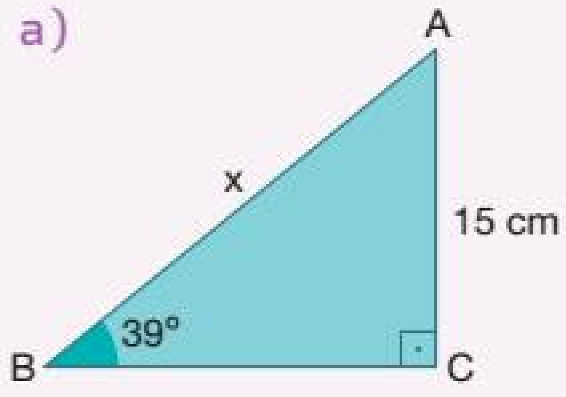
Resolução

Seja $\overline{AB}$ o cateto oposto ao ângulo de 30°, e $\overline{BC}$ a hipotenusa. Calculando $\text{sen}\,30°$, verificamos que o cateto oposto ao ângulo de 30° mede a metade da hipotenusa.

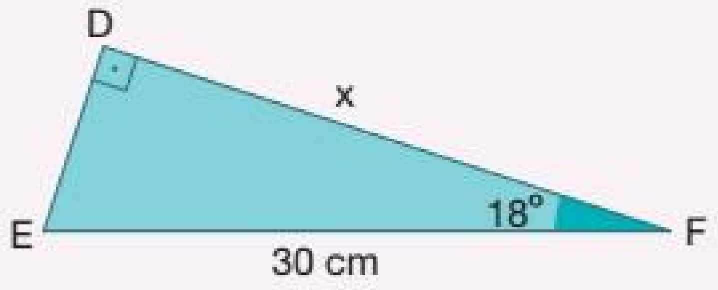
$$\text{sen}\,30° = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow AB = \frac{BC}{2}$$

R11. Consulte a tabela trigonométrica e determine o valor aproximado de *x* em cada triângulo.

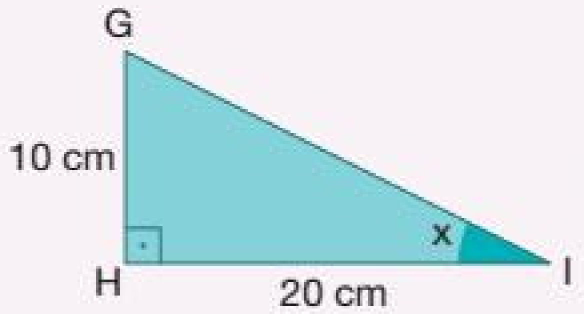
a)



b)



c)



Ilustrações: Acervo da editora

Resolução

a) Obtemos *x* calculando o seno de 39°.

$$\text{sen}\,39° = \frac{AC}{AB} \Rightarrow 0{,}629 = \frac{15}{x} \Rightarrow 0{,}629x = 15 \Rightarrow \boxed{x \simeq 23{,}847}$$

b) Obtemos *x* calculando o cosseno de 18°.

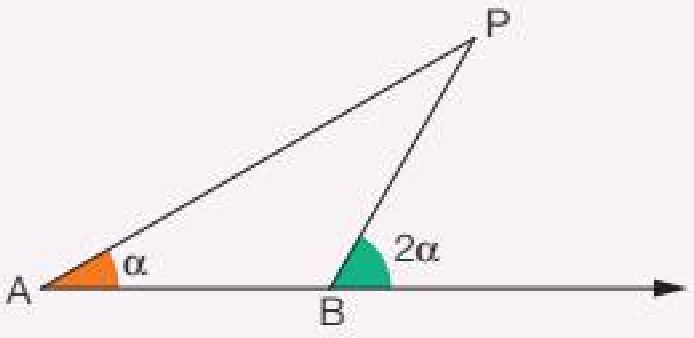
$$\cos 18° = \frac{DF}{EF} \Rightarrow 0{,}951 = \frac{x}{30} \Rightarrow \boxed{x = 28{,}53}$$

c) Calculando a tangente de *x*, temos:

$$\text{tg}\,x = \frac{GH}{HI} \Rightarrow \text{tg}\,x = \frac{10}{20} \Rightarrow \text{tg}\,x = 0{,}5$$

Consultando a tabela, verificamos que $x \simeq 27°$.

R12. (Enem-MEC) Para determinar a distância de um barco até a praia, um navegante utilizou o seguinte procedimento: a partir de um ponto *A*, mediu o ângulo visual α fazendo mira em um ponto fixo *P* da praia. Mantendo o barco no mesmo sentido, ele seguiu até um ponto *B* de modo que fosse possível ver o mesmo ponto *P* da praia, no entanto sob um ângulo visual 2α. A figura ilustra essa situação.

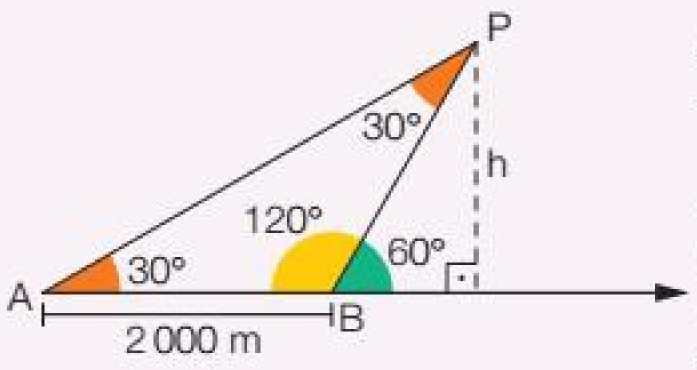


Suponha que o navegante tenha medido o ângulo $\alpha = 30°$ e, ao chegar ao ponto *B*, verificou que o barco havia percorrido a distância $AB = 2\,000$ m. Com base nesses dados e mantendo a mesma trajetória, a menor distância do barco até o ponto fixo *P* será:

a) 1 000 m b) $1\,000\sqrt{3}$ m c) $2\,000\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ m d) 2 000 m e) $2\,000\sqrt{3}$ m

Resolução

A menor distância do barco até o ponto *P* corresponde à altura *h* do triângulo ABP relativa ao lado $\overline{AB}$, como indicado na figura.



Ilustrações: Acervo da editora

Observe que $\text{med}(A\hat{B}P) = 120°$, pois $A\hat{B}P$ é suplementar ao ângulo de medida $2\alpha = 60°$, e $\text{med}(A\hat{P}B) = 30°$, pois a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°. Como $\text{med}(B\hat{A}P) = \text{med}(A\hat{P}B)$, o triângulo ABP é isósceles. Então $BP = AB = 2\,000$ m. Segue que:

$$\text{sen}60° = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{2\,000} \Rightarrow h = 1\,000\sqrt{3}$$

Logo, a menor distância do barco até o ponto fixo *P* é $1\,000\sqrt{3}$ m.

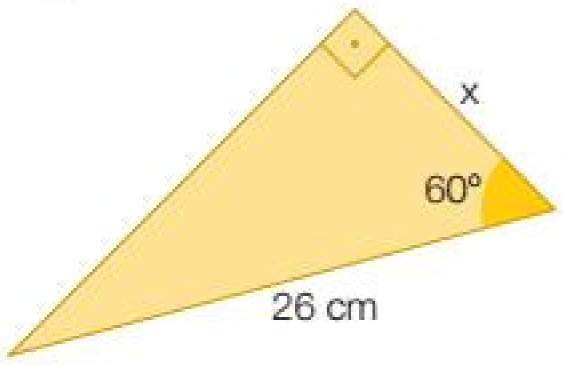
Portanto, a alternativa correta é a **b**.

Atividades

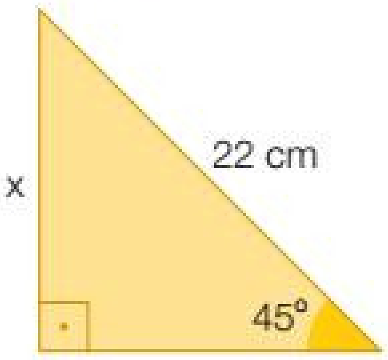
Anote as respostas no caderno.

29. Em cada item, determine a medida *x* indicada.

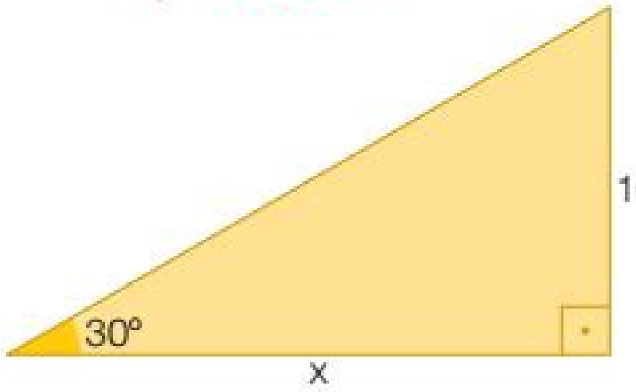
a) 13 cm



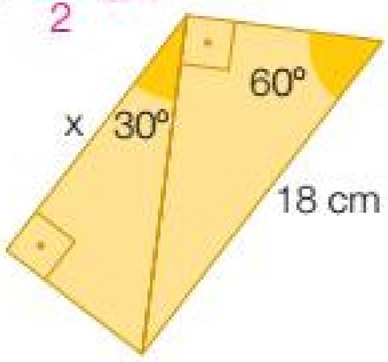
c) $11\sqrt{2}$ cm



b) $16\sqrt{3}$ cm

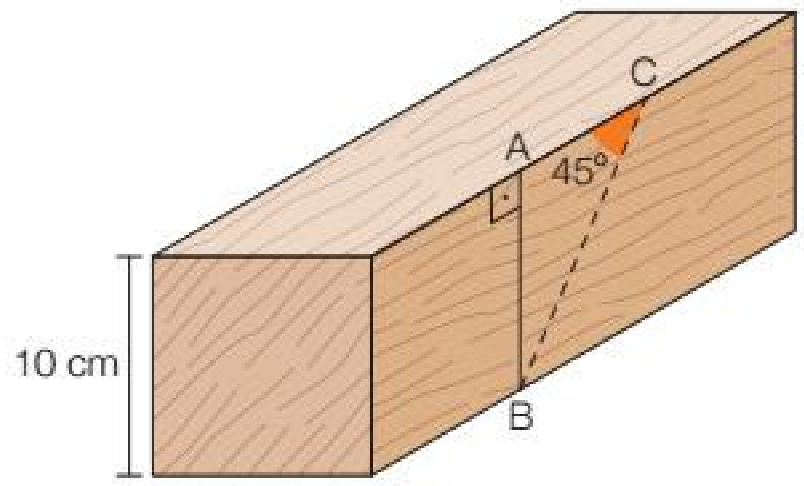


d) $\frac{27}{2}$ cm



Ilustrações: Acervo da editora

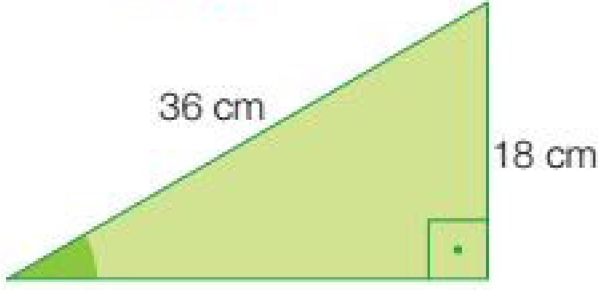
30. Um pedaço de madeira com forma de paralelepípedo deve ser cortado em um ângulo de 45°, de modo que as duas partes obtidas possam ser unidas formando um ângulo reto. Para realizar o corte, um marceneiro marcou um segmento AB, perpendicular ao lado do pedaço de madeira, e um ponto *C*, a certa distância de *A*, de modo que $\text{med}\left(A\hat{C}B\right) = 45°$, como indicado na figura. Qual é o comprimento de BC? $10\sqrt{2}$ cm



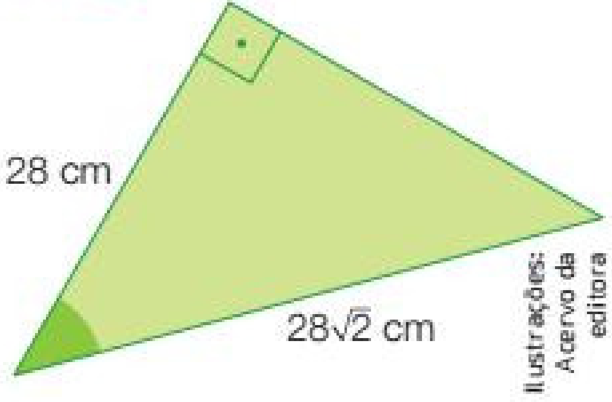
Acervo da editora

31. De acordo com as medidas dos lados de cada triângulo retângulo, determine as medidas dos ângulos em destaque.

a) 30°

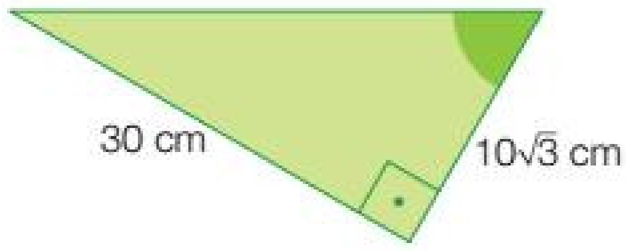


c) 45°



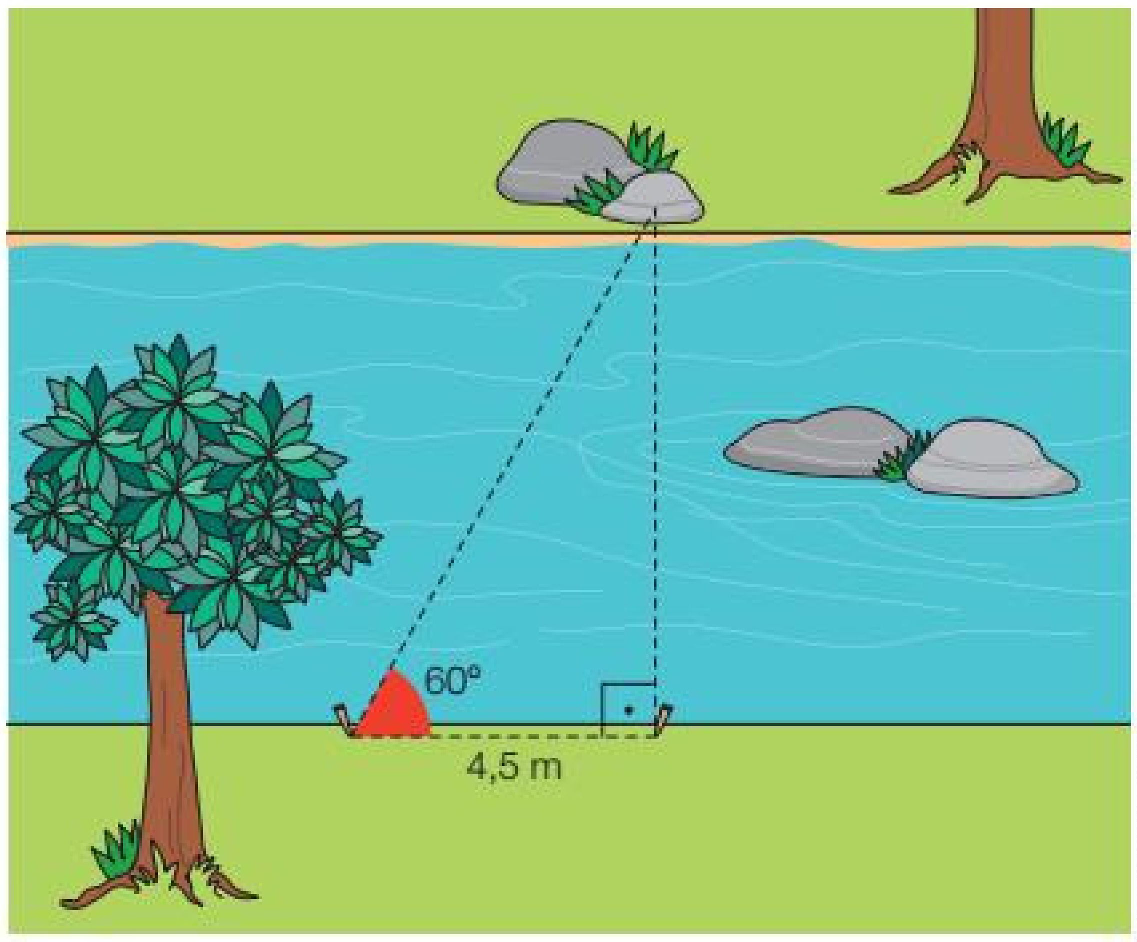
Ilustrações: Acervo da editora

b) 60°



32. Para medir a largura de um rio, um engenheiro utilizou como referência duas estacas de madeira, que fincou em uma das margens do rio, e uma pedra, localizada na margem oposta, conforme o esquema.

Qual é, aproximadamente, a largura do rio? 7,8 m



Acervo da editora

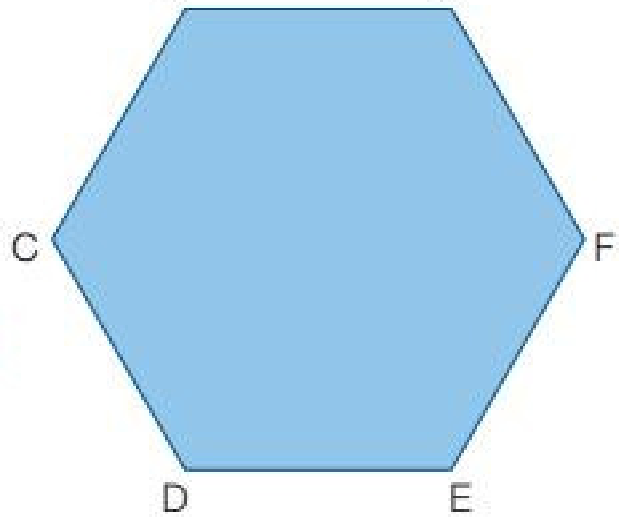
33. Os funcionários de uma companhia de energia elétrica irão demarcar uma circunferência ao redor de uma torre de transmissão para que sejam fixados alguns ganchos sobre ela, e posteriormente colocados estais, ligando os ganchos ao topo da torre. De acordo com o projeto, os estais devem ter 57,7 m de comprimento cada e formar com a horizontal um ângulo de 60°.

a) A que distância do centro da base da torre, aproximadamente, devem ser fixados os ganchos para a colocação dos estais? 28,85 m

b) Qual é a altura aproximada da torre de transmissão? 50 m

*c) Calcule, aproximadamente, a área interna à circunferência a ser demarcada pelos funcionários. 2 613,5 m^2

34. Determine o comprimento das diagonais $\overline{CE}$ e $\overline{AD}$ do hexágono regular, sabendo que ele possui $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ cm^2 de área. $CE = \sqrt{3}$ cm e $AD = 2$ cm

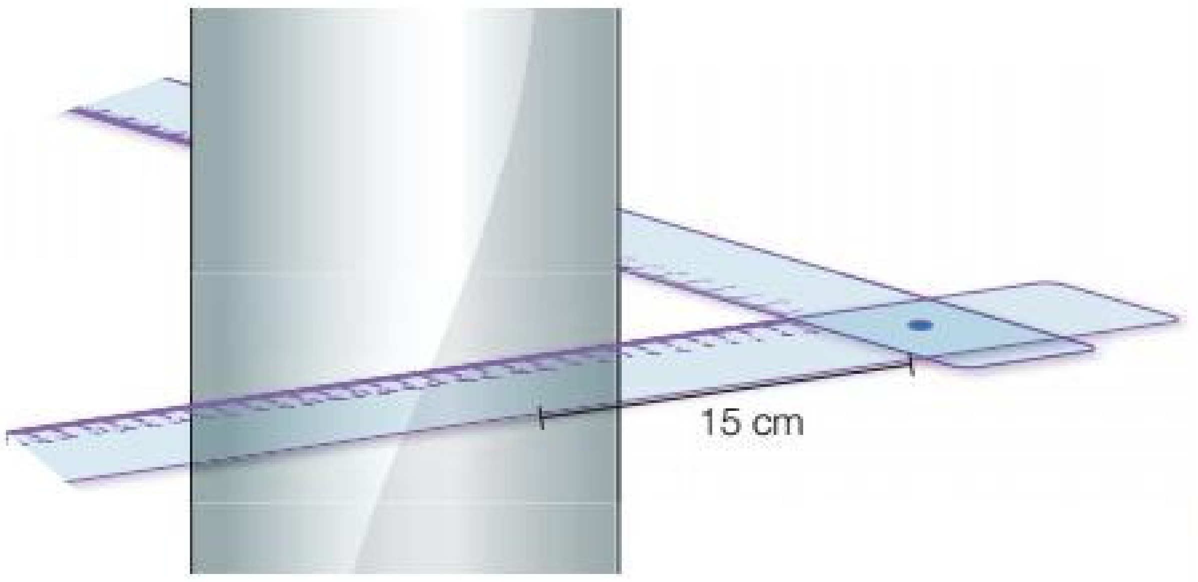


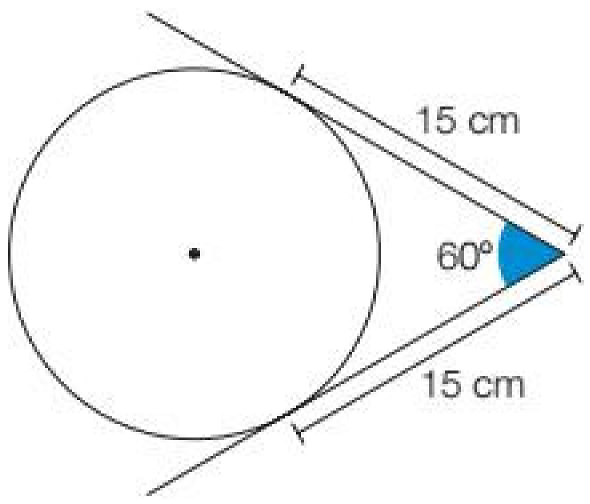
Acervo da editora

*Lembre aos alunos que a área de um círculo de raio *r* é dada por $A = \pi r^2$, em que $\pi = 3,14$.

35. **Desafio**

Na medição do diâmetro de um tubo de aço cujas extremidades estão inacessíveis, um operário utilizou um instrumento em forma de "V", com hastes graduadas, como ilustrado a seguir.

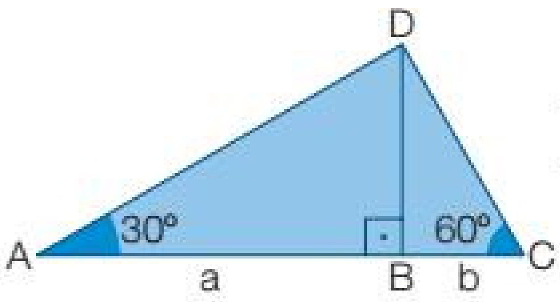




Ilustrações: Acervo da editora

De acordo com as informações, calcule aproximadamente o diâmetro do tubo. 17,3 cm

36. A partir da figura a seguir, determine:



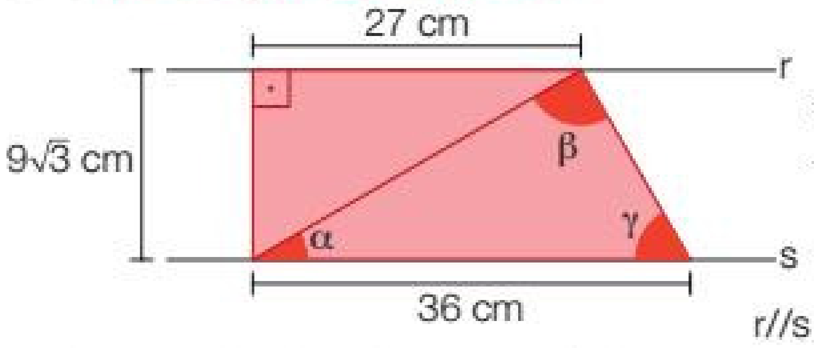
Acervo da editora

a) o valor de $\frac{a}{b}$ 3

b) o seno de $B\hat{D}C$ $\frac{1}{2}$

c) a tangente de $A\hat{D}B$ $\sqrt{3}$

37. Determine a medida dos ângulos α, β e γ na figura abaixo, sabendo que as retas *r* e *s* são paralelas. $\alpha = 30°$, $\beta = 90°$ e $\gamma = 60°$



Acervo da editora

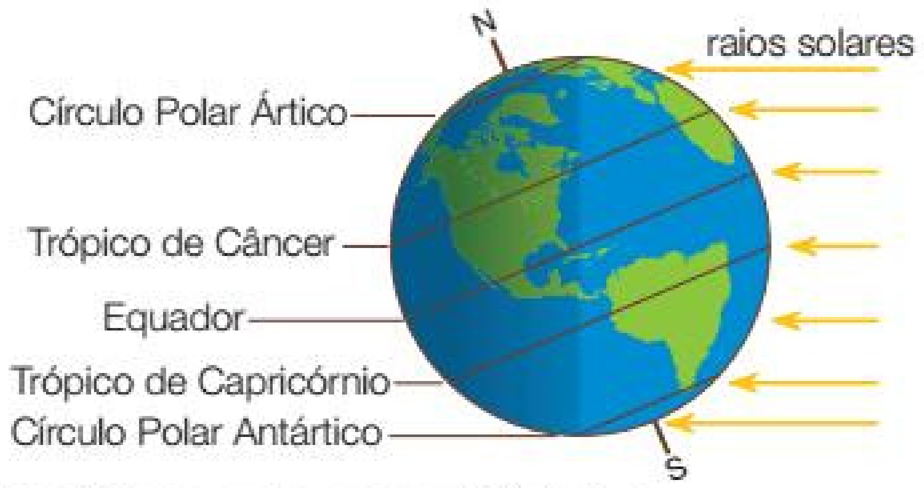
38. Utilizando a tabela trigonométrica, determine o seno, o cosseno e a tangente de: Respostas no final do livro.

a) 78°
b) 5°
c) 52°

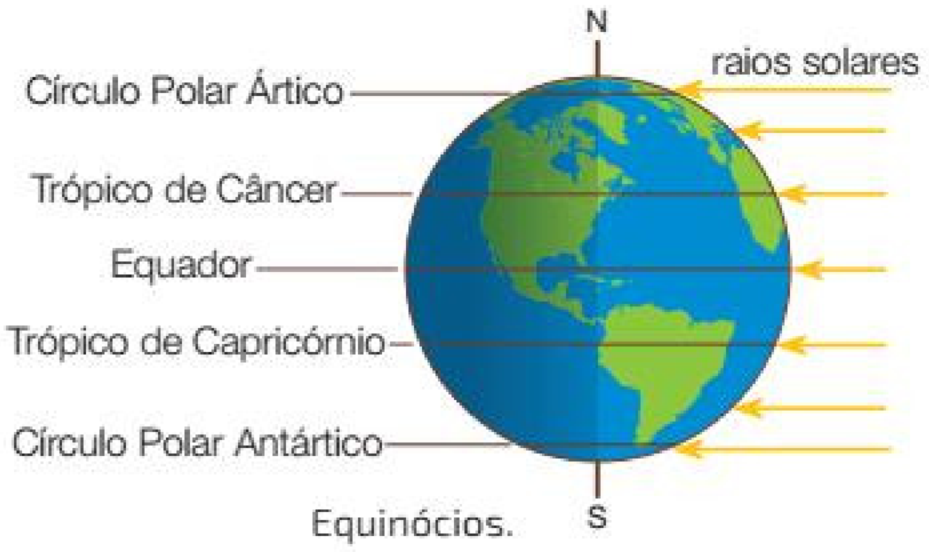
39. Determine a medida aproximada do ângulo agudo:

a) cujo seno é 0,21 12°
b) cujo cosseno é 0,239 76°
c) cuja tangente é 0,858 41°

40. Em virtude da inclinação do eixo de rotação da Terra em relação ao plano da órbita, ora um hemisfério está voltado para o Sol, ora o outro hemisfério. Em consequência disso, ocorrem os chamados solstícios, que são os dois instantes do ano em que o Sol mais se afasta do equador terrestre, marcando o início do verão em um hemisfério e do inverno no outro. Entre os solstícios, ocorrem os equinócios, que são os dois momentos do ano em que os hemisférios estão simetricamente dispostos em relação ao Sol, e os raios solares são paralelos ao equador, marcando o início da primavera em um dos hemisférios e do outono no outro. Nos equinócios, o dia e a noite têm a mesma duração.



Solstício de verão no hemisfério Sul e de inverno no hemisfério Norte.



Equinócios.

Ilustrações: Acervo da editora

Solstício de verão no hemisfério Norte e de inverno no hemisfério Sul.

Durante um equinócio, estão localizadas sobre o mesmo meridiano uma torre, a 30° de latitude, projetando uma sombra de 33 m, e uma pessoa, a 60° de latitude, projetando uma sombra de 3 m. Sabendo que nesse mesmo instante, no encontro desse meridiano com a linha do Equador, os raios solares incidem na Terra perpendicularmente, determine a altura aproximada da torre e da pessoa. 57 m; 1,73 m

Latitude: distância angular (em relação ao centro da Terra) entre um ponto localizado na superfície terrestre e a linha do Equador.

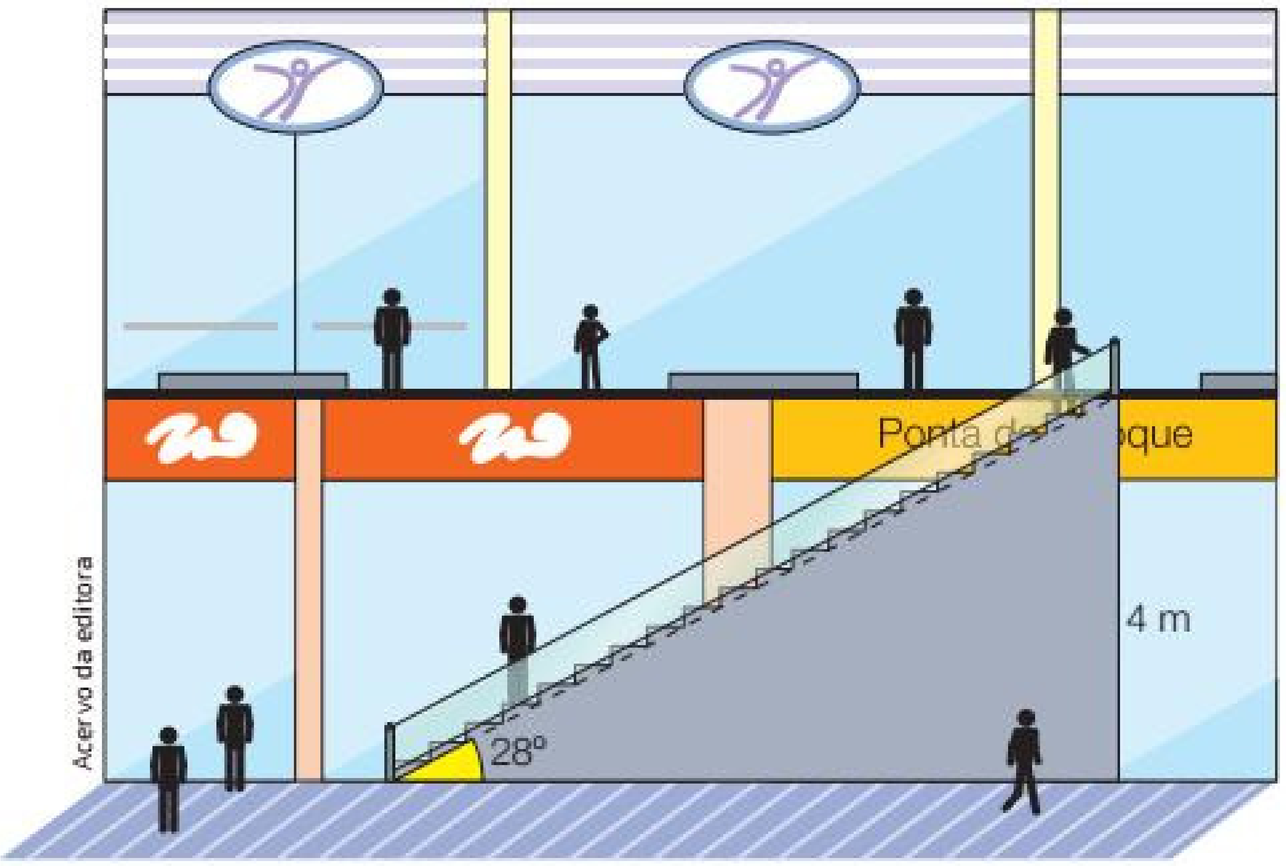
41. Nas páginas **232** e **233**, estudamos que todos os cidadãos possuem o direito de usufruir dos espaços e serviços que a cidade oferece, e que para garantir esses direitos alguns ambientes e construções devem ser adaptados.

Estudamos que a razão entre a altura que se deseja acessar e o comprimento horizontal de uma rampa deve ser no máximo 0,0833.

a) Em sua opinião, por que foi estabelecida essa razão máxima? Resposta esperada: para evitar rampas muito íngremes, o que dificultaria o deslocamento sobre elas.

b) Entre quais medidas inteiras de ângulo, em graus, deve ser a inclinação máxima de uma rampa em relação à horizontal? Entre 4° e 5°.*

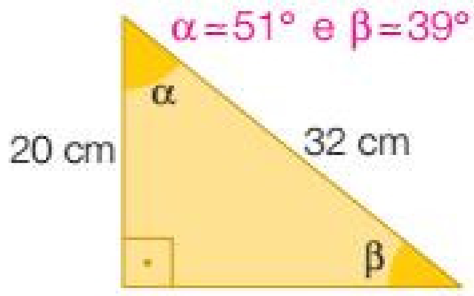
42. Para fazer a ligação entre dois andares de um *shopping*, deseja-se instalar uma escada rolante, cuja inclinação seja de 28°. Sabendo que a diferença de altura entre os pisos desses andares é 4 m, calcule a que distância horizontal do topo deverá estar situada a parte inferior da escada. aproximadamente 7,5 m



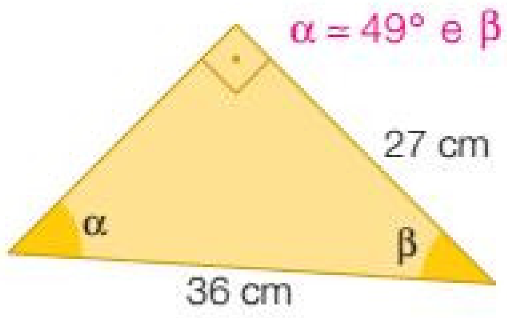
Acervo da editora

43. Calcule as medidas dos ângulos α e β em cada triângulo retângulo.

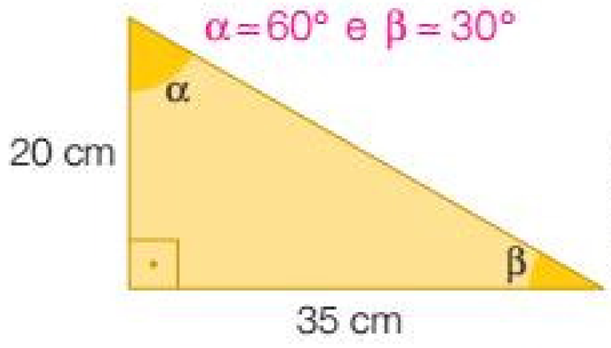
a) α = 51° e β = 39°



b) α = 49° e β = 41°



c) α = 60° e β = 30°

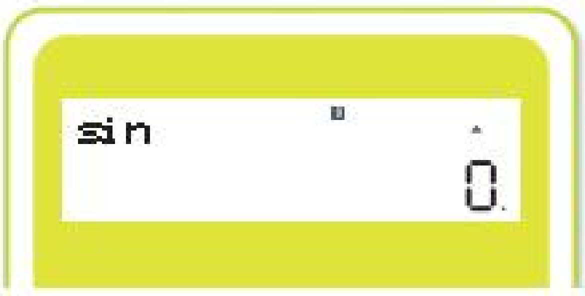


Ilustrações: Acervo da editora

44. **Calculadora**

Para o cálculo do seno ou do cosseno de um ângulo agudo, além da tabela trigonométrica, podemos utilizar uma calculadora científica. Veja o procedimento utilizado para o cálculo do seno e do cosseno de 55°.

Inicialmente pressionamos a tecla seno: sin

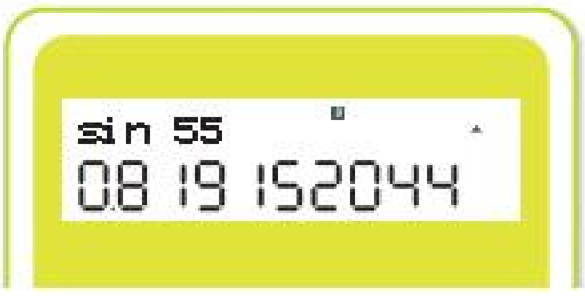


Oriente os alunos sobre como verificar se a calculadora está operando com a unidade de medida de ângulos em graus.

Em seguida, inserimos o número 55, correspondente a 55°: 5 → 5

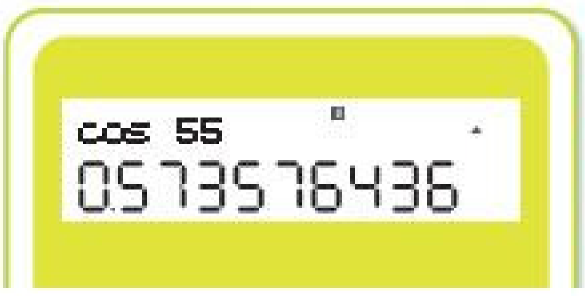
Caso não haja calculadoras para todos os alunos, reúna-os em grupos para que possam realizar a atividade ou, então, veja a possibilidade de trazer algumas calculadoras para a sala de aula.

Por fim, pressionamos = para obter o valor de sen55°.



Para calcular cos55°, procedemos de maneira semelhante, utilizando desta vez a tecla cosseno:

cos → 5 → 5 → =

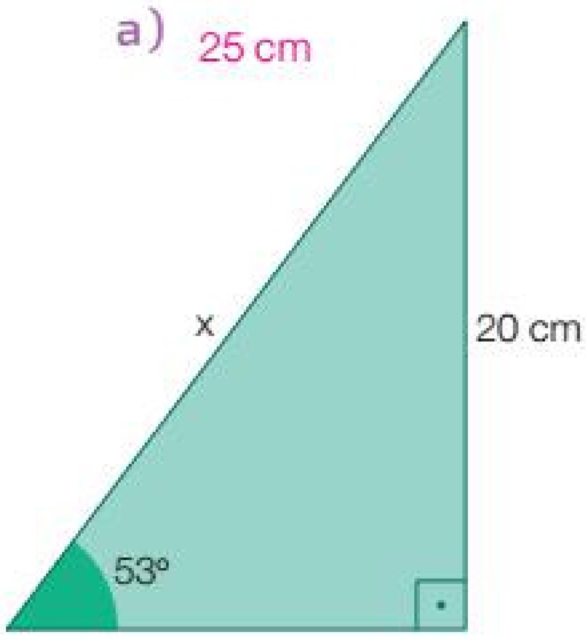


Ilustrações: Camila Ferreira

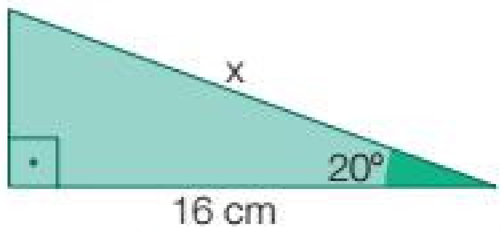
Peça aos alunos que comparem os resultados obtidos na calculadora científica com aqueles da tabela trigonométrica apresentada no início desta seção.

Utilize uma calculadora científica para determinar o valor aproximado de *x* em cada figura.

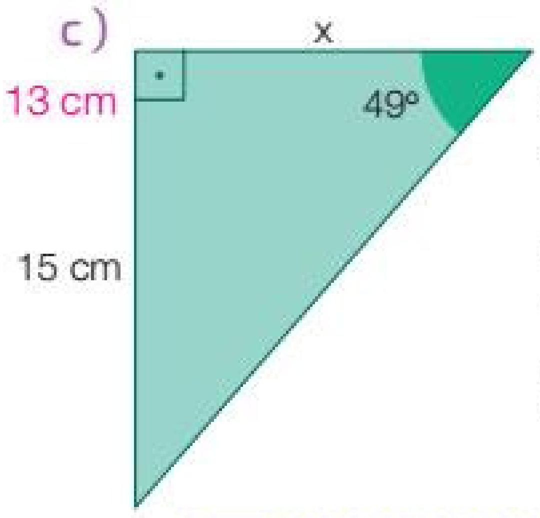
a) 25 cm



b) 17 cm



c) 13 cm

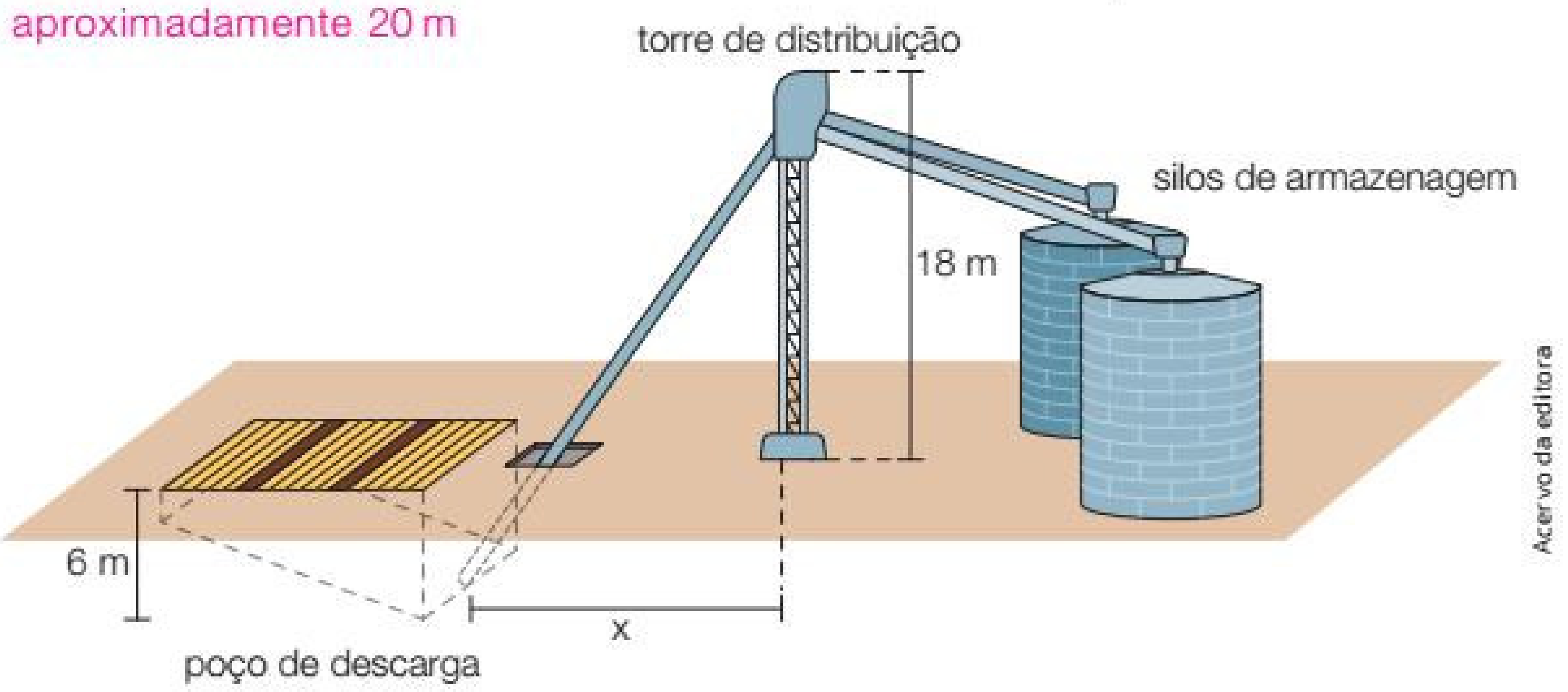


Ilustrações: Acervo da editora

Sin e *cos* são abreviações das palavras inglesas *sine* e *cosine*, que correspondem a seno e cosseno, respectivamente.

*Caso os alunos tenham dificuldade em resolver essa atividade, sugira que realizem o desenho de um esquema para representar a rampa, indicando o ângulo de inclinação sugerido. Depois, consultem a tabela trigonométrica.

45. Uma cooperativa deseja construir um poço com profundidade máxima de 6 m para descarga de grãos. Do fundo desse poço deve partir um tubo, cuja finalidade é transportar os grãos até o topo de uma torre de distribuição. O tubo que será instalado não deverá formar um ângulo maior que 50° com o solo. De acordo com essas informações, calcule a distância mínima *x* que deve haver entre a torre e o poço a ser construído. aproximadamente 20 m

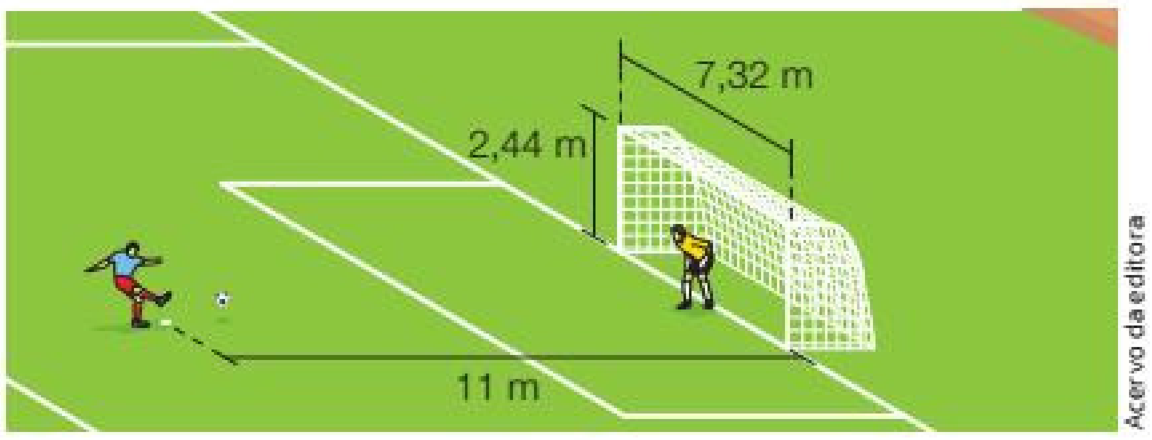


Acervo da editora

46. **Desafio**

Um dos esportes mais populares do mundo é o futebol. Como em muitos outros esportes, há várias regras que regem sua prática, dentre elas algumas referentes às medidas e às marcações do campo de jogo.

Veja no esquema ao lado algumas das medidas de um campo de futebol, considerando as medidas internas do gol.



Acervo da editora

De acordo com as medidas indicadas no esquema, e supondo que a bola siga uma trajetória retilínea após um chute da marca do pênalti, responda:

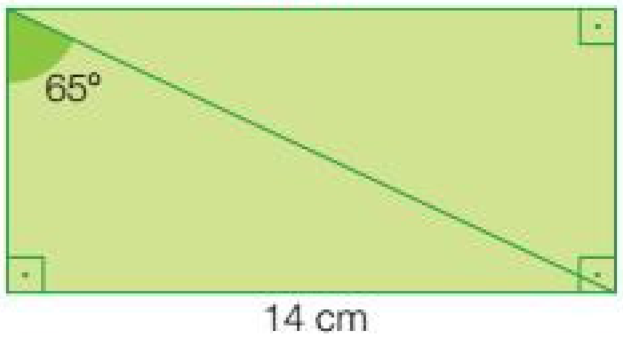
a) Em relação ao centro do gol, qual é o ângulo em que um jogador deve chutar a bola para que ela atinja o canto inferior esquerdo? aproximadamente 18°

b) Em relação ao plano do chão, qual é o ângulo em que deve ser chutada a bola para que ela atinja o centro do gol, na parte superior? aproximadamente 12°

c) Se um jogador chutar a bola num ângulo maior que 30° em relação ao centro do gol, ela atingirá a área interna às traves? Por quê? Não, pois o maior ângulo possível para acertar o gol é de aproximadamente 22°, atingido quando a bola é chutada em direção ao canto superior esquerdo ou direito.

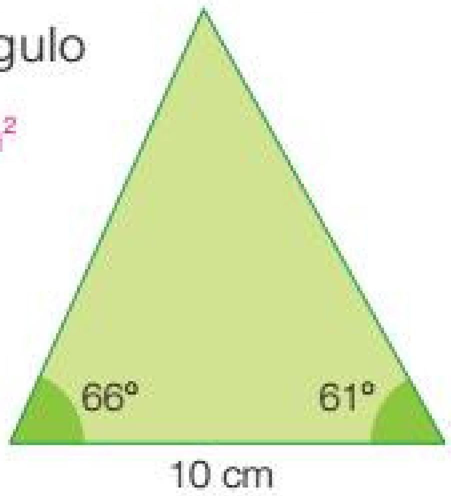
47. Calcule a área aproximada de cada figura.

a) retângulo 91 cm²



b) trapézio 29 cm²

c) triângulo 50 cm²



Ilustrações: Acervo da editora

48. A tirolesa é uma técnica utilizada para o transporte de carga de um ponto a outro. Nessa técnica, a carga é presa a uma roldana que desliza por um cabo, cujas extremidades geralmente estão em alturas diferentes. A tirolesa também é utilizada como prática esportiva, sendo considerada um esporte radical. Em geral, ela é praticada em meio a paisagens naturais com outros esportes, como o rapel.

Em certo parque, a estrutura para a prática da tirolesa foi montada de maneira que a diferença entre as alturas das extremidades do cabo por onde os participantes deslizam é de cerca de 60 m, e o ângulo de descida formado com a vertical é de 80°.

Nessas condições, e considerando o cabo esticado, é correto afirmar que: b

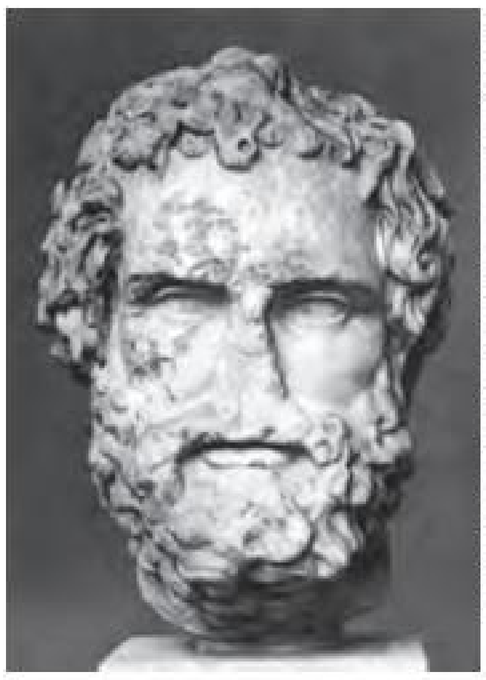
a) a distância horizontal percorrida ao fim do percurso é 10% menor que o comprimento do cabo.

b) um praticante que desliza ao longo do cabo com uma velocidade constante de 12 m/s completa o percurso em aproximadamente 29 s.

c) um praticante que se deslocou ao longo do cabo a uma velocidade média vertical de 5 m/s, completou o percurso em 20 s.

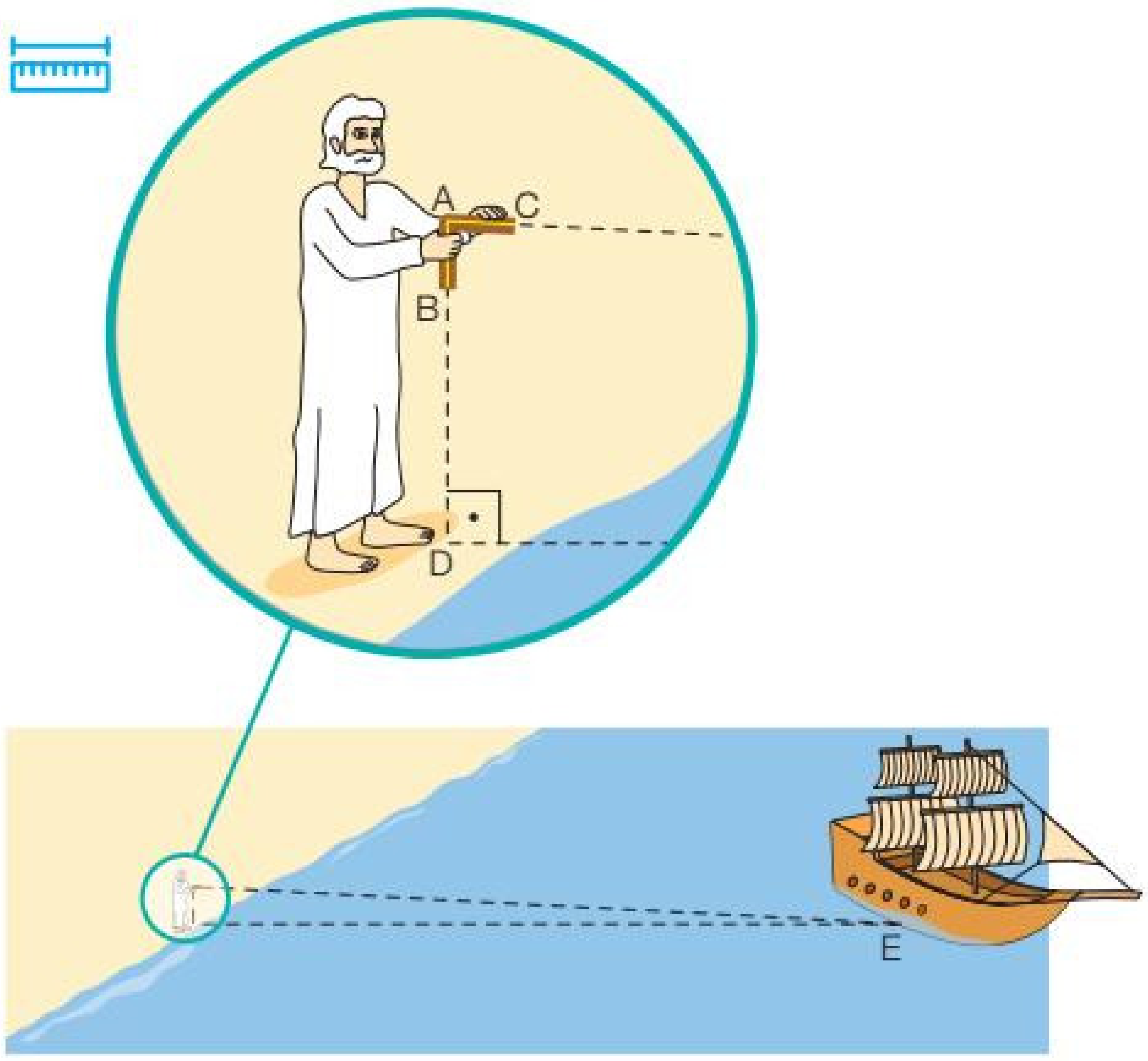
d) a distância do percurso é de 500 m.

49. Há relatos de que Tales de Mileto (c. 600 a.C.), em certa ocasião, utilizou a congruência de triângulos para calcular a distância de um navio à praia. Segundo dizem, ele procedeu da seguinte maneira:


Antiga escultura grega de Tales de Mileto.

Autor desconhecido. Escultura em pedra. Coleção particular. Foto: Granger, NYC/Glow Images

De posse de um instrumento formado por duas hastes articuladas, ele manteve uma delas ($\overline{AB}$) apontada verticalmente para o chão, no ponto *D*, e a outra ($\overline{AC}$) apontada para o navio, no ponto *E*, de acordo com o esquema.



Em seguida, sem mudar a abertura das hastes, girou o instrumento projetando um ponto *P* na praia.

Ilustrações: Acervo da editora

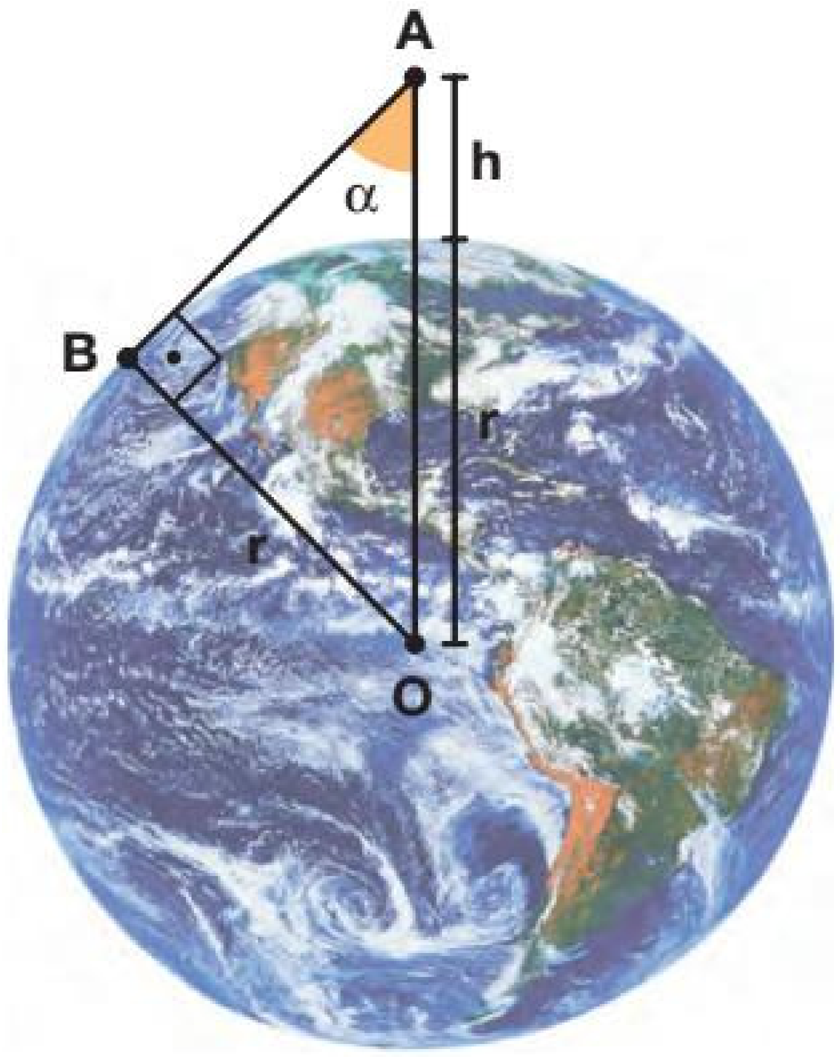
Pelo fato de o ΔADP ter um lado e dois ângulos adjacentes a esse lado iguais aos do ΔADE, eles são congruentes. Em consequência, $DE = DP$, sendo assim suficiente medir DP.

Outra maneira que poderia ter sido utilizada é medir o ângulo formado entre as hastes e a distância entre o vértice do instrumento e o chão. Dessa maneira, se supusermos que $\text{med}\left(B\hat{A}C\right) = 87°$ e que $AD = 1{,}7$ m, qual seria a distância do navio à praia? aproximadamente 32 m

50. Uma ótima aproximação para as medidas do raio e da circunferência da Terra é creditada ao grego Eratóstenes (c. 230 a.C.). Utilizando conhecimentos sobre ângulos, ele calculou a medida da circunferência da Terra com um erro considerado pequeno em relação às medições realizadas atualmente.

Uma das maneiras que podemos utilizar atualmente para medir o raio aproximado da Terra é a seguinte:

A bordo de uma aeronave, a uma altura *h* do solo, mede-se o ângulo α, formado entre as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AO}$, em que *A* representa a posição da aeronave, *B* é um ponto avistado no horizonte, a partir de *A*, e *O* é o centro da Terra.



Fotomontagem de Acervo da editora formada pela imagem Photodisc/Getty Images

Considerando o planeta como uma esfera, o triângulo ABO é retângulo em *B*, pois é o ponto de tangência da reta $\overleftrightarrow{AB}$ com a Terra. Se *r* for a medida do raio da Terra, de acordo com a figura acima, teremos:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{r}{r+h} \Rightarrow (r+h)\operatorname{sen}\alpha = r \Rightarrow$$
$$\Rightarrow r\operatorname{sen}\alpha + h\operatorname{sen}\alpha = r \Rightarrow$$
$$\Rightarrow h\operatorname{sen}\alpha = r - r\operatorname{sen}\alpha \Rightarrow$$
$$\Rightarrow h\operatorname{sen}\alpha = r(1-\operatorname{sen}\alpha)$$

Dessa maneira, podemos concluir que:

$$r = \frac{h\operatorname{sen}\alpha}{1-\operatorname{sen}\alpha}$$

Como *h* e α são conhecidos, podemos determinar o raio *r* da Terra.

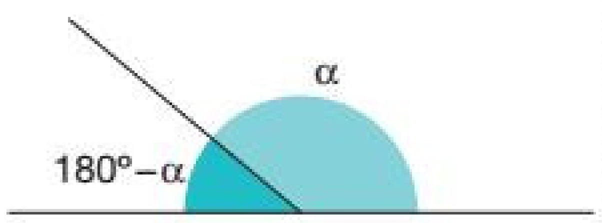
Supondo que uma aeronave que esteja a 43 000 m de altitude encontre $\alpha = 83°$, qual é o raio aproximado da Terra obtido nessa situação? aproximadamente 6 000 km

Trigonometria em um triângulo qualquer

Estudamos anteriormente as razões trigonométricas em um triângulo retângulo. Contudo, o seno e o cosseno podem ser utilizados para determinar medidas em triângulos quaisquer. Para tanto, inicialmente estudaremos os valores dessas razões trigonométricas para ângulos suplementares.

Dado um ângulo obtuso com medida α, com $90° < \alpha < 180°$, temos:

Dois ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são suplementares se $\text{med}(\hat{A}) + \text{med}(\hat{B}) = 180°$.



Acervo da editora

- $\text{sen}\,\alpha = \text{sen}(180° - \alpha)$

  O seno de um ângulo obtuso é igual ao seno de seu suplementar.
- $\cos\alpha = -\cos(180° - \alpha)$

  O cosseno de um ângulo obtuso é igual ao oposto do cosseno de seu suplementar.

No caso particular de um ângulo de 90°, temos $\text{sen}\,90° = 1$ e $\cos 90° = 0$.

Essas igualdades podem ser demonstradas e, posteriormente, serão estudadas com mais detalhes.

As igualdades apresentadas são trabalhadas com mais detalhes no volume 2, quando as razões seno e cosseno são tratadas na circunferência trigonométrica.

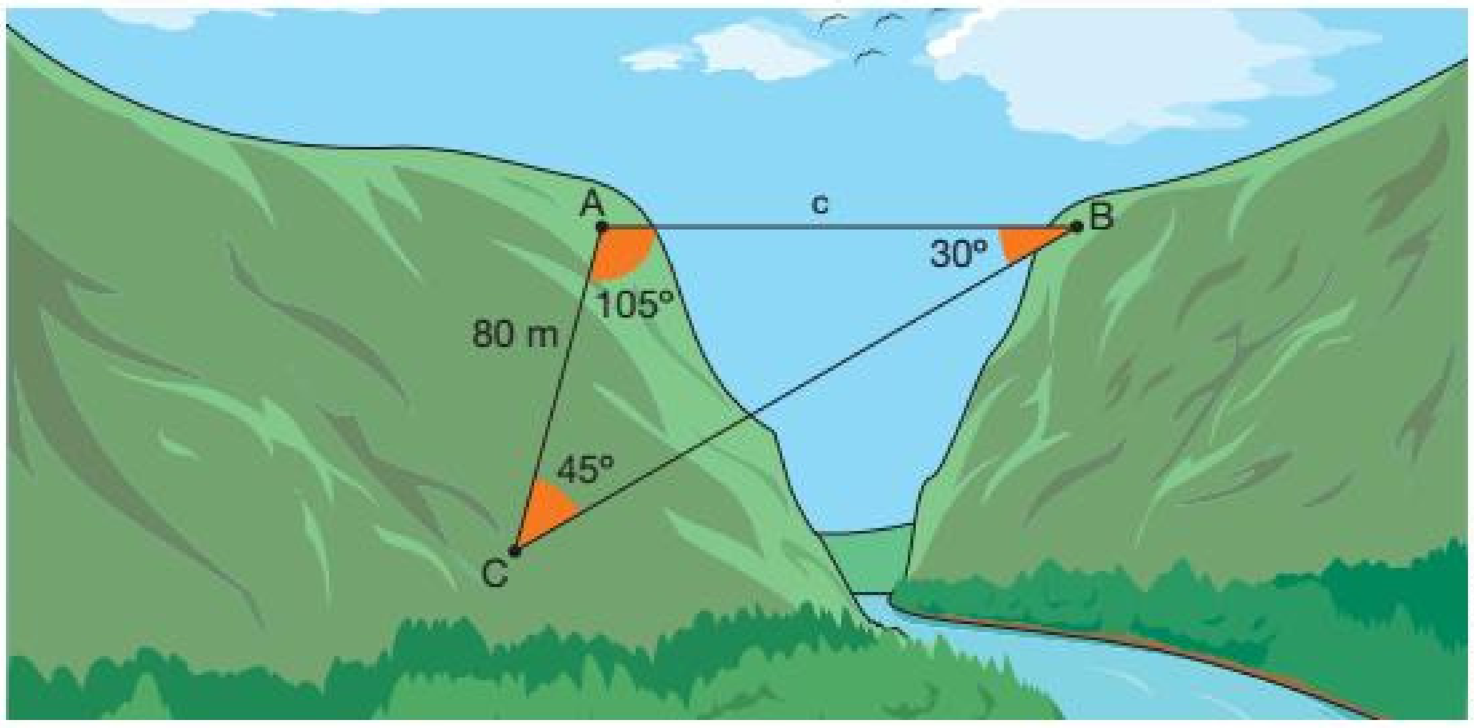
Exemplos

- $\text{sen}\,150° = \text{sen}(180° - 150°) = \text{sen}\,30° = \frac{1}{2}$
- $\cos 150° = -\cos(180° - 150°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\text{sen}\,106° = \text{sen}(180° - 106°) = \text{sen}\,74° = 0{,}961$
- $\cos 106° = -\cos(180° - 106°) = -\cos 74° = -0{,}276$

Os valores de sen 74° e cos 74° podem ser consultados na tabela trigonométrica.

Lei dos senos

Para determinar o comprimento de uma ponte que será construída sobre certo vale, um topógrafo marcou os pontos *A* e *B*, que serão as extremidades da ponte, e um ponto *C* na mesma margem de *A*. Em seguida, mediu o comprimento AC e os ângulos $B\hat{A}C$ e $A\hat{C}B$, conforme o esquema.

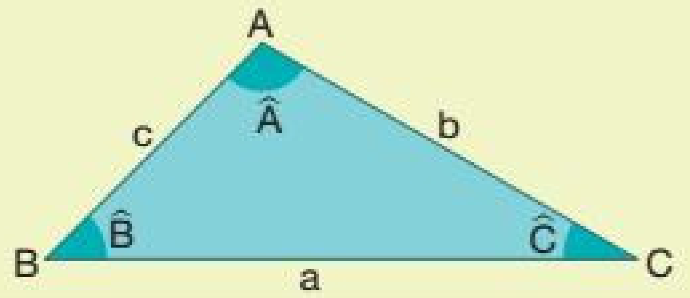


Ronaldo Lucena

Para determinar o comprimento da ponte, podemos utilizar a **lei dos senos**, em que:

Dado um triângulo ABC qualquer, a medida dos lados é proporcional ao seno dos ângulos opostos correspondentes:

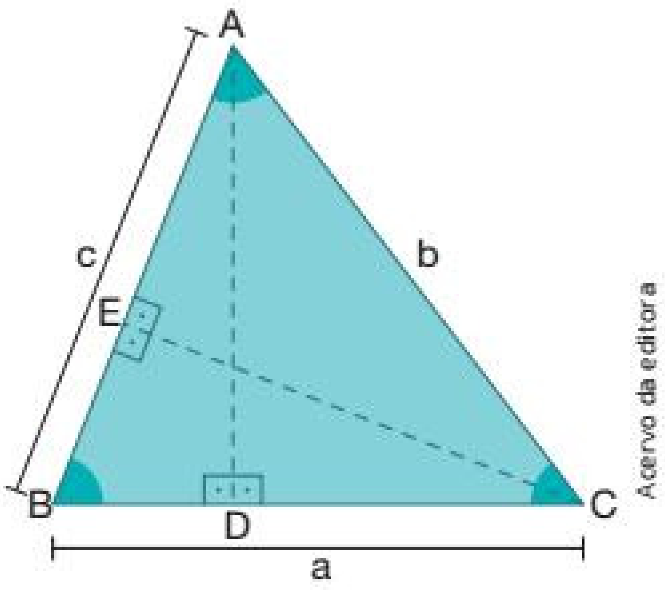
$$\frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\,\hat{C}}$$



Acervo da editora

Para demonstrar a lei dos senos para triângulos acutângulos, consideramos o triângulo ABC.

Triângulo acutângulo é aquele em que cada ângulo interno é agudo, ou seja, tem menos de 90º.



Acervo da editora

Nos triângulos retângulos obtidos ao traçarmos as alturas relativas aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, temos:

$$\left.\begin{array}{l}\Delta BCE\text{: } \text{sen}\hat{B}=\dfrac{CE}{a}\Rightarrow CE=a\cdot\text{sen}\hat{B}\\ \Delta ACE\text{: } \text{sen}\hat{A}=\dfrac{CE}{b}\Rightarrow CE=b\cdot\text{sen}\hat{A}\end{array}\right\}\Rightarrow\underbrace{a\cdot\text{sen}\hat{B}}_{CE}=\underbrace{b\cdot\text{sen}\hat{A}}_{CE}\Rightarrow\frac{a}{\text{sen}\hat{A}}=\frac{b}{\text{sen}\hat{B}}\quad\text{(I)}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Delta ACD\text{: } \text{sen}\hat{C}=\dfrac{AD}{b}\Rightarrow AD=b\cdot\text{sen}\hat{C}\\ \Delta ABD\text{: } \text{sen}\hat{B}=\dfrac{AD}{c}\Rightarrow AD=c\cdot\text{sen}\hat{B}\end{array}\right\}\Rightarrow\underbrace{b\cdot\text{sen}\hat{C}}_{AD}=\underbrace{c\cdot\text{sen}\hat{B}}_{AD}\Rightarrow\frac{b}{\text{sen}\hat{B}}=\frac{c}{\text{sen}\hat{C}}\quad\text{(II)}$$

Portanto, de **I** e **II** segue que:

$$\frac{a}{\text{sen}\hat{A}}=\frac{b}{\text{sen}\hat{B}}=\frac{c}{\text{sen}\hat{C}}$$

A demonstração da lei dos senos para triângulos obtusângulos e triângulos retângulos é realizada de maneira semelhante à apresentada.

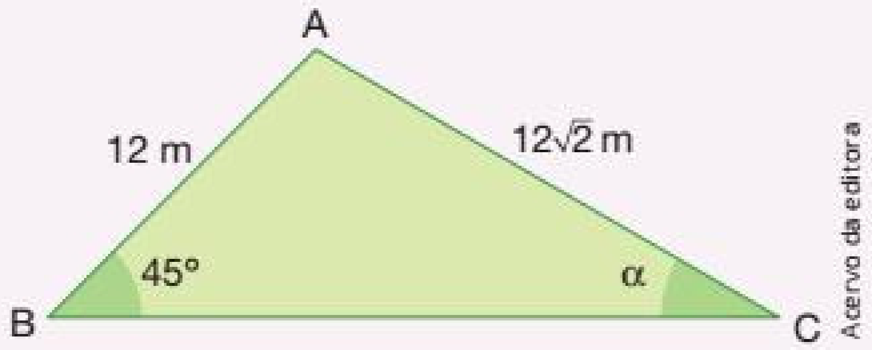
Para resolvermos o problema apresentado no início do tópico, no qual é necessário medir o comprimento que terá a ponte, aplicamos a lei dos senos.

$$\frac{b}{\text{sen}\hat{B}}=\frac{c}{\text{sen}\hat{C}}\Rightarrow\frac{80}{\text{sen}30°}=\frac{c}{\text{sen}45°}\Rightarrow\frac{80}{\frac{1}{2}}=\frac{c}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\Rightarrow c=80\sqrt{2}\simeq 113{,}14$$

Portanto, a ponte terá, aproximadamente, 113,14 m de comprimento.

Atividades resolvidas

R13. Determine a medida α no triângulo ABC.



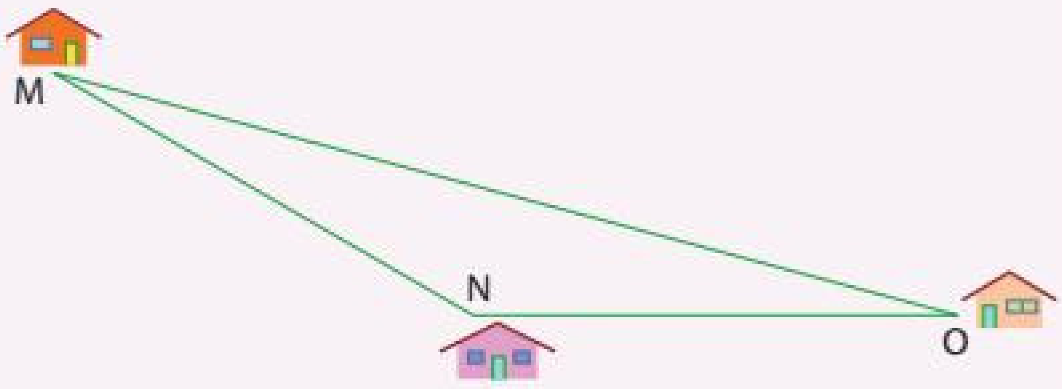
Acervo da editora

Resolução

Utilizando a lei dos senos, temos:

$$\frac{AC}{\text{sen}\,45°}=\frac{AB}{\text{sen}\,\alpha}\Rightarrow\frac{12\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{12}{\text{sen}\,\alpha}\Rightarrow 12\sqrt{2}\cdot\text{sen}\,\alpha=12\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\text{sen}\,\alpha=\frac{6\sqrt{2}}{12\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\Rightarrow\ \alpha=30°$$

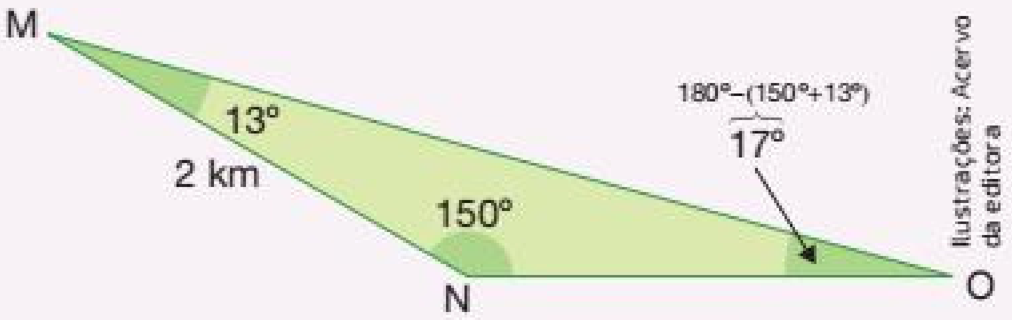
R14. Na figura ao lado, os pontos *M*, *N* e *O* representam a casa de Marcos, Natália e Osvaldo, respectivamente. Sabendo que a distância em linha reta entre a casa de Marcos e a de Natália é 2 km e que $N\hat{M}O = 13°$ e $M\hat{N}O = 150°$, determine a distância entre a casa de Marcos e a de Osvaldo.



Resolução

Podemos representar essa situação por meio do triângulo MNO.

Aplicando a lei dos senos:



Ilustrações: Acervo da editora

$$\frac{MN}{\underbrace{\text{sen}\,17°}_{0,292}} = \frac{MO}{\underbrace{\text{sen}\,150°}_{\text{sen}\,30°}} \Rightarrow \frac{2}{0,292} = \frac{MO}{\frac{1}{2}} \Rightarrow 0,292 \cdot MO = 1 \Rightarrow MO \simeq 3,42$$

Portanto, a distância entre a casa de Marcos e a de Osvaldo é de cerca de 3,42 km.

Atividades

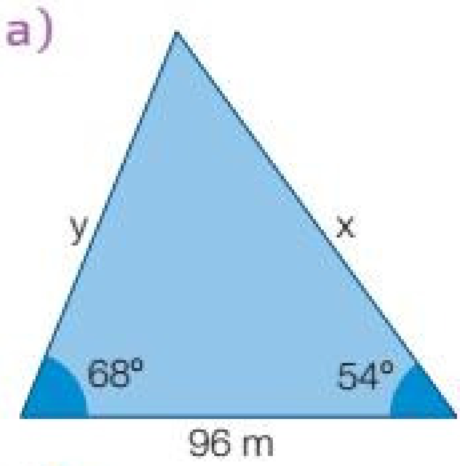
Anote as respostas no caderno.

51. Determine o valor do seno e do cosseno de cada ângulo. Respostas no final do livro.

a) 95° b) 110° c) 125° d) 168° e) 174°

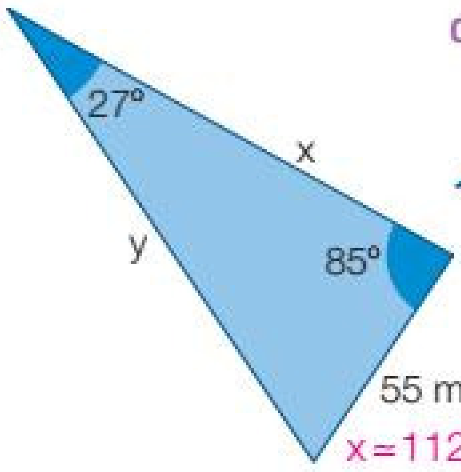
52. Determine as medidas *x* e *y* em cada triângulo.

a)



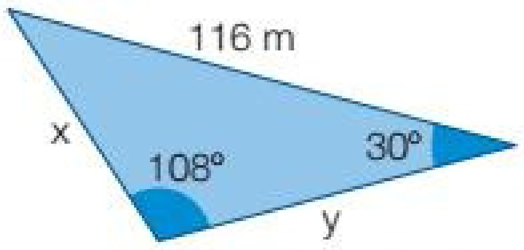
x≈105 m e y≈91,6 m

b)



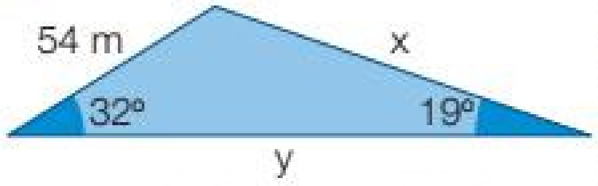
x≈112,3 m e y≈120,7 m

c)



x≈61 m e y≈81,6 m

d)

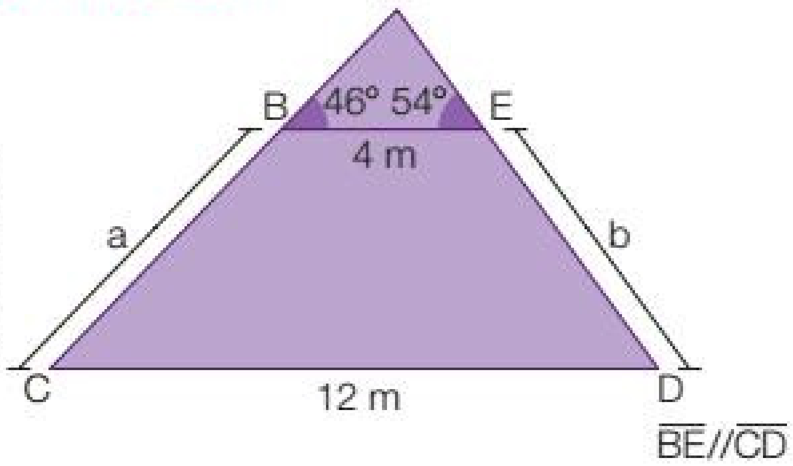


x≈87,8 m e y≈128,7 m

Ilustrações: Acervo da editora

53. Considere um triângulo isósceles cuja base mede 50 cm e os ângulos internos adjacentes a ela têm 43°. Calcule a medida aproximada de cada um de seus lados e o seno do ângulo oposto à base. 50 cm, 34,2 cm e 34,2 cm; sen94°≈0,998

54. Determine as medidas aproximadas de *a* e *b*. a≈6,6 m e b≈5,8 m



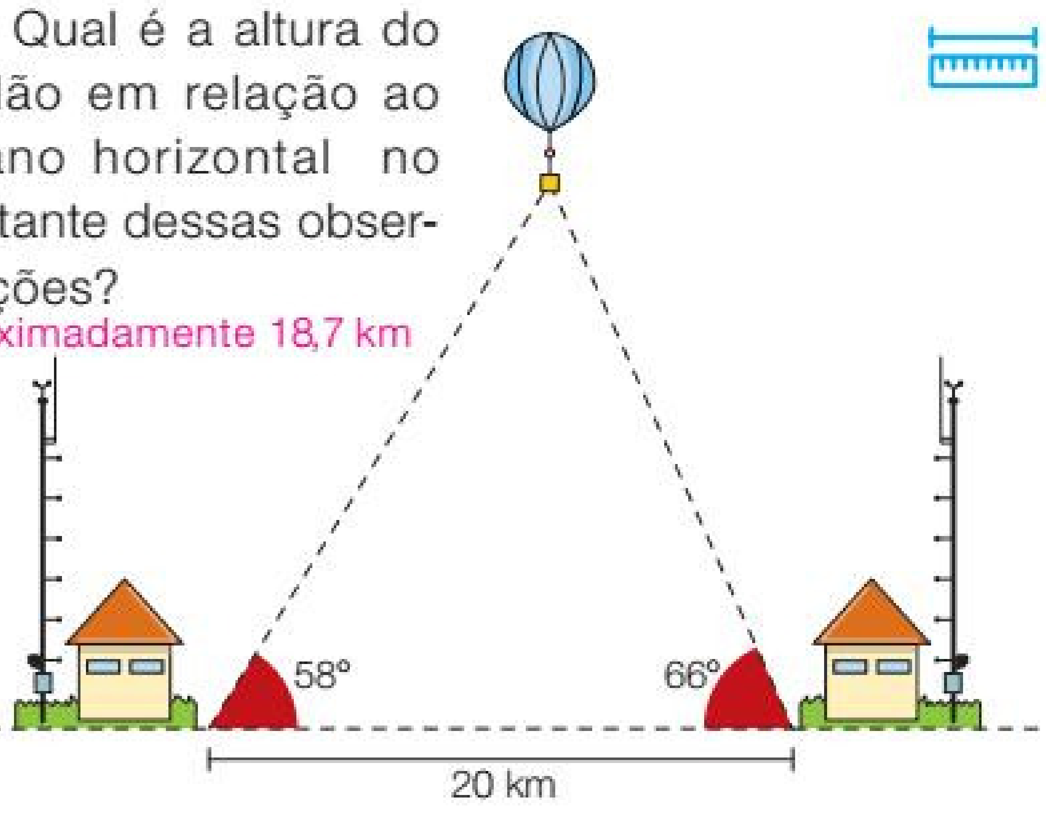
Acervo da editora

55. A partir de informações como umidade, temperatura e pressão atmosférica, os meteorologistas realizam previsões, com certa confiabilidade, das condições climáticas em determinada região, por certo período.

Corel Stock Photo

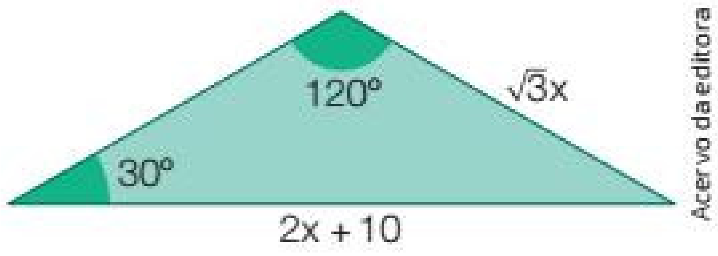
Um dos instrumentos utilizados pelos meteorologistas para obter informações são os balões meteorológicos.

Suponha que em certa região estejam localizadas duas estações meteorológicas, a 20 km uma da outra. De uma delas é possível avistar, em determinado instante, um balão meteorológico sob um ângulo de 58° em relação ao plano horizontal, e da outra pode-se avistar o balão, nesse mesmo instante, sob um ângulo de 66°, conforme a figura. Qual é a altura do balão em relação ao plano horizontal no instante dessas observações? aproximadamente 18,7 km



Ronaldo Lucena

56. No triângulo estão indicadas as medidas de dois de seus lados e as de dois ângulos internos. Calcule o valor de *x*.
x = 10



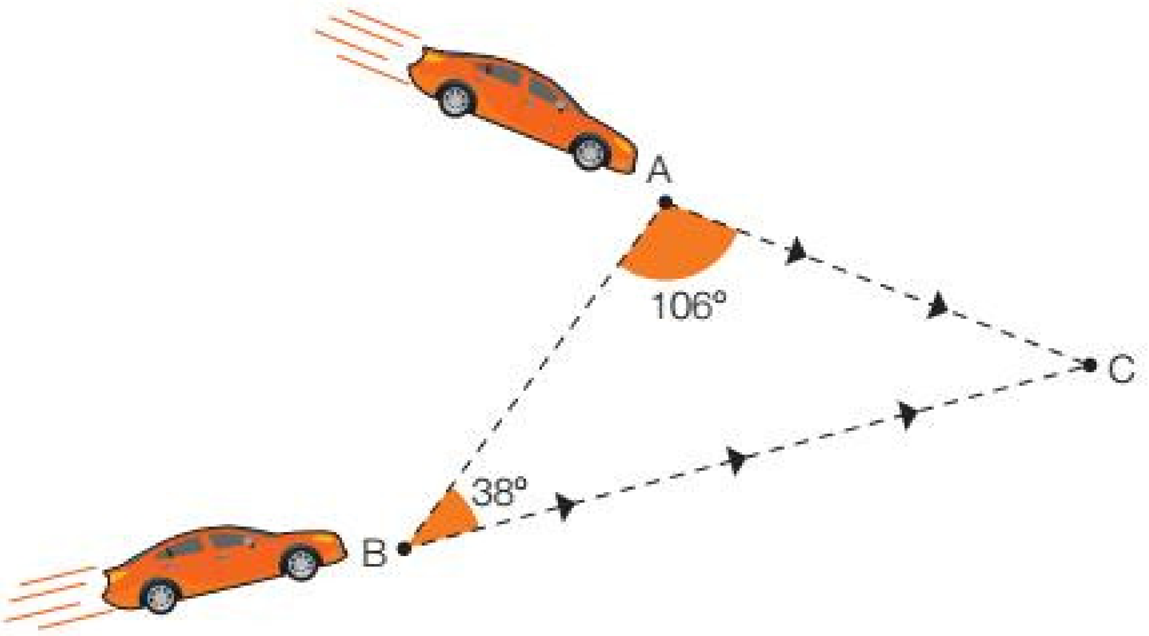
Acervo da editora

57. Em geral os dublês são contratados para substituir atores em cenas perigosas ou que requerem habilidades especiais. Isso é feito para evitar que os atores se machuquem. A profissão de dublê é perigosa e requer que o profissional seja altamente treinado para evitar acidentes.


Carlos Tischler/Rex Features/ZUMA Wire/Easypix

Dublê de Daniel Craig em cena do filme **007 Contra Spectre** no *set* de filmagem, na Cidade do México, no México, em 2015. Nesse filme o ator Daniel Craig interpreta James Bond.

Na gravação da cena de um filme, dois dublês pilotam os carros *A* e *B*. De acordo com o roteiro, o carro *A* deve se locomover a 18 m/s e o *B*, a uma velocidade suficiente para que haja a colisão com o carro *A* no ponto *C*.



Ronaldo Lucena

Considerando os ângulos indicados no esquema e sabendo que a distância inicial entre os carros é de 400 m, calcule, aproximadamente:

a) a distância entre cada carro e o ponto *C*
A: 419 m; B: 654 m

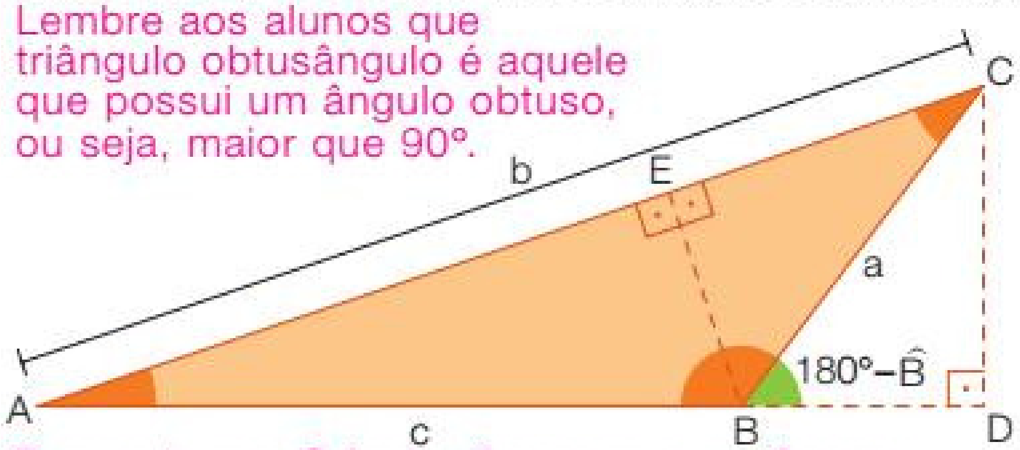
b) a velocidade do carro *B* para chocar-se com *A* em *C* 28 m/s

c) o tempo de percurso entre a posição inicial e o momento da colisão 23 s

58. **Desafio**

Com o auxílio da figura a seguir, demonstre a validade da lei dos senos para triângulos obtusângulos.

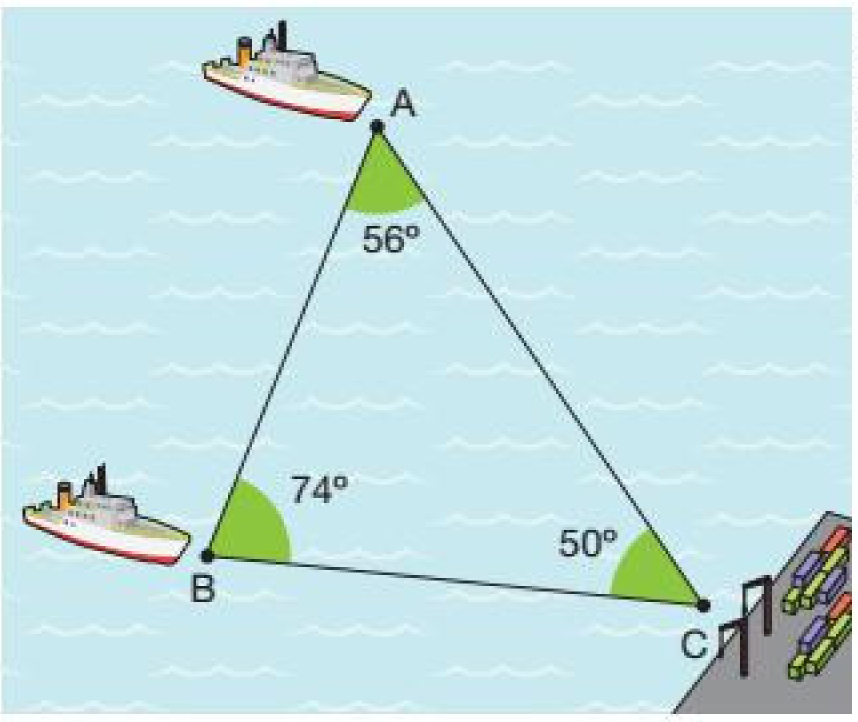
Lembre aos alunos que triângulo obtusângulo é aquele que possui um ângulo obtuso, ou seja, maior que 90°.



Acervo da editora

Resposta nas **Orientações para o professor.**

59. Dois navios, *A* e *B*, localizados em pontos distintos, navegam em linha reta em direção ao porto *C*. Seus respectivos comandantes, utilizando instrumentos de localização e comunicando-se por rádio, verificam que $med(B\hat{A}C) = 56°$, $med(A\hat{B}C) = 74°$ e a distância entre as embarcações é de 90 km. O navio *A* dirige-se ao porto a uma velocidade constante de 37 km/h, e o *B*, a 32 km/h.



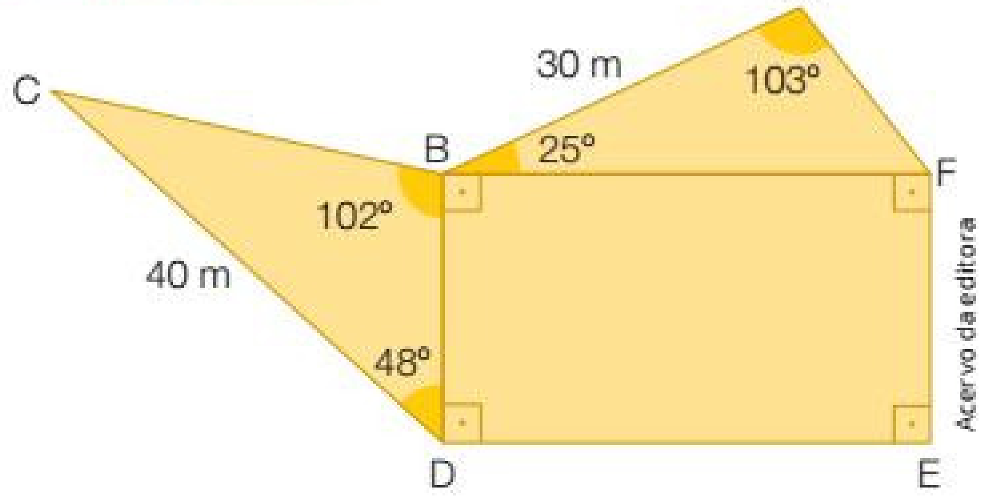
Ronaldo Lucena

a) Qual navio está mais próximo do porto?
navio B

b) Se os navios mantiverem a velocidade constante, em aproximadamente quanto tempo cada um irá chegar ao porto? navio A: 3 h; navio B: 3 h

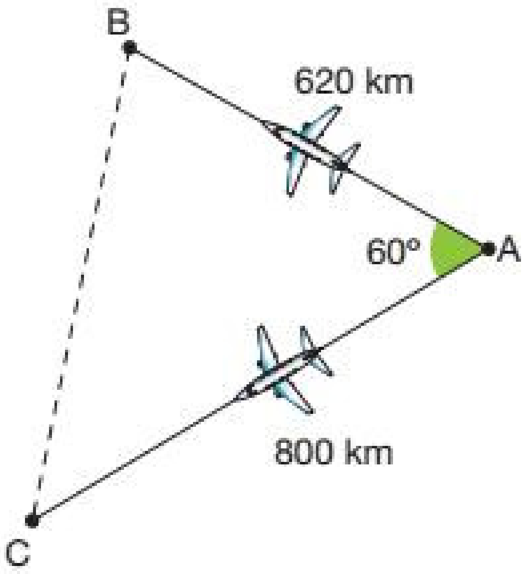
c) Instantes depois que os comandantes conferiram suas posições, receberam uma mensagem por rádio dizendo que o navio *B* deveria atracar primeiro, e que o *A* deveria reduzir sua velocidade e mantê-la, para chegar ao porto meia hora após o *B*. A que velocidade constante, aproximadamente, o navio *A* deverá navegar para cumprir o planejado? 32 km/h

60. De acordo com a figura, elabore uma atividade e troque-a com um colega. Em seguida, resolva a que lhe foi entregue e confiram as resoluções obtidas.
Resposta pessoal.



Acervo da editora

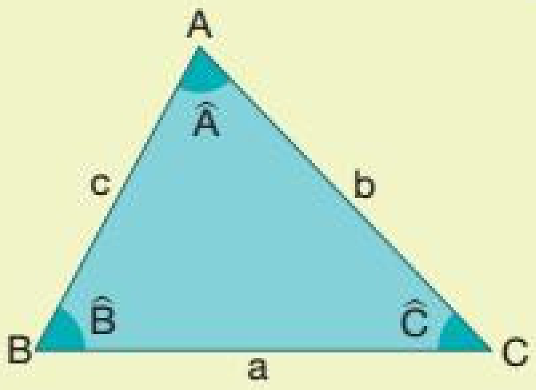
Lei dos cossenos



Uma companhia aérea realiza voos diretos entre as cidades *A* e *B* e entre *A* e *C*. Porém, essa companhia pretende criar uma nova linha na qual realizará voos partindo de *A* com destino a *C*, fazendo conexão em *B*.

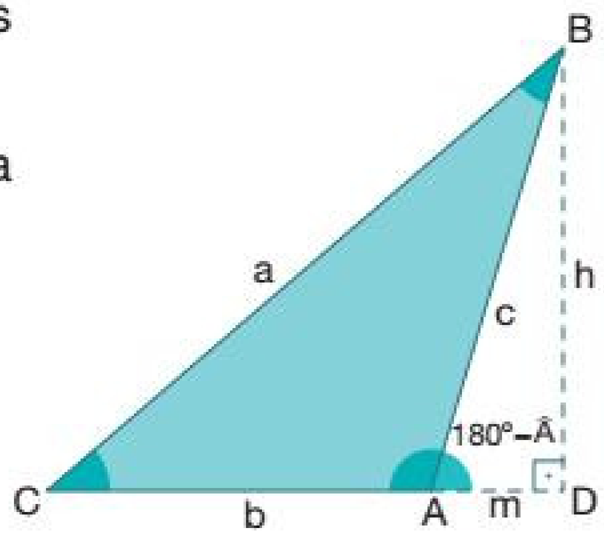
Para calcularmos a distância em linha reta entre *B* e *C*, podemos utilizar a **lei dos cossenos**, que é enunciada da seguinte maneira:

Para todo triângulo ABC, o quadrado da medida de um lado qualquer é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados, subtraída do dobro do produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo formado por eles.



$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos\hat{A}$ $\quad$ $b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos\hat{B}$ $\quad$ $c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos\hat{C}$

Para demonstrar a lei dos cossenos para triângulos obtusângulos, consideramos o triângulo ABC ao lado.



Ilustrações: Acervo da editora

No triângulo retângulo obtido ao traçarmos a altura relativa ao lado $\overline{AC}$, temos:

- ΔBCD: $a^2=(b+m)^2+h^2 \Rightarrow a^2=b^2+m^2+2\cdot b\cdot m+h^2$ (I)
- ΔABD:

$$c^2=m^2+h^2 \Rightarrow h^2=c^2-m^2 \text{ (II)}$$

$$\underbrace{\cos\left(180°-\hat{A}\right)}_{-\cos\hat{A}}=\frac{m}{c}\Rightarrow m=-c\cdot\cos\hat{A} \text{ (III)}$$

Substituindo **II** em **I**, temos:

$$a^2=b^2+m^2+2\cdot b\cdot m+\underbrace{c^2-m^2}_{h^2}\Rightarrow a^2=b^2+c^2+2\cdot b\cdot m \text{ (IV)}$$

Substituindo **III** em **IV**, segue que:

$$a^2=b^2+c^2+2\cdot b\cdot\underbrace{\left(-c\cdot\cos\hat{A}\right)}_{m}\Rightarrow \boxed{a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos\hat{A}}$$

De maneira análoga, podemos demonstrar as relações $b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos\hat{B}$ e $c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos\hat{C}$.

Para triângulos acutângulos e triângulos retângulos, também podemos demonstrar a lei dos cossenos.

Aplicando a lei dos cossenos no problema apresentado no início do tópico, podemos determinar a distância entre as cidades *B* e *C*.

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos\hat{A}\Rightarrow$$

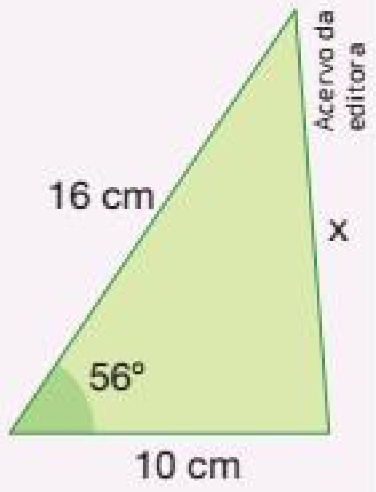
$$\Rightarrow a^2=800^2+620^2-2\cdot 800\cdot 620\cdot\cos 60°=640\,000+384\,400-992\,000\cdot\frac{1}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2=1\,024\,400-496\,000=528\,400\Rightarrow a=\sqrt{528\,400}\simeq 726{,}91$$

Portanto, a distância entre as cidades *B* a *C* é, aproximadamente, 726,91 km.

Atividades resolvidas

R15. No triângulo ao lado, determine o valor de *x*.



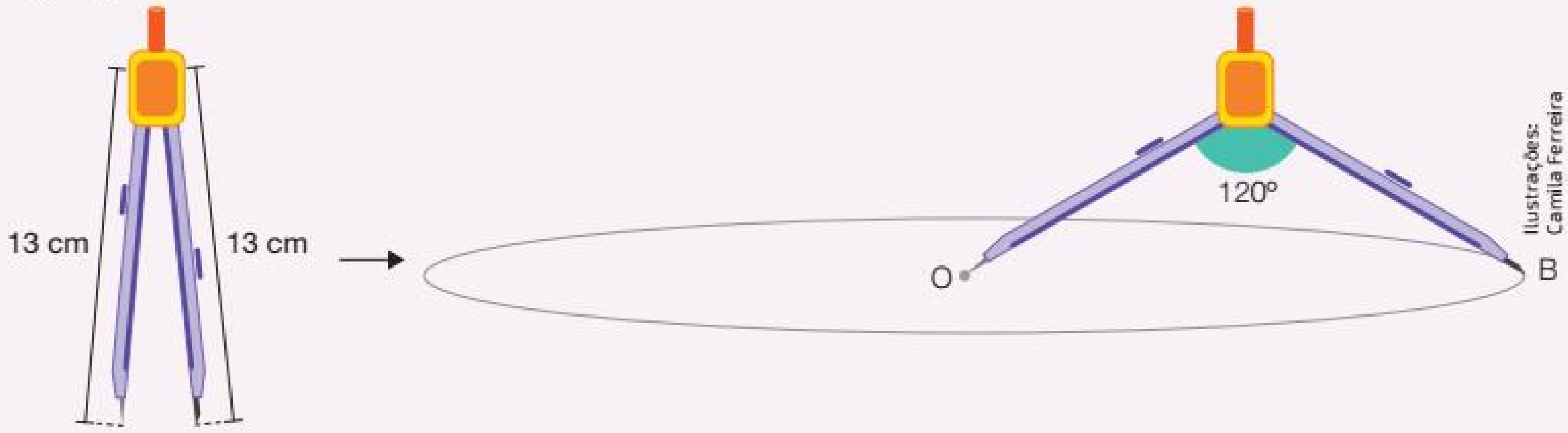
Resolução

Utilizando a lei dos cossenos, temos:

$$x^2 = 16^2 + 10^2 - 2\cdot 16\cdot 10\cdot \cos 56° \Rightarrow x^2 = 256 + 100 - 2\cdot 16\cdot 10\cdot 0,559 \Rightarrow$$

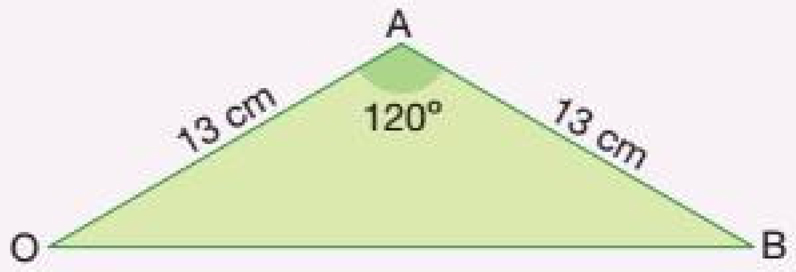
$$\Rightarrow x^2 = 356 - 178,88 \Rightarrow x^2 = 177,12 \Rightarrow x \simeq 13,31 \longrightarrow x \simeq 13,31\text{ cm}$$

R16. Determine a medida do raio da circunferência construída pelo compasso indicado a seguir, com abertura de 120°.



Resolução

A medida do raio da circunferência é igual à medida do lado $\overline{OB}$ no triângulo AOB.



Utilizando a lei dos cossenos, temos:

$$(OB)^2 = 13^2 + 13^2 - 2\cdot 13\cdot 13\cdot \underbrace{\cos 120°}_{-\cos 60°} \Rightarrow (OB)^2 = 169 + 169 - 2\cdot 169\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (OB)^2 = 338 + 169 \Rightarrow (OB)^2 = 507 \Rightarrow OB = 13\sqrt{3}$$

Portanto, a medida do raio da circunferência é $13\sqrt{3}$ cm.

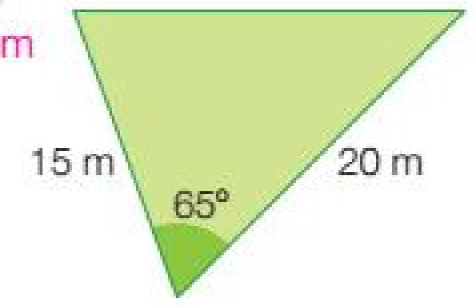
> Podemos resolver essa atividade utilizando a lei dos senos.
> Como o triângulo AOB é isósceles, $\text{med}(A\hat{O}B) = \text{med}(A\hat{B}O) = 30°$, logo:
>
> $$\frac{13}{\text{sen}30°} = \frac{OB}{\underbrace{\text{sen}120°}_{\text{sen}60°}} \Rightarrow OB\cdot\frac{1}{2} = 13\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow OB = 13\sqrt{3}$$

Atividades

Anote as respostas no caderno.

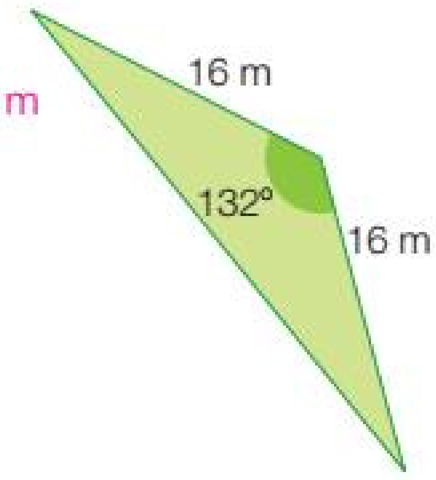
61. Calcule o perímetro aproximado de cada triângulo.

a) 54,3 m



b) 61,2 m

c) 61,2 m



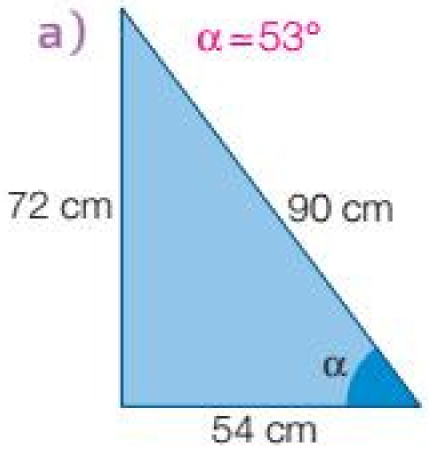
d) 48,1 m

Ilustrações: Acervo da editora

62. Calcule a medida das diagonais do paralelogramo ABCD sabendo que AB = 80 cm, BC = 120 cm e $\text{med}(\hat{C}) = 132°$. aproximadamente 183,4 cm e 89,2 cm

63. Determine a medida aproximada do ângulo α em cada triângulo.

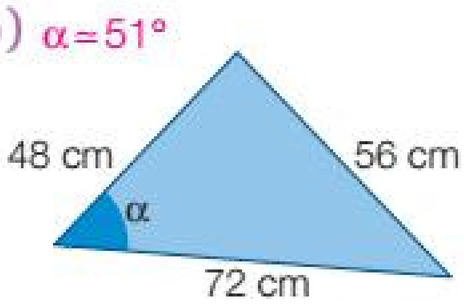
a) $\alpha = 53°$



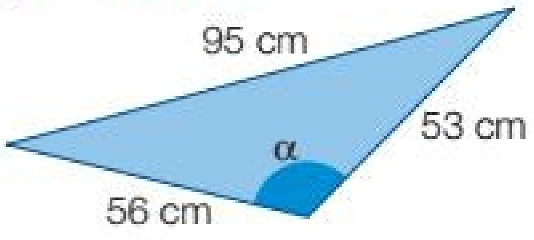
c) $\alpha = 142°$

Ilustrações: Acervo da editora

b) $\alpha = 51°$

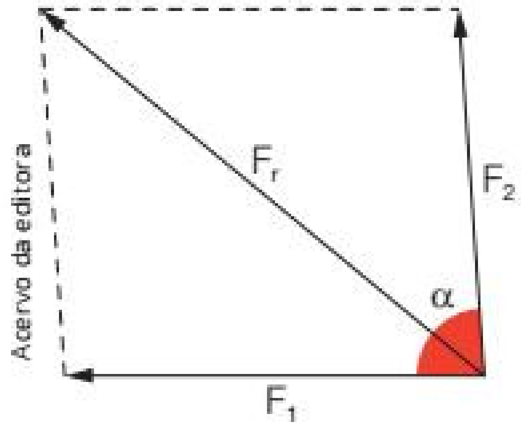


d) $\alpha = 121°$



64. Força é um agente físico capaz de alterar o estado de repouso ou de movimento de um corpo. Uma maneira de representá-la graficamente é por meio de um vetor, cujo comprimento é proporcional à intensidade da força aplicada. Além da intensidade, o vetor também indica a direção e o sentido de atuação da força.

Se tivermos duas forças, F_1 e F_2, formando um ângulo α entre si, podemos representá-las por uma única, que denominamos força resultante (F_r). Graficamente, essa força corresponderá à diagonal do paralelogramo cujos lados são F_1 e F_2, como indicado no esquema.

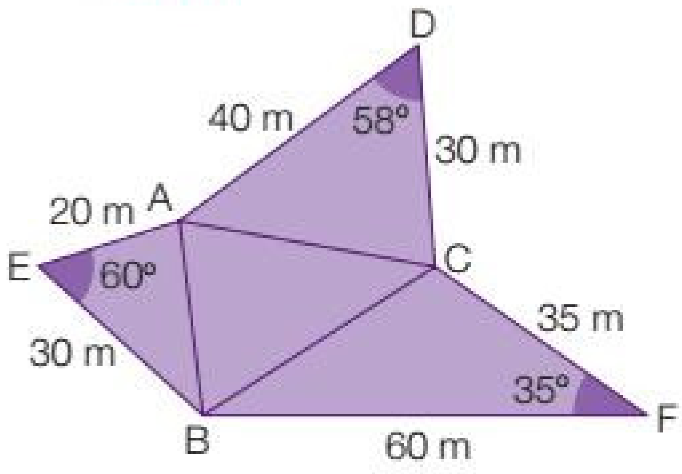


Acervo da editora

Supondo que $F_1 = 16$ N, $F_2 = 14$ N e $\alpha = 86°$, determine a intensidade da força resultante. $F_r = 22$ N

Newton (N) é uma unidade de medida de força que provoca uma aceleração de 1 m/s^2 em um corpo com 1 kg de massa.

65. De acordo com as medidas indicadas na figura, determine o perímetro aproximado do triângulo ABC. 98,7 m



Acervo da editora

66. Em um triângulo ABC, AB = 10 cm, BC = $\sqrt{76}$ cm e $\text{med}(\hat{A}) = 60°$. Todos os triângulos que podem ser construídos a partir dessas medidas são congruentes? Em caso positivo, escreva as medidas dos lados desse triângulo. Em caso negativo, escreva a medida dos lados de dois triângulos não congruentes que possuem essas características. não; 10 cm, $\sqrt{76}$ cm e 6 cm; 10 cm, $\sqrt{76}$ cm e 4 cm

67. Se, em um relógio, 25 cm e 40 cm são, respectivamente, as medidas dos ponteiros das horas e dos minutos, calcule a distância aproximada entre as extremidades desses ponteiros quando o relógio marcar 4 h. 56,8 cm

68. Um drone, que é um veículo aéreo não tripulado, é utilizado por uma empresa para realizar algumas pequenas entregas de mercadorias. Em uma delas, a aeronave deveria partir do ponto *A* e pousar com a mercadoria em um ponto *B*, realizando um desvio na rota a fim de evitar alguns edifícios. Inicialmente, o drone percorreu 500 m em trajetória retilínea, formando um ângulo de 75° com o norte, no sentido oeste. Ainda em linha reta, percorreu mais 1 000 m, até atingir o ponto *B*, e pousar.

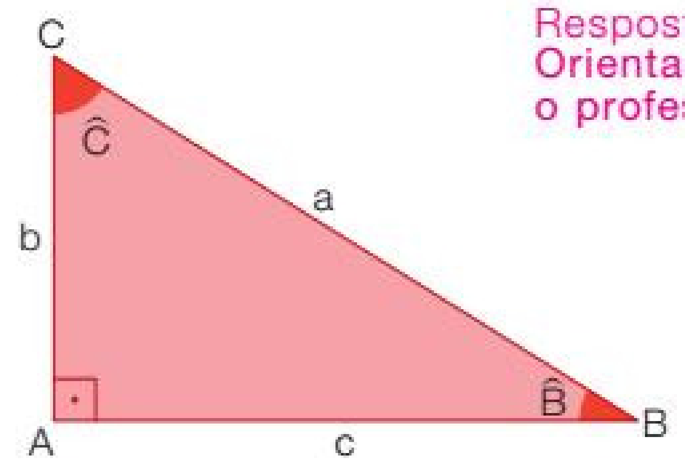
Quantos metros o drone teria percorrido a menos nessa entrega, caso pudesse ter se deslocado em linha reta entre os pontos *A* e *B*? 495 m

Ernesto Reghran/Pulsar

Drone sendo utilizado em propriedade rural, em Tibagi (PR), em 2014.

69. Com o auxílio do triângulo ABC, mostre que o Teorema de Pitágoras é um caso particular da lei dos cossenos no triângulo retângulo.

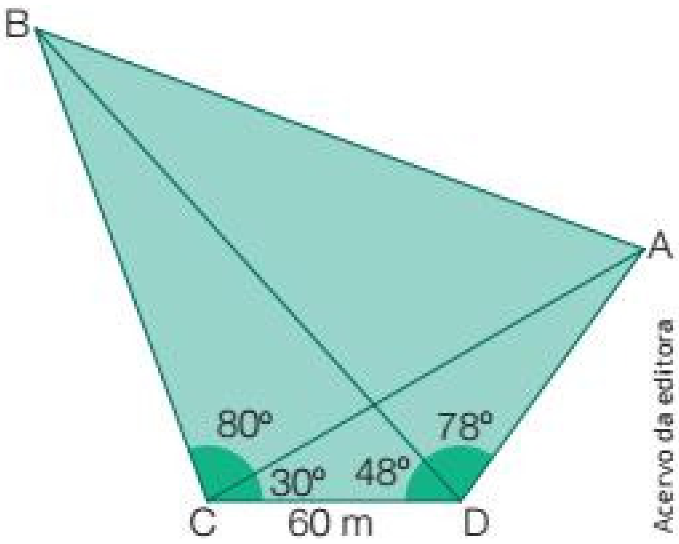
Resposta nas Orientações para o professor.



Acervo da editora

70. Em relação às medidas indicadas no quadrilátero ABCD, calcule a distância AB.

aproximadamente 153,1 m

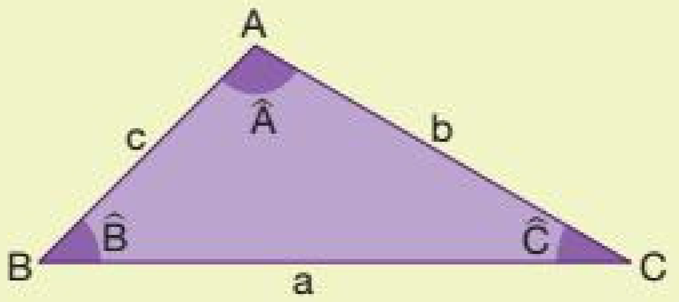


Acervo da editora

Área de um triângulo

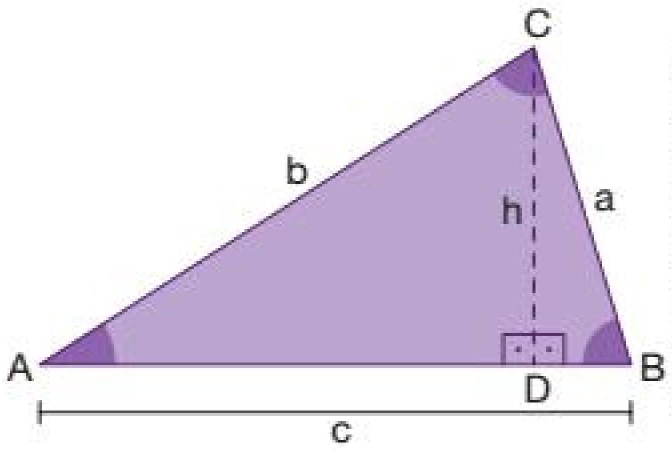
Você já estudou que a área de um triângulo pode ser calculada por meio da fórmula $S=\frac{b\cdot h}{2}$, em que *b* indica a medida de um dos lados e *h*, a altura relativa a esse lado. Estudaremos, agora, como calcular a área de um triângulo conhecendo as medidas de dois de seus lados e a do ângulo formado por eles.

Para todo triângulo ABC, sua área é dada pelo semiproduto das medidas de dois lados quaisquer pelo seno do ângulo por eles formado.



$$S=\frac{bc\cdot \text{sen}\widehat{A}}{2} \qquad S=\frac{ac\cdot \text{sen}\widehat{B}}{2} \qquad S=\frac{ab\cdot \text{sen}\widehat{C}}{2}$$

Para demonstrar essas fórmulas, consideraremos o triângulo acutângulo ABC.



Ilustrações: Acervo da editora

Do triângulo retângulo ACD, temos:

$$\text{sen}\widehat{A}=\frac{h}{b}\Rightarrow h=b\cdot \text{sen}\widehat{A}$$

Como a área do triângulo ABC é dada por $S=\frac{c\cdot h}{2}$, segue que:

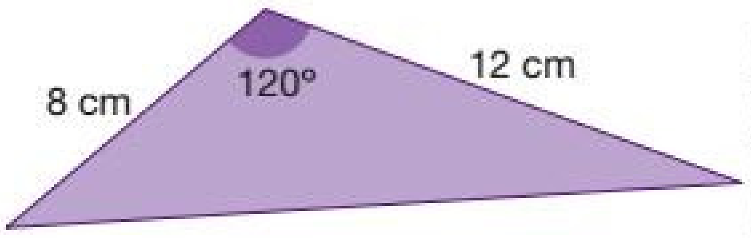
$$S=\frac{c\cdot h}{2}=\frac{c\cdot \overbrace{b\cdot \text{sen}\widehat{A}}^{h}}{2}\Rightarrow \boxed{S=\frac{bc\cdot \text{sen}\widehat{A}}{2}}$$

De maneira análoga, podemos demonstrar as fórmulas $S=\frac{ac\cdot \text{sen}\widehat{B}}{2}$ e $S=\frac{ab\cdot \text{sen}\widehat{C}}{2}$.

Para triângulos obtusângulos e triângulos retângulos, podemos demonstrar as fórmulas de maneira semelhante à apresentada.

Exemplo

Vamos calcular a área do triângulo a seguir.

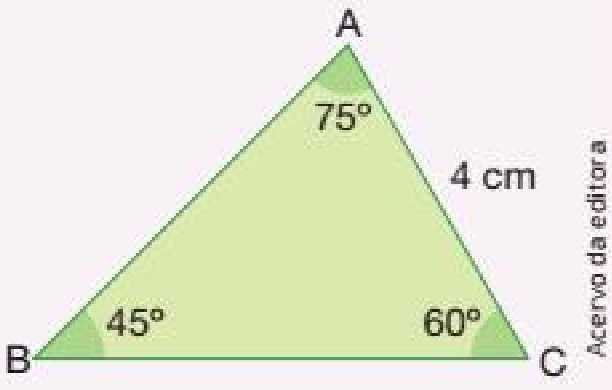


Acervo da editora

$$S=\frac{8\cdot 12\cdot \text{sen}120°}{2}=\frac{8\cdot 12\cdot \overbrace{\text{sen}60°}^{\text{sen}(180°-120°)}}{2}=\frac{8\cdot 12\cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=24\sqrt{3}\simeq 41{,}57\Rightarrow \boxed{S\simeq 41{,}57\text{ cm}^2}$$

Atividades resolvidas

R17. Determine a área do triângulo ao lado.



Acervo da editora

Resolução

Inicialmente, calculamos a medida do lado $\overline{AB}$ utilizando a lei dos senos.

$$\frac{AB}{\text{sen}60^\circ}=\frac{AC}{\text{sen}45^\circ}\Rightarrow\frac{AB}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{4}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\Rightarrow AB=\frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\Rightarrow AB=\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\Rightarrow AB=2\sqrt{6}\text{ cm}$$

Em seguida, aplicamos a fórmula da área de um triângulo qualquer.

$$S=\frac{4\cdot2\sqrt{6}\cdot\text{sen}75^\circ}{2}=\frac{4\cdot2\sqrt{6}\cdot0{,}966}{2}\simeq9{,}46$$

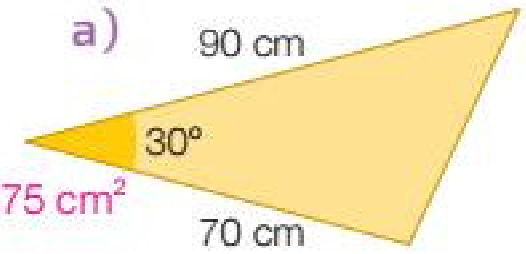
Portanto, a área do triângulo é, aproximadamente, $9{,}46\text{ cm}^2$.

Atividades

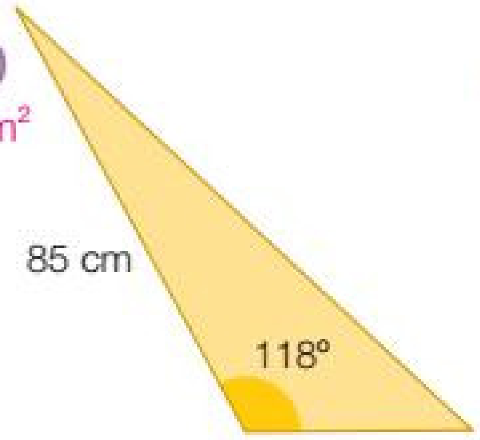
Anote as respostas no caderno.

71. Determine a área de cada triângulo.

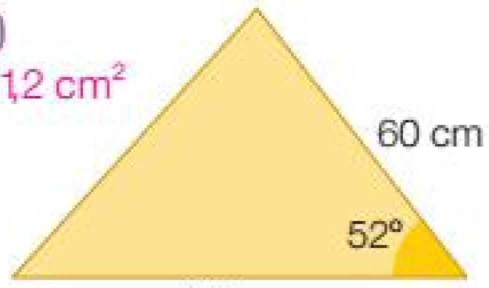
a) $1\,575\text{ cm}^2$



b) $1\,501{,}1\text{ cm}^2$



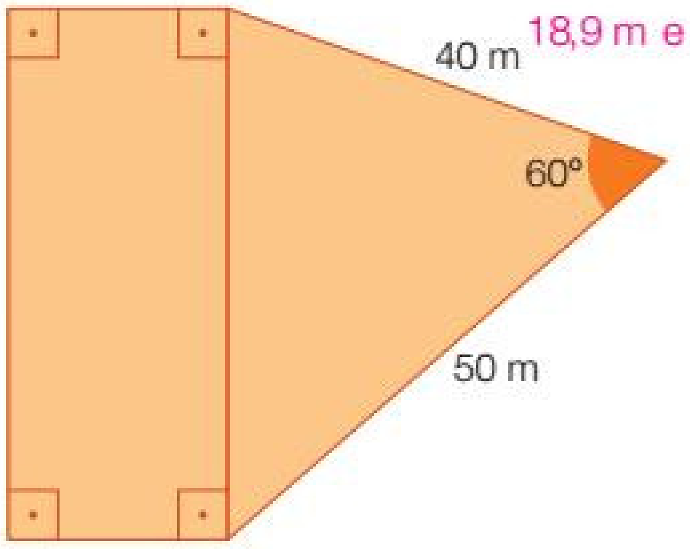
c) $1\,891{,}2\text{ cm}^2$



d) $2\,762{,}1\text{ cm}^2$

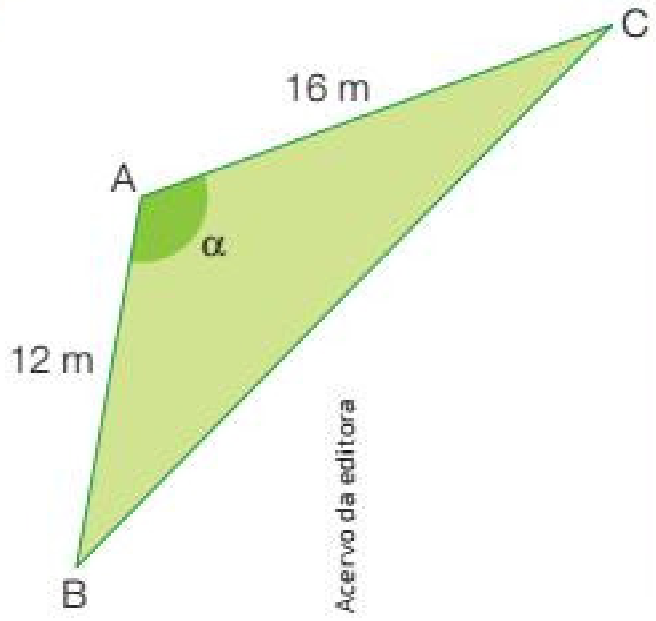
Ilustrações: Acervo da editora

72. Dois terrenos vizinhos, um retangular e outro triangular, possuem áreas iguais. De acordo com as medidas indicadas, determine, aproximadamente, as dimensões do terreno retangular. 18,9 m e 45,8 m



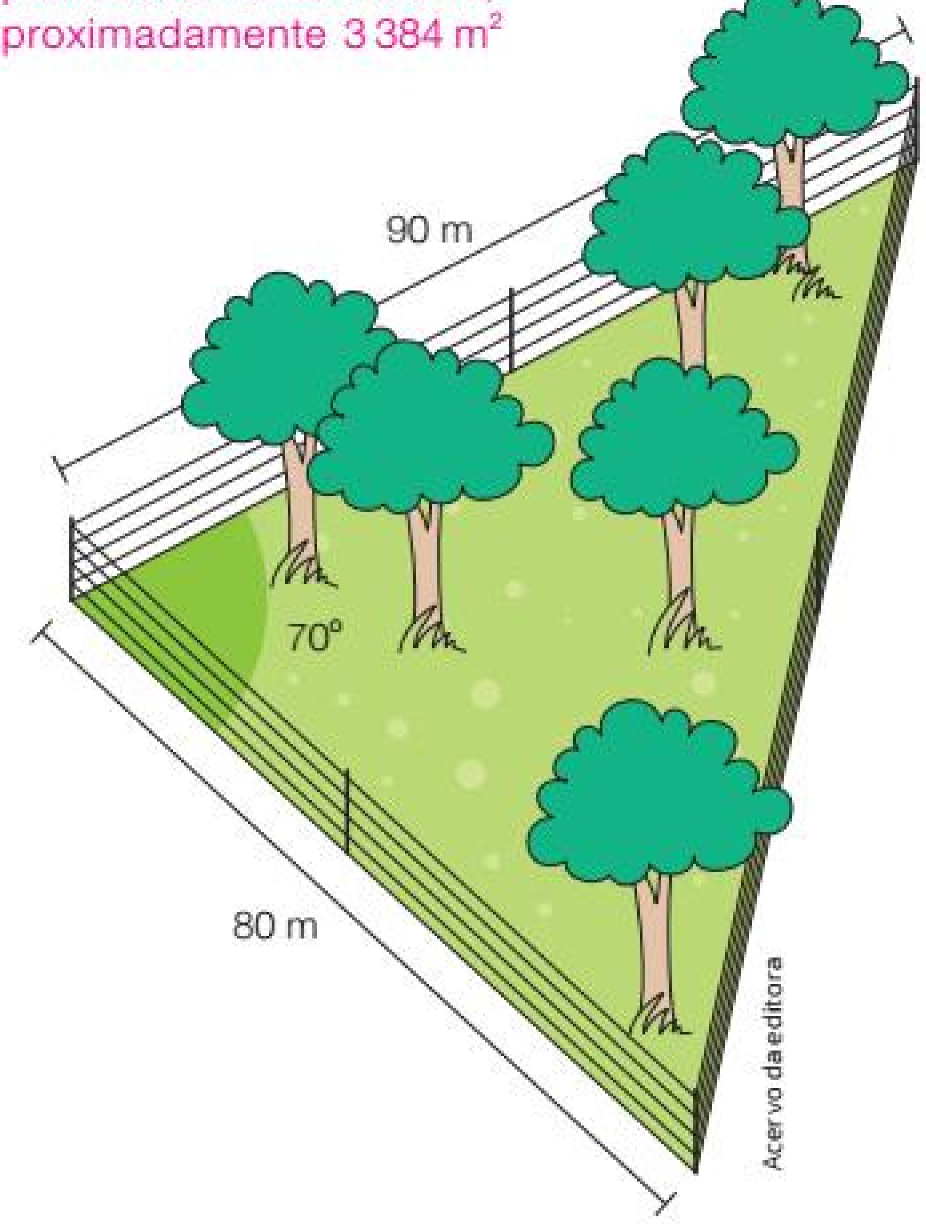
Acervo da editora

73. A área do triângulo ABC é $83{,}1\text{ m}^2$, e o ângulo α, formado entre os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, é obtuso. De acordo com as medidas indicadas na figura, calcule a medida α. $\alpha=120^\circ$



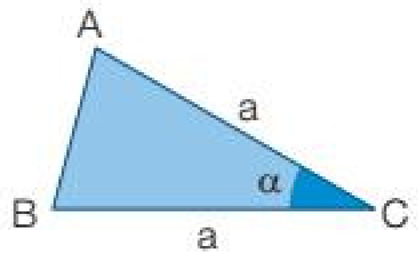
Acervo da editora

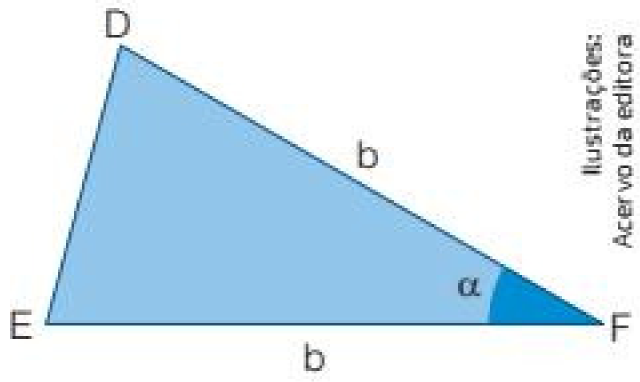
74. Uma cerca foi construída em volta de um terreno triangular em que dois dos lados medem 90 m e 80 m, e o ângulo formado entre eles, 70°. Sabendo que a cerca possui 4 fios de arame em cada trecho, calcule o comprimento total de arame utilizado em sua construção e a área cercada.
aproximadamente 1 072 m;
aproximadamente $3\,384\text{ m}^2$



Acervo da editora

75. Sejam S_1 e S_2 as medidas das áreas dos triângulos ABC e DEF, respectivamente. Sabendo que $S_2=3\cdot S_1$, calcule o valor da razão $\frac{b}{a}$. $\frac{b}{a}=\sqrt{3}$





Ilustrações: Acervo da editora

Acessando tecnologias

Nesta seção, indicamos algumas dentre as diversas possibilidades de utilização do computador na abordagem de temas matemáticos. Nesse sentido, sugerimos o trabalho com programas computacionais especializados que contribuem para a visualização e verificação de propriedades e auxiliam na resolução de problemas, uma vez que permitem construções e efeitos pouco viáveis ou impossíveis de serem realizados apenas com lápis, papel e instrumentos de medição e desenho.

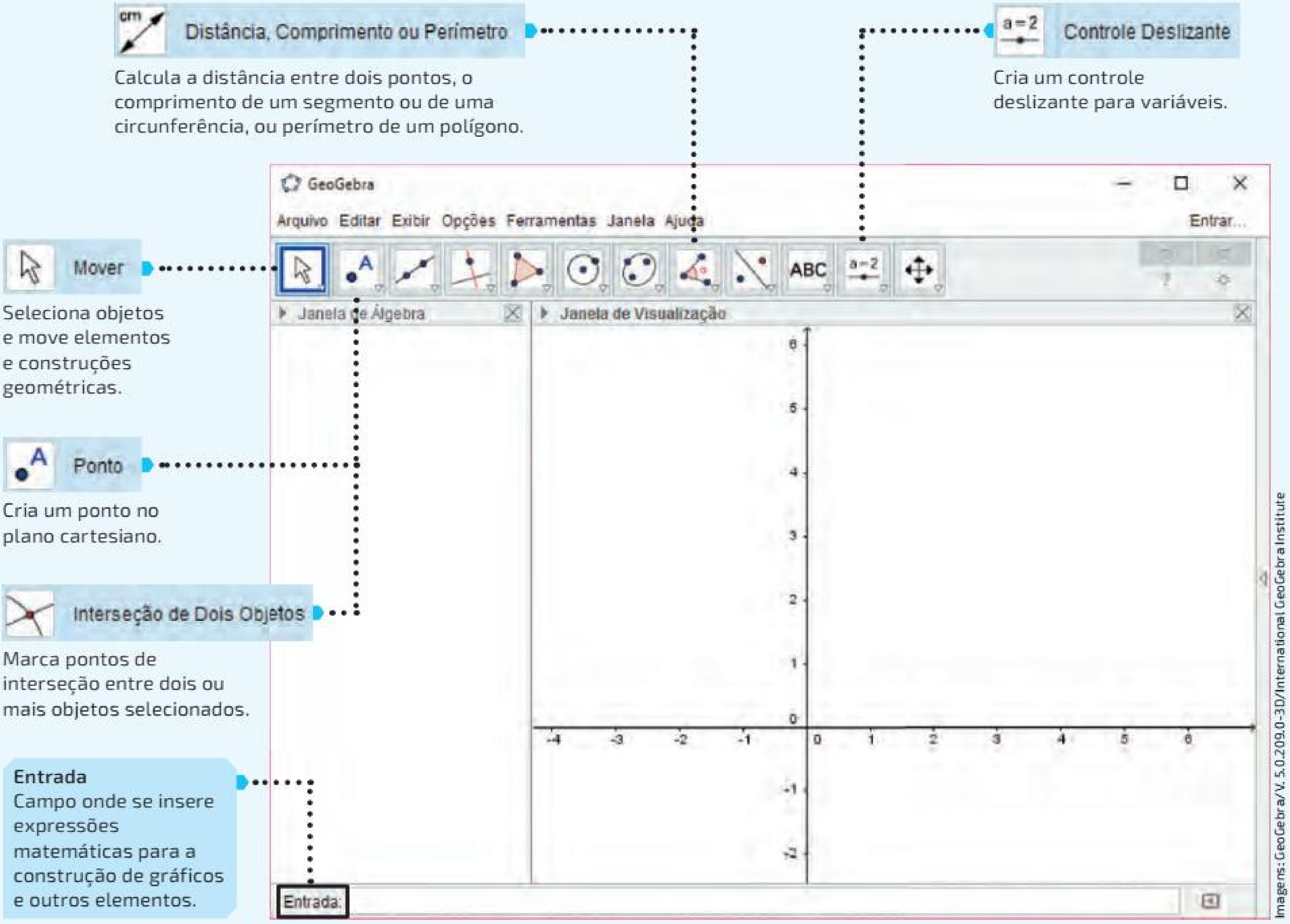
Convidamos você para conhecer e explorar o uso desses recursos computacionais e experimentar, de diferentes maneiras, os conteúdos matemáticos presentes em seu livro, procurando tornar o estudo mais interessante e dinâmico.

Geogebra

O *Geogebra* é um *software* dinâmico de Matemática que representa conceitos de geometria e álgebra. Nesse programa, podemos realizar diversas construções geométricas utilizando pontos, retas, circunferências e outras curvas, considerando relações entre os elementos envolvidos, como posição relativa, pertinência e interseção. Na **Janela de Álgebra**, podemos visualizar a expressão algébrica associada a cada elemento apresentado na **Janela de Visualização**.

Utilizado em escolas e universidades de diversos países, o *software* pode ser obtido gratuitamente e está disponível em vários idiomas, inclusive em português. Você pode fazer o *download* no *site* <http://tub.im/99tt4j>.

Observe a representação do *Geogebra* e algumas de suas funções.



Distância, Comprimento ou Perímetro
Calcula a distância entre dois pontos, o comprimento de um segmento ou de uma circunferência, ou perímetro de um polígono.

Controle Deslizante
Cria um controle deslizante para variáveis.

Mover
Seleciona objetos e move elementos e construções geométricas.

Ponto
Cria um ponto no plano cartesiano.

Interseção de Dois Objetos
Marca pontos de interseção entre dois ou mais objetos selecionados.

Entrada
Campo onde se insere expressões matemáticas para a construção de gráficos e outros elementos.

Imagens: GeoGebra/V. 5.0.209.0-3D/International GeoGebra Institute

Construindo gráficos de funções

Esta atividade pode ser proposta ao final do estudo do capítulo **2**.

Podemos construir gráficos de funções utilizando o programa *Geogebra*.

Vamos construir, por exemplo, o gráfico de $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 - x - 1}{2}$, com $D(f) = \{x \in \mathbb{R}\}$.

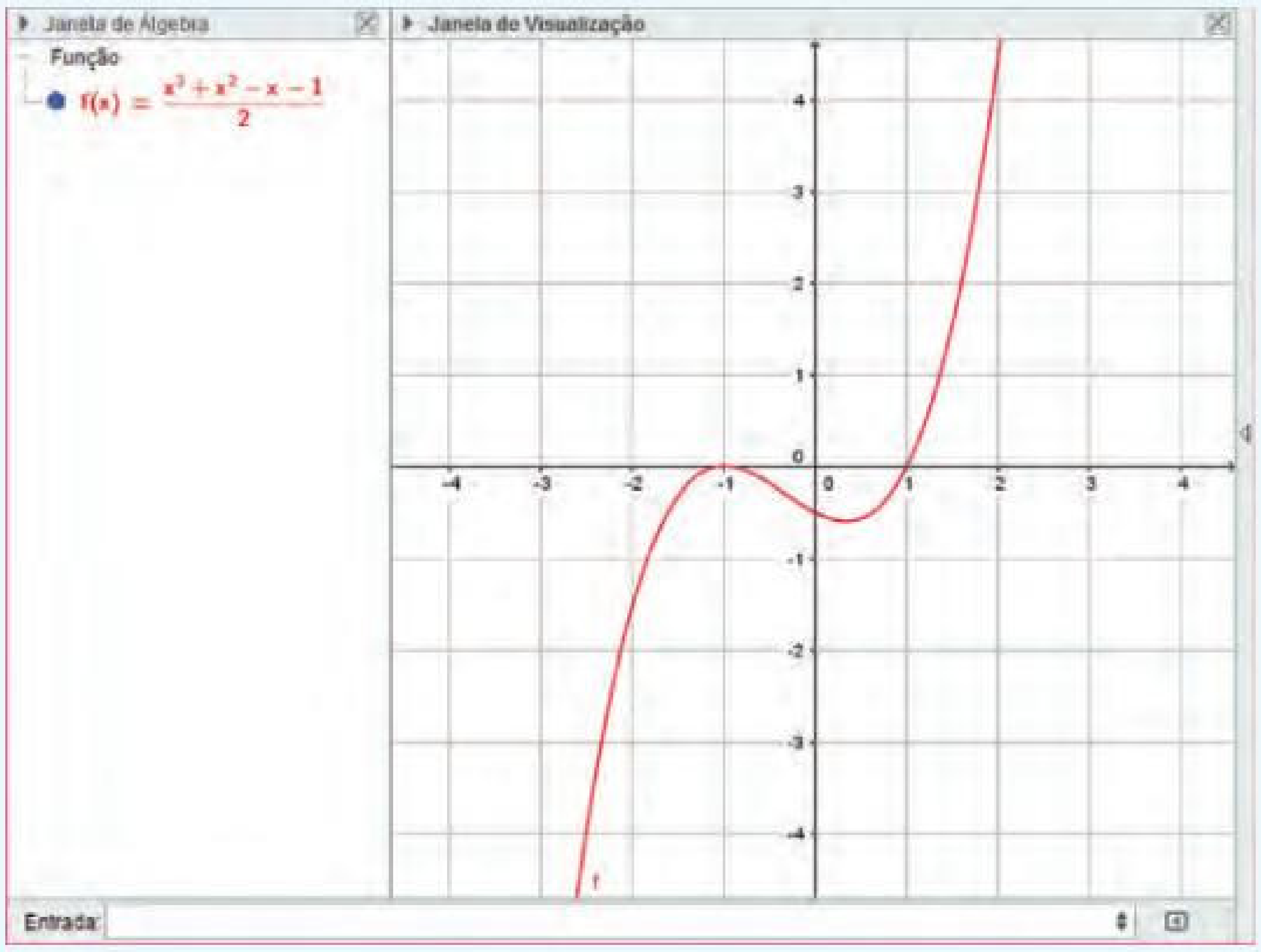
① Clique no campo **Entrada** e digite $f(x) = (x \wedge 3 + x \wedge 2 - x - 1)/2$.

Entrada: f(x) = (x³ + x² - x - 1)/2

O acento circunflexo (^) representa a potenciação e a barra (/), a divisão. Os parênteses indicam que toda a expressão $x^3 + x^2 - x - 1$ foi dividida por 2.

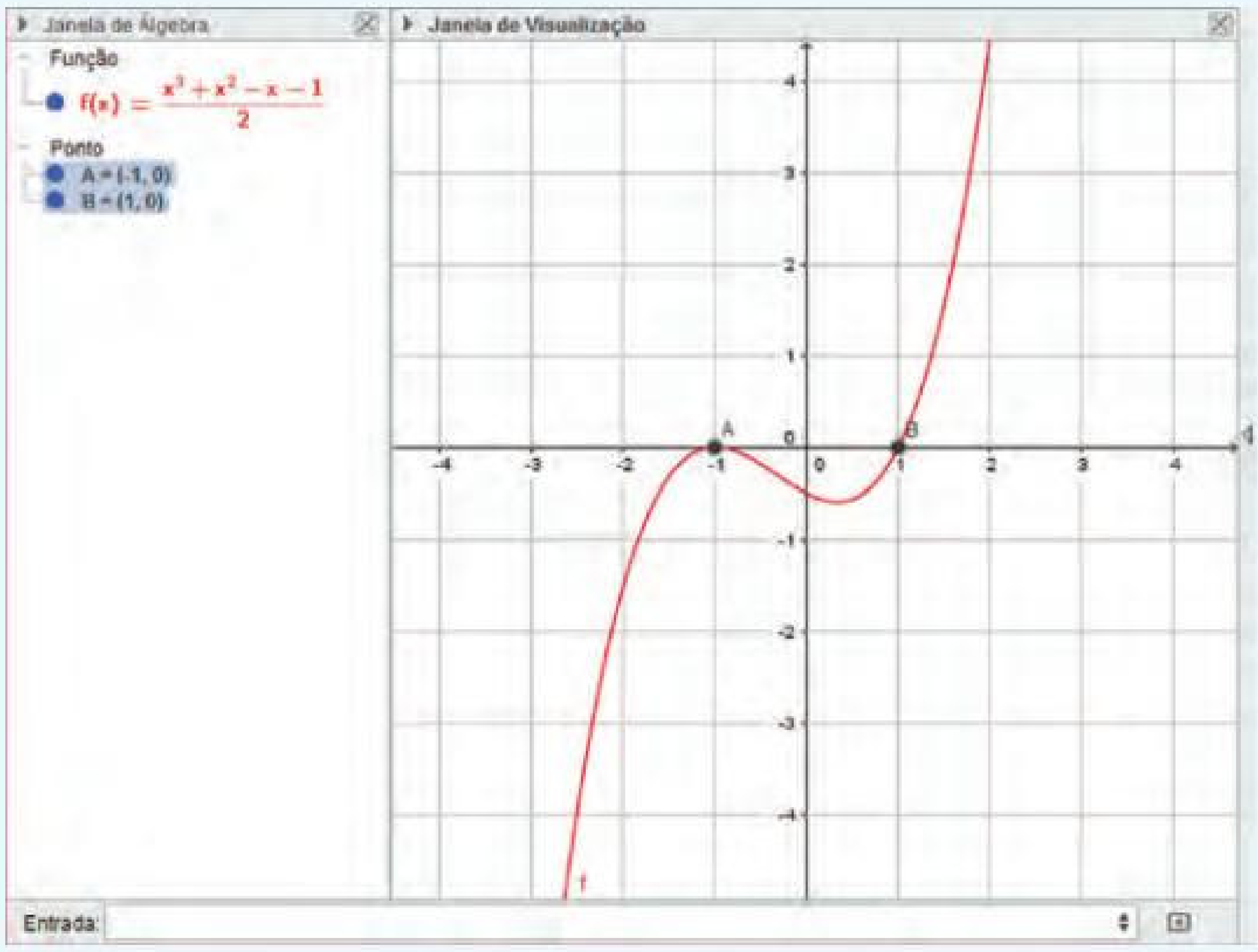
② Pressione **Enter** e veja a lei de formação e o gráfico da função na **Janela de Álgebra** e na **Janela de Visualização**, respectivamente.

Para exibir a malha quadriculada, clique com o botão direito do *mouse* sobre a área do plano cartesiano e selecione a opção **Malha**.



$f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 - x - 1}{2}$

③ Para identificar os zeros da função, clique no canto inferior direito da opção e selecione **Interseção de Dois Objetos**. Clique sobre o gráfico da função e, em seguida, sobre o eixo *x*. As abscissas dos pontos *A* e *B* correspondem aos zeros da função e podem ser identificados na **Janela de Álgebra** e na **Janela de Visualização**. Nesse caso, −1 e 1.



$f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 - x - 1}{2}$

A = (-1, 0)

B = (1, 0)

Imagens: GeoGebra/V. 5.0.209.0-3D/International GeoGebra Institute

Atividades

Anote as respostas no caderno.

1. Construa os gráficos das funções a seguir e obtenha os zeros, caso existam.

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{2x - 3}{2}$.

b) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x^2 - x - 2$.

c) $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24$.

Para construir os gráficos separadamente, oriente os alunos a clicarem na opção **Arquivo** e, em seguida, em **Nova Janela**. Ao fechar cada uma das janelas, o programa apresenta as opções **Gravar** (salva o arquivo), **Não Gravar** (não salva o arquivo) e **Cancelar** (cancela a opção de fechar a janela). Oriente-os em relação a essas opções.

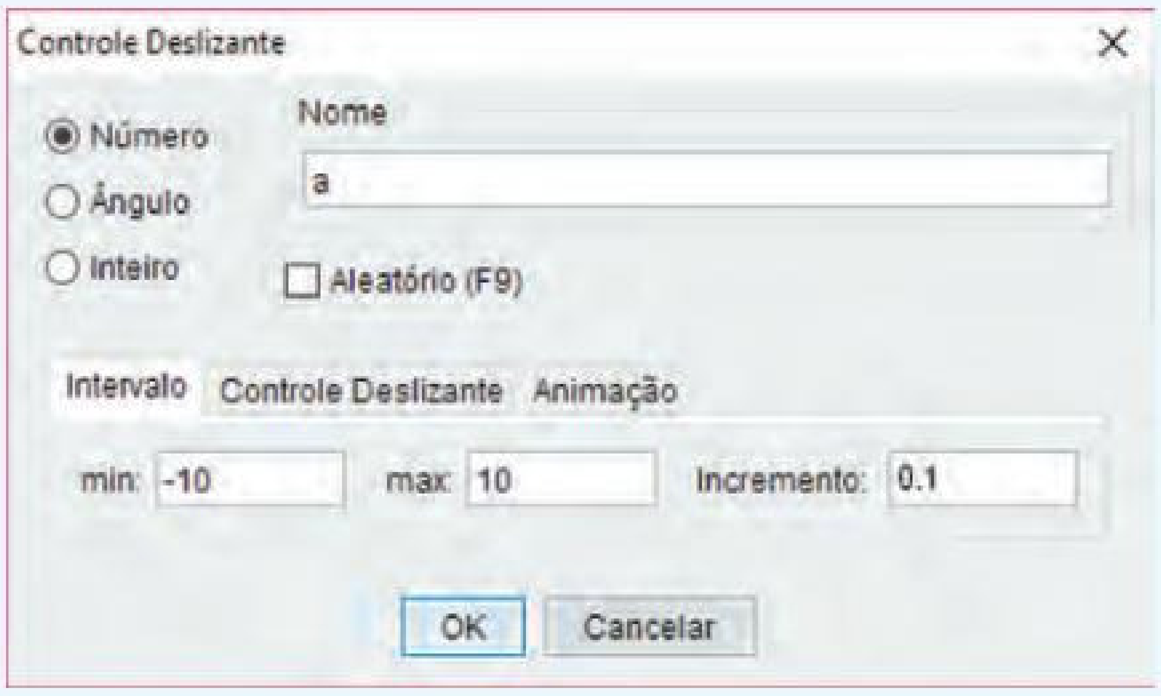
Coeficientes de uma função quadrática

Esta atividade pode ser proposta ao final do estudo do capítulo **4**.

Utilizaremos o *Geogebra* para avaliar o comportamento do gráfico de uma função quadrática quando variamos os valores dos coeficientes da lei de formação.

1. Inicialmente, habilite a opção **malha.** Em seguida, selecione a opção **Controle deslizante** no botão e clique sobre a área do gráfico para abrir a janela ao lado. Preencha os campos como indicado e clique em **OK** para criar o controle deslizante do coeficiente *a*.

   Repita o procedimento outras duas vezes e crie os controles deslizantes *b* e *c*.

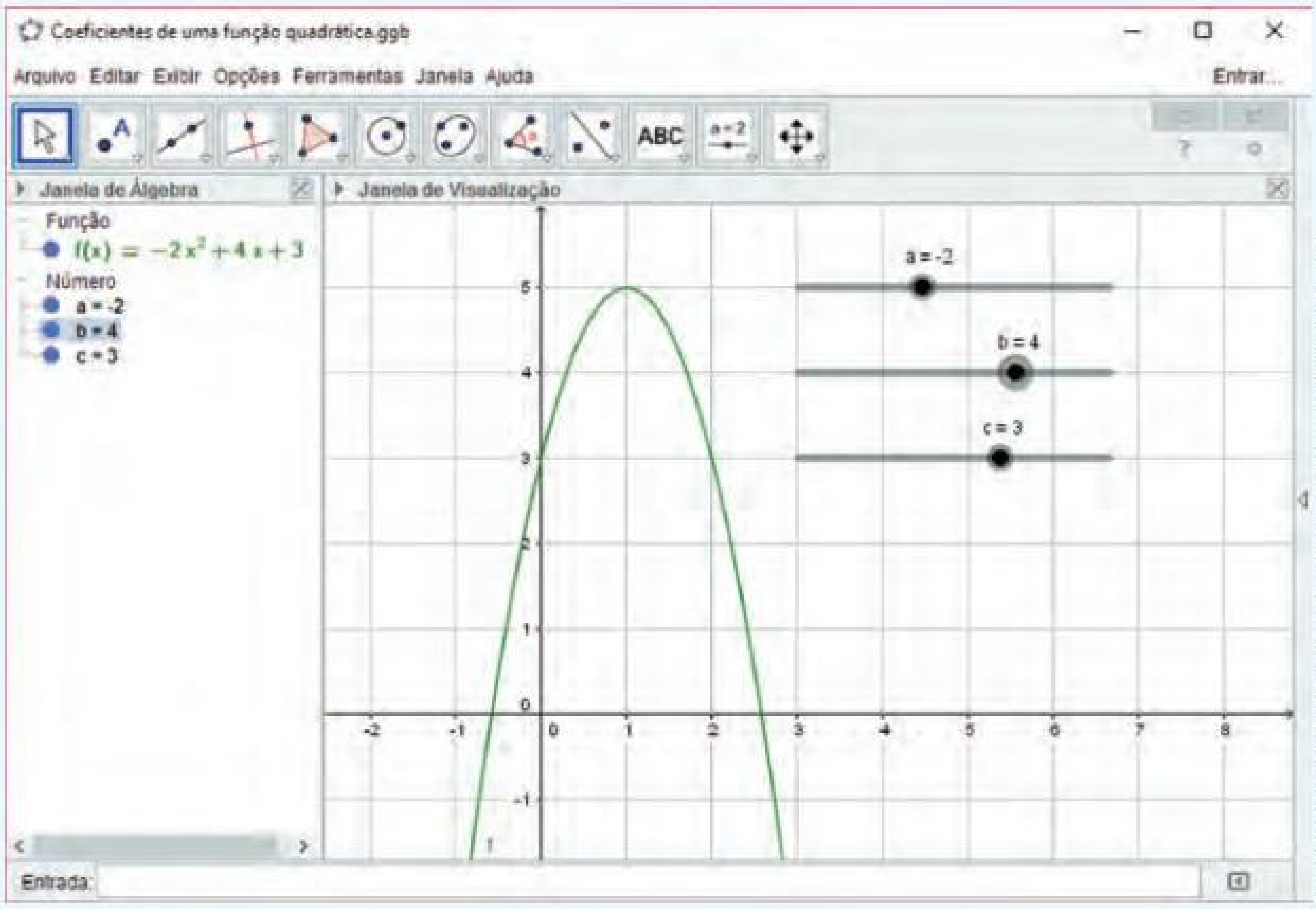


● Número
○ Ângulo
○ Inteiro
Nome: a
☐ Aleatório (F9)
min: -10 max: 10 Incremento: 0.1

2. No campo **Entrada** digite $f(x) = a(x\wedge 2) + bx + c$. Depois, pressione **Enter** para criar o gráfico.

Entrada: f(x)=a(x^2)+bx+c

3. Observe que na **Janela de álgebra** aparecem os valores dos coeficientes *a*, *b* e *c*, os mesmos dos controles deslizantes. Para variá-los, selecione o botão **Mover** em, clique sobre um dos controles deslizantes e arraste-o.



Função
f(x) = −2x² + 4x + 3
Número
a = -2
b = 4
c = 3

Imagens: GeoGebra/V. 5.0.209.0-3D/International GeoGebra Institute

Atividades

Anote as respostas no caderno.

1. Após fazer uma construção como a apresentada, ajuste os controles deslizantes para obter a função $f(x) = -1,2x^2 + 3,6x + 2,4$ e responda às questões a seguir.

   a) A concavidade da parábola é voltada para cima ou para baixo? para baixo

   b) A interseção do gráfico com o eixo y ocorre no ramo crescente ou decrescente? No ponto de quais coordenadas? crescente; (0; 2,4)

   c) Quais são os zeros da função? Use a ferramenta **Interseção de Dois Objetos.** −0,56 e 3,56

2. Utilize os controles deslizantes para verificar o que estudamos nas páginas **108**, **109** e **110**.

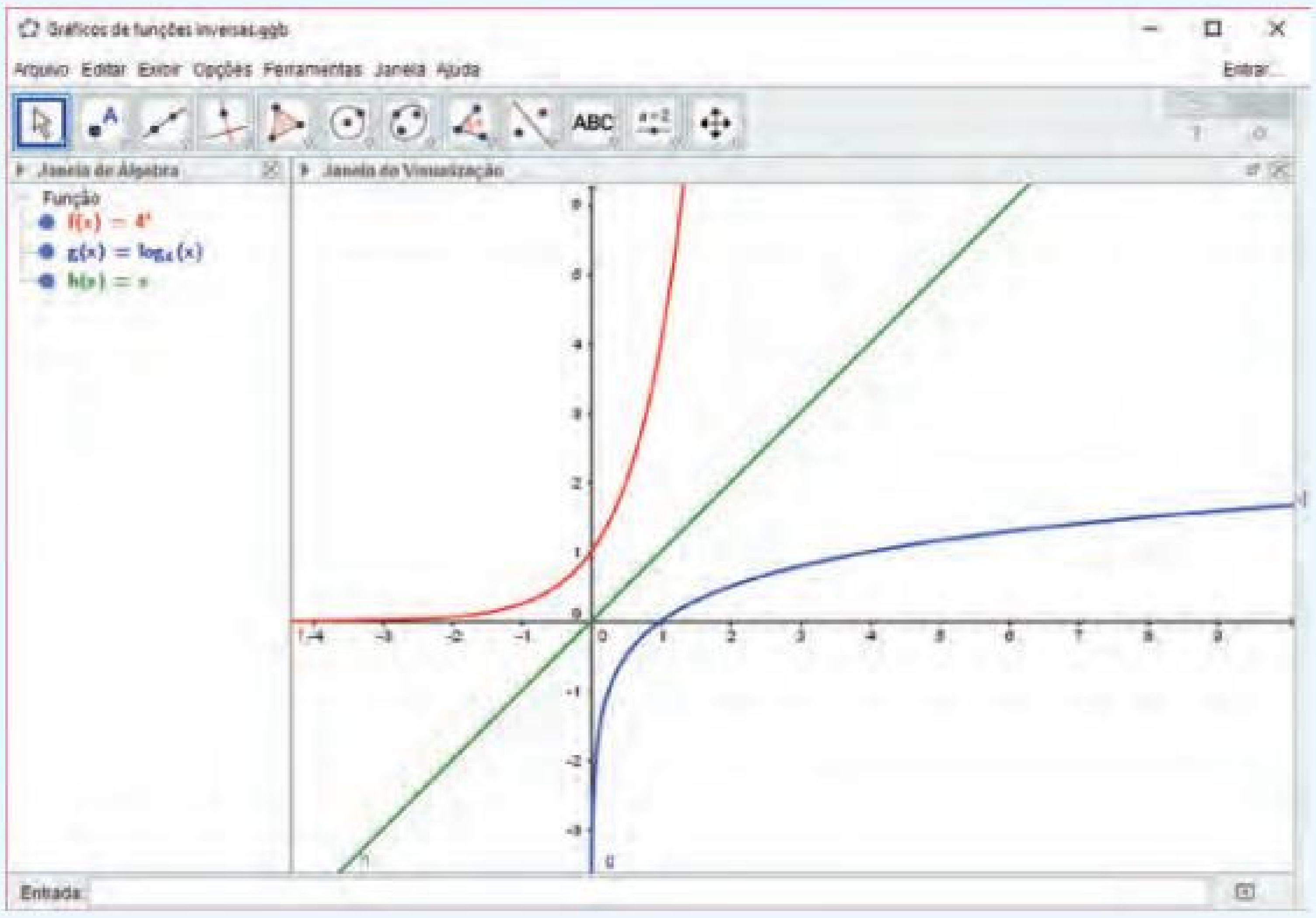
Gráficos de funções inversas

Esta atividade pode ser proposta ao final do estudo do capítulo 6.

Estudamos que os gráficos de funções inversas, quando construídos em um mesmo plano cartesiano, apresentam simetria de reflexão em relação ao gráfico da função identidade $h(x) = x$. Agora, ampliaremos esse estudo utilizando o *Geogebra*.

1. Clique no campo **Entrada** e digite $h(x) = x$. Depois, pressione **Enter** para construir o gráfico da função *h*. De maneira semelhante, construa os gráficos das funções inversas $f(x) = 4^x$ e $g(x) = \log_4 x$.

Para construir o gráfico de *f*, digite f(x)=4^x. Para construir o gráfico de *g*, digite: g(x)=log(4,x).

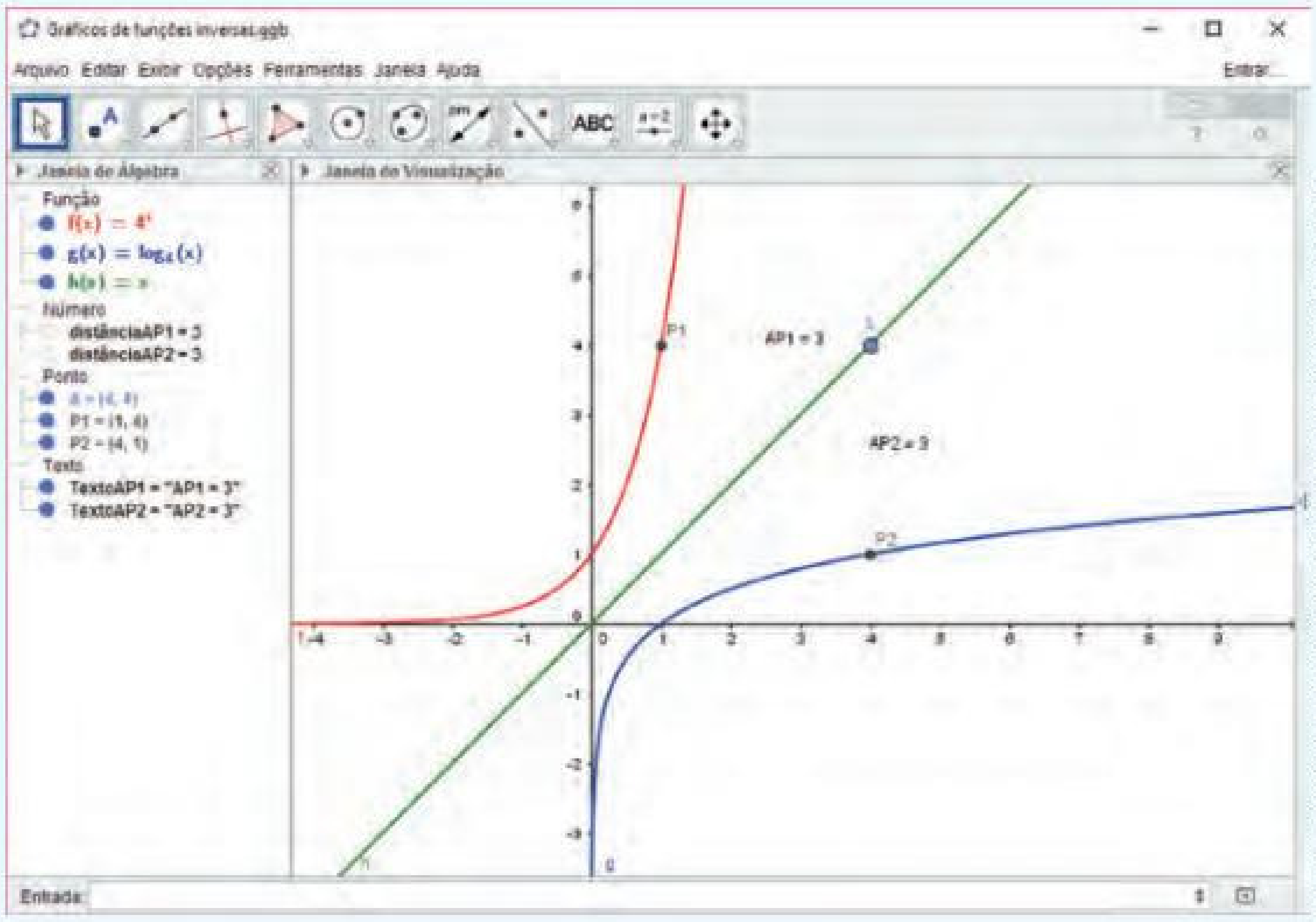


2. Como *f* e *g* são funções inversas, se $f(a)=b$, então $g(b)=a$. Para verificar numericamente essa relação, podemos construir os pontos $P1(1, f(1))$ e $P2(f(1), g(f(1)))$.

Para construir **P1**, digitamos no campo **Entrada** P1=(1,f(1)). De maneira semelhante, para construir **P2**, digitamos no campo **Entrada** P2=(f(1),g(f(1))).

Geometricamente, **P1** e **P2** são simétricos em relação a *h*. Para verificar essa simetria, construímos um ponto **A** selecionando a opção **Ponto** no botão e clicando sobre o gráfico de *h*. Depois, clique no canto inferior direito do botão e selecione a opção **Distância, comprimento ou perímetro**. Em seguida, clique em sequência em **A** e **P1** para obter a medida **AP1**, e, em **A** e **P2** para obter a medida **AP2**.

As coordenadas de **P1** e **P2** podem ser observadas na **Janela de Álgebra**.



Imagens: GeoGebra/V. 5.0.209.0-3D/International GeoGebra Institute

Atividades

Anote as respostas no caderno.

1. As medidas AP1 e AP2 obtidas no exemplo são iguais ou são diferentes? Por que isso ocorre?

2. Construa, em um mesmo plano cartesiano, os gráficos de $h(x)=x$, $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ e $g(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$.

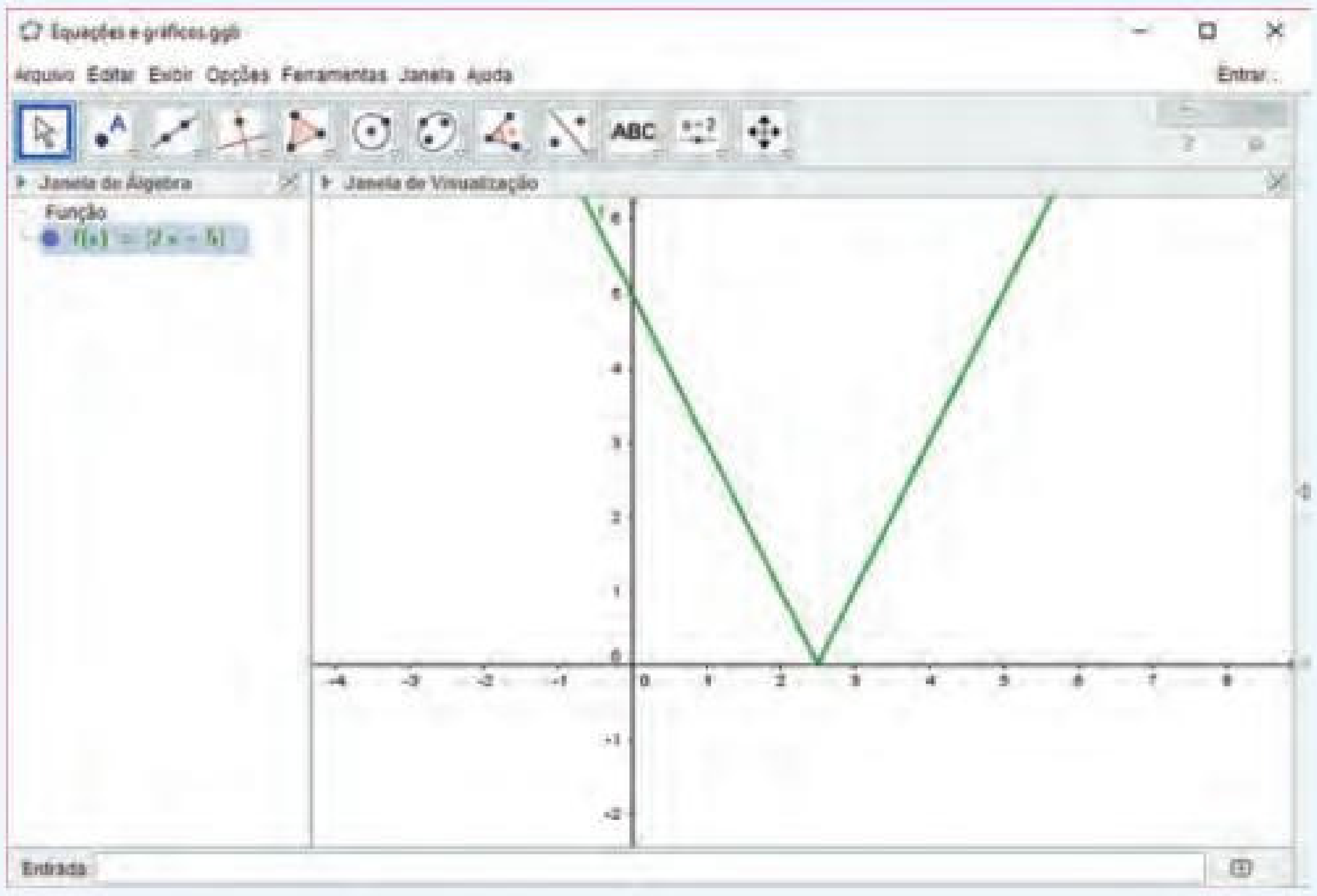
Em seguida, determine um par de pontos simétricos nos gráficos de *f* e *g* em relação ao gráfico de *h*. Por fim, mostre que esses pontos estão a uma mesma distância de um ponto **A** pertencente ao gráfico de *h*. Resposta pessoal.

1. São iguais. Resposta esperada: porque **P1** e **P2** são pontos simétricos em relação ao gráfico de *h*, ao qual o ponto **A** pertence.

Equações e gráficos

Esta atividade pode ser proposta ao final do estudo do capítulo 7.

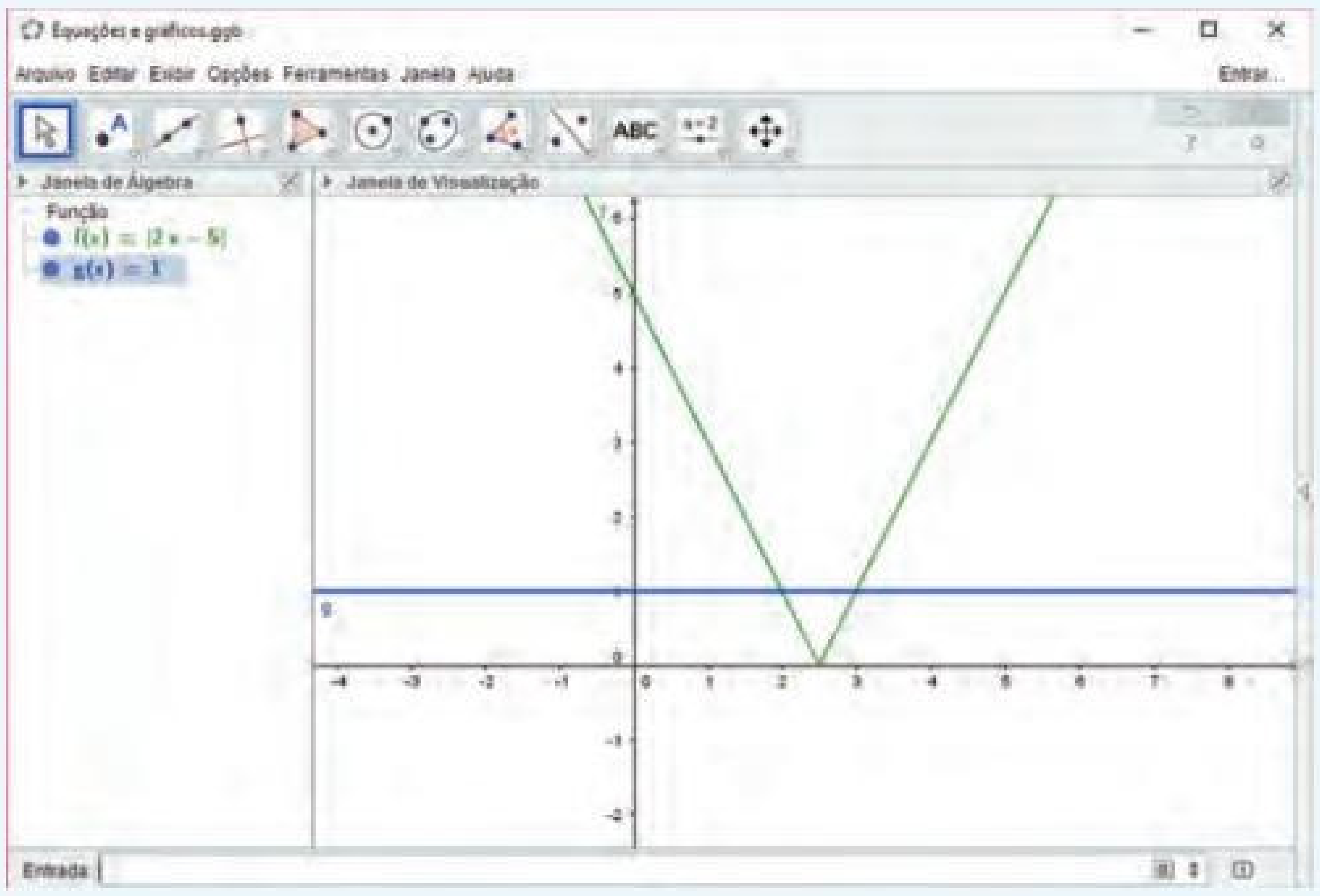
Veja como podemos resolver equações graficamente utilizando o *Geogebra*. Como exemplo, resolveremos a equação modular $|2x - 5| = 1$.



Função
$f(x) = |2x - 5|$

① No campo **Entrada**, digite $f(x) = \text{abs}(2x - 5)$. Depois, pressione **Enter** para construir o gráfico de $f(x) = |2x - 5|$, que corresponde a um membro da equação.

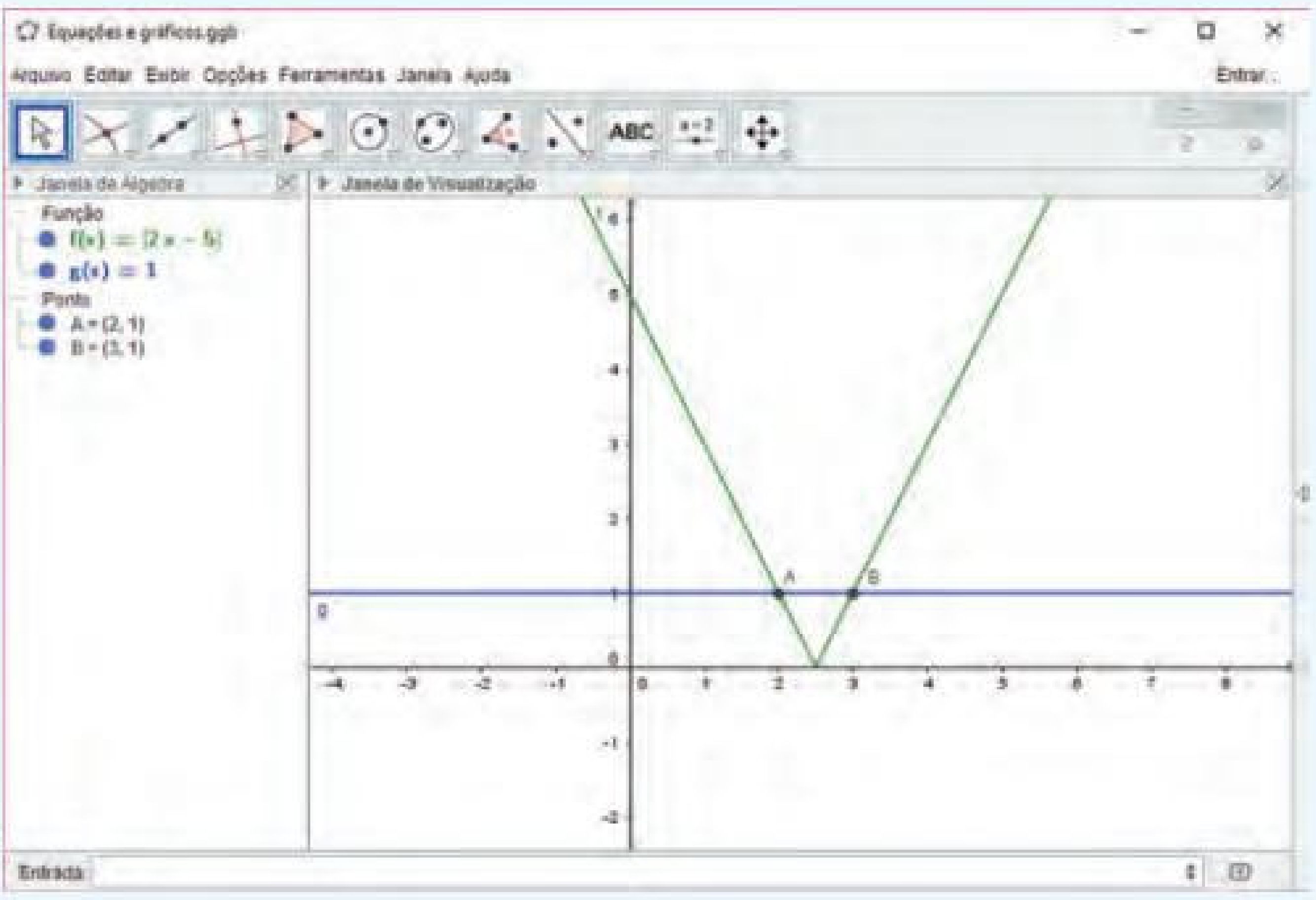
No *Geogebra*, para indicar o módulo de um número *x* digitamos $\text{abs}(x)$.



Função
$f(x) = |2x - 5|$
$g(x) = 1$

② De maneira semelhante à etapa anterior, construímos o gráfico de $g(x) = 1$, que corresponde ao outro membro da equação.

Imagens: GeoGebra/V. 5.0.209.0-3D/International GeoGebra Institute



Função
$f(x) = |2x - 5|$
$g(x) = 1$
Ponto
$A = (2, 1)$
$B = (3, 1)$

③ A solução da equação $|2x - 5| = 1$ corresponde às abscissas dos pontos em que os gráficos de *f* e *g* se intersectam. Para indicar esses pontos, clique no canto inferior direito do botão e selecione a opção **Interseção de Dois Objetos**. Clique, respectivamente, sobre o gráfico de *g* e o ramo decrescente do gráfico de *f*, marcando o ponto **A**. Em seguida, clique sobre o gráfico de *g* e o ramo crescente do gráfico de *f* marcando o ponto **B**.

Observe as abcissas dos pontos **A** e **B** na **Janela de Álgebra**. Nesse caso, o conjunto solução da equação $|2x - 5| = 1$ é $S\{2, 3\}$.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

1. Resolva graficamente as equações da atividade **R5** da página **187**.
A solução obtida no item **b** é um valor aproximado, na forma decimal, da fração $\frac{4}{3}$.

2. Retorne aos capítulos **5** e **6** e escolha uma equação exponencial e uma logarítmica. Depois, resolva essas equações geometricamente. A resposta depende das equações escolhidas.

LibreOffice Calc

O programa *Calc* é uma planilha eletrônica do pacote *LibreOffice*, versão gratuita de aplicativos que inclui, além da planilha, editores de textos, de apresentações, de desenhos e banco de dados. Para fazer o *download* e instalá-la, basta acessar o *site* <http://tub.im/bixzay>.

As planilhas eletrônicas são tabelas que podem ser preenchidas com diversas informações, como textos, dados numéricos e fórmulas. Além disso, elas possibilitam a organização de dados e possuem recursos para realizar cálculos, construir gráficos, restringir dados, preencher automaticamente, entre outras funções. É importante destacar que uma planilha é dividida em regiões retangulares, denominadas células, indicadas pelo cruzamento de uma linha (representada por um número) com uma coluna (representada por uma letra).

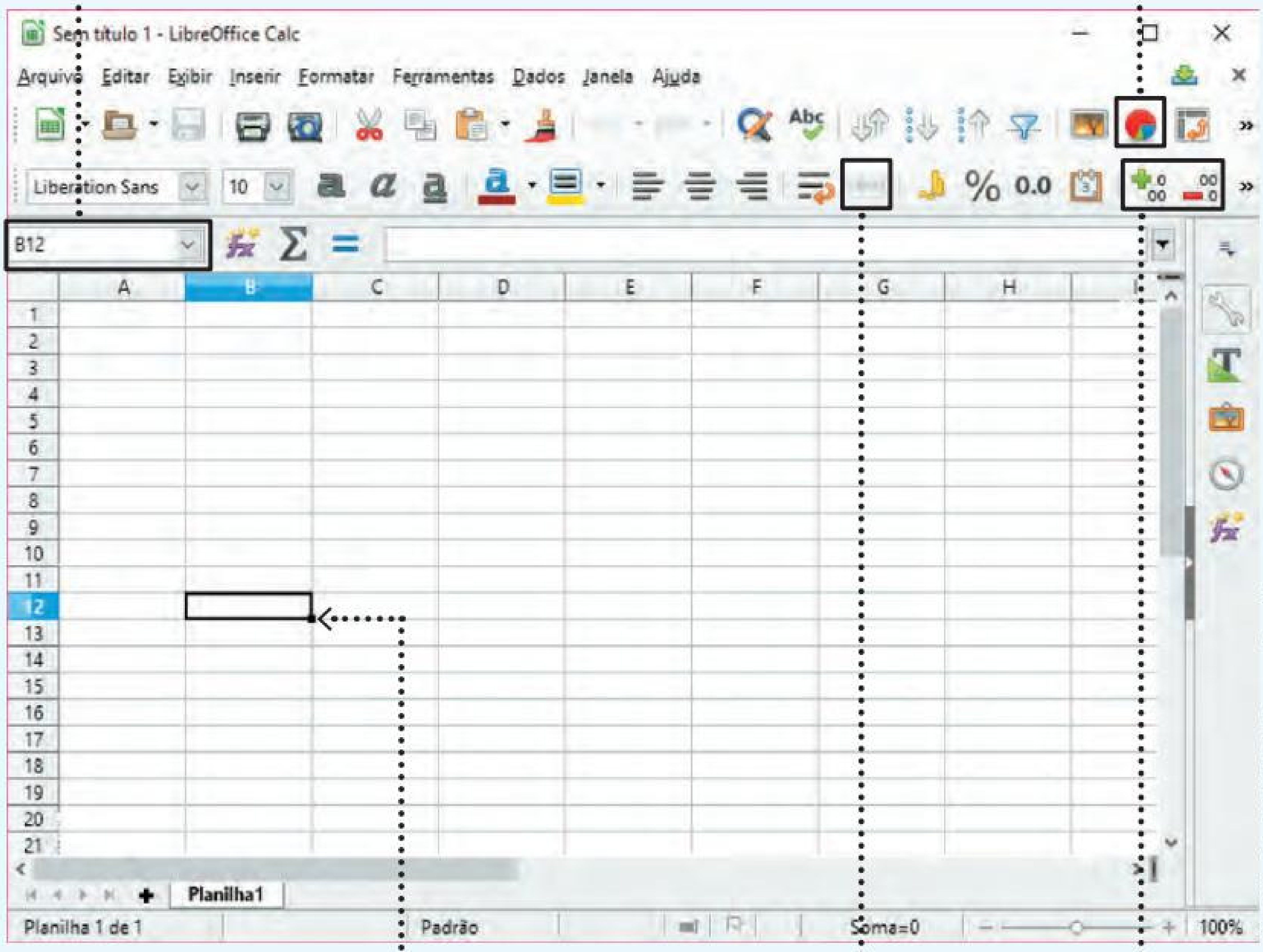
No esquema a seguir, são apresentados alguns recursos da planilha eletrônica *Calc*, que serão utilizados nos exemplos e nas atividades propostas na seção.

Caixa de nome

Indica a célula selecionada ou o intervalo de células selecionado.

Botão de gráficos

Abre o assistente de configuração de um gráfico.



LibreOffice Calc/V. 5.0.3.2/The Document Foundation

Guia de autopreenchimento

Pode ser usada para criar alguns tipos de sequência. Apresenta-se como um quadrado preto no canto inferior direito das células selecionadas.

Botão para mesclar células

Mescla e centraliza o texto de duas ou mais células selecionadas.

Botões para aumentar ou diminuir casas decimais

Aumenta ou diminui a quantidade de casas decimais do número inserido nas células selecionadas.

Modelo linear

Esta atividade pode ser proposta ao final do estudo do capítulo 3.

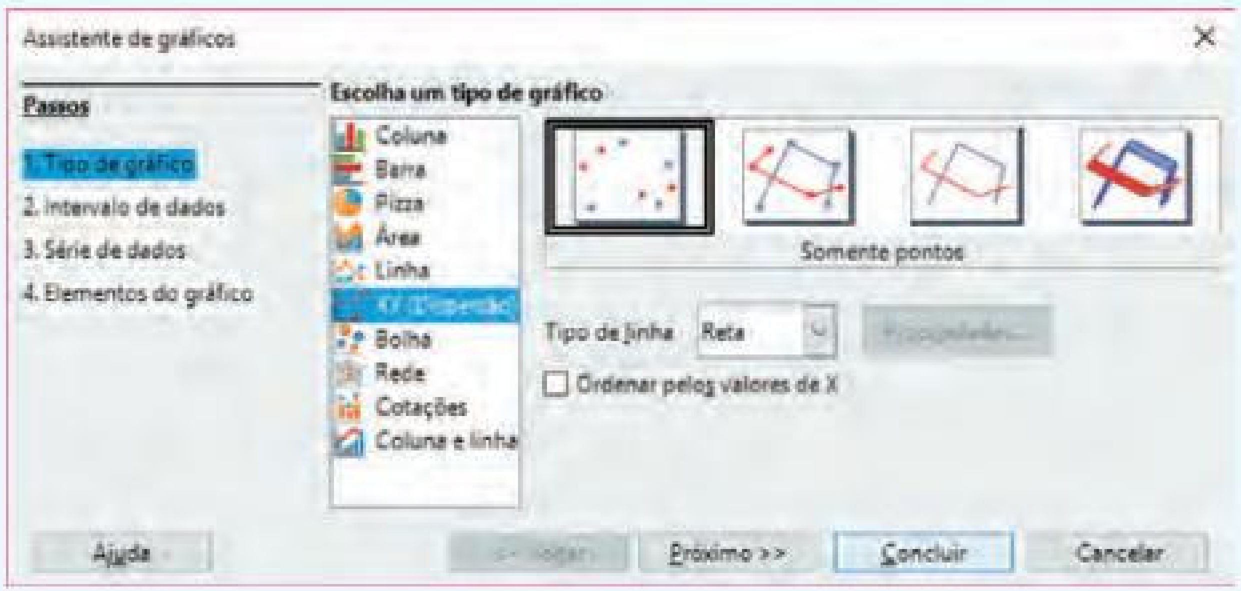
Apresentaremos a seguir um exemplo de como a planilha *Calc* pode ser útil para auxiliar na interpretação de dados, por meio da construção de um gráfico. Considere a seguinte situação.

> Mariana organizou em uma planilha eletrônica o tempo gasto e a distância percorrida em alguns deslocamentos que fez de bicicleta a partir de sua casa.

Agora, vamos organizar esses dados na planilha *Calc*.

1. Digite os dados anotados por Mariana. Em seguida, selecione os dados numéricos clicando na célula **B3**, segurando o clique e arrastando até a célula **C8**. Depois, clique na opção **Gráfico** no botão . A janela **Assistente de gráficos** aparecerá. No passo **Tipo de gráfico**, selecione as opções indicadas na janela abaixo.

	A	B	C
1		x	y
2	**Destino**	**Distância (km)**	**Tempo (min)**
3	Faculdade	1,7	6
4	Clube	2	8,4
5	Casa da avó	0,6	2,4
6	Parque	2,3	9,6
7	Academia	3,4	13,2
8	Escola de inglês	0,8	3



Assistente de gráficos

Passos: 1. Tipo de gráfico

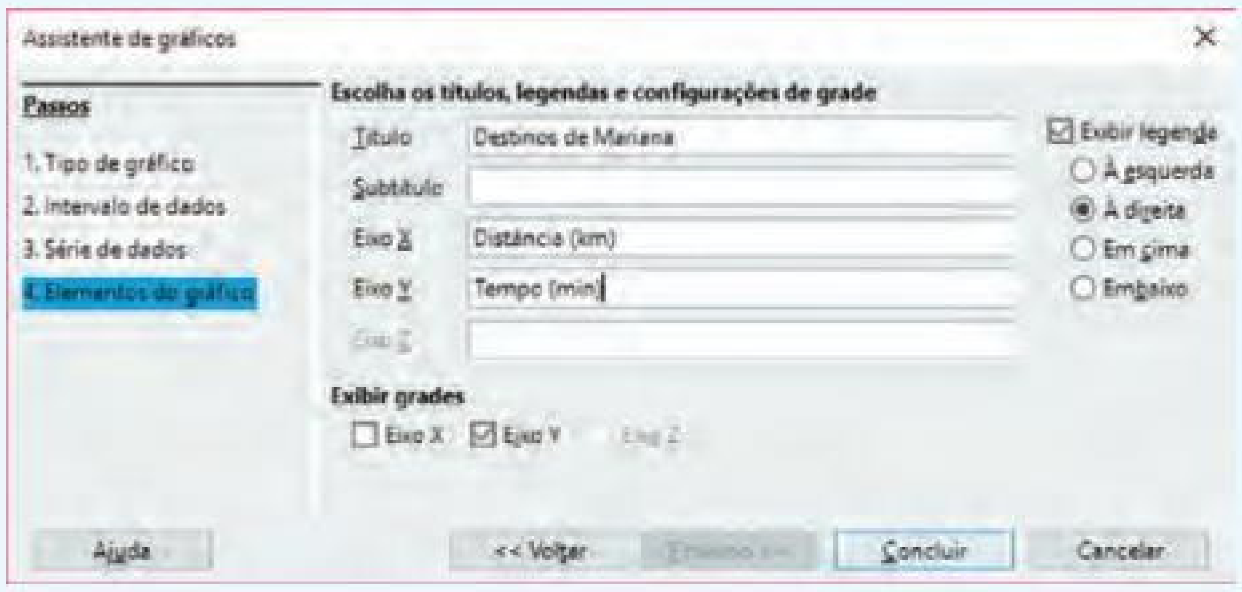
Escolha um tipo de gráfico: XY (Dispersão)

Somente pontos

Tipo de linha: Reta

☐ Ordenar pelos valores de X

2. Selecione o passo **Elementos do gráfico** e escreva o título e os nomes para os eixos *x* e *y*, conforme indicado. Depois, clique em **Concluir**.



Assistente de gráficos

Passos: 4. Elementos do gráfico

Escolha os títulos, legendas e configurações de grade

Título: Destinos de Mariana

Subtítulo:

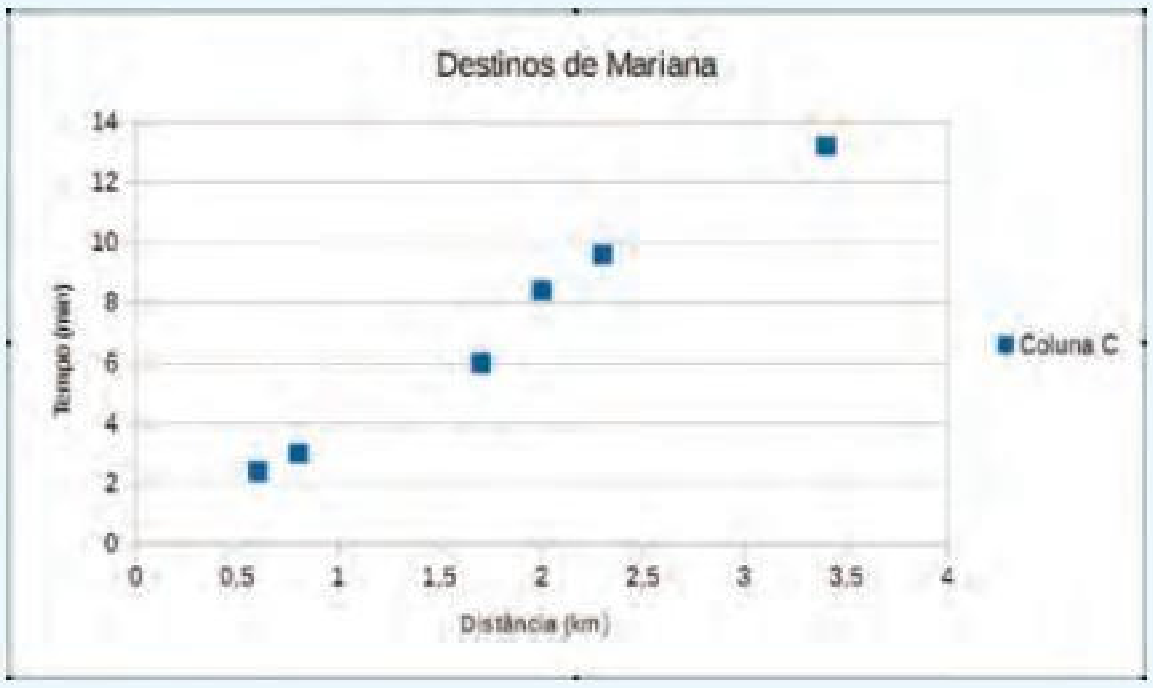
Eixo X: Distância (km)

Eixo Y: Tempo (min)

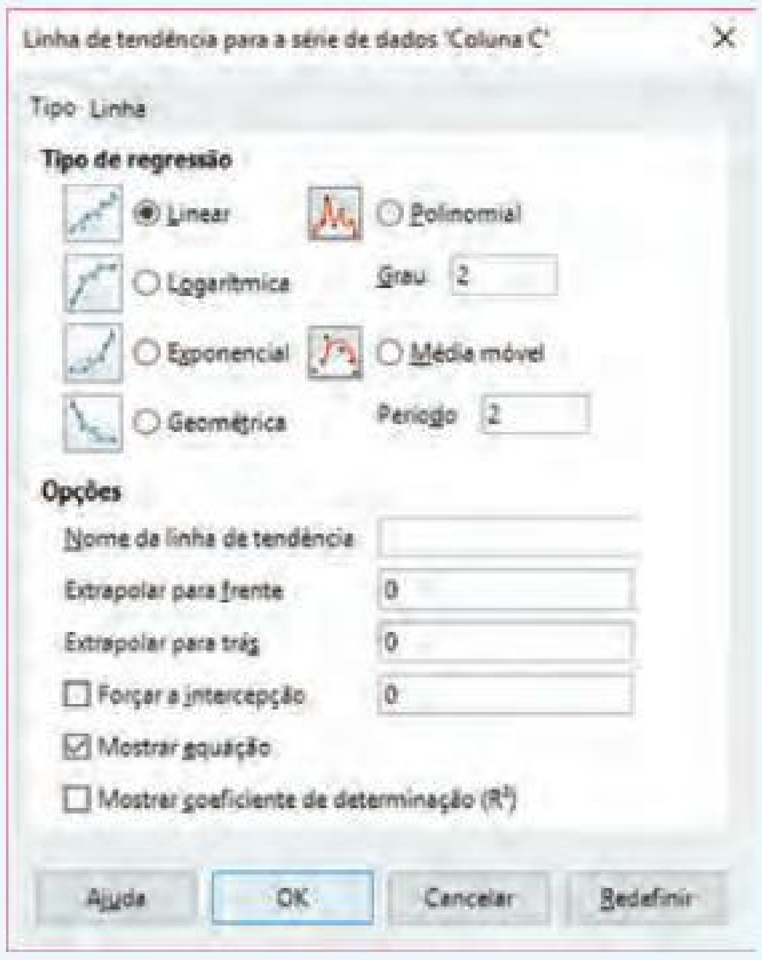
Eixo Z:

☑ Exibir legenda
○ À esquerda
● À direita
○ Em cima
○ Embaixo

Exibir grades: ☐ Eixo X ☑ Eixo Y Eixo Z



3. Clique com o botão direito do *mouse* sobre um dos pontos do gráfico e selecione a opção **Inserir linha de tendência**. Na aba **Tipo**, selecione as opções **Linear** e **Mostrar equação**, e clique em **OK**.



Linha de tendência para a série de dados 'Coluna C'

Tipo: Linha

Tipo de regressão

● Linear ○ Polinomial
○ Logarítmica Grau: 2
○ Exponencial ○ Média móvel
○ Geométrica Período: 2

Opções

Nome da linha de tendência:

Extrapolar para frente: 0

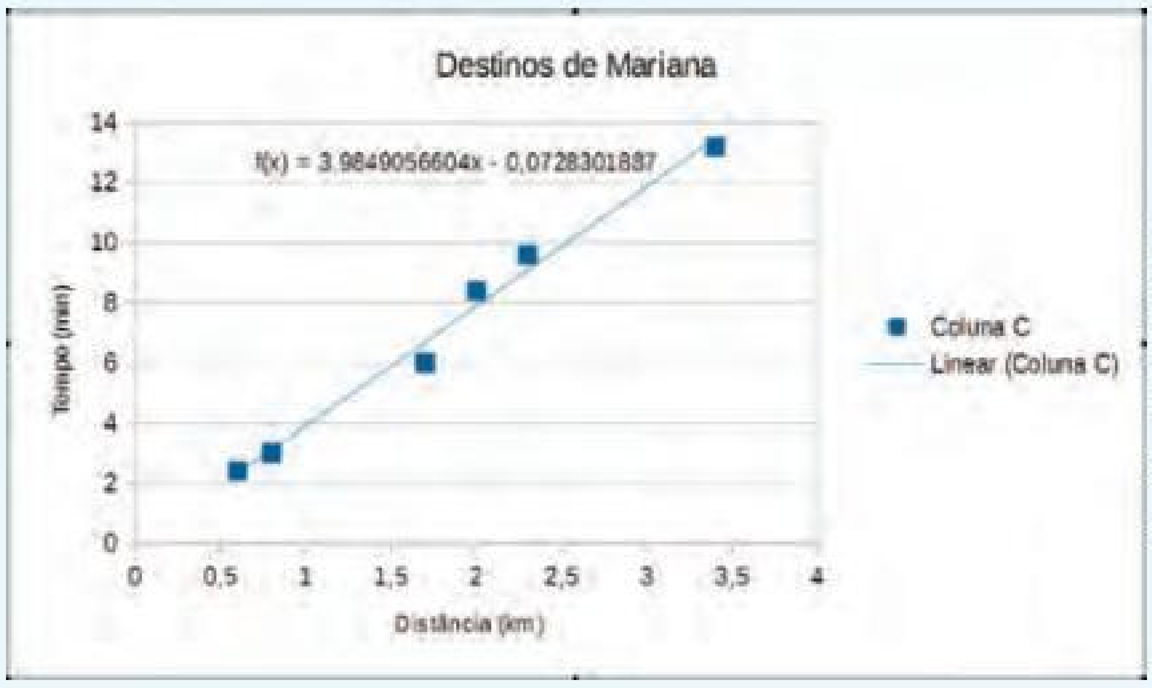
Extrapolar para trás: 0

☐ Forçar a intercepção: 0

☑ Mostrar equação

☐ Mostrar coeficiente de determinação (R^2)

Observe que aparecerá a lei de formação que representa a distância f(x) em função do tempo *x*: $f(x) = 3,9849056604x - 0,0728301887$. Também será criada uma linha de tendência que representa essa função com domínio restrito ao menor e maior valor indicado.



Imagens: LibreOffice Calc/V.5.0.3.2/ The Document Foundation

Atividades

Anote as respostas no caderno.

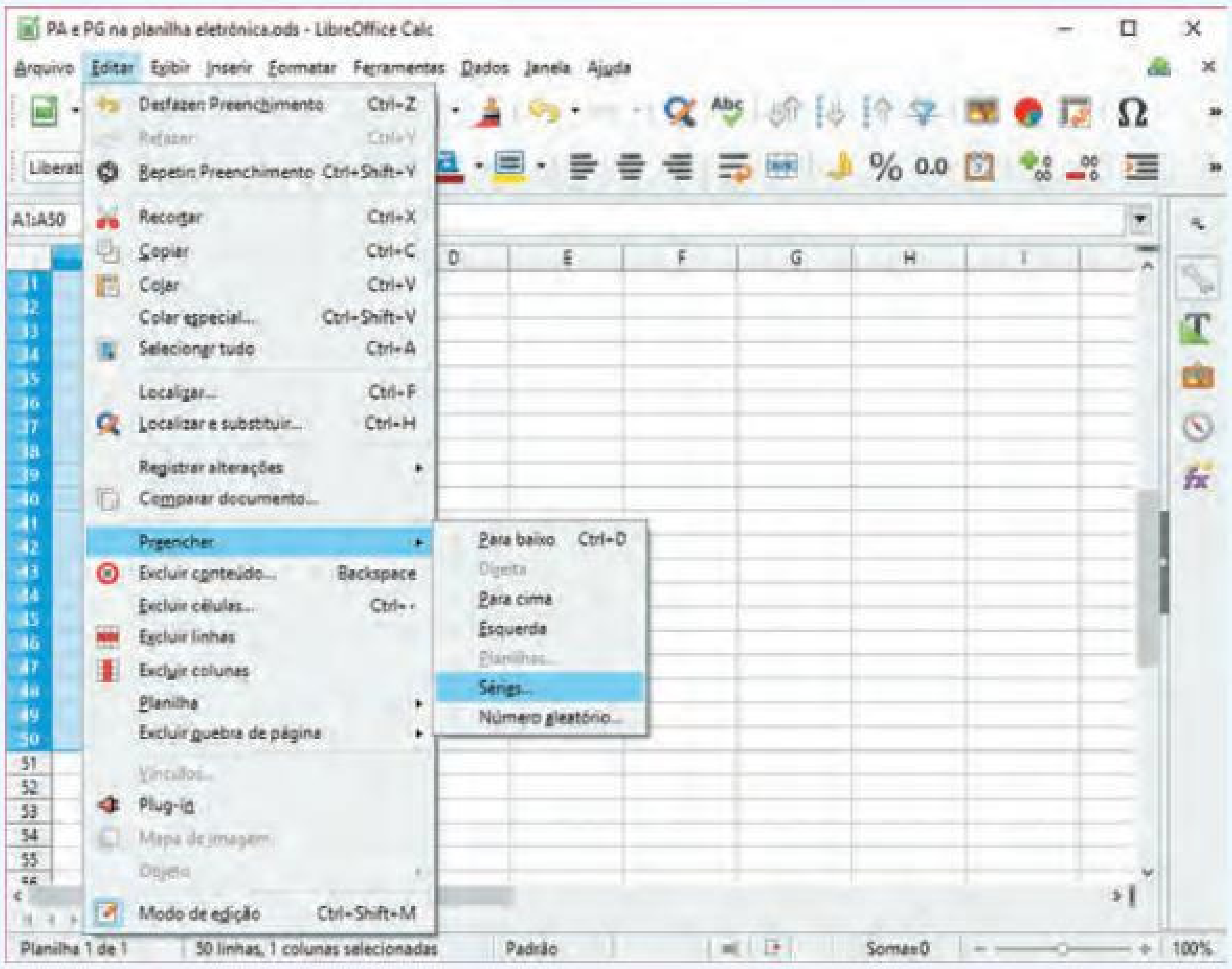
1. Como podemos estimar o tempo aproximado para Mariana percorrer uma distância de 15 km de bicicleta, a partir de sua casa?
Resposta esperada: calculando o valor de f(15) na função obtida no exemplo.
2. Em sua opinião, a linha de tendência inserida no gráfico e a correspondente função representam bem a situação apresentada? Por quê?
Resposta pessoal.
Na questão 2, verifique se os alunos perceberam que, quanto mais próximos estão a linha de tendência e os pontos correspondentes aos dados apresentados, melhor essa função representa a situação.
3. Construa um gráfico de maneira semelhante à apresentada, com base nos dados indicados na atividade **2**, da página **77**. Depois, insira uma linha de tendência e analise a relação entre os pontos construídos e essa linha de tendência.
Resposta esperada: nesse caso, cada ponto construído pertence à linha de tendência.

PA e PG na planilha eletrônica

Esta atividade pode ser proposta ao final do estudo do capítulo 8.

Com a planilha *Calc*, vamos construir progressões aritméticas (PA) e progressões geométricas (PG). Para isso, utilizaremos como exemplo uma PA de 50 termos em que $a_1 = 3$ e $r = 2$, e uma PG de 50 termos em que $b_1 = 3$ e $q = 2$.

⟨1⟩ Selecione o intervalo de células **A1:A50**. Em seguida, acesse o menu **Editar**, clique em **Preencher** e, depois, em **Séries**.



⟨2⟩ Será aberta a caixa de diálogo **Série de preenchimento**. Note que, em **Tipo de série**, a opção **Linear**, que corresponde a uma PA, já estará selecionada. Digite o primeiro termo da PA $(a_1 = 3)$ no campo **Valor inicial** e a razão $(r = 2)$ no campo **Incremento**. Ao clicar em **OK**, os 50 primeiros termos da PA $(3, 5, 7, 9, \ldots)$ serão exibidos na coluna **A**.

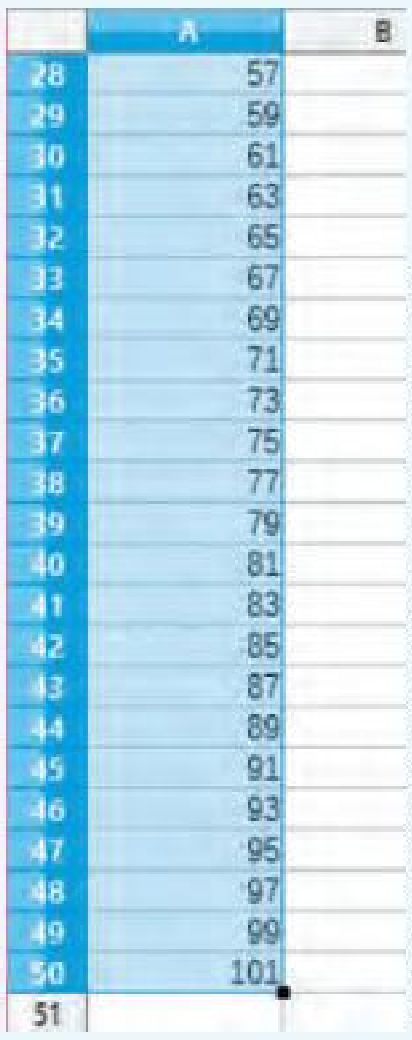

Série de preenchimento

Direção
● Para baixo
○ À direita
○ Para cima
○ À esquerda

Tipo de série
● Linear
○ Crescente
○ Data
○ Autopreenchimento

Unidade de tempo
○ Dia
○ Dia da semana
○ Mês
○ Ano

Valor inicial: 3
Valor final:
Incremento: 2

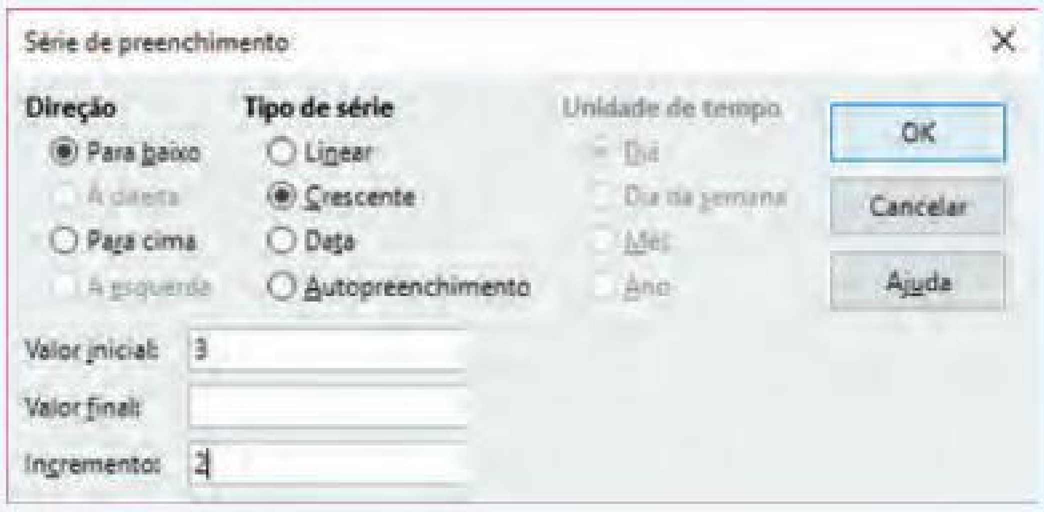

	A	B
28	57	
29	59	
30	61	
31	63	
32	65	
33	67	
34	69	
35	71	
36	73	
37	75	
38	77	
39	79	
40	81	
41	83	
42	85	
43	87	
44	89	
45	91	
46	93	
47	95	
48	97	
49	99	
50	101	
51		

Imagens: LibreOffice Calc/V. 5.0.3.2/The Document Foundation

O campo **Valor final** é opcional e serve para limitar os valores da sequência. Como deixamos esse campo em branco, todas as células do intervalo **A1:A50** serão preenchidas.

3. Para construir a PG na coluna **B**, selecione o intervalo **B1:B50** e abra a caixa de diálogo **Série de preenchimento**. Em **Tipo de série**, selecione a opção **Crescente**, que corresponde a uma PG, e configure os outros campos como na etapa **2**. Ao clicar em **OK**, os 50 primeiros termos da PG $(3, 6, 12, 24, \ldots)$ serão exibidos na coluna **B**.

	A	B
1	3	3
2	5	6
3	7	12
4	9	24
5	11	48
6	13	96
7	15	192
8	17	384
9	19	768
10	21	1536
11	23	3072
12	25	6144
13	27	12288
14	29	24576
15	31	49152
16	33	98304
17	35	196608
18	37	393216
19	39	786432
20	41	1572864
21	43	3145728



Série de preenchimento

Direção
● Para baixo
○ À direita
○ Para cima
○ À esquerda

Tipo de série
○ Linear
● Crescente
○ Data
○ Autopreenchimento

Unidade de tempo
○ Dia
○ Dia da semana
○ Mês
○ Ano

Valor inicial: 3
Valor final:
Incremento: 2

Atividades

Anote as respostas no caderno.

1. Resolva a atividade **R18**, da página **218**, utilizando a planilha *Calc*. Para isso, utilize o recurso **Série de preenchimento** para calcular as quantias que serão obtidas ao final de cada um dos 24 meses em que o capital ficará aplicado. Selecione o intervalo **A1:A24**, acesse o menu **Editar**, clique em **Preencher** e, depois, em **Séries**. Selecione a opção **Crescente**, insira o valor **12 078** em **Valor inicial** e **1,0065** em **Incremento**, e clique em **OK**.
2. Utilizando a planilha *Calc*, obtenha os 30 primeiros termos da PA e da PG definidas na atividade **120**, da página **228**, e, em seguida, resolva-os.

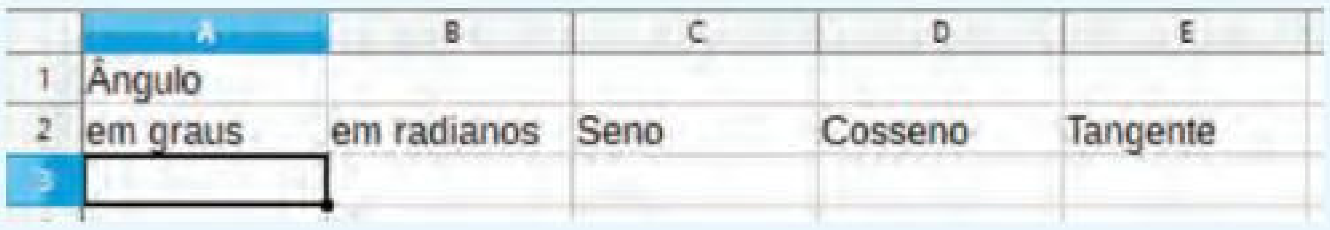
2. Selecione o intervalo **A1:A30**, acesse o menu **Editar**, clique em **Preencher** e, depois, em **Séries**. Selecione a opção **Linear**, insira o valor **100** no campo **Valor inicial** e **25** no campo **Incremento**, e clique em **OK**. Selecione o intervalo **B1:B30**, acesse o menu **Editar**, clique em **Preencher** e, depois, em **Séries**. Selecione a opção **Crescente**, insira o valor **1** no campo **Valor inicial** e **2** no campo **Incremento**, e clique em **OK**.

Construção de tabela trigonométrica

Esta atividade pode ser proposta ao final do estudo do capítulo **9**.

Podemos construir uma tabela trigonométrica utilizando a planilha *Calc*. No capítulo 9, apresentamos uma tabela trigonométrica com os valores aproximados aos milésimos. Como exemplo, construiremos uma tabela em que podemos aumentar ou diminuir a quantidade de casas decimais das aproximações.

1. Digite os textos na planilha como na figura a seguir.

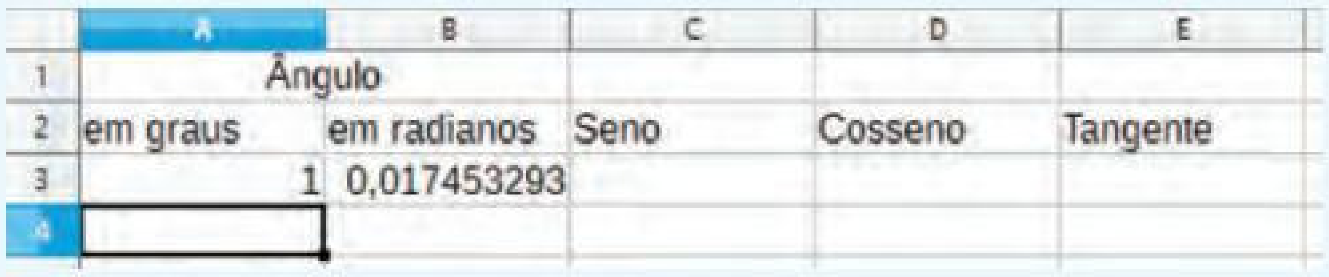


	A	B	C	D	E
1	Ângulo				
2	em graus	em radianos	Seno	Cosseno	Tangente
3					

2. Na célula **A3**, digite 1, que corresponde a 1° e, em **B3**, digite =radianos(A3) e pressione a tecla **Enter** para converter a unidade graus em radianos, já que a planilha *Calc* utiliza radianos para o cálculo das razões trigonométricas.

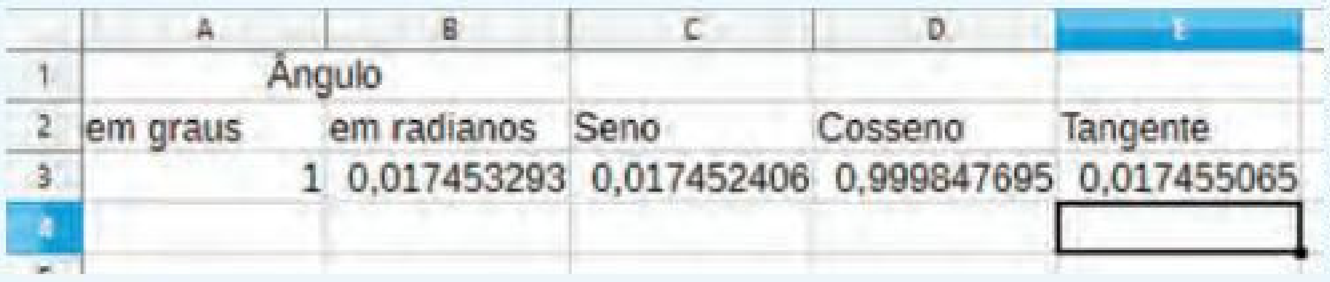
Explique aos alunos que a unidade de medida **radianos** será estudada no volume **2** desta coleção.

Selecione as células **A1** e **B1** e clique no botão para mesclar e centralizar. Clique no botão **Sim**, caso abra uma janela para confirmar.



	A	B	C	D	E
1	Ângulo				
2	em graus	em radianos	Seno	Cosseno	Tangente
3	1	0,017453293			
4					

3. Na célula **C3**, digite =sen(B3) e pressione a tecla **Enter**. Na célula **D3**, digite =cos(B3) e pressione a tecla **Enter**. Na célula **E3**, digite =tan(B3) e pressione a tecla **Enter**. Os valores do seno, do cosseno e da tangente do ângulo indicado nas células **A3** e **B3** serão calculados.

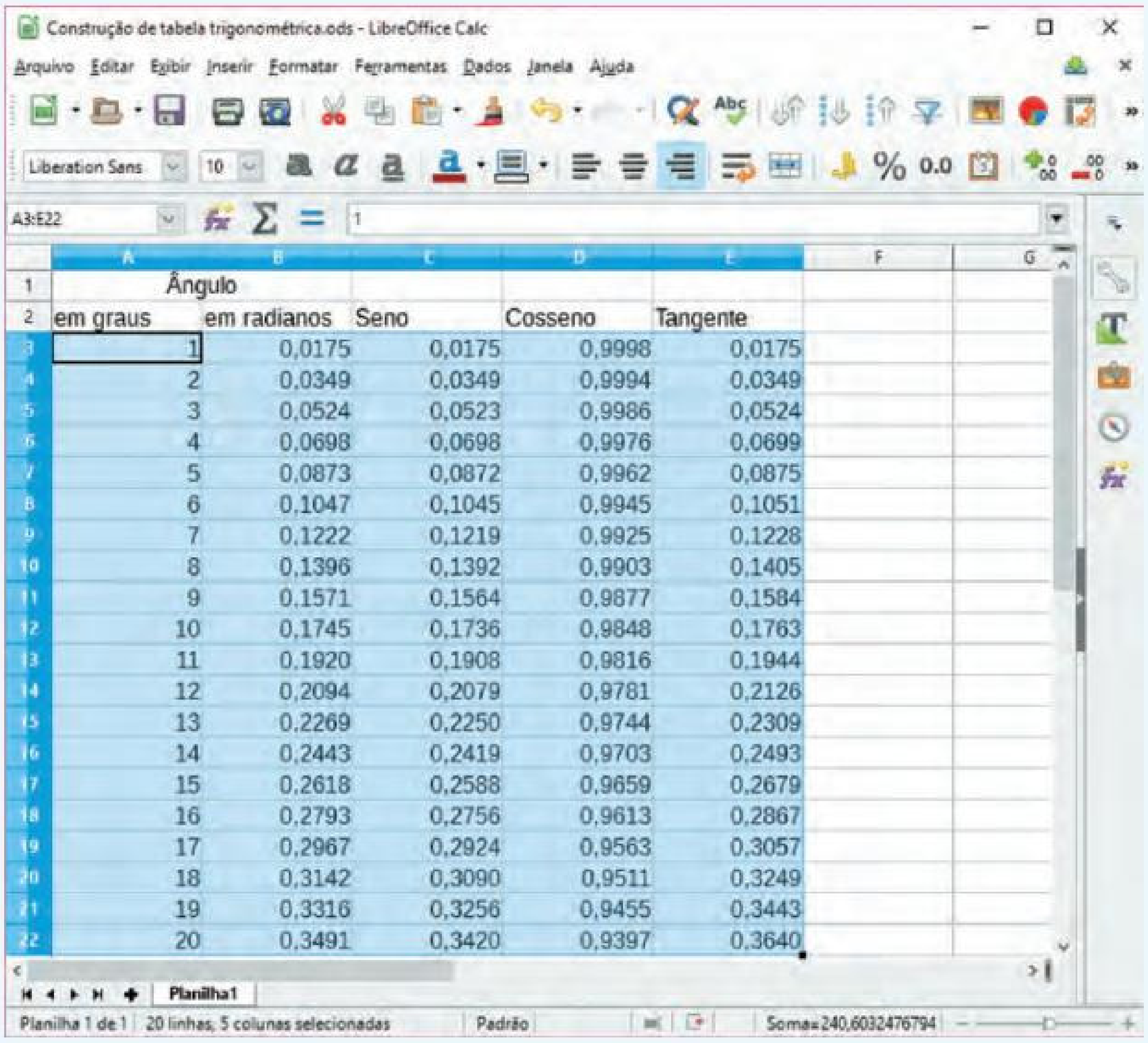


	A	B	C	D	E
1	Ângulo				
2	em graus	em radianos	Seno	Cosseno	Tangente
3	1	0,017453293	0,017452406	0,999847695	0,017455065
4					

Imagens: LibreOffice Calc /V. 5.0.3.2/The Document Foundation

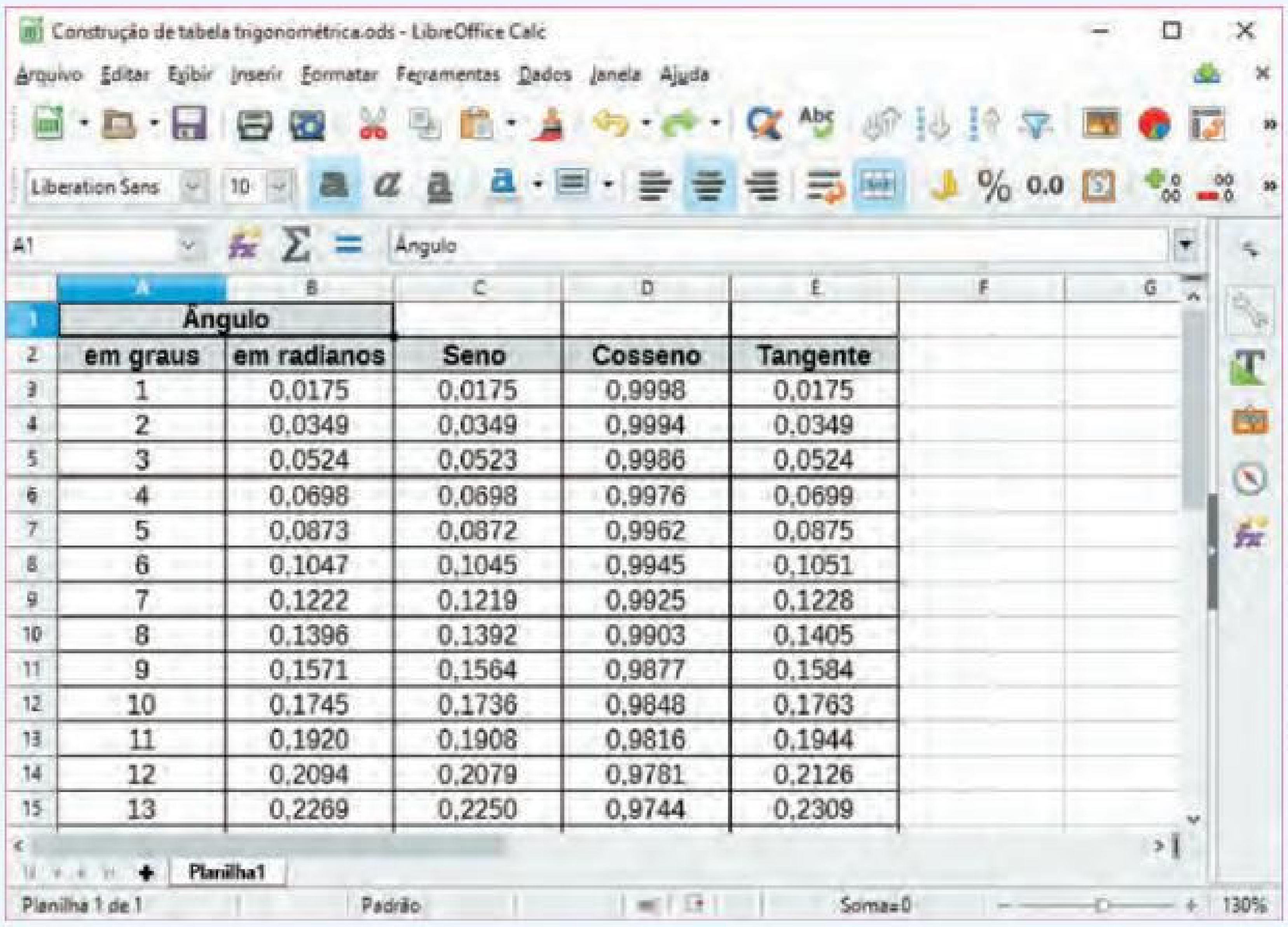
④ Podemos aumentar ou diminuir a quantidade de casas decimais dos números utilizando os botões +0 00 e −00 0, respectivamente. Para isso, selecione o intervalo de células **B3:E3** e diminua o número de casas decimais para quatro.

Note que você também poderá aumentar o número de casas decimais posteriormente. Selecione o intervalo de células **A3:E3**. No canto inferior direito das células selecionadas, há um quadrado preto. Clique e arraste esse quadrado para baixo para utilizar a função **Autopreenchimento**.



	A	B	C	D	E
1	Ângulo				
2	em graus	em radianos	Seno	Cosseno	Tangente
3	1	0,0175	0,0175	0,9998	0,0175
4	2	0,0349	0,0349	0,9994	0,0349
5	3	0,0524	0,0523	0,9986	0,0524
6	4	0,0698	0,0698	0,9976	0,0699
7	5	0,0873	0,0872	0,9962	0,0875
8	6	0,1047	0,1045	0,9945	0,1051
9	7	0,1222	0,1219	0,9925	0,1228
10	8	0,1396	0,1392	0,9903	0,1405
11	9	0,1571	0,1564	0,9877	0,1584
12	10	0,1745	0,1736	0,9848	0,1763
13	11	0,1920	0,1908	0,9816	0,1944
14	12	0,2094	0,2079	0,9781	0,2126
15	13	0,2269	0,2250	0,9744	0,2309
16	14	0,2443	0,2419	0,9703	0,2493
17	15	0,2618	0,2588	0,9659	0,2679
18	16	0,2793	0,2756	0,9613	0,2867
19	17	0,2967	0,2924	0,9563	0,3057
20	18	0,3142	0,3090	0,9511	0,3249
21	19	0,3316	0,3256	0,9455	0,3443
22	20	0,3491	0,3420	0,9397	0,3640

⑤ A tabela trigonométrica obtida possui o seno, o cosseno e a tangente de ângulos de 1° a 20° (medidas inteiras em graus). Porém, você pode criar mais linhas na tabela com a função **Autopreenchimento**. Utilize as opções de formatação do programa para melhorar a aparência da tabela da maneira que desejar.



	A	B	C	D	E
1	**Ângulo**				
2	**em graus**	**em radianos**	**Seno**	**Cosseno**	**Tangente**
3	1	0,0175	0,0175	0,9998	0,0175
4	2	0,0349	0,0349	0,9994	0,0349
5	3	0,0524	0,0523	0,9986	0,0524
6	4	0,0698	0,0698	0,9976	0,0699
7	5	0,0873	0,0872	0,9962	0,0875
8	6	0,1047	0,1045	0,9945	0,1051
9	7	0,1222	0,1219	0,9925	0,1228
10	8	0,1396	0,1392	0,9903	0,1405
11	9	0,1571	0,1564	0,9877	0,1584
12	10	0,1745	0,1736	0,9848	0,1763
13	11	0,1920	0,1908	0,9816	0,1944
14	12	0,2094	0,2079	0,9781	0,2126
15	13	0,2269	0,2250	0,9744	0,2309

Ilustrações: LibreOffice Calc/V. 5.0.3.2/The Document Foundation

Atividades

Anote as respostas no caderno.

1. Construa uma tabela trigonométrica com o seno, o cosseno e a tangente de ângulos de 1° a 89°, com aproximação à sexta casa decimal. Repita os passos **1**, **2** e **3**. No passo **4**, selecione o intervalo de células **B3:E3** e diminua o número de casas decimais para seis. Selecione o intervalo de células **A3:E3** e utilize a opção **Autopreenchimento** até o ângulo 89°, ou seja, até a linha 91.

2. Calcule.

a) sen(30,5°) 0,507538 **b)** cos(42°15') 0,740218 **c)** tg(25°42'36") 0,481482

Ampliando seus conhecimentos

Nesta seção, apresentamos sugestões de livros que propiciam melhor compreensão acerca dos conteúdos tratados nesta coleção, que de maneira geral abordam a Matemática de forma lúdica, curiosa e interessante. São apresentadas também sugestões de *sites* que trazem tópicos matemáticos e programas de computador relacionados à Matemática.

Para ler

- A dama ou o tigre? E outros problemas lógicos

SMULLYAN, Raymond. **A dama ou o tigre? E outros problemas lógicos**. Tradução Helena Martins. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2004.

O livro narra a história fictícia de uma princesa que deve escolher o destino de seu enamorado, tendo de solucionar diferentes problemas lógicos matemáticos que vão se tornando cada vez mais complexos com o decorrer da história.

- A janela de Euclides: a história da geometria, das linhas paralelas ao hiperespaço.

MLODINOW, Leonard. **A janela de Euclides**: a história da geometria: das linhas paralelas ao hiperespaço. Tradução Enézio E. de Almeida Filho. 6. ed. São Paulo: Geração Editorial, 2010.

Com esse livro, o leitor poderá conhecer melhor a história da Geometria, contada pelo autor de maneira clara e divertida.

- A Matemática das coisas

CRATO, Nuno. **A Matemática das coisas**. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

O livro apresenta diversos exemplos da importância da Matemática na vida do ser humano, como o funcionamento do Sistema de Posicionamento Global (GPS) e a relação da Matemática com outras áreas do conhecimento, como a Arte.

- A Matemática nas profissões

BARELLA, Elaine S.; MARTINS, Laura M. R. (Orgs.). **A Matemática nas profissões**. São Paulo: Portal Editora, 2010.

Resultado de pesquisas e entrevistas, o livro apresenta o relato de profissionais de diversas áreas sobre a relação deles com a Matemática em suas rotinas de trabalho.

- A rainha das ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da Matemática

GARBI, Gilberto G. **A rainha das ciências**: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da Matemática. 4. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

O livro é um relato de quatro milênios da História da Matemática, apresentado de maneira simples e compreensível.

- A vida secreta dos números: 50 deliciosas crônicas sobre como trabalham e pensam os matemáticos

SZPIRO, George. **A vida secreta dos números**: 50 deliciosas crônicas sobre como trabalham e pensam os matemáticos. Tradução J. R. Souza. Rio de Janeiro: DIFEL, 2008.

Por meio de histórias, anedotas e outros tipos de textos, este livro nos mostra como a Matemática está presente em quase todos os aspectos de nossas vidas. O livro aborda curiosidades históricas pouco conhecidas e apresenta grandiosos praticantes da Matemática ao longo dos tempos.

- Cartas a uma jovem matemática.

STEWART, Ian. **Cartas a uma jovem matemática**. Tradução Pedro Ferreira. Relógio D'Água: Lisboa, 2006.

O livro apresenta um conjunto de cartas trocadas entre a jovem Meg e um matemático, por meio das quais discutem sobre o que é Matemática, o que faz um matemático e a comunidade científica, abordando questões e curiosidades desde o filosófico ao prático.

- O homem que calculava

TAHAN, Malba. **O homem que calculava**. 40. ed. Rio de Janeiro: Record, 1995.

O livro expõe alguns problemas, quebra-cabeças e curiosidades matemáticas, por meio das aventuras fictícias de um sábio calculista persa e de suas soluções para problemas aparentemente sem solução.

- O instinto matemático

DEVLIN, Keith. **O instinto matemático**. Tradução Michelle Dysman. Rio de Janeiro: Record, 2009.

O autor defende a ideia de haver dois “tipos” de Matemática: a simbólica, que é exclusiva do homem; e a natural, que pertence a qualquer animal e corresponde a habilidades matemáticas relacionadas à sobrevivência, senso de direção e captura de presas.

- O livro dos números: uma história ilustrada da Matemática

BENTLEY, Peter. **O livro dos números**: uma história ilustrada da Matemática. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2010.

O autor busca revelar segredos e mistérios da Matemática e mostrar sua presença em nossas vidas, desde a ciência até as artes. Ilustrado com fotografias, gravuras, pinturas, entre outros, o livro é organizado de maneira a facilitar a compreensão de situações em que a Matemática está envolvida.

- O teorema do papagaio

GUEDJ, Denis. **O teorema do papagaio**. Tradução Eduardo Brandão. São Paulo: Companhia das Letras, 1999.

O livro narra a história fictícia de uma família parisiense que se vê obrigada a estudar, entender e organizar fatos históricos e pensamentos da história da Matemática, desde a Antiguidade até os dias atuais, para explicar diversos acontecimentos. O livro apresenta passagens da vida de vários estudiosos, como Tales, Pitágoras e Pierre de Fermat.

- O último teorema de Fermat: a história do enigma que confundiu as maiores mentes do mundo durante 358 anos

SINGH, Simon. **O último teorema de Fermat**: a história do enigma que confundiu as maiores mentes do mundo durante 358 anos. 7. ed. Tradução Jorge Luiz Calife. Rio de Janeiro: Record, 2000.

O livro faz um apanhado histórico, desde a origem até os dias atuais, sobre o enigma que confundiu as mentes de estudiosos por 358 anos, o Teorema de Fermat. Relatando a busca épica por sua demonstração, o livro enfoca a importância do teorema para o desenvolvimento da Matemática durante mais de três séculos.

- O universo e a xícara de chá

COLE, K. C. **O universo e a xícara de chá**. Tradução Elizabeth Leal. Rio de Janeiro: Record, 2006.

O livro mostra como a Matemática transcende os números e está presente em muitas situações do dia a dia. Mostra, ainda, como enxergar a lógica presente nessas situações, cuja compreensão nos torna mais aptos a tomar decisões e permite o melhor entendimento do mundo em que vivemos.

- Os números governam o mundo: folclore da Matemática

TAHAN, Malba. **Os números governam o mundo**: folclore da Matemática. Rio de Janeiro: Ediouro, 1998.

"Os números governam o mundo" é uma citação de Pitágoras que o autor deste livro a trouxe à tona para narrar mais detalhes sobre o assunto. O livro traz histórias dos números, mistérios, simbologia e origem mística que os envolvem.

- Pitágoras e seu teorema em 90 minutos

STRATHERN, Paul. **Pitágoras e seu teorema em 90 minutos**. Tradução Marcus Penchel. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1998. (Cientistas em 90 minutos).

Por meio de textos informativos, o livro apresenta um panorama da vida e da obra de Pitágoras, comentando suas descobertas.

- Qual o problema?

MORICONI, Marco. **Qual o problema?** Alicia Ivanissevich (Org.). Rio de Janeiro: Instituto Ciência Hoje, 2009.

O livro apresenta 40 enigmas que desafiam e instigam o leitor a explorar, de maneira lúdica, conceitos e ideias matemáticas frequentemente utilizadas por profissionais de diferentes áreas.

Para navegar

- Arte & Matemática

<http://tub.im/hwz85d>

Um *site* interativo que apresenta temas variados, de diferentes épocas, que relacionam Arte e Matemática.

- Conteúdos digitais para o ensino e aprendizagem da Matemática e Estatística

<http://tub.im/7au5uc>

Desenvolvido pela Universidade Federal Fluminense, este *site* contém diferentes aplicativos educacionais interativos que abordam diferentes conteúdos matemáticos, como geometria, matrizes e funções trigonométricas.

- Domínio Público

<http://tub.im/ebgwue>

Este *site* consiste em uma biblioteca digital, na qual é possível pesquisar textos, imagens, sons e vídeos de domínio público (acesso livre e gratuito) referentes a diversas áreas.

- EDUMATEC

<http://tub.im/xt9vnq>

Este *site* apresenta e disponibiliza material que relaciona Matemática e informática. Na seção *softwares*, são disponibilizados diferentes programas computacionais que permitem, por exemplo, a construção de gráficos ou de figuras geométricas.

- Enem

<http://tub.im/fjoj8r>

Neste *site* é possível fazer a inscrição para o Enem e acessar os resultados, os simulados e as provas aplicadas em anos anteriores, assim como a matriz de referência dos conhecimentos avaliados no exame.

- IBGE

<http://tub.im/9cqokk>

Neste *site* é possível obter informações estatísticas sobre o Brasil, como contagem da população e índices da economia, além de dados referentes a estados e municípios.

- Khan Academy

<http://tub.im/s5odbu>

Plataforma educacional, de acesso livre, que disponibiliza recursos como exercícios e vídeos de aulas sobre diversos conteúdos.

- Laboratório de Matemática – UNESP

<http://tub.im/qeoihf>

Este *site* divulga as atividades que são desenvolvidas no laboratório de Matemática da Universidade Estadual de São Paulo. Na seção História da Matemática são apresentadas informações sobre a vida e a obra de alguns matemáticos.

- Matemática essencial

<http://tub.im/evze5y>

Este *site* apresenta definições e conceitos matemáticos de diversos níveis de ensino, exemplos resolvidos e exercícios que possuem respostas, sendo que, em alguns casos, as respostas estão justificadas e as resoluções detalhadas.

- Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas

<http://tub.im/roe3dx>

Neste *site* é possível obter diversas informações relacionadas à Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas, por exemplo, a maneira de se efetuar a inscrição, verificar a data das provas e acessar as provas aplicadas em anos anteriores.

capítulo 1 Os conjuntos

1. Algumas possíveis respostas:
- a) gambá, macaco, homem
- b) tubarão, cascudo, lambari
- c) arara, papagaio, coruja
- d) jacaré, tartaruga, iguana
- e) cobra-cega, sapo, rã

2. a) $\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$; finito
- b) {Acre, Amapá, Amazonas, Pará, Rondônia, Roraima, Tocantins}; finito
- c) $\{4, 8, 12, 16, \ldots\}$; infinito
- d) $\{c, j, n, o, t, u\}$; finito

3. a) $4 \in A$; $4 \in B$ d) $16 \notin A$; $16 \in B$
b) $6 \notin A$; $6 \notin B$ e) $25 \notin A$; $25 \in B$
c) $10 \in A$; $10 \notin B$ f) $50 \notin A$; $50 \notin B$

4. Uma possível resposta:
A = {x | x é um dos cinco sentidos humanos};
B = {x | x é um número ímpar entre 2 e 8};
C = {x | x é uma das cores da bandeira do Brasil}

5. $n(D) = 6$ **6.** 7 pares ordenados

7. A e G; B e H; C e E; D e F

8. a) V
- b) F; Uma possível resposta: todo conjunto unitário possui apenas um elemento.
- c) V

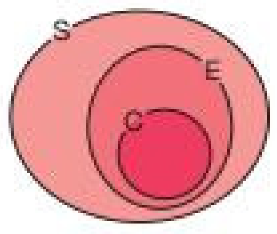
9. d **10.** b

11. a) V c) V e) F g) V
b) F d) F f) V h) V

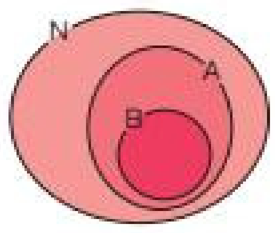
12. c **13.** b; propriedade transitiva

14. a; b; c; e

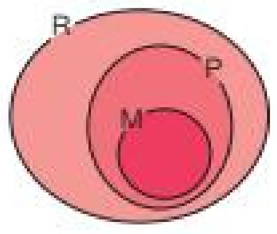
15. a) *S*: conjunto das atividades saudáveis;
E: conjunto dos esportes;
C: conjunto da corrida.



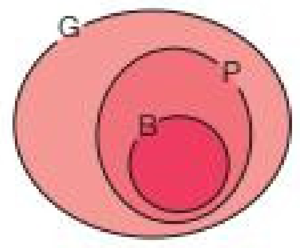
b) *N*: conjunto dos animais;
A: conjunto das aves;
B: conjunto dos beija-flores.



c) *R*: conjunto de quem nasceu no Rio Grande do Norte;
P: conjunto dos potiguares;
M: conjunto de Marcos.



d) *P*: conjunto dos poliedros;
B: conjunto das pirâmides;
G: conjunto das formas geométricas espaciais.



17. a) $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}$
- b) $\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}$
- c) $\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}$
- d) $\{a, b, c, d\}$

18. $\{1, 2, 5\}, \{1, 2, 10\}, \{1, 5, 10\}, \{2, 5, 10\}$

19. a) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ e) $\varnothing$ ou $\{\ \}$
b) $\{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8\}$ f) $\{5\}$
c) $\{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ g) $\{5\}$
d) $\{1, 4\}$ h) $\{1, 3, 4, 5\}$

20. a) Algumas possíveis respostas: espelho, café, famosa, abóbora, música, ideia.
- b) Algumas possíveis respostas: lápis, bônus, imóvel, tênis, táxi.
- c) Algumas possíveis respostas: enjoo, velho, escola.
- d) Algumas possíveis respostas: próximo, dominó.

21. $C \cup (A \cap B)$

22. 8 elementos

23. a) $\{14, 20\}$ d) $\{1, 2, 4, 14, 20\}$
b) $\{9, 14, 18, 20\}$ e) $\{1, 2, 4, 12\}$
c) $\{1, 2, 4\}$ f) $\{12\}$

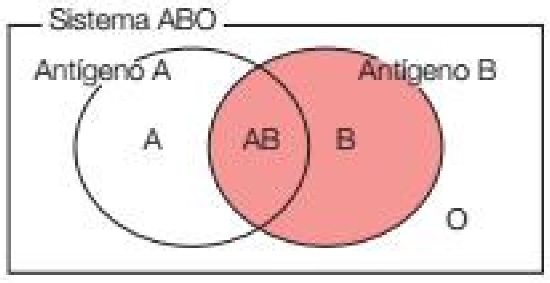
24. 5 elementos; 3 elementos

25. a) A^C = {x | x é um número par}
- b) B^C = {x | x é um número negativo ou $x = 0$}

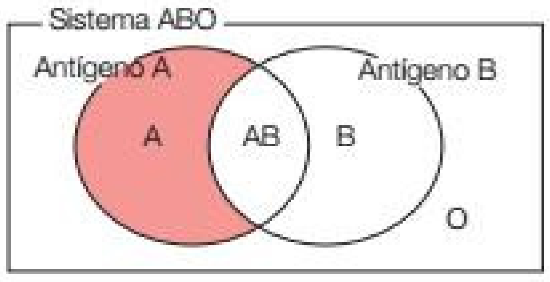
26. b

27. a

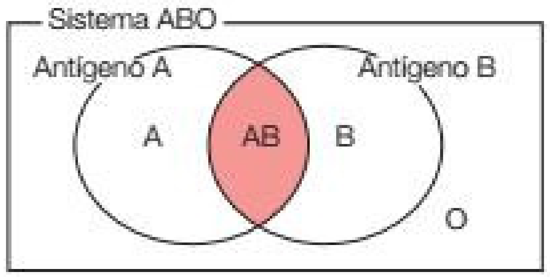
29. b) A, B, AB e O
- c) Porque aqueles que possuem o tipo sanguíneo AB não têm presença de anticorpos A ou B, o que lhes permite receber qualquer tipo de sangue; já os que possuem o tipo O não têm a presença de antígenos A ou B, o que lhes permite doar para qualquer um.
- d) tipo B ou tipo O
- e) I)



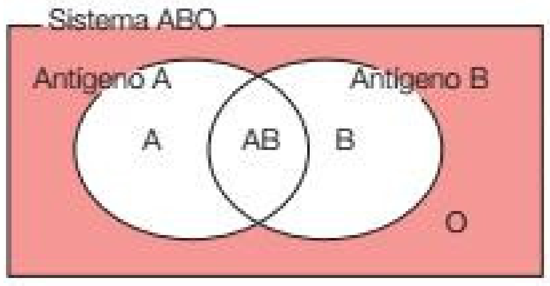
II)



III)



IV)



Ilustrações: Acervo da editora

30. a) 19 funcionários
- b) 12 funcionários
- c) 5 funcionários
- d) 14 funcionários
- e) 7 funcionários

31. 6 alunos

32. a) 200 pacientes b) 88 pacientes

33. d **34.** d

35. a) 63 alunos c) 35 alunos
b) 77 alunos

36. a) nenhum elemento; Resposta esperada: disjuntos.
- b) 223 milhões de elementos

37. 34 clientes

38. a) 49 alunos b) 103 alunos

39. 13 500 habitantes

41. a

42. a) $\mathbb{N}^*$
- b) sim; Uma possível resposta: para cada estrela é possível associar um número pertencente a $\mathbb{N}^*$, mesmo que sejam infinitas.

43. a) $-3 \in \mathbb{Z}$; $-3 \in \mathbb{Q}$ c) $-50{,}82 \in \mathbb{Q}$
b) $8 \in \mathbb{N}$; $8 \in \mathbb{Z}$; $8 \in \mathbb{Q}$ d) $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$

44. a) 80% c) 45% e) 240%
b) 75% d) 87,5% f) 131,25%

45. b

46. a) $A = \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$
- b) $B = \{-8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 1\}$
- c) $C = \{\ldots, -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, \ldots\}$
- d) $D = \varnothing$

47. $\frac{1}{4}$; Algumas possíveis respostas: 0,21; 0,22; 0,23; 0,24.

48. $0{,}6928 > \frac{9}{13} > \frac{2}{3} > \left(\frac{8}{10}\right)^2 > \frac{5}{8} > 0{,}6\overline{19}$

49. a) -258; $-\frac{732}{12}$; -6
- b) $-64{,}\overline{3}\ldots$; $-1{,}5$; $\frac{4}{5}$; $3{,}\overline{17}$; 17,9
- c) 0; 15; $\frac{64}{16}$; 1 002

50. $A = 25$

51. a) $\frac{184}{5}$ c) $\frac{15}{16}$ e) $\frac{417}{55}$
b) $\frac{164}{99}$ d) $\frac{281}{333}$ f) $\frac{1\,109}{90}$

52. a) 0,8125 c) 17 e) $18,\overline{63}$
b) $3,8\overline{6}$ d) 59,5 f) $2,\overline{885}$

53. a) 6 cm; racional
b) $\frac{5\sqrt{5}}{2}$ cm; irracional
c) $\sqrt{23}$ cm; irracional

54. a) 4,5 b) 9,38 c) 11,576

55. Algumas possíveis respostas:
a) 3; 2,8284 c) 3,5; 3,4641
b) 2,5; 2,4495 d) 5; 4,8990

56.

57. a) 89, 144 e 233
b) Não, pois ϕ é um número irracional.
c) Algumas possíveis respostas: 1,6; 1,625; 1,615; 1,619; 1,618.

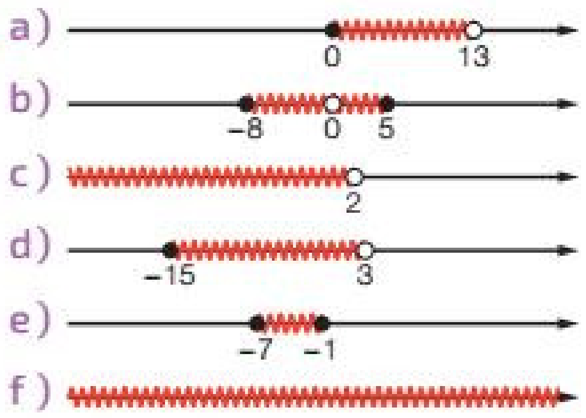
58.
- A: $-\frac{11}{3}$
- C: 1
- B: $-\frac{7}{10}$
- D: $3,\overline{3}$

59. a) $\subset$ c) $\not\subset$ e) $\subset$
b) $\subset$ d) $\not\subset$ f) $\not\subset$

60. Uma possível resposta: temos que 2 e 3 são números naturais não quadrados perfeitos, de maneira que $\sqrt{2} \in \mathbb{I}$ e $\sqrt{3} \in \mathbb{I}$. Assim, segue que $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{4} = 2 \in \mathbb{Q}$ e $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6} \in \mathbb{I}$.

61. d

62.



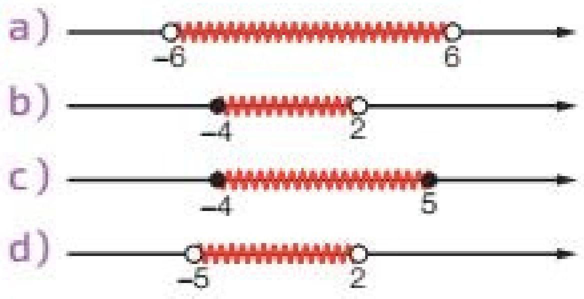
63. a) F c) V e) V
b) V d) F f) F

64. a) $[-3, 4]$ d) $]-15, 0[$
b) $]-\infty, 10]$ e) $[-23, -5[$
c) $]2, 11]$ f) $]-6, +\infty[$

65. a) iogurte: $[1, 10]$; requeijão: $[5, 8]$; sorvete: $]-\infty, -18]$; *pizza*: $[-18, -12]$
b)
- iogurte e requeijão
- iogurte
- *pizza*
- sorvete

66. a) $A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid -11 \leq x < 9\}$; $A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 4\}$
b) $A \cup B =]-\infty, -1[$; $A \cap B =]-8, -5]$
c) $A \cup B = [-3, 5]$; $A \cap B = [-1, 1]$
d) $A \cup B = [-10, 6]$; $A \cap B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
e) $A \cup B =]-15, 3[$; $A \cap B = \varnothing$

67.



68. a) $[-4, 13]$ ou $\{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x \leq 13\}$
b) fechado

69. Algumas possíveis respostas:
a) $A = [-6, 2[$ e $B =]-3, 3]$
b) $A =]-\infty, 2]$ e $B =]-6, -4[$
c) $A =]0, +\infty[$ e $B =]-\infty, 0[$
d) $A = [0, 3[$ e $B = [1, 4[$

70. a)
- $[51, 53[$
- $[53, 64]$

b) Sim, pois $52,8 \in [51, 53[$.
c) Qualquer tempo *x*, em segundos, com $x \in [53, 64]$.

capítulo
2 As funções

1. a) ano e população
b) 121,2 milhões de habitantes
c) não

2. a) variável independente: altura do prédio; variável dependente: tempo necessário para subir as escadas
b) variável independente: preço por quilograma de pão; variável dependente: custo de seis pães
c) variável independente: distância entre as cidades; variável dependente: tempo de viagem
d) variável independente: quantidade de metros cúbicos de água consumidos no mês; variável dependente: valor da fatura
e) variável independente: massa do objeto; variável dependente: força necessária para colocá-lo em movimento

3. a) quantia a pagar (Q); quantidade de quilômetros rodados (d)
b) R$ 0,88
c) R$ 282,30

4. a) $P = 6 \cdot \frac{x}{2}$ ou $P = 3x$
b)
- 6 m
- 36 m

c)
- 7 m
- 3,4 m

5. b

6. a)
- IV
- III

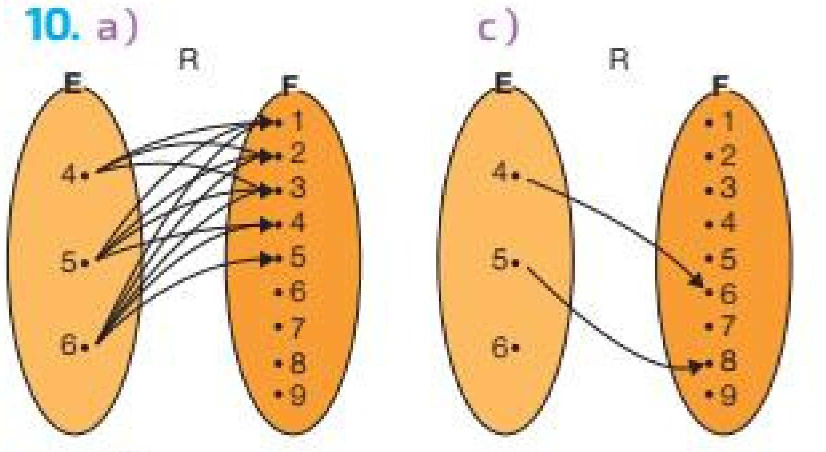
b)
- 7,8 kg
- 3,6 kg

c) 6 pessoas

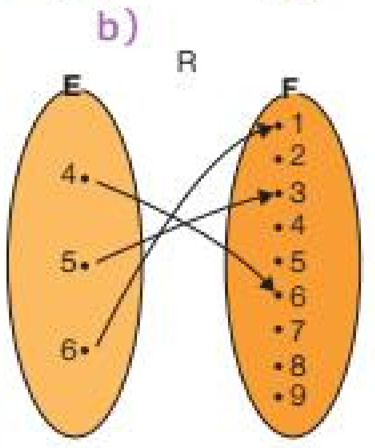
7. a) X=100N+I b) N=8; I=19

8. a) Uma possível resposta: possibilidades que uma pessoa tem de escolher um curso de idiomas e um profissionalizante nessa escola.
b) 12 elementos
c) 1 em 12

10. a) c)



b)



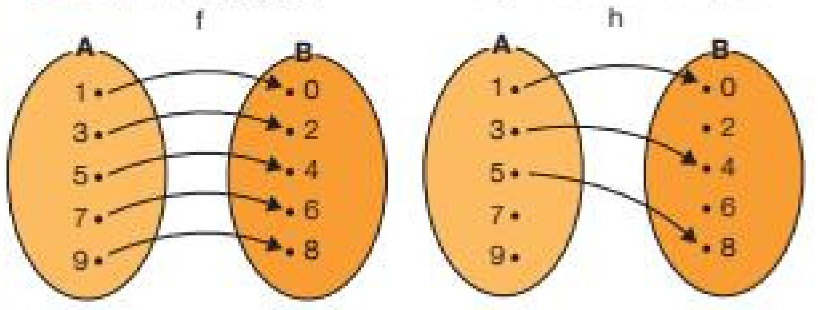
11. C

12. quadrado

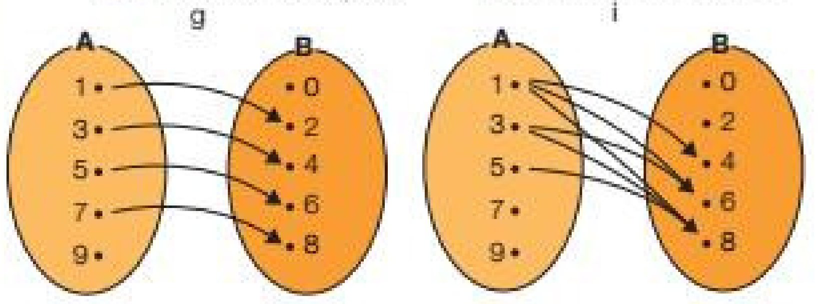
13. verdadeiras: IV e V; falsas: I, II, III e VI

14. e **15.** b

16. a) é função c) não é função



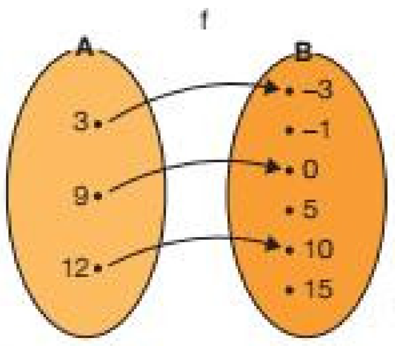
b) não é função d) não é função



17. a) Sim, pois cada elemento do domínio *G* tem um único correspondente no contradomínio *H*.
b) Não, pois $3 \in G$ não teria uma imagem correspondente em *H*.

18. d

19.



Ilustrações: Acervo da editora

20. a) $\text{Im}(h) = \{24, 30, 40, 60, 120\}$
b) $\text{Im}(h) = \{20, 24, 30, 40, 60\}$
c) $\text{Im}(h) = \{25, 31, 41, 61, 121\}$
d) $\text{Im}(h) = \{23, 29, 39, 59, 119\}$

21. a) $y = x^2 + 2$ b) −3

22. $f(4) = 3$

23. a) $p(t) = 680t$
b) $p(24) = 16\,320$; Resposta esperada: morrem no mundo cerca de 16 320 pessoas a cada 24h, isto é, por dia, em razão de doenças relacionadas ao tabagismo.

24. $v(r) = 3\pi r^2$; 12π dm³

25. a) 2013: 129 900 habitantes; 2019: 143 700 habitantes

b) Resposta esperada: não, pois a fórmula apresentada é para estimativas da população no período entre os censos de 2010 e 2020. Caso a utilizássemos para 1950, a população estimada seria −15 000 habitantes, o que não faz sentido.

26. a) II

b) 15 625 quadradinhos; 9 765 625 quadradinhos

27. a) $a = 80000$; $b = \frac{6}{5}$

b) R$ 165 888,00

28. a) 1,9375; 1,96875; 1,984375; 1,9921875

b) Resposta esperada: 2.

29. a) $D(f) = \mathbb{R}$

b) $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$ ou $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1\}$

c) $D(f) = \mathbb{R} - \{7\}$ ou $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 7\}$

d) $D(f) =]-\infty, 12]$ ou $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 12\}$

e) $D(f) =]-\infty, 4[$ ou $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 4\}$

f) $D(f) =]2, +\infty[$ ou $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$

30. b

31. a) R$ 450,00 b) III

32. d

33. A (4, 5), B (−3, −2), C (0, 1), D (−1, 4), E (1, −3)

36. a) Algumas possíveis respostas: não deixar a torneira pingando; evitar banhos demorados; fechar a torneira enquanto escova os dentes.

b) II

c)
- R$ 42,00
- R$ 160,00
- R$ 202,00

37. a; b; e; f

38. a) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 7\}$; $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 \leq y \leq 3\}$

b) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 5\}$; $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq 5\}$

c) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 5\}$; $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -2 < y < 4\}$

d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 1\}$; $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$

e) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq 5\}$; $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 3\}$

f) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x < 10\}$; $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid 5 \leq y \leq 7\}$

g) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -6 < x < 1\}$; $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 6\}$

39. a) $f(4) = 2$

b) $x = -4$, $x = -2$ e $x = 1$

c) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -6 \leq x \leq 6\}$; $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid -2 \leq y \leq 4\}$

40. a) 46 h; 48 h

b) Crescente, pois quanto maior for a quantidade de peças encomendadas, maior será o tempo para a entrega.

41. a) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x \leq 12\}$ e $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid -4 \leq y \leq 5\}$

b)
- $[3, 5]$ e $[8, 10]$
- $[-4, -2]$
- $[-2, 3]$, $[5, 8]$ e $[10, 12]$

c) $-\frac{28}{9}$ e 9

42. c

43. a) Verde, pois, como a tartaruga não parou, sua distância em relação à largada foi crescente durante todo o tempo de corrida.

b) Não, pois em certo intervalo, que corresponde ao período em que a lebre permaneceu dormindo, a função é constante.

c) tartaruga; Algumas possíveis respostas: quem segue devagar e com constância pode chegar à frente; paciência pode valer mais do que a pressa; nem sempre os mais velozes chegam em primeiro lugar.

44. a; c

45. b

46. c

47. $B = \{-11, -9, -7, -5, -3, -1, 1\}$

48. a) f; m

b) h

c) g; n; q

d) p; r

49. a) 10 b) 25 c) 70

50. a) $f(g(x)) = 5x^2 + 20x - 8$

b) $h(g(x)) = \frac{2}{x^2 + 4x - 3}$

c) $f(h(x)) = \frac{10}{x-3} - 8$

d) $h(f(x)) = \frac{2}{5x - 11}$

e) $g(f(x)) = 25x^2 - 60x + 32$

f) $f(f(x)) = 25x - 48$

g) $g(g(x)) = x^4 + 8x^3 + 20x^2 + 16x$

h) $h(h(x)) = \frac{2x - 6}{11 - 3x}$

51. $Im(g) = \{-2, 2, 6, 10, 14\}$ e $Im(f \circ g) = \{-8, -4, 0, 4, 8\}$

52. a)
- $c(x) = 480 + 30x$
- $v(c) = 1{,}3c$

b) R$ 18 480,00; R$ 24 024,00

c) $v(c(x)) = 624 + 39x$; Resposta esperada: a relação entre o valor de venda do lote e o número de peças produzidas.

d)
- R$ 20 124,00
- R$ 33 189,00

53. c; e

54. $D(f \circ g) = \mathbb{R}_+$; $Im(f \circ g) = [-25, +\infty[$

56. $m = -18$

57. a) $f^{-1}(x) = \frac{1-x}{4}$

b) $f^{-1}(x) = x^5 - 3$

c) $f^{-1}(x) = 2x + 10$

d) $f^{-1}(x) = \frac{2}{x} + 1$, com $x \neq 0$

e) $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x-4}{3}}$, com $x \geq 4$

f) $f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{6-3x}$, com $x \neq 2$

58. $CD(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1\}$

59. a) $f(x) = 500x$

b) $f^{-1}(x) = \frac{x}{500}$; Resposta esperada: a função f^{-1} representa o tempo, em horas, de natação que se deve praticar para gastar *x* quilocalorias.

60. a) $f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{x-2}$, com $x \neq 2$

b) $\mathbb{R} - \{2\}$

c) $\mathbb{R} - \{3\}$

d) $\frac{11}{6}$

61. a) $-\frac{1}{5}$

b) $\frac{13}{5}$

c) 3

d) 25

e) −5

62. (1, 1)

64. a) Algumas possíveis respostas: compras na internet e movimentações bancárias.

b) Ocultar eficientemente os mecanismos (chaves) para a inversão de *f*, de modo que pessoas não autorizadas não possam fazê-lo.

c) VIAGEM SABADO

capítulo 3 Função afim

1. a) função afim

b) função afim, linear e identidade

c) função afim e linear

d) função afim e constante

e) função afim

f) função afim e linear

2. a) 65 cm

b) $p(\ell) = 5\ell$

3. a) $f(x) = 3x + 10$

b) $f(x) = -5x$

c) $f(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$

d) $f(x) = 2x + 5$

e) $f(x) = x + 2$

f) $f(x) = -2x + 3$

4. a) R\$ 12,40; R\$ 8,80
b) $t(d)=2+0,8d$

5. a) $m(q)=1,5q$ b) 75t

6. a) aproximadamente 6,6 h
b)
- 62 km
- 124 km
- 310 km
- 372 km

c) $d(t)=62t$

7. $p(t)=65t+100$ **8.** a

9. a) $s(v)=1\,200+0,05v$
b) R\$ 2 200,00
c) R\$ 16 400,00

10. a) R\$ 460,00 c) R\$ 760,00
b) $q(t)=100+60t$

11. a) $s(n)=180n-360$ c) 15 lados
b) 720°

12. a) R\$ 150,00 b) $c(p)=8,5p+150$

13. a) $G(x)=3\,900+0,5x$
b) $L(x)=1,3x-3\,900$
c) 5 000 barras de chocolate

14. a) $x=4$ c) $x=-\frac{3}{8}$
b) $x=9$ d) $x=-30$

15. a) 10 °C
b) $F=32$; A medida, em graus Fahrenheit, correspondente a 0 °C.

16. $a=3$ e $b=2$

17. a) Ambos são iguais a zero, pois os gráficos que representam as funções cortam o eixo *y* no ponto de coordenadas $(0, 0)$.
b) $A(x)=30x$ e $B(x)=40x$

18. a) $p_A(t)=84t+24$ e $p_B(t)=92t$
b) A partir de 3 h de jogo.

19. a) 4 h b) $q(t)=2t+8$

20. a) 90 km/h
b) $S(t)=20+90t$
c) quilômetro 920

21. a) $T(m)=9,8m$; $L(n)=1,6n$
b)
- 120 N
- 735 N

c) 57 kg
d) 588 N

22. c

23. a) R\$ 1 750,00 b) $Q(t)=600+230t$

24. a **25.** decrescente

26. a) R\$ 25,60; R\$ 10,80
b) $p(m)=\begin{cases}36m, \text{ se } 0<m\leq 0{,}700\\ 25{,}60, \text{ se } m>0{,}700\end{cases}$
c) crescente: $0<m\leq 0,700$;
constante: $m>0,700$

27. a) 27 mil litros
b) $Q(t)=150\,000-9\,000t$
c) decrescente

28. a) $h(x)=2\,000$
b) constante

29. a) $E(q)=10q$
b) crescente

31. a) $f(x)=0$ para $x=-2$
$f(x)>0$ para $x>-2$
$f(x)<0$ para $x<-2$
b) $f(x)=0$ para $x=-5$
$f(x)>0$ para $x<-5$
$f(x)<0$ para $x>-5$
c) $f(x)=0$ para $x=6$
$f(x)>0$ para $x>6$
$f(x)<0$ para $x<6$
d) $f(x)=0$ para $x=\frac{7}{3}$
$f(x)>0$ para $x<\frac{7}{3}$
$f(x)<0$ para $x>\frac{7}{3}$

32. a) $f(x)=0$ para $x=-10$
$f(x)>0$ para $x>-10$
$f(x)<0$ para $x<-10$
b) $f(x)>0$ para todo *x* real
c) $f(x)=0$ para $x=2$
$f(x)>0$ para $x<2$
$f(x)<0$ para $x>2$

33. $x\in\,]2, 5[$

34. a) $b=-2$
b) $g(x)=3x+3$
c) f: $x=\frac{2}{3}$; g: $x=-1$
d) $f(x)=0$ para $x=\frac{2}{3}$
$f(x)>0$ para $x>\frac{2}{3}$
$f(x)<0$ para $x<\frac{2}{3}$
$g(x)=0$ para $x=-1$
$g(x)>0$ para $x>-1$
$g(x)<0$ para $x<-1$

35. a) 1ª proposta: $S(v)=1\,600+0,05v$;
2ª proposta: $S(v)=1\,100+0,075v$
b) Para vendas menores que R\$ 20 000,00 a 1ª proposta é mais vantajosa; para vendas maiores que R\$ 20 000,00 a 2ª proposta é mais vantajosa.

36. a) locadora A: $V(x)=82+0,52x$;
locadora B: $V(x)=76+0,55x$
b) locadora B
c) Para rodar menos de 200 km, a locadora B oferece o menor preço; para rodar mais de 200 km, a locadora A oferece o menor preço; para rodar 200 km, as locadoras oferecem o mesmo preço.

37. a) R\$ 750,00
b) $L(v)=75v-1\,500$
c) R\$ 21,00

38. c

39. a) $d(t)=19t$ b) 8 min ou mais

40. a) R\$ 22 132 000,00
b) $P(m)=22\,000m$
c) Sim, pois aumentam ou diminuem na mesma proporção. 22 000

41. a) $A(b)=4b$ b) 60 cm² c) 8 cm

42. a) $R(d)=100d$ b) 563 km

43. a) 4 m de comprimento por 4 m de largura
b) 1 cm: 125 cm
c) $m(x)=1,25x$
d) 1,25

44. a) $S=\{x\in\mathbb{R}|x>-4\}$
b) $S=\left\{x\in\mathbb{R}|x<-\frac{5}{2}\right\}$
c) $S=\{x\in\mathbb{R}|x\geq 3\}$
d) $S=\{x\in\mathbb{R}|x\geq -1\}$

45. a

46. a) triângulo: $p(x)=5x$;
retângulo: $p(x)=4x+20$
b) $x=19$

47. a) 470 kcal c) 8 biscoitos
b) $q(n)=47n$

48. 7 000 pessoas

49. a) $a(g)=0,27g+10$
b) mais de 18,52 L
c) 22,15 L

50. a) $L(q)=40q-6\,000$
b) $q>150$; A confeitaria terá lucro quando forem vendidos mais de 150 bolos.

51. 15 min

52. b) Entre $88,\overline{3}$ kWh e $123,\overline{3}$ kWh.

53. a) Uma possível resposta: a redução do preço do produto.
b) Uma possível resposta: o preço tenderá a aumentar.
c)
- $f(x)=-2x+155$
- $g(x)=3x-15$

d) $3x-15>-2x+155$ e
$3x-15<-2x+155$
e) De R\$ 5,00 a R\$ 77,50.
f)
- Superiores a R\$ 34,00 até R\$ 77,50.
- Superiores ou iguais a R\$ 5,00 e inferiores a R\$ 34,00.

g) R\$ 34,00

capítulo 4 Função quadrática

1. b; c; e

2. a) $a=1$, $b=1$ e $c=2$
b) $a=-4$, $b=0$ e $c=2,5$
c) $a=\frac{1}{3}$, $b=-\frac{2}{7}$ e $c=0$
d) $a=-9$, $b=3$ e $c=-1$

e) $a=7{,}6$, $b=0$ e $c=0$
f) $a=-2$, $b=12$ e $c=-10$

3. a) -4 d) $-2{,}72$ g) 1
b) 16 e) -7 h) $-\frac{9}{4}$
c) -4 f) -27

4. a) 465; 1 275
b) Não, pois a adição de números naturais sempre resulta em outro número natural.
c) $D(s)=\mathbb{N}^*$

5. a) -2 c) 2 e) -8
b) -5 d) 4 f) $-9{,}5$

6. a) $S(x)=2x^2+5x-3$
b) 30 cm²; 165 cm²
c) Resposta esperada: não, pois a diagonal menor do losango corresponderia a um valor negativo ($2x-1<0$).

7. a) $p(n)=n^2-n$
b) 380 partidas; 38 partidas
c) 600 partidas
d) Resposta esperada: dos $n \cdot n=n^2$ jogos, que representam todos contra todos, subtraímos *n*, que corresponderia aos jogos de "cada equipe contra ela mesma".

8. a) $A(x)=4x^2+20x$
b) $A(x)=10x^2+8x-2$

9. a

10. a) 5 diagonais; 170 diagonais
b) 12 lados; 17 lados
c) Não, pois, para o polígono existir o número *n* de lados deve ser inteiro e maior que 2.

11. *B*, *C*, *E* e *F*

12. a) Resposta esperada: todos os resultados são iguais a 4,9 m/s. Isso ocorre por causa da lei dos corpos em queda, pois a razão corresponde à constante de proporcionalidade.
b) $d(t)=4{,}9 \cdot t^2$
c) 240,1 m
d) 3,5 s
e) Algumas possíveis respostas: temperatura, velocidade do vento, pressão.

13. $p=-5$

14. $(1,-4)$

15. a) $a<0$, $b=0$ e $c>0$
b) $a>0$, $b<0$ e $c>0$

16. $g(x)=2x^2+2$; $h(x)=-x^2+4x-3$

17. a)
- R\$ 135,00; R\$ 135,00
- R\$ 160,00; R\$ 160,00
- R\$ 175,00; R\$ 175,00

b) Resposta esperada: os valores do custo de produção são iguais para valores simétricos em relação a 20 unidades produzidas, pois o eixo de simetria intersecta a parábola no ponto de coordenadas $(20,180)$.
c) Não, pois não existe valor de *n* tal que $C(n)=200$.

18. e

19. a) $t(h)=\frac{32}{5}h^2-112h+500$; $D(t)=\{h \in \mathbb{R} \mid 0 \le h \le 7{,}5\}$

20. a) $x_1=2$ e $x_2=5$
b) $x_1=x_2=3$
c) não existem zeros reais
d) $x_1=-1$ e $x_2=1$
e) $x_1=0$ e $x_2=-12$
f) não existem zeros reais
g) $x_1=\frac{2}{3}$ e $x_2=-1$
h) $x_1=x_2=4$

21. $k=-1$

22. a) Como o gráfico de *f* intersecta o eixo *x* na abscissa 0 e em uma abscissa positiva, temos que a soma dos zeros é positiva, e o produto, nulo.
b) Positivo, pois os zeros da função são reais e distintos.

23. b; A função possui dois zeros distintos, pois $\Delta>0$. Como $S=0$, os zeros da função são números opostos e, sabendo que $a>0$, temos que a concavidade da parábola é voltada para cima.

24. $g(x)=\frac{1}{3}x^2+\frac{5}{3}x-2$

25. a) $S=\{-2,1,8\}$ c) $S=\{-1,1\}$
b) $S=\{-8,0,2,4\}$ d) $S=\{-5\}$

26. 60 m **27.** c

28. a) 1,71 m b) 6,75 m c) 57 m

29. a) $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
b) 1,618
c) O número ϕ é irracional.

30. a) $V(1,2)$ d) $V\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$
b) $V(0,4)$ e) $V\left(5,-\frac{10}{3}\right)$
c) $V(3,-11)$ f) $V\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{4}\right)$

31. a

32. $V\left(-1,-\frac{9}{2}\right)$

33. a) $V(1,0)$ c) $V\left(\frac{1}{2},0\right)$
b) $V(-3,0)$ d) $V(-\sqrt{5},0)$

Uma possível resposta: a abscissa sempre será $-p$, e a ordenada, 0.

35. 0

36. d

37. $f(x)=-2x^2+4x+6$

38. a) 5 m e 15 m b) 5,8 m

39. e

40. a) aproximadamente 133 m
b) 503 m

41. a) $\text{Im}(f)=[0,+\infty[$ ou $\text{Im}(f)=\{y \in \mathbb{R} \mid y \ge 0\}$
b) $\text{Im}(f)=\left]-\infty,\frac{1}{14}\right]$ ou $\text{Im}(f)=\left\{y \in \mathbb{R} \mid y \le \frac{1}{14}\right\}$
c) $\text{Im}(f)=[-10,+\infty[$ ou $\text{Im}(f)=\{y \in \mathbb{R} \mid y \ge -10\}$
d) $\text{Im}(f)=]-\infty,1]$ ou $\text{Im}(f)=\{y \in \mathbb{R} \mid y \le 1\}$
e) $\text{Im}(f)=[9,+\infty[$ ou $\text{Im}(f)=\{y \in \mathbb{R} \mid y \ge 9\}$

Resposta esperada: para $a>0$, $\text{Im}(f)=[c,+\infty[$ ou $\text{Im}(f)=\{y \in \mathbb{R} \mid y \ge c\}$; para $a<0$, $\text{Im}(f)=]-\infty,c]$ ou $\text{Im}(f)=\{y \in \mathbb{R} \mid y \le c\}$.

42. a) $y=x^2+4x$ b) $V(-2,-4)$ c) -4

43. a) $p>4$
b) $p=-7$ ou $p=7$
c) $p=-3$

44. 50 peças; R\$ 10,00

45. Os lados devem ter 20 m; 400 m²

46. a) $L(x)=-x^2+150x-1\,200$
b) prejuízo; R\$ 1 200,00
c) 75 itens
d) R\$ 4 425,00

47. d

48. $\ell=15$ m e $c=30$ m

49. a) Fernanda; 20 m
b) Carol; 2 m

50. b

51. $\frac{9}{8}$ m² ou 1,125 m²

52. a) 14 m
b) aproximadamente 19,5 m

53. b

54. a) 8 m b) 2 m

55. a) 30 km/h
b) 0,25 L
c) 40 km
d)
- 39,22 km
- 33,9 km
- 39,22 km
- 26,67 km

56. R\$ 45,00; R\$ 4 050,00

57. c

58. 2,56 m

59. a) $f(x)=0$ para $x=2$ ou $x=4$
$f(x)>0$ para $x<2$ ou $x>4$
$f(x)<0$ para $2<x<4$

b) $f(x)=0$ para $x=-\frac{1}{2}$ ou $x=5$
$f(x)>0$ para $-\frac{1}{2}<x<5$
$f(x)<0$ para $x<-\frac{1}{2}$ ou $x>5$

c) $f(x)=0$ para $x=6$
$f(x)>0$ para $x\neq 6$
$\nexists x\in\mathbb{R}$ tal que $f(x)<0$

d) $f(x)=0$ para $x=-3$ ou $x=3$
$f(x)>0$ para $-3<x<3$
$f(x)<0$ para $x<-3$ ou $x>3$

e) $\nexists x\in\mathbb{R}$ tal que $f(x)=0$
$f(x)>0$ para todo $x\in\mathbb{R}$
$\nexists x\in\mathbb{R}$ tal que $f(x)<0$

f) $f(x)=0$ para $x=0$ ou $x=4$
$f(x)>0$ para $0<x<4$
$f(x)<0$ para $x<0$ ou $x>4$

60. $f(x)=2x^2+6x-20$

61. $k<-3$

62. $-3\leq x\leq 4$ **63.** $x\leq 0$ ou $x\geq 1$

64. A partir de 41 peças.

65. c

66. a) 25,11 °C; 23,36 °C
b) Entre as 7h12min e 18 h.
c) 12h36min; 26,05 °C

67. a) $S=\{x\in\mathbb{R}\mid -5<x<-1\}$
b) $S=\{x\in\mathbb{R}\mid x\leq 6 \text{ ou } x\geq 8\}$
c) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x<-1 \text{ ou } x>\frac{1}{2}\right\}$
d) $S=\mathbb{R}$
e) $S=\{x\in\mathbb{R}\mid -6\leq x\leq 9\}$
f) $S=\mathbb{R}$

68. 0 **69.** $S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x\leq -4 \text{ ou } x\geq -\frac{5}{3}\right\}$

70. 6 soluções **71.** −4, −3, −2 e −1

72. $D(h)=\{x\in\mathbb{R}\mid -2\leq x\leq 5\}$

73. $p>4$ **74.** e

capítulo 5 Função exponencial

1. a) 169 e) −216 i) 10,89
b) 128 f) −216 j) $\frac{1}{49}$
c) 1 g) $\frac{1}{81}$ k) $\frac{8}{125}$
d) 7 h) $\frac{512}{125}$ l) $\frac{1}{81}$

3. a) 3^{12} c) 2^{-1}
b) 5^9 d) x^{21}

4. a; c

5. a) 10^{-6} c) 10^{-5} e) 10^4
b) 10^{-2} d) 10^{-1} f) 10^9

6.

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}<-2^2<(-3)^1<-3^0<(-2)^{-3}<\left(\frac{2}{3}\right)^2<\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}<\left(\frac{3}{2}\right)^2<2^3$$

7. c **8.** $p=-4$ ou $p=4$

9. a) 4 b) 6 c) 0

10. a) 8 cm; 64 cm² c) • 100 cm²
b) $(2n)^2$ • 256 cm²
• 400 cm²
d) não; Uma possível resposta: pois a área de um quadrado da sequência deve ser dada por um múltiplo de 4, visto que $(2n)^2=4n^2$.

11. Algumas possíveis respostas:
$3^2+4^2=5^2$, $6^2+8^2=10^2$ e $12^2+5^2=13^2$

12. a) $6^{\frac{9}{2}}$ c) $(-8)^{\frac{4}{7}}$ e) $7^{\frac{2}{5}}$
b) $(-13)^{\frac{1}{5}}$ d) $9^{\frac{1}{3}}$ f) $\left(\frac{10}{3}\right)^{\frac{24}{5}}$

13. a

14. a) $3^{\frac{9}{2}}$ dm³ b) 10^2 dm³

15. $\frac{1}{64}$

16. a) 5^5 c) 5^{-3} e) 5^2
b) $5^{\frac{3}{2}}$ d) $5^{-\frac{1}{5}}$ f) $5^{-\frac{2}{3}}$

17. b; d

18. a) 48 828 125
b) 2 985 984
c) aproximadamente 6 818,967027
d) aproximadamente 907,4926997
e) 2
f) aproximadamente 14,69693846

19. a) $-\frac{47}{6}$ b) 5 c) $\frac{127}{8}$ d) 59

20. d

21. a) Resposta esperada: Júpiter
b) Júpiter: $7{,}78\cdot 10^8$ km; Marte: $2{,}28\cdot 10^8$ km; Mercúrio: $5{,}8\cdot 10^7$ km; Netuno: $4{,}5\cdot 10^9$ km; Saturno: $1{,}4\cdot 10^9$ km; Terra: $1{,}5\cdot 10^8$ km; Urano: $2{,}9\cdot 10^9$ km; Vênus: $1{,}08\cdot 10^8$ km
d) Mercúrio; Netuno

22. a) $2{,}99\cdot 10^8$ m/s c) $6{,}5\cdot 10^{-3}$ cm
b) $1{,}6\cdot 10^5$ kg d) $3{,}99\cdot 10^{13}$ km

23. a) 952 c) 4,57 e) 15 000
b) 34 000 d) 0,0168 f) 0,0002

24. a) China; Indonésia
b) aproximadamente 25%
c) $3{,}4386\cdot 10^9$

25. d **26.** b **27.** b

28. a; d; f

29. a) 1 c) $\frac{1}{81}$ e) $\frac{1}{4}$ g) 64
b) 3 d) $\sqrt[3]{3}$ f) $\frac{1}{16}$ h) $\frac{1}{2}$

30. R$ 465 850,00

31. aproximadamente 154,85 °C; 276,15 °C

32. 6,25%

33. a) $M=1\,500(1{,}06)^n$
b) R$ 1 893,72; R$ 2 127,78

34. c

35. a) 32 grãos de trigo; 512 grãos de trigo
b) $f(x)=2^{x-1}$
c) $D(f)=\{x\in\mathbb{N}^*\mid 1\leq x\leq 64\}$
d) 2^{63}

36. a) • 8 células-filhas
• 16 células-filhas
• 128 células-filhas
b) $y=2^x$

37. crescentes: **a**, **c**;
decrescentes: **b**, **d**

38. c **39.** a) $f\circ g(x)=3^{x-2}$; crescente

40. $k>5$

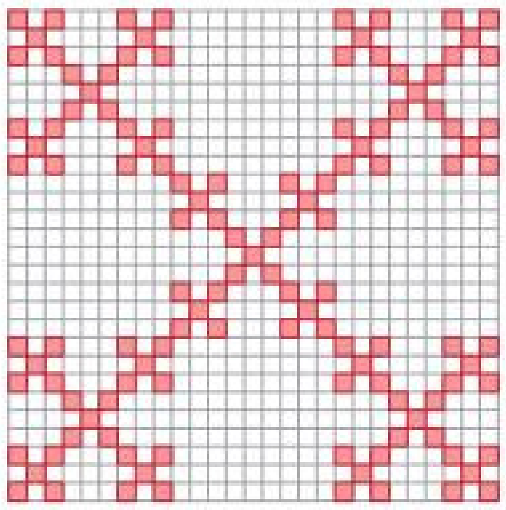
41. a) 4 840 refeições; 7 086 refeições

43. d

44. a) • 1,5 g • 0,375 g
• 0,75 g • 0,1875 g
b) II
c) Não, porque a meia-vida do carbono-14 é relativamente curta, cerca de 5 730 anos. Para essa afirmação, é necessário recorrer a outro elemento radioativo de meia-vida mais longa.
d) 17 190 anos
e) $f(t)=m\cdot 2^{\left(-\frac{t}{5\,730}\right)}$
f) Uma possível resposta: determinando a idade de um fóssil é possível estudar condições próprias da época em que o ser era vivo, como o clima e o meio ambiente, conhecimentos que podem ser utilizados em situações atuais.

45. a) $S=\{2\}$ d) $S=\{8\}$
b) $S=\left\{-\frac{2}{3}\right\}$ e) $S=\left\{-\frac{7}{2}\right\}$
c) $S=\{6\}$ f) $S=\{5\}$

46. a)



Acervo da editora

b) $y=5^{x-1}$
c) • nível 6 • nível 8

47. a) $f(t)=2\,300\cdot 2^{\frac{t}{2}}$
b) 1 177 600 transistores; 6 821 387 842 transistores
c) Resposta esperada: a quantidade de transistores do microprocessador lançado em 1989 aproxima-se da estimada pela Lei de Moore. Já o microprocessador de 2014 apresenta uma quantidade muito inferior à estimada pela Lei de Moore.

48. 8

49. d

50. a) crescente: *g*; decrescente: *f*
b) $x=\frac{1}{3}$

51. d

52. a) $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$ d) $S=\{3\}$
b) $S=\{5\}$ e) $S=\{0, 1\}$
c) $S=\{4\}$ f) $S=\{1\}$

53. maio **54.** $x=1$

55. a) $S=\left\{x\in\mathbb{R} \mid x\geq\frac{1}{3}\right\}$
b) $S=\{x\in\mathbb{R} \mid x>4\}$
c) $S=\left\{x\in\mathbb{R} \mid x\leq\frac{3}{2}\right\}$
d) $S=\{x\in\mathbb{R} \mid x<2\}$
e) $S=\{x\in\mathbb{R} \mid x\geq-1\}$
f) $S=\{x\in\mathbb{R} \mid x>1\}$

56. b **57.** $x\leq5$

58.
- $D(f)=\{x\in\mathbb{R} \mid x\geq2\}$
- $D(g)=\{x\in\mathbb{R} \mid x\geq2\}$
- $D(h)=\{x\in\mathbb{R} \mid x\geq4\}$

59. $x>-3$ **60.** d **61.** a

62. $x>1$ **63.** b

capítulo 6 Logaritmo e função logarítmica

1. a) $y=64$ c) $y=9$ e) $y=32$
b) $y=6$ d) $y=5$ f) $y=4$

2. a) $\log_9 81=2$ d) $\log_6 \sqrt{6}=\frac{1}{2}$
b) $\log_7 1=0$
c) $\log_{\frac{3}{2}} \frac{8}{27}=-3$ e) $\log 0{,}01=-2$

3. a) 0 c) 1 e) −1
b) 4 d) 19

4. a) $x=0{,}8$ d) $x=21$
b) $x=8$ e) $x=0{,}1$
c) $x=1{,}1$ f) $x=25\,118{,}9$

5. a) $-\frac{9}{2}$ b) 9 c) 252 d) 4

6. 81

7. a) 1,079 c) 1,477
b) 1,255 d) 1,732

8. 3h49min

9. a) $x>9$ d) $\frac{1}{2}<x<2$
b) $x>-4$ e $x\neq-\frac{7}{2}$ e) $x>10$
c) $-0{,}3<x<1$ e $x\neq0{,}7$

10. $y=17$

11. Resposta esperada: o número 10, que é a base do logaritmo, elevado ao número real que obtemos é igual ao número inserido inicialmente.

12. $n=10$

13. a) $\log b+\frac{1}{2}\log c$
b) $2\log a+\log b-\log c$
c) $\frac{1}{5}\log_2 a-\log_2 b-2\log_2 c$

14. a) $\log_4 45$ c) $\log 7$
b) $\log_8 4$ d) $\log_3 3{,}2$

15. a) 1,2 c) 1,7 e) 0,04
b) 1,5 d) 0,1 f) −0,25

16. $-\frac{574}{3}$ **17.** $-\frac{29}{2}$

18. a) $S=\{-1{,}535\}$ c) $S=\{13{,}86\}$
b) $S=\{1{,}465\}$

19. $x=b\sqrt{a}$

20. a) $S=\{1\}$ c) $S=\{2\}$
b) $S=\{5\}$ d) $S=\{1{,}8\}$

21. a) 10% b) 13 anos

22. 9 meses e 15 dias

23. $\log M=\log a+b\log D$ ou $\ln M=\ln a+b\ln D$

24. a) $10^{-6{,}4}$ mol/L
b)
- leite de magnésia: substância básica
- suco de limão: substância ácida
- água pura: substância neutra
- leite: substância ácida

25. a) 5 c) $\frac{11}{8}$ e) $\frac{1}{9}$
b) 2 d) $\frac{18}{11}$ f) $\frac{98}{3}$

26. a) $\frac{\log 8}{\log 12}$ c) $\frac{\log\left(\frac{3}{7}\right)}{\log 2}$
b) $\frac{\log 4}{\log 9}$ d) $\frac{\log 2}{\log 17}$

27. a) 1 b) $\frac{6x}{y}$, com $y\neq0$

28. b

29. 1h54min

30. 9º, 10º e o 11º quadrados

31. 4

32. a) 0,6 c) 0,8 e) 11,7
b) 1,4 d) 1,8 f) 0,4

33. a) 6,578 c) 4,537 e) 2,264
b) −5,929 d) −2,231

34. 24 algarismos

35. a) 4 c) $\frac{2}{3}$ e) 32
b) 0 d) 4 f) $\frac{1}{27}$

36. a) $D(f)=\{x\in\mathbb{R} \mid x>-3\}$; $Im(f)=\mathbb{R}$
b) $D(f)=\{x\in\mathbb{R} \mid x<6\}$; $Im(f)=\mathbb{R}$
c) $D(f)=\mathbb{R}_+^*$; $Im(f)=\mathbb{R}$

37. a) $D(g)=\{x\in\mathbb{R} \mid x>4 \text{ e } x\neq5\}$
b) $D(g)=\{x\in\mathbb{R} \mid -1<x<0\}$
c) $D(g)=\left\{x\in\mathbb{R} \mid x>\frac{1}{2} \text{ e } x\neq1 \text{ e } x\neq3\right\}$

38. 10 dB

40. crescente: **a**, **b**, **e**; decrescente: **c**, **d**, **f**

42. O valor de *a* é maior que 1, pois a função é crescente.

43. a) $S=\{11\}$ c) $S=\varnothing$ e) $S=\{4\}$
b) $S=\{16\}$ d) $S=\{1\}$ f) $S=\{30\}$

44. a) $x=2{,}465$ c) $x=-1{,}158$
b) $x=1{,}354$ d) $x=-2{,}585$

45. $x=3$

46. a) $S=\{1\}$ c) $S=\left\{-\frac{3}{4}, 7\right\}$
b) $S=\{-7, 2\}$ d) $S=\{-4, 4\}$

47. a) $x=2$ e $y=1$
b) $x=\sqrt{10}$ e $y=\sqrt[3]{10}$

48. a) $f(t)=50(1{,}35)^t$ b) 13 anos

49. 8 meses

50. a) 3,125% b) 110 anos

51. a) epicentro
b)
- Nepal: $7\cdot10^{8{,}7}$ kWh;
  Montes Claros: $7\cdot10^{1{,}5}$ kWh
- 8 graus na escala Richter. Com isso, as construções sofrem danos severos e podem ocorrer grandes rachaduras no solo.

c) II

52. a) $S=\{x\in\mathbb{R} \mid 17<x<26\}$
b) $S=\{x\in\mathbb{R} \mid x\geq14\}$
c) $S=\{x\in\mathbb{R} \mid -2\leq x<2\}$
d) $S=\{x\in\mathbb{R} \mid 5<x<10\}$

53. 3 números

54. $9\leq x<\frac{19}{2}$

55. a) $D(f)=\{x\in\mathbb{R} \mid 3<x<4\}$
b) $D(f)=\{x\in\mathbb{R} \mid x\geq0\}$
c) $D(f)=\{x\in\mathbb{R} \mid -2<x<-1\}$

56. 10 **57.** 7 anos

58. a) $S=\left\{x\in\mathbb{R} \mid -\frac{7}{3}<x\leq1\right\}$
b) $S=\{x\in\mathbb{R} \mid 0<x<1\}$

59. a) aproximadamente 78; Sim, pois a unidade Haugh é superior a 72.
b) 5,48 mm

60. 16 camadas

61. a) 0,0625 g
b) 80 dias

capítulo 7 Função modular

1. a) 13 c) 6 e) 8
b) 15 d) 24

2. a) 1,9 c) 2
b) 13 d) 8,3 e) 10,2

3. a) A: −6; B: 0; C: 6,5
b) 19,5; 6,5

4. 260 °C

5. a) 10 °C
b) dias 7, 8, 9, 10 e 12
c) dias 9 e 10; 13 °C

6. a) x^2, com $x \in \mathbb{Z}$.
b) $\begin{cases} (-5x+10)^3, \text{ se } -5 \le x \le 2 \\ (5x-10)^3, \text{ se } 2 < x \le 5 \end{cases}$
c) $\begin{cases} x+3, \text{ se } -\frac{1}{2} \le x \le 2 \\ -3x+1, \text{ se } x < -\frac{1}{2} \end{cases}$
d) $\begin{cases} -2, \text{ se } 1 \le x \le 3 \\ -2x, \text{ se } -1 \le x < 1 \\ 2, \text{ se } -3 \le x < -1 \end{cases}$
e) $\begin{cases} x^5, \text{ se } x \ge 0 \\ -x^5, \text{ se } x < 0 \end{cases}$

7. $x \ge 3$

8. a) supermercados 2, 8, 10, 11, 19 e 20
b) supermercado 11; 11,5 °C
c) 13,7 °C

9. $|x-150|$; $|320-x|$

10. a) −2 b) 4 c) −4 d) 6 e) 20

11. d

12. a) $g(x)=|x+3|-1$

14. a) 68 produtos
b) no dia 21; 5 produtos
c) 13 dias

15. a) $y=1{,}5|x-2{,}4|$
c) Sim, pois a caçapa estava localizada em um ponto pertencente à função que descreve a trajetória da bola.

16. a) 12 h; 2 h
b) Ottawa e Londres.
c) Resposta esperada: $f(x)=|-3-x|$ ou $f(x)=|x+3|$.

17. a) $S=\{-17, 23\}$
b) $S=\{3\}$
c) $S=\left\{\frac{13}{5}, 3\right\}$
d) $S=\{-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\}$
e) $S=\{2, 1+\sqrt{5}\}$
f) $S=\left\{-3, -\sqrt{\frac{11}{3}}, \sqrt{\frac{11}{3}}, 3\right\}$

18. $[0, +\infty[$

19. a) 54 km b) 13 h

20. a) ônibus: $s(t)=75t$;
carro: $s(t)=100(t-0{,}25)$
b) 45 km c) 48 min ou 1h12min

21. $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$

22. $m=8$

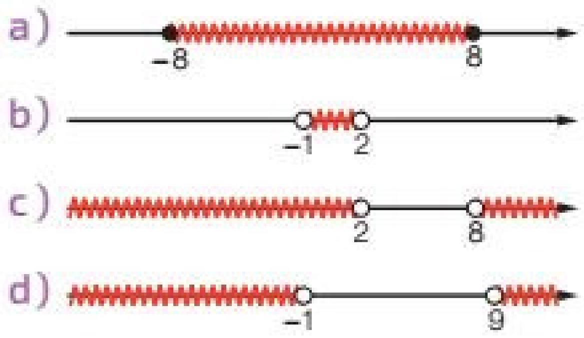
23. $b=-4$; $-\sqrt{8}$, 0 e $\sqrt{8}$

24. a) 80 °C; $t=12$ b) $t=8$

25. a) $S=\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2}{3} \le x \le \frac{14}{3}\right\}$
b) $S=\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \le x \le 3\}$
c) $S=\{x \in \mathbb{R} \mid -20 \le x \le 20\}$
d) $S=\left\{x \in \mathbb{R} \mid -5 \le x \le -\frac{1}{2}\right\}$

26. a) $A \cap B=\{x \in \mathbb{R} \mid -7 \le x < -3 \text{ ou } 2 < x \le 13\}$;
$A \cup B=\mathbb{R}$
b) $A=\{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } x > 2\}$;
$B=\{x \in \mathbb{R} \mid -7 \le x \le 13\}$

27.



Ilustrações: Acervo da editora

28. a) $D(f)=\{x \in \mathbb{R} \mid x \le -2 \text{ ou } x \ge 3\}$
b) $D(m)=\mathbb{R}$

29. $S=\left\{x \in \mathbb{R} \mid x=-1 \text{ ou } -\frac{1}{3} \le x \le \frac{7}{3}\right\}$

30. máximo: 8 000 L; mínimo: 2 000 L

31. a) trem de carga: $s_c(t)=60t$; trem de passageiros: $s_p(t)=80\left(t-\frac{1}{3}\right)$
b) 1h20min c) 3h20min

32. $|V-9\,000| < 450$; entre 8 551 e 9 449 pares

33. b) quarta-feira
c) 3 dias; quarta-feira, quinta-feira e sexta-feira

34. a) 1 750 visitantes
b) $k=350$;
$Q(t)=-|350t-4\,900|+1\,750$
c) 1 050 visitantes

35. a) dezembro; R$ 2,20
b) abril, maio, junho, julho e agosto

36. a) Atração, pois cargas elétricas com sinais iguais se repelem e cargas elétricas com sinais diferentes se atraem.
b) 1,575 N
c) $4 \cdot 10^{-6}$ C ou $-4 \cdot 10^{-6}$ C

capítulo 8 As progressões

1. Acre, Amapá, Amazonas, Pará, Rondônia, Roraima, Tocantins

2. a) 25, 31, 37, 43
b) −10; −7,5; −5; −2,5
c) $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$
d) $\frac{5}{14}$, $\frac{6}{17}$, $\frac{7}{20}$, $\frac{8}{23}$

3. 1 980 desenhos

5. a) (7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, ...)
b) (−1, 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, ...)
c) $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \frac{1}{256}, \frac{1}{512}, \ldots\right)$
d) (3, 7, 12, 18, 25, 33, 42, 52, 63, 75, ...)

6. a) 64 esferas c) 10 camadas
b) 245 esferas d) 385 esferas

7. a) (1, −3, −7, −11, −15, ...)
b) (1, 1, 2, 3, 5, ...)

8. b

9. 40 palitos; 144 palitos

10. a) $a_n=n+1$ b) $a_n=5n-7$

11. a) $f(n)=90 \cdot (n-1)$ c) 5ª posição
b) II

12. d

14. a) 7 c) 4 e) $\frac{1}{4}$
b) −3 d) −8 f) −0,9

15. a) (4, 13, 22, 31, 40, 49)
b) (23, 18, 13, 8, 3, −2)
c) (9, 11, 13, 15, 17, 19)
d) $\left(-\frac{9}{2}, -2, \frac{1}{2}, 3, \frac{11}{2}, 8\right)$
e) (20, 14, 8, 2, −4, −10)

16. c

17. a) 3; crescente
b) 0; constante
c) −4; decrescente
d) −0,1; decrescente

18. 2014: 58 000; 2015: 51 000; 2016: 44 000

19. a) $-3x+2$ b) $0{,}\overline{3}$ ou $\frac{1}{3}$

20. $r=\pm 4$; $(-3, 1, 5)$ ou $(5, 1, -3)$

21. a) 24 b) −18

22. $x=-2$

23. a) $x=\frac{4}{3}$; $y=0$ b) $x=b^2$; $y=-ab$

24. a; d

25. A = 4; B = 7; C = 10; D = 11; E = 17; F = 20; G = 21; H = 24; I = 27; J = 25; K = 28; L = 31

26. 1 **27.** 23

28. h = 3 m, ℓ = 5 m; c = 7 m

29. a) 97 c) 3 e) −2
b) −11 d) 30

30. 95, 87, 79

31. a) 60 números b) 420 números

32. d

33. a) 15 mudas b) 4 vezes

34. 698 **35.** 11 **36.** a_{14}

37. 1 499 números

38. a) 700 mL c) 375 min
b) 65 min

39. a) $a_n = n - 1$; crescente
b) $a_n = \frac{5}{2} + (n-1) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$; decrescente

40. a

41. c

42. 15 cm^2

43. $a_n = 1\,400 + (n-1) \cdot (-25)$; R$ 1 300,00

44. 32 termos

45. a) vermelha e azul; azul e branca
b) 514 vezes
c) 13h59min58s; 13h59min51s; 13h59min44s
d) Sim, às 13h59min51s.
e) Sim, às 13h59min44s.

46. a) 134 termos
c) 5 termos
b) 27 termos

47. 180 km

48. 4

49. 0

50. a) $\frac{1}{3}$
b) 13 termos
c) 5 termos: 1, 2, 3, 4 e 5

51. $(-12, -6, 0, 6, 12, 18, 24, 30)$; 6

52. a) 2 veículos; razão
b) $(3, 5, 7, 9, 11)$
c) $(21, 37, 53, 69, 85)$

53. $a = -2$

54. $f(x) = -3x + 4$

55. f; h

56. 4 ou −4

57. Máximo, pois $a = -1 < 0$.

59. 500 500

60. a) 495
b) −3 168

61. a) 885
b) 1 089
c) 77

62. 29

63. 21

64. a

65. a) $x = 24$
b) $x = \frac{1}{3}$

66. d

67. $a^n \cdot b^{\frac{n(n-1)}{2}}$

68. a) não; não; Ambas não possuem razões constantes.
b) $n(n+1)$; n^2
c) 420; 400; Representam a soma dos 20 primeiros números pares e dos 20 primeiros números ímpares positivos, respectivamente.

69. −100

70. 17

71. a) Para compartilhar as paredes entre os alvéolos e obter a maior capacidade de armazenamento.
b) • 6 • 12 • 18 • 24
c) Forma uma PA cuja fórmula do termo geral é $a_n = 6n$.
d) 217 alvéolos

72. a) $q = 2$; crescente
b) $q = 1$; constante
c) $q = \frac{2}{3}$; decrescente
d) $q = -\frac{2}{3}$; alternante
e) $q = \frac{1}{2}$; crescente

73. a) sim; $q = -1$
c) sim; $q = 4$
b) não

74. $(1, 3, 9, 27, 81, 243, 729)$

75. $b = -1$, PG constante; $b = -2$, PG decrescente

76.
- $\left(r, \frac{r}{2}, \frac{r}{4}, \frac{r}{8}, \frac{r}{16}\right)$
- $\left(2\pi r, \pi r, \frac{\pi r}{2}, \frac{\pi r}{4}, \frac{\pi r}{8}\right)$
- $\left(\pi r^2, \frac{\pi r^2}{4}, \frac{\pi r^2}{16}, \frac{\pi r^2}{64}, \frac{\pi r^2}{256}\right)$

sim; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$

77. $(2, -6, 18)$ e $q = -3$ ou $(18, -6, 2)$ e $q = -\frac{1}{3}$

79. a) aproximadamente 206 147 589 habitantes
b) 2019

80. a) $a_n = 2 \cdot 4^{n-1}$; 2 048
b) $a_n = -48 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$; −1,5
c) $a_n = -7 \cdot (-2)^{n-1}$; 224
d) $a_n = \frac{64}{25} \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^{n-1}$; $\frac{125}{512}$

81. a_7

82. $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2

83. 8

84. a) PG
c) 25 600 mm^3
b) $v_{10} = 50\ mm^3$

85. a) $(32, 48, 72, 108, 162, 243)$
b) A quantidade de medicamento ingerida por Júlio na quarta semana de tratamento.
c) $a_n = 32 \cdot (1{,}5)^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$ e $n \leq 6$

86. a)
- $\left(x^2, \frac{3x^2}{4}, \frac{9x^2}{16}, \frac{27x^2}{64}, \frac{81x^2}{256}\right)$
- $\left(0, \frac{x^2}{4}, \frac{7x^2}{16}, \frac{37x^2}{64}, \frac{175x^2}{256}\right)$

b) Resposta esperada: aquela que representa os valores das áreas em verde, pois a partir do 2º termo o quociente entre um termo e seu antecessor é uma constante. No caso da outra sequência, esse quociente não é constante.

c)
- $\left(\frac{3}{4}\right)^9 \cdot x^2$
- $\left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^9\right] \cdot x^2$

87. a) 30 ou −30
b) 4
c) −3

88. 12

89. a) 2ª aplicação
b) 2ª aplicação; O montante obtido ao final de 2 anos na 1ª e na 2ª aplicação é, respectivamente, R$ 12 080,00 e R$ 12 194,23.

90. 60 anos

91. $(3, 6, 12, 24, 48, 96)$

92. $\sqrt{2}$

93. a) $(-10, -1, 8, 17, 26)$; PA de razão 9
b) $\left(\frac{3}{16}, \frac{3}{2}, 12, 96, 768\right)$; PG de razão 8

94. a) 2
b) $(x, 2x, 4x, 8x)$
c) $512x$

95. 729

96. $\frac{1}{2}$

97. R$ 317 221,50

98. a) 65 535
b) 340
c) 5 555,5555

99. a) 625 pontos
b) 781 pontos

100. 7

101. $x = -2$; 5

102. 12

103. a) $\frac{781}{256}u^2$
b) $\frac{499}{256}u^2$

104. a) 1,152 m
b) 38,16 m; 40,464 m

105. a) 121 baratas
b) 6 min

106. a)
- $a_1 = 1$
- $q = 2$
- $n = 10$

b) $S_{10} = \frac{1 \cdot (1 - 2^{10})}{1 - 2} = \frac{1 - 2^{10}}{-1} = 2^{10} - 1 =$
$= 2 \cdot 2^9 - 1 = 2^9 + 2^9 - 1$

107. a) 10 perguntas
c) R$ 102 300,00
b) 7 perguntas

108. a) 2
b) $\frac{25}{2}$
c) $\frac{9}{5}$
d) $-\frac{5}{2}$

109. 32

110. $\frac{1}{2}$

111. a) $\frac{14}{9}$
b) $\frac{4}{33}$
c) $\frac{13}{225}$
d) $\frac{1\,019}{11}$

112. a) $\frac{5}{9}u^2$; $\frac{125}{729}u^2$
b) $\frac{9}{4}u^2$

113. $\frac{2}{3}$ do segmento AB, partindo de *A*.

114. a) • 10 m • 1 m • 0,1 m
b) Sim, pois cada termo, a partir do 2º, é igual ao anterior multiplicado pela razão $\frac{1}{10}$.
c) sim; $\frac{100}{9}$

116. opção 2; aproximadamente R$ 50 533,25

117. PA: $(0, 2, 4, 6)$; PG: $(1, 2, 4, 8)$

118. $x = 3$; $y = 12$

119. $\frac{8\,021}{512}$

120. c

121. d

122. 273 sucções

123. R$ 127 954,00

124. a) 118 048 folhas
c) 1 768,69 cm
b) 1 180,48 cm

125. 12 min

126. 1,152 kg

128. a)
- $(2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20)$
- $(2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1\,024)$

b) PG
d) II

129. c

capítulo 9 Trigonometria no triângulo

1. c; e; f; h

2. a) $x=3$ b) $x=6$

3. 2 050 m **4.** 45 cm

5. a) 300 m b) 240 m

6. $x=373$ K; $y=140$ °F

7. a) Utilizando o método descrito na primeira versão, a medição teria que ocorrer no momento em que a sombra do bastão fosse igual ao comprimento do mesmo, portanto em um momento específico. Já na segunda versão, a medição poderia ser realizada em diferentes momentos do dia, pois, para estabelecer a proporção entre as medidas, a medida da sombra do bastão não precisaria ser igual ao seu comprimento.

b) Sim, pois a utilização da proporção permite que a medição seja realizada em diferentes momentos do dia, inclusive no descrito na primeira versão.

c) 4 m

d) 150 m

8. 50 m

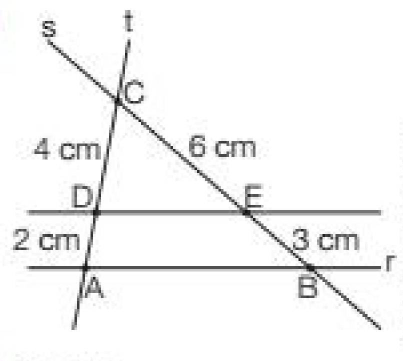
9. a) não; sim

b) sim; Uma possível resposta: $a=d=5$, $b=3$ e $e=4$.

c) Uma possível resposta: $\frac{a}{a+b+c}=\frac{d}{d+e+f}$, $\frac{a}{b+c}=\frac{d}{e+f}$ e $\frac{a+b+c}{b+c}=\frac{d+e+f}{e+f}$.

10. Paralela, pois a razão entre as medidas dos segmentos correspondentes é a mesma, ou seja, em um ΔABC, se *D* e *E* são os pontos médios dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, respectivamente, $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}=1$.

11. a)



Acervo da editora

b) 6 cm

c) Resposta esperada: em um ΔABC qualquer, traçamos duas retas, *r* e *s*, uma contendo $\overline{AB}$, e outra contendo $\overline{AC}$, respectivamente. Em *r*, marcamos um ponto *D* tal que *B* esteja entre *A* e *D*. Em seguida, medimos as distâncias AB, BD e AC, e calculamos $d=AC\cdot\frac{BD}{AB}$. Depois, marcamos em *s* um ponto *E*, tal que *C* esteja entre *A* e *E*, e, além disso, $CE=d$. Por fim, traçamos a reta que passa por *D* e *E*, obtendo $\overleftrightarrow{BC} // \overleftrightarrow{DE}$.

12. a) $x = 5$ b) $x=12$ c) $x = 6$

13. $h=\frac{\ell\sqrt{3}}{2}$; $4\sqrt{3}$ cm

14. aproximadamente 56 m

15. a) ΔDEF e ΔGHI

b) ΔDEF: $\sqrt{149}$ cm; ΔGHI: $8\sqrt{5}$ cm

16. 24 cm **17.** 35 cm

18. a) 8 cúbitos b) 5 e 12 cúbitos

19. a **20.** 28 tubos

21. a)
- 25,3" por 14,2"
- 27,9" por 15,7"
- 36,6" por 20,6"

b) 22"; convencional

22. $\text{sen}\beta=\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\cos\beta=\frac{2}{3}$ e $\text{tg}\beta=\frac{\sqrt{5}}{2}$

23. a) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ c) $\frac{1}{3}$ e) $\frac{\sqrt{10}}{10}$

b) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ d) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ f) 3

24. $\text{tg}\alpha=\frac{8}{9}$

26. $\cos\widehat{C}=\frac{7}{8}$; $\cos\widehat{E}=\frac{4}{5}$; $\cos\widehat{G}=\frac{4\sqrt{41}}{41}$

27. a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ c) 10 m d) 5 m

28. $\text{sen}\beta=\frac{3\sqrt{13}}{13}$

29. a) 13 cm c) $11\sqrt{2}$ cm

b) $16\sqrt{3}$ cm d) $\frac{27}{2}$ cm

30. $10\sqrt{2}$ cm

31. a) 30° b) 60° c) 45°

32. 7,8 m

33. a) 28,85 m b) 50 m c) 2 613,5 m^2

34. $CE=\sqrt{3}$ cm e $AD=2$ cm

35. 17,3 cm

36. a) 3 b) $\frac{1}{2}$ c) $\sqrt{3}$

37. $\alpha=30°$, $\beta=90°$ e $\gamma=60°$

38. a) $\text{sen}78°=0{,}978$, $\cos78°=0{,}208$ e $\text{tg}78°=4{,}705$

b) $\text{sen}5°=0{,}087$, $\cos5°=0{,}996$ e $\text{tg}5°=0{,}087$

c) $\text{sen}52°=0{,}788$, $\cos52°=0{,}616$ e $\text{tg}52°=1{,}280$

39. a) 12° b) 76° c) 41°

40. 57 m; 1,73 m

41. a) Resposta esperada: para evitar rampas muito íngremes, o que dificultaria o deslocamento sobre elas.

b) Entre 4° e 5°.

42. aproximadamente 7,5 m

43. a) $\alpha\simeq51°$ e $\beta\simeq39°$

b) $\alpha\simeq49°$ e $\beta\simeq41°$

c) $\alpha\simeq60°$ e $\beta\simeq30°$

44. a) 25 cm b) 17 cm c) 13 cm

45. aproximadamente 20 m

46. a) aproximadamente 18°

b) aproximadamente 12°

c) Não, pois o maior ângulo possível para acertar o gol é de aproximadamente 22°, atingido quando a bola é chutada em direção ao canto superior esquerdo ou direito.

47. a) 91 cm^2 b) 29 cm^2 c) 50 cm^2

48. b

49. aproximadamente 32 m

50. aproximadamente 6 000 km

51. a) $\text{sen}95°=0{,}996$ e $\cos95°=-0{,}087$

b) $\text{sen}110°=0{,}940$ e $\cos110°=-0{,}342$

c) $\text{sen}125°=0{,}819$ e $\cos125°=-0{,}574$

d) $\text{sen}168°=0{,}208$ e $\cos168°=-0{,}978$

e) $\text{sen}174°=0{,}105$ e $\cos174°=-0{,}995$

52. a) $x=105$ m e $y=91{,}6$ m

b) $x=112{,}3$ m e $y=120{,}7$ m

c) $x=61$ m e $y=81{,}6$ m

d) $x=87{,}8$ m e $y=128{,}7$ m

53. 50 cm, 34,2 cm e 34,2 cm; $\text{sen}94°=0{,}998$

54. $a=6{,}6$ m e $b=5{,}8$ m

55. aproximadamente 18,7 km

56. $x=10$

57. a) A: 419 m; B: 654 m

b) 28 m/s

c) 23 s

59. a) navio B

b) navio A: 3 h; navio B: 3 h

c) 32 km/h

61. a) 54,3 m c) 61,2 m

b) 61,2 m d) 48,1 m

62. aproximadamente 183,4 cm e 89,2 cm

63. a) $\alpha\simeq53°$ c) $\alpha\simeq142°$

b) $\alpha\simeq51°$ d) $\alpha\simeq121°$

64. $F_r\simeq22$ N **65.** 98,7 m

66. não; 10 cm, $\sqrt{76}$ cm e 6 cm; 10 cm, $\sqrt{76}$ cm e 4 cm

67. 56,8 cm **68.** 495 m

70. aproximadamente 153,1 m

71. a) 1 575 cm^2 c) 1 891,2 cm^2

b) 1 501,1 cm^2 d) 2 762,1 cm^2

72. 18,9 m e 45,8 m

73. $\alpha=120°$

74. aproximadamente 1 072 m; aproximadamente 3 384 m^2

75. $\frac{b}{a}=\sqrt{3}$

Bibliografia consultada

ÁVILA, Geraldo. **Cálculo das funções de uma variável**. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2003. v. 1.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; BORBA, Marcelo de Carvalho (Orgs.). **Educação matemática**: pesquisa em movimento. 4. ed. São Paulo: Cortez, 2012.

BOLDRINI, José Luiz et al. **Álgebra linear**. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1986.

BOLETIM DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. Rio Claro: Unesp.

BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy. **Informática e educação matemática**. 5. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2012. (Tendências em educação matemática).

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. Tradução Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Orientações curriculares para o ensino médio**. Brasília, 2006.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)**. Brasília, [s.d.].

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)**. Brasília, 2000.

BUSSAB, Wilton de O.; MORETTIN, Pedro A. **Estatística básica**. 8. ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

COLEÇÃO do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM. 22 v.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática**: da teoria à prática. 23. ed. Campinas: Papirus, 2012. (Perspectivas em educação matemática).

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM REVISTA. São Paulo: SBEM.

EVES, Howard. **Introdução à história da Matemática**. Tradução Hygino H. Domingues. Campinas: Ed. da Unicamp, 2004.

GARDNER, Howard. **Inteligências múltiplas**: a teoria na prática. Tradução Maria A. V. Veronese. Porto Alegre: Artmed, 1995.

IFRAH, Georges. **História universal dos algarismos**: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo. Tradução Alberto Muñoz e Ana Beatriz Katinsky. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997. 2 v.

MAGALHÃES, Marcos Nascimento et al. **Noções de probabilidade e estatística**. 7. ed. São Paulo: Edusp, 2007. (Coleção Acadêmica).

PAIS, Luiz Carlos. **Ensinar e aprender Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas**: um novo aspecto do método matemático. Tradução e adaptação Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. São Paulo: SBM.

STEWART, James. **Cálculo**. 7. ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2014. v. 1.

TÓPICOS de história da Matemática para uso em sala de aula. São Paulo: Atual. 6 v.

VERAS, Lilia Ladeira. **Matemática financeira**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2007.

Lista de siglas

Enem-MEC ▸ Exame Nacional do Ensino Médio

FGV-SP ▸ Fundação Getúlio Vargas de São Paulo

OBM ▸ Olimpíada Brasileira de Matemática

OBMEP ▸ Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas

Udesc-SC ▸ Universidade do Estado de Santa Catarina

UEL-PR ▸ Universidade Estadual de Londrina

UFF-RJ ▸ Universidade Federal Fluminense

UFG-GO ▸ Universidade Federal de Goiás

UFMG-MG ▸ Universidade Federal de Minas Gerais

UFMS-MS ▸ Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

UFPA-PA ▸ Universidade Federal do Pará

UFV-MG ▸ Universidade Federal de Viçosa

Unifor-CE ▸ Universidade de Fortaleza