Coleção Linguagens e Aplicações

MANUAL DO PROFESSOR

Matemática

Antonio Nicolau
Clarice Fonseca
Heloisa Hessel

9º ano
Ensino Fundamental

Cereja editora

Coleção
Linguagens
e Aplicações

Matemática

MANUAL DO PROFESSOR

Antonio Nicolau Youssef
Licenciado em Física pela Universidade de São Paulo
Professor de Matemática no Ensino Fundamental e no Ensino
Médio da rede privada e pública em São Paulo.

Clarice Gameiro da Fonseca Pachi
Licenciada em Matemática pela Universidade de Taubaté com
aperfeiçoamento em Estatística pelo IME – Universidade de São Paulo.
Professora de Ensino Fundamental e de Ensino Médio, Técnico Profissionalizante e
Curso Superior nas redes públicas e privadas no estado de São Paulo.

Heloísa Maria Hessel
Licenciada e Bacharel em Matemática pela Pontifícia Universidade
Católica de São Paulo. Professora de Ensino Fundamental e de
Ensino Médio na rede privada no estado de São Paulo.

1ª edição
São Paulo, 2015

Cereja editora

9º ano
Ensino Fundamental

Título original: Matemática – Linguagens e Aplicações

Responsabilidade editorial: Ana Mortara
Edição: Antonio Nicolau Youssef
Revisão: Ana Cristina Mendes Perfetti
Iconografia: Elaine Bueno
Capa: A+ Comunicação
Projeto gráfico: Alexandre Romão
Editoração eletrônica: Lauro Takayuki Akamatsu
Alfredo Pereira de Santana
Juliana Cristina Silva
Vivian Trevizan
Ilustrações: Fernanda Youssef
Cinthia Yamasaki
Luyse Costa

Imagem da capa: *Nautilus*, Verchik/Shutterstock

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação – CIP

Y831 Youssef, Antonio Nicolau; Pachi, Clarice Gameiro da Fonseca; Hessel, Heloísa Maria
Linguagens e aplicações: Matemática. Ensino Fundamental – Anos Finais – 9º. Ano – Livro do Aluno / Antonio Nicolau Youssef, Clarice Gameiro da Fonseca Pachi e Heloísa Maria Hessel. – São Paulo: Cereja Editora, 2015. (Coleção Linguagens e Aplicações).
xxx p.: il.

ISBN 978855543000-8 (livro do aluno)
ISBN 978855543001-5 (manual do professor)

1. Matemática. 2. Linguagens da Matemática. 3. Aplicações da Matemática. 4. História da Matemática. 5. Números. 6. Geometria. 7. Álgebra. 8. Tratamento da Informação. 9. Medidas. I. Título. II. Série. III. Matemática: linguagens e aplicações. IV. Números reais. V. Estudo do triângulo. VI. Expressões algébricas. VI. Matemática financeira. VII. Sistemas de equações. VIII. Congruência de triângulos. IX. Inequações de 1º. grau. X. Circunferência e círculo. XI. Sólidos. XII. Gráficos de linha. XIII. Youssef, Antonio Nicolau. XIV. Pachi, Clarice Gameiro da Fonseca. XV. Hessel, Heloísa Maria.
CDU 51 CDD 510

Catalogação elaborada por Ruth Simão Paulino

São Paulo, 1ª edição, 2015

Cereja editora

Endereço: Av. Marques de São Vicente, 1011
Barra Funda – São Paulo – SP
CEP: 01139-003
Telefone: (011) 2157-3687
E-mail: editora@cerejaeditora.com.br
www.cerejaeditora.com.br

Apresentação

Caro aluno,

Ao escrever os livros desta coleção, procurei, em todos os momentos, trazer para você conteúdos interessantes, que mostram as relações existentes entre a Matemática e o mundo que nos cerca, além de sua beleza e riqueza histórica.

O principal objetivo do curso de Matemática apresentado nos quatro livros desta coleção é mostrar a você que aprender Matemática é muito mais que saber resolver uma série de problemas e cálculos complicados. É, sobretudo, aprender a utilizar as interessantes ferramentas que ela nos apresenta para que, juntamente com raciocínio e criatividade, você possa solucionar as mais diversas situações concretas onde ela se aplica no mundo que nos cerca.

É importante que você aprenda e domine os principais conceitos aqui apresentados, uma vez que a Matemática será sempre uma poderosa linguagem de estudo e desenvolvimento, seja qual for a área do conhecimento à qual você pretende se dedicar.

Os conceitos são apresentados de forma objetiva, mantendo, no entanto, o rigor necessário para que sua aprendizagem se processe de forma coerente, garantindo que você perceba suas aplicações e possa utilizá-los nos mais diversos contextos de resolução de problemas em sua vida futura como estudante e na vida adulta como profissional.

Observe atentamente as seções que compõem seu livro e faça um bom uso dele, preservando sua integridade, para que outros alunos também possam utilizá-lo.

Bom estudo!

Conheça seu livro

Os conteúdos da coleção estão organizados em cinco eixos temáticos identificados ao longo dos capítulos pelos seguintes ícones:


Números


Geometria


Álgebra


Tratamento da informação


Medidas

Seções

Os capítulos estão organizados pelas seguintes seções, que têm a finalidade de apresentar as diversas linguagens e aplicações do universo da Matemática:

Conversa Inicial

Momento inicial onde procuramos recuperar o que você já sabe sobre o assunto e quais os objetivos específicos do capítulo.

Curiosidade

Informações curiosas sobre os diversos conceitos que você irá estudar.

Para ler

Textos e informações complementares que ilustram e enriquecem sua aprendizagem.

Na prática

Oficinas e atividades nas quais você e seus amigos observam na prática o que aprenderam.

Quando, quem e onde

Os aspectos mais interessantes sobre a história da Matemática e seus criadores.

Conexão

Ao longo dos capítulos, esta seção apresenta aplicações da Matemática nas mais diversas áreas de atividades, assim como nas diversas disciplinas que são estudadas no Ensino Fundamental.

Atividades

Problemas e exercícios de aplicação dos conceitos desenvolvidos no capítulo.

Desafio

Situações que desafiam você a quebrar a cabeça e usar sua criatividade para resolver problemas.

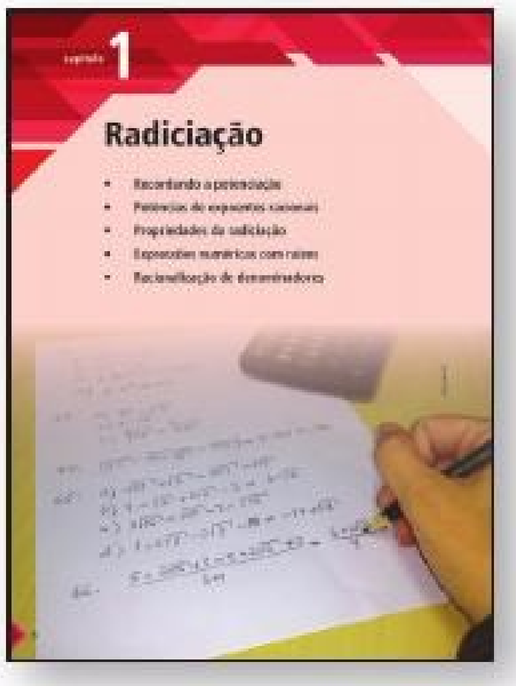
Para estudar

Lista complementar com problemas e exercícios para você estudar em casa.

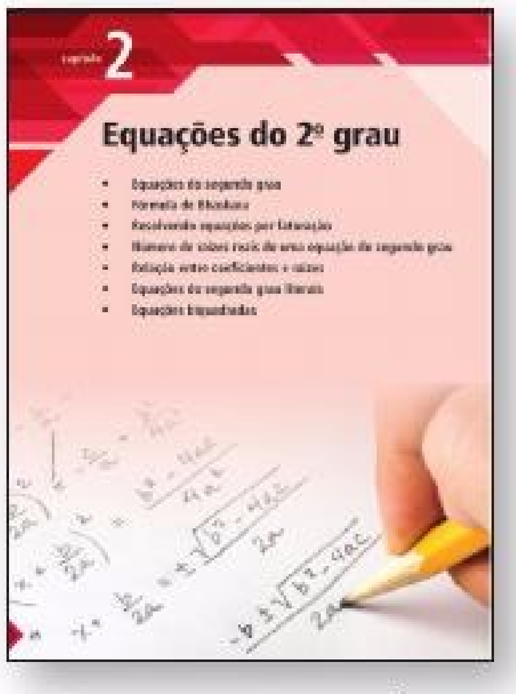
Resolução das atividades

Resolução integral de todas as atividades propostas no livro, para que você possa conferir as respostas e fixar melhor os conceitos envolvidos.

Seu livro do 9º ano é composto de nove capítulos, que tratam dos cinco grandes temas que compõem a coleção: **Números**, **Geometria**, **Álgebra, Tratamento da informação** e **Medidas.**

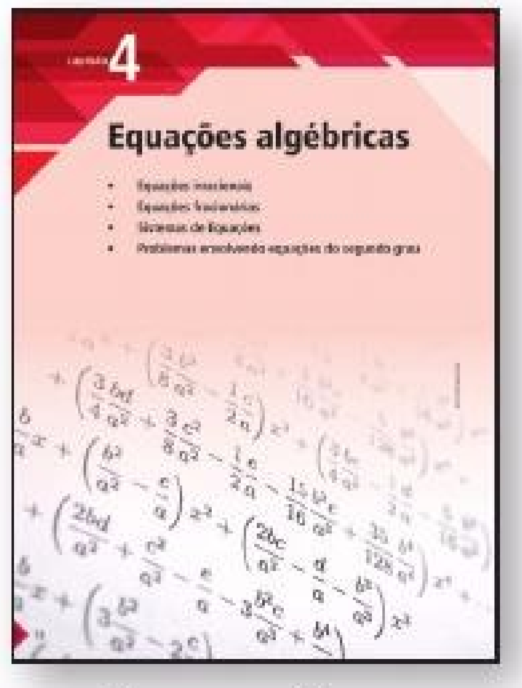


Radiação



Equações do 2º grau

Pontos, retas e cincunferências

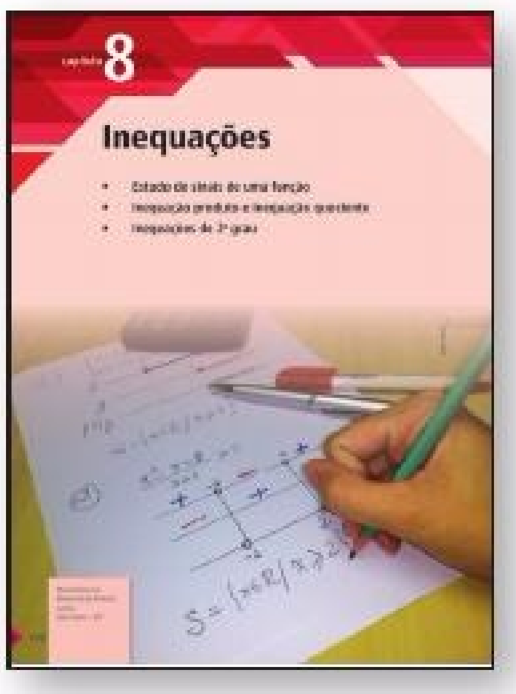


Equações algébricas

Semelhança de triângulos

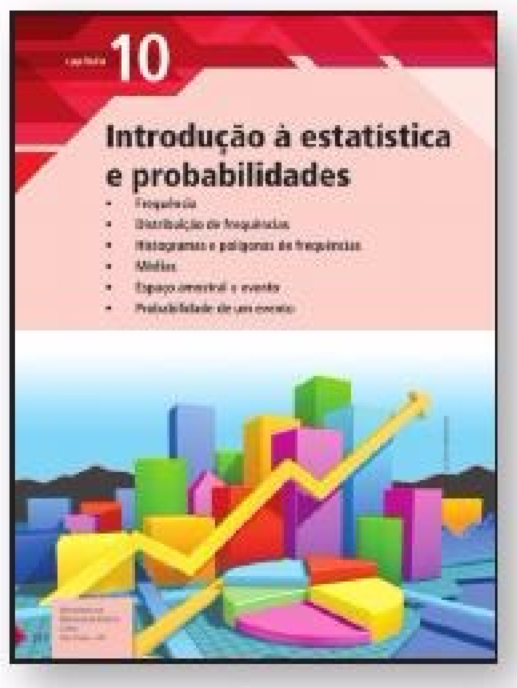
Funções

Relações métricas no triângulo retângulo



Inequações

Razões trigonométricas



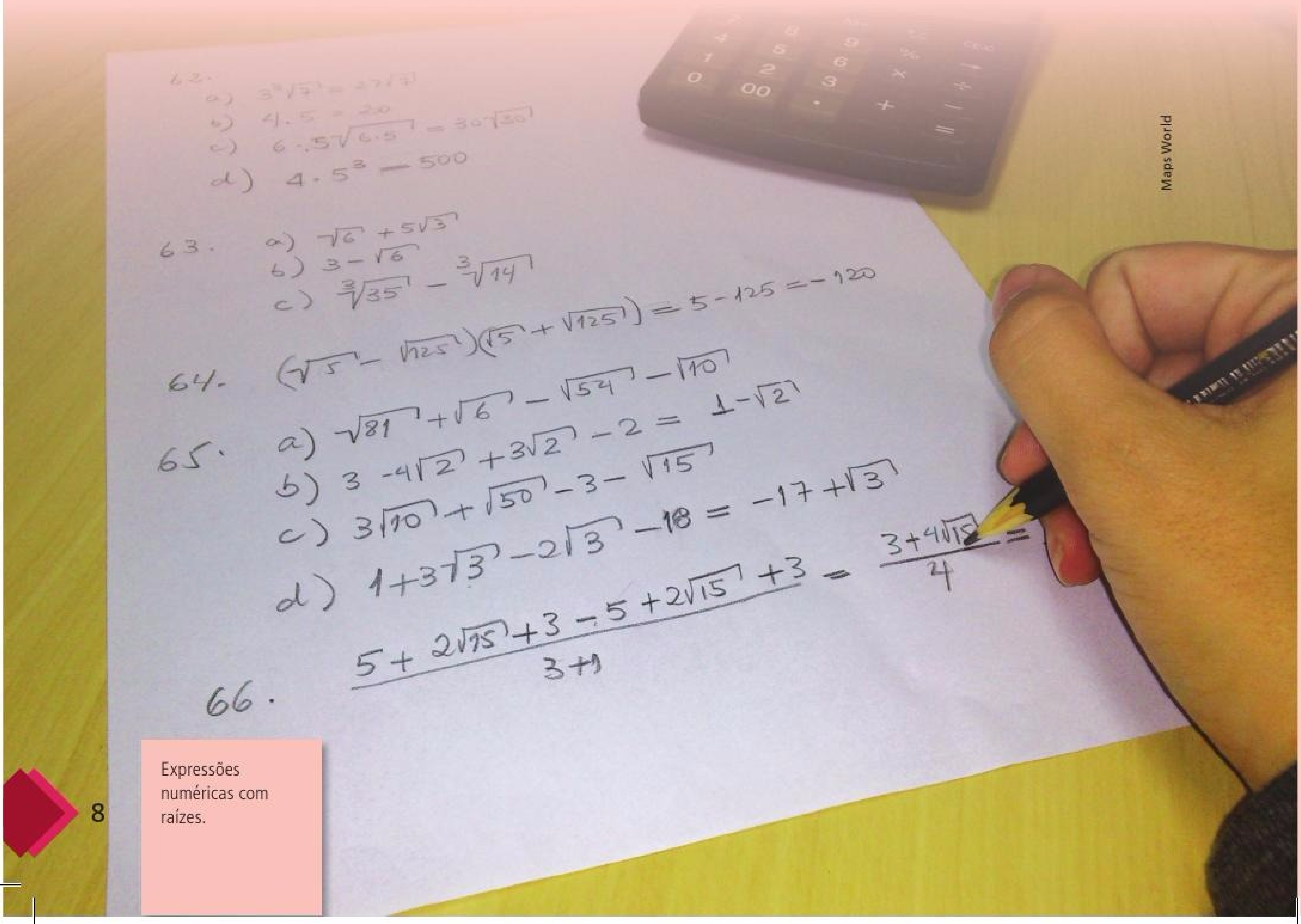
Introdução à estatística e probabilidades

Sumário

capítulo 1

Radiciação

- Recordando a potenciação
- Potências de expoentes racionais
- Propriedades da radiciação
- Expressões numéricas com raízes
- Racionalização de denominadores



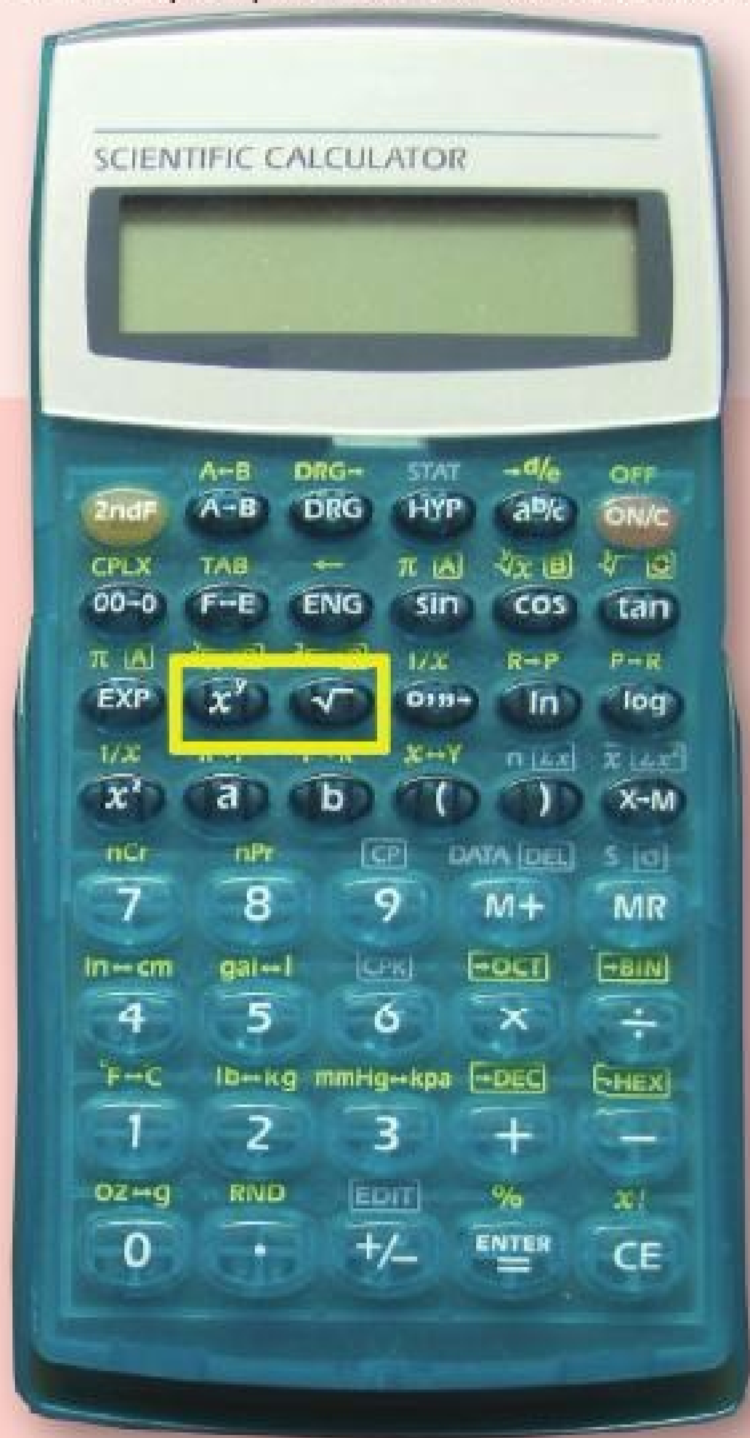
Expressões numéricas com raízes.

Conversa Inicial

Você já deve conhecer bem a operação de radiciação e, provavelmente, lembra-se dela como operação inversa da potenciação.

Quando estudamos a radiciação com este significado, limitamo-nos a estudar a natureza dos números resultantes desta operação, sem nos preocuparmos com as propriedades da radiciação e suas consequências no cálculo com números reais.

É o que faremos neste capítulo, além de completar nosso repertório de regras de cálculo com números reais. Supondo que devemos ter, para a radiciação, todas as propriedades que estudamos para a potenciação e as demais operações com números reais, como seria, por exemplo, a operação de divisão de um número real qualquer por um número irracional como $\sqrt{2}$?



Shock/PhotoXpress

As calculadoras científicas trazem as teclas x^y para potências e $\sqrt{\ }$ para raiz quadrada.

Certamente, aquela ideia de divisão como operação que reparte um valor em partes iguais, não é suficiente para responder a essa questão. Vamos, então, investigar um pouco mais a radiciação.

Inicialmente, vamos recordar o que estudamos sobre potências com expoentes inteiros e bases reais, para avançarmos no estudo generalizado da radiciação.

Considere este produto:

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{\text{5 fatores}}$$

Ele pode ser indicado de modo abreviado da seguinte maneira:

$\mathbf{2^5}$ (devemos ler: dois elevado à quinta potência ou dois à quinta).

Nesse tipo de indicação, o número de baixo é chamado **base** da potência e é o fator que será multiplicado por ele mesmo tantas vezes quantas apontar o número de cima, que é denominado **expoente** da potência.

Professor: o aluno já conhece a radiciação como operação inversa da potenciação e já viu que ela é muito utilizada na obtenção de solução de equações e na simplificação de expressões aritméticas e algébricas. Nossa abordagem visa ampliar esse conceito e explorar a radiciação como uma potenciação de expoentes não inteiros.

Assim, em $\mathbf{2^5 = 32}$ temos:

- o **expoente** 5 indica o número de vezes que o número 2 será multiplicado por si mesmo;
- a **base** 2 é o fator que se repete na multiplicação;
- a **potência** 32 é o produto obtido.

Recordando a potenciação

Sendo $a \in R$ e $n \in Z$, valem as seguintes definições:

$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ \cdot a$, se $n > 1$

$a^1 = a$

$a^0 = 1$, se $a \neq 0$

$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$, se $a \neq 0$

Observe alguns exemplos:

a) $2{,}1^3 = 2{,}1 \cdot 2{,}1 \cdot 2{,}1 = 9{,}261$

b) $0{,}3^3 = 0{,}027$

c) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^3 = \dfrac{1}{3^3} = \dfrac{1}{27}$

d) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-4} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^4} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{16}} = 16$

e) $\left(\dfrac{4}{5}\right)^0 = 1$

Professor: Escreva no quadro os exemplos e discuta com seus alunos cada propriedade de forma detalhada. É importante que o aluno se aproprie desse conceito e se achar conveniente, utilize algum tempo extra para se certificar que todos os alunos aprenderam esse tema.

Principais propriedades das potências

a) Na multiplicação de potências de mesma base, mantemos a base e somamos os expoentes:

$$\mathbf{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$$

Observe os exemplos:

- $2^4 \cdot 2^5 = 2^{4+5} = 2^9$
- $5^7 \cdot 5^{-4} = 5^{7+(-4)} = 5^3$
- $6^5 \cdot 6^{-6} = 6^{5+(-6)} = 6^{-1}$
- $10^{-2} \cdot 10^{-1} = 10^{-2+(-1)} = 10^{-3}$

b) Na divisão de potências de mesma base, mantemos a base e subtraímos os expoentes:

$$\mathbf{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$$

Nos exemplos, você pode ver que fazemos a subtração dos expoentes do numerador e do denominador das potências de mesma base:

- $\dfrac{3^8}{3^6} = 3^{8-6} = 3^2$
- $\dfrac{6^3}{6^{-2}} = 6^{3-(-2)} = 6^5$
- $\dfrac{7^3}{7^5} = 7^{3-5} = 7^{-2}$
- $\dfrac{10^{-4}}{10^{-6}} = 10^{-4-(-6)} = 10^2$

c) Ao elevarmos uma potência a um expoente (potência de potência), mantemos a base da potência e multiplicamos os expoentes:

$$\mathbf{(a^m)^n = a^{m \cdot n}}$$

Veja alguns exemplos:

- $(2^3)^4 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12}$
- $(2^3)^{-4} = 2^{3 \cdot (-4)} = 2^{-12}$
- $(2^{-3})^{-4} = 2^{(-3) \cdot (-4)} = 2^{12}$
- $(2^{-3})^4 = 2^{(-3) \cdot 4} = 2^{-12}$

d) A potência de um produto é igual ao produto das potências:

$$\mathbf{(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m}$$

Observe nos exemplos que, para elevar o produto a um expoente, elevamos cada fator a esse expoente:

- $(3 \cdot x)^4 = 3^4 \cdot x^4$
- $(2 \cdot x)^{-6} = 2^{-6} \cdot x^{-6}$, se $x \neq 0$

A potência de um quociente é o quociente das potências

$$\left(\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\right)^{\mathbf{m}} = \frac{\mathbf{a^m}}{\mathbf{b^m}}$$

Os exemplos mostram que elevamos o dividendo e o divisor ao expoente da potência:

- $\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{2^5}{3^5}$
- $\left(\frac{2}{3}\right)^{-6} = \frac{2^{-6}}{3^{-6}}$

Atividades

1. Utilizando sua calculadora, calcule as potências a seguir:

a) 4^5 1 024

b) 4^6 4096

c) 2^4 16

d) $(-2)^4$ 16

e) 5^3 125

f) $(-5)^3$ –125

g) $4{,}5^2$ 20,25

h) $(-4{,}5)^2$ 20,25

i) $\left(\frac{5}{6}\right)^1$ $\frac{5}{6}$

2. Calcule as potências sem o uso de calculadora:

a) 5^{-2} $\frac{1}{25}$

b) 7^{-3} $\frac{1}{343}$

c) 3^{-4} $\frac{1}{81}$

d) 4^{-1} $\frac{1}{4}$

e) 2^{-2} $\frac{1}{4}$

f) $(-2)^2$ 4

g) 2^2 4

h) $(-2)^{-2}$ $\frac{1}{4}$

i) 10^{-3} $\frac{1}{1000}$

3. Escreva na forma de uma única potência de base 2:

a) $2^6 \cdot 2^{-4}$ 2^2

b) $2^{-6} \cdot 2^4$ 2^{-2}

c) $\frac{2^6}{2^4}$ 2^2

d) $\frac{2^6}{2^{-4}}$ 2^{10}

e) $(2^3)^3$ 2^9

f) $(2^4)^{-1}$ $\frac{1}{2^4}$

4. Calcule o valor de $\frac{(2^4)^5 \cdot (2^3)^{-2}}{2 \cdot (2^5)^2}$. 2^{10}

5. Calcule:

a) $(7^3)^2 \cdot 7^{-4}$ 49

b) $\frac{(11^3)^4}{(11^2)^5}$ 121

c) $\frac{(3^2)^6 \cdot 3^2}{3^{16}}$ 81

d) $\frac{(13^3)^2 \cdot (13^{-1})^3}{13^7 \cdot (13^5)^{-1}}$ 13

6. Escreva na forma de uma fração irredutível:

a) $\frac{2^{10}}{2^{12}}$ $\frac{1}{4}$

b) $\frac{(4^2)^{-5}}{(4^{-3})^3}$ $\frac{1}{4}$

c) $\frac{(3^2)^4 \cdot 3}{3^6}$ 27

d) $\frac{(-3^2)^3 \cdot 3}{3^6}$ -3

7. Verifique se é verdadeira ou falsa cada afirmação. Use sua calculadora.

a) $2^6 \cdot 5^6 = (2 \cdot 5)^6$ V

b) $2^6 \cdot 5^6 = 10^6$ V

c) $2^6 \cdot 5^6 = 1\,000\,000$ V

8. Simplifique $\frac{(a^3b^2)^4}{(a^2b^3)^3}$, onde $a \neq 0$ e $b \neq 0$. $\frac{a^6}{b}$

9. Sendo $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ e $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, simplifique as expressões:

a) $\frac{(a^3b^2)^5}{(a^4b^4)^3}$ $\frac{a^3}{b^2}$

b) $\frac{(a^{-2} \cdot b)^{-5}}{(a^{-3} \cdot b^2)^{-4}}$ $\frac{b^3}{a^2}$

10. Escreva $\frac{3^9 \cdot 9^{-2}}{27^7 \cdot 81^{-5}}$ usando potências de 3. 3^4

11. Escreva $\frac{3^{-6} \cdot 27^6}{243^3}$ usando potências de 3. $\frac{1}{27}$

Potências de expoentes racionais

Professor: Leia o texto com seus alunos e, se achar conveniente, aproveite a ocasião da discussão sobre a lenda do jogo de xadrez para construir alguns exemplos de potências de expoentes racionais com o auxílio de calculadora. O aluno utilizará a calculadora para verificar a resposta obtida com o uso da propriedade, mas, lembre-se de também solicitar as justificativas matemáticas desses resultados.

Até aqui, estudamos e fizemos cálculos com potências de expoentes inteiros. Vamos agora definir o significado das potências com expoentes racionais como, $(3)^{\frac{1}{2}}$, $(2)^{\frac{1}{3}}$, $(-81)^{\frac{2}{3}}$ etc.

Dados $a \in R$, $n \in Z^*$ e $m \in Z$, define-se como:

$$\mathbf{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$$

Em linguagem comum, toda potência de expoente racional, com $\mathbf{n \neq 0}$ e **m** e **n** inteiros, é igual à raiz de índice **n** (denominador do expoente) da base elevada a **m** (numerador do expoente).

Quando temos $\sqrt[n]{x}$, o **n** é denominado **índice da raiz** e **x** de **radicando**.

Quando o índice é 2, não é necessário escrevê-lo. Assim, $\sqrt{5}$ é o mesmo que $\sqrt[2]{5}$.

Dessa maneira, podemos escrever:

- $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$
- $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$
- $\sqrt[5]{\dfrac{4}{25}} = \sqrt[5]{\left(\dfrac{2}{5}\right)^2} = \left(\dfrac{2}{5}\right)^{\frac{2}{5}}$

Não é muito prático trabalharmos com a radiciação exprimindo-a como potência de expoente racional. No entanto, esta definição pode permitir que, em diversas situações, seja mais fácil fazer simplificações em expressões que envolvem a radiciação, o que levará a um melhor entendimento das principais propriedades da radiciação.

Antes de estudarmos detalhadamente suas propriedades, vamos rever o que estudamos sobre a radiciação nas séries anteriores.

Já estudamos a raiz quadrada e sabemos que, sendo $\mathbf{a} \geq \mathbf{0}$, a raiz quadrada de **a** é um número real não negativo **b**, tal que $\mathbf{b^2 = a}$. Sabemos, também, que em R não existe a raiz de número negativo.

Por exemplo:

- $\sqrt{64} = 8$, pois $8^2 = 8 \cdot 8 = 64$
- $\sqrt{-64}$ não existe em R, pois não existe número real que, elevado ao quadrado, resulte em -64.

Estudamos também que a raiz cúbica de um número real **a** é um número real **b** tal que $\mathbf{b^3 = a}$ e que, neste caso, não há restrições quanto ao radicando, que pode ser positivo, negativo ou nulo.

Por exemplo:

- $\sqrt[3]{-8} = -2$, pois $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$.
- $\sqrt[3]{1\,000} = 10$, pois $10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1\,000$.

De forma geral, as radiciações de índices pares (raiz quadrada, raiz quarta, raiz sexta etc.) comportam-se de forma semelhante à raiz quadrada e as de índices ímpares (raiz cúbica, raiz quinta etc.), de forma semelhante à raiz cúbica.

Observe os exemplos:

- $\sqrt[4]{81} = 3$, pois $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$
- $\sqrt[4]{-81}$ não existe em R, pois não existe número real que, elevado à quarta, resulte -81.
- $\sqrt[5]{-32} = -2$, pois $(-2)^5 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -32$
- $\sqrt[5]{32} = 2$, porque $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$.
- $\sqrt[6]{-1}$ não existe em R, pois não existe número real que, elevado à sexta, resulte -1.
- $\sqrt[7]{-1} = -1$, pois $(-1)^7 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$

Atividades

12. Calcule:

a) $\sqrt{4}$ 2
b) $\sqrt{25}$ 5
c) $-\sqrt{64}$ −8
d) $\sqrt{100}$ 10
e) $-\sqrt{225}$ −15
f) $\sqrt{441}$ 21
g) $-\sqrt{784}$ −28
h) $\sqrt{1}$ 1

13. Calcule:

a) $\sqrt[3]{8}$ 2
b) $\sqrt[3]{27}$ 3
c) $\sqrt[3]{-64}$ −4
d) $\sqrt[3]{216}$ 6
e) $\sqrt[3]{1\,000}$ 10
f) $\sqrt[3]{1}$ 1

14. Calcule:

a) $-\sqrt{25}$ −5
b) $\sqrt{-64}$ não existe
c) $-\sqrt[3]{-64}$ +4
d) $-\sqrt{400}$ −20
e) $-\sqrt[3]{27}$ −3
f) $\sqrt[3]{-1}$ −1
g) $-\sqrt[3]{1}$ −1
h) $-\sqrt[3]{-1}$ +1

15. Calcule:

a) $\sqrt[4]{81}$ 3
b) $\sqrt[4]{256}$ 4
c) $\sqrt[5]{32}$ 2
d) $\sqrt[5]{1\,024}$ 4
e) $\sqrt[6]{64}$ 2
f) $\sqrt[6]{1}$ 1

16. Calcule:

a) $\sqrt[3]{125}$ 5
b) $\sqrt[3]{-27}$ −3
c) $-\sqrt[4]{16}$ −2
d) $\sqrt[5]{-243}$ −3
e) $-\sqrt[5]{-32}$ +2
f) $-\sqrt[4]{81}$ −3
g) $\sqrt[17]{-1}$ −1
h) $\sqrt[18]{0}$ 0

17. Calcule:

a) $\sqrt[3]{\dfrac{8}{27}}$ $\dfrac{2}{3}$
b) $\sqrt[4]{\dfrac{81}{10000}}$ $\dfrac{3}{10}$
c) $\sqrt[5]{-\dfrac{1}{243}}$ $\dfrac{-1}{3}$
d) $\sqrt[6]{\dfrac{729}{64}}$ $\dfrac{3}{2}$

18. Verifique se:

a) $\sqrt{90}$ é maior, menor ou igual a 9
$\sqrt{30} > 9$
b) $\sqrt[3]{100}$ é maior, menor ou igual a 5
$\sqrt{100} < 5$

19. No lugar de |||||||, deve-se escrever **<**, **=** ou **>**?

a) $\sqrt{50}$ ||||||| 25 $\sqrt{50} < 25$
b) $\sqrt{1\,000}$ ||||||| 32 $\sqrt{1000} < 32$

Propriedades da radiciação

Professor: deixe bem claro para os alunos que raízes não podem ser distribuídas para somas ou subtrações, pois este é um erro comum cometido por eles. Por exemplo, $\sqrt{9+16} \neq \sqrt{9} + \sqrt{16}$. Mostre que $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$ e, por outro lado, $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$. Desenhe no quadro a explicação geométrica dessas operações e explore as diferenças entre elas.

Relembrando que o símbolo R_+ representa o conjunto dos números reais não negativos, ou seja, o zero e os números reais positivos, vamos estabelecer as principais propriedades operatórias da radiciação.

a) Com $a \in R_+$ e $n \in N$, com $n > 1$, tem-se:

$$(\sqrt[n]{a^n}) = a, \text{ pois } (\sqrt[n]{a^n}) = a^{\frac{n}{n}} = a^1 = a$$

Exemplos:

- $(\sqrt[5]{7})^5 = 13$
- $(\sqrt{2})^2 = 2$

b) Quando temos o produto de duas raízes de mesmo índice, mantemos o índice e fazemos a raiz do produto dos radicandos. Assim:

Com $a \in R_+$, $b \in R_+$ e $n \in N$, com $n > 1$, tem-se:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}, \text{ pois } \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (a \cdot b)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

Observe os exemplos:

- $\sqrt{3} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{3 \cdot 5} = \sqrt{15}$
- $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{20} = \sqrt[3]{4 \cdot 20} = \sqrt[3]{80}$

Da mesma forma que no produto, podemos dizer que esta propriedade é válida para o quociente de duas raízes de mesmo índice. Lembrando que, quando escrevemos R_+^* estamos nos referindo aos números reais positivos, não incluindo, portanto, o zero, podemos escrever:

Se $a \in R_+$, $b \in R_+^*$ e $n \in N$, com $n > 1$, tem-se:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Observe os exemplos:

- $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$
- $\frac{\sqrt[5]{3}}{\sqrt[5]{4}} = \sqrt[5]{\frac{3}{4}}$

c) A radiciação de uma raiz é outra radiciação cujo índice é o prodto dos índices das duas raízes. Assim, quando $a \in R_+$, $m \in N$, $n \in N$, com $m > 1$ e $n > 1$, tem-se:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} \text{ pois } \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = (\sqrt[n]{a})^{\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = (a)^{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{m}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

Exemplos:

- $\sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt[4]{2}$ (lembre-se de que na raiz quadrada não indicamos o índice)
- $\sqrt{\sqrt[3]{15}} = \sqrt[6]{15}$
- $\sqrt[3]{\sqrt{10}} = \sqrt[6]{10}$

d) Como decorrência da definição de uma radiciação como uma potenciação de expoente racional, podemos verificar que o valor de uma radiciação como $\sqrt[m]{a^n}$, com $a \in R_+$ não se altera quando multiplicamos o índice da raiz e o expoente do radicando por um mesmo número.

Quando $a \in R_+$, $m \in N$, $n \in N^*$ ($n \neq$) e $p \in N^*$, com $m > 1$, tem-se

$$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[mp]{a^{np}}$$

Por exemplo:

- $\sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3 \cdot 2]{5^{2 \cdot 2}} \rightarrow \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[6]{5^4}$
- $\sqrt{\sqrt[4]{7}} = \sqrt[8]{7}$

Atividades

20. Transforme numa única raiz:

a) $\sqrt{\sqrt[3]{30}}$ $\sqrt[6]{30}$

b) $\sqrt[3]{\sqrt{130}}$ $\sqrt[6]{130}$

c) $\sqrt{\sqrt[4]{79}}$ $\sqrt[8]{79}$

d) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt{20}}}$ $\sqrt[30]{20}$

21. Sendo **a** $\geq$ **0**, transforme numa só raiz:

a) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{a}}$ $\sqrt[9]{a}$

b) $\sqrt[4]{\sqrt[4]{a}}$ $\sqrt[16]{a}$

c) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}$ $\sqrt[8]{a}$

d) $\sqrt[5]{\sqrt[5]{a}}$ $\sqrt[25]{a}$

22. Encontre o valor de **n**, sabendo que:

a) $\sqrt{\sqrt[n]{110}} = \sqrt[12]{110}$ n = 6

b) $\sqrt[3]{\sqrt[n]{110}} = \sqrt[12]{110}$ n = 4

23. Transforme em radicais de índices menores:

a) $\sqrt[6]{3^4}$ $\sqrt[3]{3^2}$

b) $\sqrt[12]{15^9}$ $\sqrt[4]{15^3}$

c) $\sqrt[8]{30^4}$ $\sqrt{30}$

d) $\sqrt[6]{25^3}$ 5

e) $\sqrt[15]{3^{10}}$ $\sqrt[3]{3^2}$

f) $\sqrt[35]{11^{28}}$ $\sqrt[5]{11^4}$

24. Simplifique:

a) $\sqrt[4]{25}$ $\sqrt{5}$

b) $\sqrt[15]{32}$ $\sqrt[3]{2}$

c) $\sqrt[6]{625}$ $\sqrt[3]{5^2}$

d) $\sqrt[12]{81}$ $\sqrt[3]{3}$

e) $\sqrt[6]{1\,000}$ $\sqrt{10}$

f) $\sqrt[20]{256}$ $\sqrt[5]{2^2}$

25. Efetue:

a) $\sqrt[4]{81}$ 3

b) $\sqrt[3]{343}$ 7

c) $\sqrt[5]{243}$ 3

d) $\sqrt{121}$ 11

e) $\sqrt[3]{125}$ 5

f) $\sqrt[10]{1\,024}$ 2

Simplificação de raízes

Professor: Destaque que em alguns casos, a aplicação das propriedades da radiciação é facilitada quando se fatora os números dos quais se pretende extrair a raiz.

Utilizando as propriedades que acabamos de estudar, é possível fazer a simplificação de raízes, **extraindo** fatores do radicando ou **introduzindo** fatores no radicando.

Quando temos uma radiciação na qual o radicando tem fatores com expoentes iguais ou maiores que o índice da raiz, esses fatores podem ser extraídos do radicando, simplificando, assim, a radiciação. Observe os exemplos:

- $\sqrt[3]{7^3 \cdot 2^5} = \sqrt[3]{7^3 \cdot 2^3 \cdot 2^2} = \sqrt[3]{7^3} \cdot \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{2^2} = 7 \cdot 2\sqrt[3]{2^2} = 14\sqrt[3]{4}$
- $\sqrt{3^2 \cdot 2^5} = \sqrt{3^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 \cdot 2} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} = 3 \cdot 2 \cdot 2\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$
- $\sqrt[3]{56} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 7} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{7} = 3\sqrt[3]{7}$

No sentido inverso, podemos também introduzir um número no radicando, quando este aparece multiplicando uma raiz. Para fazer isso, devemos elevar o número introduzido ao índice da raiz. Observe os exemplos:

- $2\sqrt{5} = \sqrt{2^2 \cdot 5} = \sqrt{20}$

  $2\sqrt{5} = \sqrt{2^2 \cdot 5} = \sqrt{20}$

  O 2 foi elevado ao quadrado

- $5\sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{5^3 \cdot 7} = \sqrt[3]{875}$

  $5\sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{5^3 \cdot 7} = \sqrt[3]{875}$

  O 5 foi elevado ao cubo

- $3\sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{3^5 \cdot 2} = \sqrt[5]{486}$

  $3\sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{3^5 \cdot 2} = \sqrt[5]{486}$

  O 3 foi elevado à quinta

Fernanda Youssef

Atividades

26. Faça a extração de fatores do radicando:

a) $\sqrt{2^2 \cdot 5}$ $2\sqrt{5}$

b) $\sqrt[3]{2 \cdot 5^3}$ $5\sqrt[3]{2}$

c) $\sqrt[5]{2^5 \cdot 3^3}$ $2\sqrt[5]{3^3}$

d) $\sqrt[4]{3^5 \cdot 5^8}$ $75\sqrt[4]{3}$

e) $\sqrt{2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^6}$ $13\,500\sqrt{6}$

f) $\sqrt{2^{11} \cdot 3^7 \cdot 5}$ $864\sqrt{30}$

g) $\sqrt[4]{2^{21} \cdot 3^{11}}$ $288\sqrt[4]{2 \cdot 3^3}$

h) $\sqrt[10]{2^{43} \cdot 5^{23}}$ $400\sqrt[10]{2^3 \cdot 5^3}$

27. Simplifique:

a) $\sqrt{18}$ $3\sqrt{2}$

b) $\sqrt{20}$ $2\sqrt{5}$

c) $\sqrt[3]{1\,296}$ $6\sqrt[3]{6}$

d) $\sqrt[4]{1\,250}$ $5\sqrt[4]{2}$

e) $\sqrt{112}$ $4\sqrt{7}$

f) $\sqrt[3]{1\,152}$ $4\sqrt[3]{18}$

g) $\sqrt[4]{1\,296}$ 6

h) $\sqrt[10]{5\,120}$ $2\sqrt{5}$

28. Introduza os fatores no radicando:

a) $2\sqrt{3}$ $\sqrt{12}$

b) $2\sqrt{5}$ $\sqrt{20}$

c) $2\sqrt[3]{3}$ $\sqrt[3]{24}$

d) $2\sqrt[3]{5}$ $\sqrt[3]{40}$

e) $5\sqrt[3]{2}$ $\sqrt[3]{250}$

f) $2\sqrt[5]{3}$ $\sqrt[5]{96}$

g) $10\sqrt[4]{2}$ $\sqrt[4]{20\,000}$

h) $10\sqrt[5]{2}$ $\sqrt[5]{200\,000}$

29. Escreva numa destas formas $\sqrt{}$ ou $\sqrt[3]{}$ ou $\sqrt[4]{}$ ou $\sqrt[5]{}$:

a) $6\sqrt{5}$ $\sqrt{180}$

b) $7\sqrt{2}$ $\sqrt{98}$

c) $11\sqrt{5}$ $\sqrt{605}$

d) $5\sqrt[3]{4}$ $\sqrt[3]{500}$

e) $4\sqrt[3]{4}$ $\sqrt[3]{256}$

f) $4\sqrt[3]{15}$ $\sqrt[4]{20000}$

g) $10\sqrt[4]{2}$ $\sqrt[4]{30000}$

h) $10\sqrt[4]{3}$ $\sqrt[4]{20000}$

i) $10\sqrt[4]{10}$ $\sqrt[4]{100000}$

j) $2\sqrt[5]{4}$ $\sqrt[5]{128}$

k) $3\sqrt[5]{2}$ $\sqrt[5]{486}$

l) $4\sqrt[5]{2}$ $\sqrt[5]{2048}$

Expressões numéricas com raízes

Antes de iniciarmos o estudo de expressões numéricas envolvendo raízes, é importante lembrar que números irracionais como, por exemplo, $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ e $(6 - \sqrt[3]{5})$, não devem ser expressos na forma decimal, mas sim representados pela mais simples redução que pudermos fazer, utilizando-se as propriedades de raízes que estudamos aqui.

Vamos, agora, analisar algumas propriedades das operações com raízes.

a) Adição e subtração

Adição e subtração de raízes com índices iguais, como, por exemplo, $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ e $\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{5}$ não admitem mais nenhuma simplificação. O máximo que podemos conseguir de simplificação na adição e subtração de raízes de mesmo índice ocorre quando nos deparamos com raízes de mesmos radicandos. Veja isso nos exemplos:

- $\sqrt{32} + \sqrt{18} = \sqrt{2^5} + \sqrt{2 \cdot 3^2} = 4\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$
- $\sqrt[3]{243} - \sqrt[3]{56} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 7} - \sqrt[3]{2^3 \cdot 7} = 3\sqrt[3]{7} - 2\sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{7}$

b) Multiplicação e Divisão

Nesses casos, aplicamos as propriedades que estudamos e realizamos as simplificações possíveis. Veja, por exemplo, como procedemos com multiplicações e divisões de raízes de mesmos índices:

- $\sqrt{7} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{35}$
- $\dfrac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{18}$
- $\dfrac{\sqrt[3]{24}}{2} = \sqrt[3]{\dfrac{24}{8}} = \sqrt[3]{3}$

Atividades

30. Efetue:

a) $\sqrt{28} + \sqrt{63}$ $5\sqrt{7}$

b) $\sqrt{24} + \sqrt{96}$ $6\sqrt{6}$

c) $\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{16}$ $\sqrt[3]{2}$

d) $\sqrt[3]{500} - \sqrt[3]{4}$ $4\sqrt[3]{4}$

31. Efetue:

a) $\sqrt{44} + \sqrt{99} + \sqrt{1\,100}$ $15\sqrt{11}$

b) $\sqrt{40} + \sqrt{90} - \sqrt{250}$ 0

c) $\sqrt[3]{750} - \sqrt[3]{48} + \sqrt[3]{162}$ $6\sqrt[3]{6}$

d) $\sqrt[3]{192} - (\sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{3})$ $\sqrt[3]{3}$

32. No lugar de |||||||, o que devemos escrever: $<$, $=$ ou $>$?

a) $\sqrt{10} + \sqrt{6}$ ||||||| $\sqrt{16}$ $<$

b) $\sqrt{10} - \sqrt{6}$ ||||||| $\sqrt{4}$ $<$

33. Efetue:

a) $\sqrt{5}\,(\sqrt{6} + \sqrt{7})$ 11,40

b) $\sqrt{3}\,(\sqrt{3} + 2)$ 6,45

c) $\sqrt[3]{9}\,(\sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{3})$ 6,78

34. Efetue:

a) $\sqrt{2} + \sqrt{2}$ 2,83

b) $\sqrt{2} : \sqrt{2}$ 1

c) $\sqrt{2} - \sqrt{2}$ 0

d) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$ 2

e) $\sqrt{12} + \sqrt{3}$ 5,20

f) $\sqrt{12} - \sqrt{3}$ 1,73

g) $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3}$ 6

h) $\sqrt{12} : \sqrt{3}$ 2

i) $\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{2}$ $\sqrt[3]{2}$

j) $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{2}$ $3\sqrt[3]{2}$

k) $\sqrt[3]{16} \cdot \sqrt[3]{2}$ $2\sqrt[3]{2^2}$

l) $\sqrt[3]{16} : \sqrt[3]{2}$ 2

35. Efetue: $(\sqrt{2} + \sqrt{5})\,(\sqrt{8} + \sqrt{125})$. $29 + 7\sqrt{10}$

36. Efetue:

a) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})\,(\sqrt{27} - \sqrt{2})$ $7 + 2\sqrt{6}$

b) $(5 + \sqrt{2})\,(7 - \sqrt{2})$ 33

c) $(\sqrt{10} - 3)\,(\sqrt{2} + \sqrt{5})$ $-\sqrt{5} + 2\sqrt{2}$

d) $(3 + 2\sqrt{3})\,(5 - 3\sqrt{3})$ $\sqrt{3} - 3$

37. Efetue: $(\sqrt[3]{18} + \sqrt[3]{4})\,(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{2})$. $3\sqrt[3]{6} - 2$

38. Efetue:

a) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2$ $7 + 2\sqrt{6}$

b) $(\sqrt{7} + \sqrt{2})\,(\sqrt{7} - \sqrt{2})$ 5

39. Efetue:

a) $(\sqrt{5} + 1)^2$ $6 + 2\sqrt{5}$

b) $(2\sqrt{10} + 3)^2$ 2

c) $(\sqrt{3} + 1)\,(\sqrt{3} - 1)$ $49 + 12\sqrt{10}$

d) $(\sqrt{17} + \sqrt{3})\,(\sqrt{17} - \sqrt{3})$ 14

40. Efetue: $\dfrac{(\sqrt{10} + \sqrt{6})^2 - (\sqrt{10} - \sqrt{6})^2}{\sqrt{45} + \sqrt{5}}$. $2\sqrt{3}$

41. Efetue $(\sqrt[4]{2} + 1)\,(\sqrt[4]{2} - 1)\,(\sqrt{2} + 1)$. 1

42. Efetue $(3\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})\,(\sqrt[3]{4} - 2\sqrt[3]{2} + 6)$. $2 + 20\sqrt[3]{2}$

43. Efetue:

a) $(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2})\,(\sqrt[3]{2} - 1)$ $2 - \sqrt[3]{2}$

b) $(\sqrt[3]{100} + 2\sqrt[3]{10})\,(\sqrt[3]{100} - 5\sqrt[3]{10} + 10)$ $70 + 30\sqrt[3]{10}$

Racionalização de denominadores

Racionalização do denominador irracional de uma fração é a denominação dada à operação de transformá-lo em um número racional, sem alterar o valor desta fração. É evidente que, para isso, devemos multiplicar o numerador e o denominador por um mesmo número conveniente, escolhido para que o denominador passe a ser racional. Existem, basicamente, dois casos de racionalização.

a) 1º caso

Quando o denominador da fração é uma raiz simples, ou seja, não é uma adição ou subtração que envolve raízes. Observe os exemplos:

- Vamos racionalizar o denominador de $\frac{1}{\sqrt{3}}$, multiplicando o numerador e o denominador por $\sqrt{3}$. Neste caso, escolhemos $\sqrt{3}$ (o próprio denominador) pois temos uma raiz quadrada.

  Veja o que acontece:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

  Assim, $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Observe que temos agora um denominador racional.

- Vamos, agora, racionalizar o denominador de $\frac{5}{\sqrt{5}}$. Para isso, multiplicamos o numerador e o denominador por $\sqrt{5}$:

$$\frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5}$$

- Suponha, agora, que tenhamos que racionalizar o denominador de $\frac{3}{\sqrt[5]{2}}$

  Neste caso, devemos escolher um número que, multiplicado por $\sqrt[5]{2}$ permita a simplicação do denominador para um racional. Este número é uma raiz de mesmo índice, na qual o radicando tem expoente igual à diferença entre o índice da raiz e seu expoente original. No caso, o número é $\sqrt[5]{2^4}$:

$$\frac{3}{\sqrt[5]{2}} = \frac{3 \cdot \sqrt[5]{2^4}}{\sqrt[5]{2^1} \cdot \sqrt[5]{2^4}} = \frac{3\sqrt[5]{16}}{\sqrt[5]{2^5}} = \frac{3\sqrt[5]{16}}{2}$$

b) 2º caso

Quando encontramos um denominador onde há uma adição ou subtração envolvendo números irracionais, devemos fazer a racionalização utilizando um dos produtos notáveis que estudamos nas séries anteriores.

Veja, por exemplo, a racionalização do denominador da fração $\frac{8}{\sqrt{3} + 1}$.

Vamos multiplicar o numerador e o denominador por $\sqrt{3} - 1$.

Escolhemos esse número para que possamos utilizar o produto notável da soma pela diferença: $\mathbf{(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2}$. Essa diferença de quadrados permitirá a eliminação da raiz no denominador. Observe:

$$\frac{8}{\sqrt{3} + 1} = \frac{8\,\mathbf{(\sqrt{3} - 1)}}{(\sqrt{3} + 1)\,\mathbf{(\sqrt{3} - 1)}} =$$

$$= \frac{8\,(\sqrt{3} - 1)}{(\sqrt{3})^2 - 1^2} = \frac{8\,(\sqrt{3} - 1)}{3 - 1} = \frac{8\,(\sqrt{3} - 1)}{2} = 4(\sqrt{3} - 1)$$

Atividades

44. Racionalize o denominador de:

a) $\frac{3}{\sqrt{6}}$ $\frac{\sqrt{6}}{2}$

b) $\frac{4}{\sqrt{5}}$ $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

c) $\frac{14}{\sqrt{21}}$ $\frac{2\sqrt{21}}{3}$

d) $\frac{8}{3\sqrt{2}}$ $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

e) $\frac{7}{6\sqrt{7}}$ $\frac{\sqrt{7}}{6}$

f) $\frac{1}{7\sqrt{11}}$ $\frac{\sqrt{11}}{77}$

45. Racionalize o denominador de:

a) $\frac{4}{\sqrt[5]{4}}$ $\sqrt[5]{4^4}$

b) $\frac{4}{\sqrt[8]{3}}$ $\frac{4\sqrt[8]{3^7}}{3}$

46. Considere a expressão $\frac{2}{\sqrt[3]{11}}$. Agora, multiplique o numerador e o denominador por $\sqrt[3]{11^2}$.

a) A nova expressão tem o mesmo valor da expressão inicial? sim

b) A nova expressão tem alguma raiz no denominador? não

c) Esse é um modo certo de racionalizar o denominador da expressão inicial? sim

47. Racionalize o denominador de:

a) $\frac{1}{\sqrt[4]{3^3}}$ $\frac{\sqrt[4]{3}}{3}$

b) $\frac{3}{\sqrt[5]{2}}$ $\frac{3\sqrt[5]{2^4}}{2}$

c) $\frac{5}{\sqrt{7}}$ $\frac{5\sqrt{7}}{7}$

48. Racionalize o denominador de:

a) $\dfrac{1}{10\sqrt[3]{3}}$ $\dfrac{\sqrt[3]{9}}{30}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{49}}$ $\dfrac{\sqrt[3]{49^2}}{49}$

c) $\dfrac{20}{\sqrt[8]{32}}$ $10\sqrt[8]{8}$

49. Racionalize o denominador de:

a) $\dfrac{3}{\sqrt[6]{5^5}}$ $\dfrac{3\sqrt[6]{5}}{5}$

b) $\dfrac{4}{7\sqrt[5]{27}}$ $\dfrac{4\sqrt[5]{9}}{21}$

c) $\dfrac{5}{\sqrt[4]{1\,000}}$ $\dfrac{\sqrt[4]{10}}{2}$

d) $\dfrac{3}{\sqrt[6]{32}}$ $\dfrac{3\sqrt[6]{2}}{2}$

50. Racionalize o denominador de:

a) $\dfrac{6}{\sqrt{5}+1}$ $\dfrac{3(\sqrt{5}-1)}{2}$

b) $\dfrac{\sqrt{10}-3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ $\dfrac{2\sqrt{2}-\sqrt{5}}{3}$

51. Racionalize o denominador de:

a) $\dfrac{15}{4-\sqrt{10}}$ $\dfrac{20-5\sqrt{10}}{2}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{7}-2}$ $\dfrac{\sqrt{7}+2}{5}$

c) $\dfrac{11}{11-\sqrt{11}}$ $\dfrac{11+\sqrt{11}}{10}$

d) $\dfrac{3}{\sqrt{10}+1}$ $\dfrac{\sqrt{10}-1}{3}$

e) $\dfrac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-1}$ $\dfrac{6+\sqrt{2}}{17}$

f) $\dfrac{\sqrt{7}+1}{\sqrt{7}-2}$ $\dfrac{5+\sqrt{7}}{3}$

Para estudar

52. Utilizando sua calculadora, calcule as potências a seguir:

a) 5^4

b) $(-3)^5$

c) $3{,}5^2$

d) $4{,}1^6$

e) $0{,}5^2$

53. Calcule as potências sem o uso de calculadora:

a) 3^{-2}

b) 2^{-3}

c) 1^{-2}

d) 2^{-4}

e) $(-2)^2$

f) 10^{-3}

54. Calcule:

a) $(3^3)^3 \cdot 3^{-4}$

b) $\dfrac{(10^3)^5}{(10^2)^6}$

c) $\dfrac{(2^{-2})^3 \cdot 3}{3^6}$

d) $\dfrac{(11^3)^6 \cdot (11^{-1})^4}{11^7 \cdot (11^3)^{-1}}$

55. Escreva na forma de uma fração irredutível:

a) $\dfrac{7^{12}}{7^{15}}$

b) $\dfrac{(3^{-2})^5}{(3^{-5})^2}$

c) $\dfrac{7^{-1} \cdot 7^{3}}{7^{-11} \cdot 7^{-8}}$

d) $\dfrac{(5^{2})^{3} \cdot 5^{-3}}{2^{5} \cdot 2^{-3}}$

56. Indique se cada afirmação abaixo é falsa ou verdadeira:

a) $3^{6} \times 7^{6} = (3 \times 7)^{6}$

b) $3^{6} \times 7^{6} = 21^{6}$

c) $3^{6} \times 7^{6} = 3.7^{6}$

d) $3^{6} \times 7^{6} = 3^{6}.7$

57. Simplifique $\dfrac{(x^{3}y^{2})^{2}}{(x^{3}y^{2})^{3}}$, onde $\mathbf{x \neq 0}$ e $\mathbf{y \neq 0}$.

58. Calcule:

a) $\sqrt[3]{27}$

b) $-\sqrt[5]{-32}$

c) $\sqrt[3]{-1000}$

d) $-\sqrt[4]{256}$

59. Calcule:

a) $\sqrt[3]{\dfrac{8}{125}}$

b) $\sqrt{\dfrac{81}{10000}}$

c) $\sqrt[3]{-\dfrac{1}{27}}$

d) $\sqrt[3]{\dfrac{32}{243}}$

60 Transforme numa única raiz:

a) $\sqrt{\sqrt[5]{m}}$

b) $\sqrt[4]{\sqrt{17}}$

c) $\sqrt[5]{\sqrt{\sqrt{2}}}$

d) $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[3]{a}}}$

61. Simplifique:

a) $\sqrt[4]{49}$

b) $\sqrt[8]{81}$

c) $\sqrt{1200}$

d) $\sqrt[5]{243}$

62. Faça a extração de fatores do radicando:

a) $\sqrt{3^{6} \cdot 7}$

b) $\sqrt[4]{2^{8} \cdot 5^{4}}$

c) $\sqrt[5]{2^{20} \cdot 3^{11}}$

d) $\sqrt[6]{6^{8} \cdot 5^{8}}$

e) $\sqrt[11]{2^{13} \cdot 5^{33}}$

63. Efetue:

a) $\sqrt{3}\,(\sqrt{2} + 5)$

b) $\sqrt{3}\,(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

c) $\sqrt[3]{7}\,(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2})$

64. Efetue: $(\sqrt{5} - \sqrt{125})\,(\sqrt{5} + \sqrt{125})$.

65. Efetue:

a) $(\sqrt{3} - \sqrt{5})\,(\sqrt{27} + \sqrt{2})$

b) $(1+ \sqrt{2})\,(3- \sqrt{2})$

c) $(\sqrt{10} - 1)\,(3 + \sqrt{5})$

d) $(1 - 2\sqrt{3})\,(1 + 3\sqrt{3})$

66. Efetue: $\dfrac{(\sqrt{5} + \sqrt{3})^{2} - (\sqrt{5} - \sqrt{3})^{2}}{\sqrt{9} + 1}$.

67. Racionalize o denominador de:

a) $\dfrac{3}{\sqrt{6}}$

b) $\dfrac{8}{5\sqrt{2}}$

c) $\dfrac{4}{\sqrt{7}}$

d) $\dfrac{28}{\sqrt{42}}$

68. Racionalize o denominador de:

a) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{3^{3}}}$

b) $\dfrac{1}{3\sqrt[5]{3^{3}}}$

c) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{7}}$

d) $\dfrac{7}{\sqrt{5}}$

69. Racionalize o denominador de:

a) $\dfrac{5}{1 + \sqrt{3}}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{7} - 2}$

c) $\dfrac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2} - 1}$

d) $\dfrac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 2}$

Resolução das atividades

1. a) 1024 d) 16 g) 20,25
b) 4096 e) 125 h) 20,25
c) 16 f) –125 i) $\frac{5}{6}$

2. a) $\frac{1}{25}$ d) $\frac{1}{4}$ g) 4
b) $\frac{1}{343}$ e) $\frac{1}{4}$ h) $\frac{1}{4}$
c) $\frac{1}{81}$ f) 4 i) $\frac{1}{1\,000}$

3. a) 2^{10} d) $2^{10} = \frac{1}{2^{10}}$
b) 2^2 e) 2^{10}
c) 2^9 f) $\frac{1}{2^4}$

4. $\frac{2^{20} \cdot 2^{-6}}{2 \cdot 2^{10}} = \frac{2^{14}}{2^{11}} = 2^3 = 8$

5. a) $7^6 \cdot 7^{-4} = 7^2 = 49$
b) $\frac{11^{12}}{11^{10}} = 11^2 = 121$
c) $\frac{3^{18} \cdot 3^2}{3^{16}} = 34 = 81$
c) $\frac{13^6 \cdot 13^{-3}}{13^7 \cdot 13^{-5}} = \frac{13^3}{13^2} = 13$

6. a) $\frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$ c) $\frac{3^8 \cdot 3}{3^6} = 3^3 = 27$
b) $\frac{4^{-10}}{4^{-9}} = \frac{1}{4}$ d) $\frac{-3^6 \cdot 3}{3^6} = -3$

7. a) V
b) V
c) V

8. $\frac{(a^3b^2)^4}{(a^2b^3)^3} = \frac{a^6}{b}$

9. a) $\frac{(a^3b^2)^5}{(a^4b^4)^3} = \frac{a^{15}b^{10}}{a^{12}b^{12}} = \frac{a^3}{b^2}$
b) $\frac{(a^{-2}b)^{-5}}{(a^{-3}b^2)^{-4}} = \frac{a^{10}b^{-5}}{a^{12}b^{-8}} = \frac{b^3}{a^2}$

10. $\frac{3^9 \cdot 9^{-2}}{27^7 \cdot 81^{-5}} = \frac{3^9 \cdot 3^{-4}}{3^{21} \cdot 3^{-20}} = 3^4$

11. $\frac{3^{-6} \cdot 27^6}{243^3} = \frac{3^{-6} \cdot 3^{18}}{3^{15}} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$

12. a) 2 d) 10 g) – 28
b) 5 e) – 15 h) 1
c) – 8 f) 21

13. a) 2 d) 6
b) 3 e) 10
c) – 4 f) 1

14. a) – 5 d) – 20 g) – 1
b) não existe e) – 3 h) + 1
c) + 4 f) – 1

15. a) 3 c) 2 e) 2
b) 4 d) 4 f) 1

16. a) 5 d) – 3 g) – 1
b) – 3 e) + 2 h) 0
c) – 2 f) – 3

17. a) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{-1}{3}$
b) $\frac{3}{10}$ d) $\frac{3}{2}$

18. a) $\sqrt{90} > 9$ b) $\sqrt{100} < 5$

19. a) $\sqrt{50} < 25$ b) $\sqrt{1000} < 32$

20. a) $\sqrt[6]{30}$ c) $\sqrt[8]{79}$
b) $\sqrt[6]{130}$ d) $\sqrt[30]{20}$

21. a) $\sqrt[9]{a}$ c) $\sqrt[8]{a}$
b) $\sqrt[16]{a}$ d) $\sqrt[25]{a}$

22. a) $\sqrt{\sqrt[n]{110}} = \sqrt[12]{110}$
$2\,n = 12$
$n = 6$
b) $3\,n = 12$
$n = 4$

23. a) $\sqrt[3]{3^2}$ c) $\sqrt{30}$ e) $\sqrt[3]{3^2}$

b) $\sqrt[4]{15^3}$ d) 5 f) $\sqrt[5]{11^2}$

24. a) $\sqrt{5}$ c) $\sqrt[3]{5^2}$ e) $\sqrt{10}$

b) $\sqrt[3]{2}$ d) $\sqrt[3]{3}$ f) $\sqrt[5]{2^2}$

25. a) 3 c) 3 e) 5

b) 7 d) 11 f) 2

26. a) $2\sqrt{5}$ c) $2\sqrt[5]{3^3}$

b) $5\sqrt[3]{2}$ d) $75\sqrt[4]{3}$

e) $13\,500\sqrt{2 \cdot 3} = 13500\sqrt{6}$

f) $864\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5} = 864\sqrt{30}$

g) $288\sqrt[4]{2 \cdot 3^3}$

h) $400\sqrt[10]{2^3 \cdot 5^3}$

27. a) $3\sqrt{5}$ e) $4\sqrt{7}$

b) $2\sqrt{5}$ f) $4\sqrt[3]{18}$

c) $6\sqrt[3]{6}$ g) 6

d) $5\sqrt[4]{2}$ h) $2\sqrt{5}$

28. a) $\sqrt{12}$ e) $\sqrt[3]{250}$

b) $\sqrt{20}$ f) $\sqrt[5]{96}$

c) $\sqrt[3]{24}$ g) $\sqrt[5]{20\,000}$

d) $\sqrt[3]{40}$ h) $\sqrt[5]{200\,000}$

29. a) $\sqrt{180}$ e) $\sqrt[3]{256}$ i) $\sqrt[4]{100\,000}$

b) $\sqrt{98}$ f) $\sqrt[3]{960}$ j) $\sqrt[3]{128}$

c) $\sqrt{605}$ g) $\sqrt[4]{20\,000}$ l) $\sqrt[5]{486}$

d) $\sqrt[3]{500}$ h) $\sqrt[4]{30\,000}$ m) $\sqrt[4]{2\,048}$

30. a) $2\sqrt{7} + 3\sqrt{7} = 5\sqrt{7}$

b) $2\sqrt{6} + 4\sqrt{6} = 6\sqrt{6}$

c) $3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$

d) $5\sqrt[7]{4} - \sqrt[3]{4} = 4\sqrt[3]{4}$

31. a) $2\sqrt{11} + 3\sqrt{11} + 10\sqrt{11} = 15\sqrt{11}$

b) $2\sqrt{10} + 3\sqrt{10} - 5\sqrt{10} = 0$

c) $5\sqrt[3]{6} - (2\sqrt[3]{6} + 3\sqrt[3]{6}) = 6\sqrt[3]{6}$

d) $4\sqrt[3]{3} - (2\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{3}) = \sqrt[3]{3}$

32. a) $<$

b) $<$

33. a) 11,40 b) 6,45 c) 6,78

34. a) $2\sqrt{2} = 2{,}83$ g) 6

b) 1 h) 2

c) 0 i) $\sqrt[3]{2}$

d) 2 j) $3\sqrt[3]{2}$

e) $3\sqrt{3} = 5{,}20$ l) $\sqrt[3]{2^5} = 2\sqrt[3]{2^2}$

f) $\sqrt{3} = 1{,}73$ m) 2

35. $(\sqrt{2} + \sqrt{5})(2\sqrt{2} + 5\sqrt{5})$

$4 + 5\sqrt{10} + 2\sqrt{10} + 25$

$29 + 7\sqrt{10}$

36. a) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})(3\sqrt{3} - \sqrt{2})$

$9 - \sqrt{6} + 3\sqrt{6} - 2$

$7 + 2\sqrt{6}$

b) $(5 + \sqrt{2})(7 - \sqrt{2})$

$35 - 2 = 33$

c) $(\sqrt{10} - 3)(\sqrt{2} + \sqrt{5})$

$2\sqrt{5} + 5\sqrt{5} - 3\sqrt{5} - 3\sqrt{5}$

$-\sqrt{5} + 2\sqrt{2}$

d) $(3 + 2\sqrt{3})(5 - 3\sqrt{3})$

$15 - 9\sqrt{3} + 10\sqrt{3} - 18$

$\sqrt{3} - 3$

37. $(\sqrt[3]{18} + \sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{2})$

$\sqrt[3]{162} - \cancel{\sqrt[3]{36}} + \cancel{\sqrt[3]{36}} - \sqrt[3]{8}$

$3\sqrt[3]{6} - 2$

38. a) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 4 + 2\sqrt{6} + 3 =$

$= 7 + 2\sqrt{6}$

b) $(\sqrt{7} + \sqrt{2})(\sqrt{7} - \sqrt{2}) = 7 - 2 = 5$

39. a) $(\sqrt{5} + 1)^2 = 5 + 2\sqrt{5} + 1 = 6 + 2\sqrt{5}$

b) $(2\sqrt{10} + 3)^2 = 40 + 12\sqrt{10} + 9 =$

$49 + 12\sqrt{10}$

c) $(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1) = 2$

d) $(\sqrt{17} + \sqrt{3})(\sqrt{17} + \sqrt{3}) = 14$

40. $\dfrac{(\sqrt{10} + \sqrt{6})^2 - (\sqrt{10} + \sqrt{6})^2}{(\sqrt{45} + \sqrt{5})} =$

$= \dfrac{\cancel{10} + 2\sqrt{\cancel{60}} + \cancel{6} - \cancel{10} + 2\sqrt{\cancel{60}} - \cancel{6}}{(\sqrt{45} + \sqrt{5})}$

$= \dfrac{4\sqrt{60}}{3\sqrt{5} + \sqrt{5}} = \dfrac{{}^{2}\cancel{8}\sqrt{3} \cdot \cancel{\sqrt{5}}}{\cancel{4}\cancel{\sqrt{5}}} = 2\sqrt{3}$

41. $(\sqrt[4]{2}+1)(\sqrt[4]{2}-1)(\sqrt{2}+1) =$

$= [(\sqrt[4]{2})^2 - 1^2]\cdot(\sqrt{2}+1) =$

$= (\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) =$

$= (\sqrt{2})^2 - 1^2 = 2 - 1 = 1$

42. $(3\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{4}-2\sqrt[3]{2}+6)$

$\cancel{3\sqrt[3]{8}} - \cancel{6\sqrt[3]{4}} + 18\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{16} - \cancel{2\sqrt[3]{8}} + \cancel{6\sqrt[3]{4}}$

$3\sqrt[3]{8} - 18\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{16}$

$2 + 18\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{2}$

$2 + 20\sqrt[3]{2}$

43. a) $(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{2}-1)$

$\sqrt[3]{8} - \cancel{\sqrt[3]{4}} + \cancel{\sqrt[3]{4}} - \sqrt[3]{2}$

$2 - \sqrt[3]{2}$

b) $(\sqrt[3]{100}+2\sqrt[3]{10})(\sqrt[3]{100}-5\sqrt[3]{10}+10) =$

$= \sqrt[3]{10\,000} + 5\sqrt[3]{1\,000} + \cancel{10\sqrt[3]{100}} +$

$+ 2\sqrt[3]{1\,000} - \cancel{10\sqrt[3]{100}} + 20\sqrt[3]{10} =$

$= 10\sqrt[3]{10} + 50 + 20\sqrt[3]{10} =$

$= 70 + 30\sqrt[3]{10}$

44. a) $\frac{3}{\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

b) $\frac{4}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$

c) $\frac{14}{\sqrt{21}}\cdot\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{21}} = \frac{\overset{2}{\cancel{14}}\sqrt{21}}{\cancel{21}_3} = \frac{2\sqrt{21}}{3}$

d) $\frac{8}{3\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{6} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$

e) $\frac{7}{6\sqrt{7}}\cdot\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{\cancel{7}\sqrt{7}}{6\cdot\cancel{7}} = \frac{\sqrt{7}}{6}$

f) $\frac{1}{7\sqrt{11}}\cdot\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{11}}{77}$

45. a) $\frac{4}{\sqrt[5]{4}}\cdot\frac{\sqrt[5]{4^4}}{\sqrt[5]{4^4}} = \frac{\cancel{4}\sqrt[5]{4^4}}{\cancel{4}} = \sqrt[5]{4^4}$

b) $\frac{4}{\sqrt[8]{3}}\cdot\frac{\sqrt[8]{3^7}}{\sqrt[8]{3^7}} = \frac{4\sqrt[8]{3^7}}{3}$

46. a) sim

b) não

c) sim

47. a) $\frac{1}{\sqrt[4]{3^3}}\cdot\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{3}} = \frac{\sqrt[4]{3}}{3}$

b) $\frac{3}{\sqrt[5]{2}}\cdot\frac{\sqrt[5]{2^4}}{\sqrt[5]{2^4}} = \frac{3\sqrt[5]{2^4}}{2}$

c) $\frac{5}{\sqrt{7}}\cdot\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{5\sqrt{7}}{7}$

48. a) $\frac{1}{10\sqrt[3]{3}}\cdot\frac{\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3^2}} = \frac{\sqrt[3]{9}}{30}$

b) $\frac{1}{\sqrt[3]{49}}\cdot\frac{\sqrt[3]{49^2}}{\sqrt[3]{49^2}} = \frac{\sqrt[3]{49^2}}{49}$

c) $\frac{20}{\sqrt[8]{2^5}}\cdot\frac{\sqrt[8]{2^3}}{\sqrt[8]{2^3}} = \frac{\overset{10}{\cancel{20}}\sqrt[8]{8}}{\cancel{2}} = 10\sqrt[8]{8}$

49. a) $\frac{3}{\sqrt[6]{5^5}}\cdot\frac{\sqrt[6]{5}}{\sqrt[6]{5}} = \frac{3\sqrt[6]{5}}{5}$

b) $\frac{4}{7\sqrt[5]{3^3}}\cdot\frac{\sqrt[5]{3^2}}{\sqrt[5]{3^2}} = \frac{4\sqrt[5]{3^2}}{7\cdot 3} = \frac{4\sqrt[5]{9}}{21}$

c) $\frac{5}{\sqrt[4]{10^3}}\cdot\frac{\sqrt[4]{10}}{\sqrt[4]{10}} = \frac{\overset{1}{\cancel{5}}\cdot\sqrt[4]{10}}{\cancel{10}_2} = \frac{\sqrt[4]{10}}{2}$

d) $\frac{3}{\sqrt[6]{2^5}}\cdot\frac{\sqrt[6]{2}}{\sqrt[6]{2}} = \frac{3\sqrt[6]{2}}{2}$

50. a) $\frac{6}{(\sqrt{5}+1)}\cdot\frac{(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}-1)} =$

$\frac{6(\sqrt{5}-1)}{5-1)} = \frac{3(\sqrt{5}-1)}{2}$

b) $\frac{(\sqrt{10}-3)}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})}\cdot\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5}+\sqrt{2})} =$

$= \frac{(\sqrt{50}+\sqrt{20}-3\sqrt{5}-3\sqrt{2})}{5-2} =$

$= \frac{5\sqrt{2}+2\sqrt{5}-3\sqrt{5}-3\sqrt{2})}{3} =$

$= \frac{2\sqrt{2}-\sqrt{5}}{3}$

51. a) $\frac{15}{(4-\sqrt{10})}\cdot\frac{(4+\sqrt{10})}{(4+\sqrt{10})} =$

$= \frac{60+15\sqrt{10}}{16-10} = \frac{\cancel{60}+\overset{5}{\cancel{15}}\sqrt{10}}{\cancel{6}_2} =$

$= \frac{20+5\sqrt{10}}{2}$

b) $\frac{1}{(\sqrt{7}-2)} \cdot \frac{(\sqrt{7}+2)}{(\sqrt{7}+2)} =$

$= \frac{(\sqrt{7}+2)}{7-2} = \frac{\sqrt{7}+2}{5}$

c) $\frac{11}{(11-\sqrt{11})} \cdot \frac{(11+\sqrt{11})}{(11+\sqrt{11})} = \frac{11(11+\sqrt{11})}{121-11} =$

$= \frac{\cancel{11}(11+\sqrt{11})}{\cancel{110}_{10}} = \frac{11+\sqrt{11}}{10}$

d) $\frac{3}{(\sqrt{10}+1)} \cdot \frac{(\sqrt{10}-1)}{(\sqrt{10}-1)} = \frac{3(\sqrt{10}-1)}{10-1} =$

$= \frac{\cancel{3}(\sqrt{10}-1)}{\cancel{9}_{3}} = \frac{\sqrt{10}-1}{3}$

e) $\frac{\sqrt{2}}{(3\sqrt{2}-1)} \cdot \frac{(3\sqrt{2}+1)}{(3\sqrt{2}+1)} =$

$= \frac{\sqrt{2}(3\sqrt{2}+1)}{18-1} = \frac{6+\sqrt{2}}{17}$

f) $\frac{(\sqrt{7}+1)}{(\sqrt{7}-2)} \cdot \frac{(\sqrt{7}-2)}{(\sqrt{7}-2)} =$

$= \frac{7-2\sqrt{7}+\sqrt{7}-2)}{7-4} = \frac{5+\sqrt{7}}{3}$

Respostas da seção Para estudar

52. a) 625 b) –243 c) 12,25 d) 4750,1 e) 0,25

53. a) $\frac{1}{9}$ b) $\frac{1}{8}$ c) 1 d) $\frac{1}{16}$ e) 4 f) $\frac{1}{1\,000}$

54. a) 243 b) 1 000 c) 12,25

55. a) $\frac{1}{343}$ b) 1 c) 7^{21} d) $\frac{125}{4}$

56. a) V b) V c) F d) F

57. $\frac{1}{x^3 \cdot y^2}$

58. a) 3 b) 2 c) –10 d) –4

59. a) $\frac{2}{5}$ b) $\frac{9}{100}$ c) $-\frac{1}{3}$ d) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{4}{3}}$

60. a) $\sqrt[10]{m}$ b) $\sqrt[8]{17}$ c) $\sqrt[20]{2}$ d) $\sqrt[18]{a}$

61. a) $\sqrt{7}$ b) $\sqrt{3}$ c) $200\sqrt{3}$ d) 3

62. a) $27\sqrt{7}$ b) 20 c) $30\sqrt{30}$ d) 500

63. a) $\sqrt{6}+5\sqrt{3}$ b) $3-\sqrt{6}$ c) $\sqrt[3]{35}-\sqrt[3]{14}$

64. –120

65. a) $\sqrt{81}+\sqrt{6}-\sqrt{54}-\sqrt{10}$ b) $1-\sqrt{2}$ c) $3\sqrt{10}+\sqrt{50}-3-\sqrt{15}$ d) $-17+\sqrt{3}$

66. $\frac{5+\sqrt{15}}{2}$

67. a) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ b) $\frac{4\sqrt{2}}{5}$ c) $\frac{4\sqrt{7}}{7}$ d) $\frac{2\sqrt{42}}{3}$

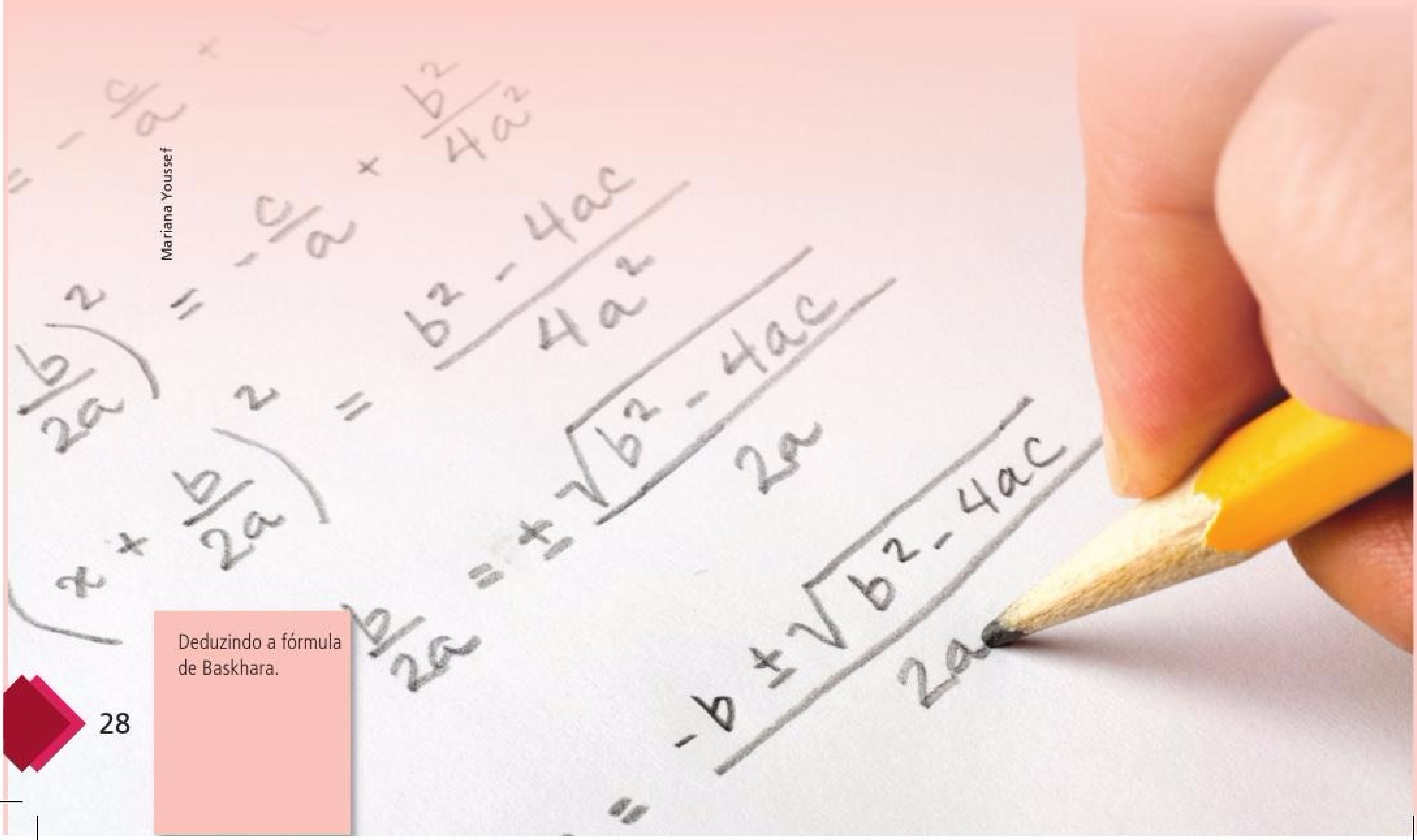
68. a) $\frac{\sqrt[4]{3}}{3}$ b) $\frac{\sqrt[5]{3^2}}{9}$ c) $\frac{3\sqrt[3]{49}}{7}$ d) $\frac{7\sqrt{5}}{5}$

69. a) $-\frac{5(1-\sqrt{3})}{2}$ b) $\frac{\sqrt{7}+2}{3}$ c) $\frac{2-\sqrt{2}}{9}$ d) $\frac{5+3\sqrt{3}}{5}$

capítulo **2**

Equações do $2^{\underline{o}}$ grau

- Equações do segundo grau
- Fórmula de Bhaskara
- Resolvendo equações por fatoração
- Número de raízes reais de uma equação do segundo grau
- Relação entre coeficientes e raízes
- Equações do segundo grau literais
- Equações biquadradas



Mariana Youssef

Deduzindo a fórmula de Baskhara.

Conversa Inicial

Vamos procurar um número que somado com 3 dê o mesmo resultado que obteríamos se esse mesmo número fosse multiplicado por 3? A melhor forma de descobrir qual é esse número é utilizar a linguagem matemática e formular a seguinte sentença:

$$\mathbf{x + 3 = 3 \cdot x}$$

Essa é uma equação do 1º grau, pois tem termos numéricos e literais em que o expoente da incógnita **x** é 1. Relembre que esses termos literais são chamados **monômios** e, no caso de uma equação do 1° grau, temos monômios do 1º grau.

Você já sabe como resolver equações do 1º grau isolando a incógnita **x**:

$$x + 3 = 3x \rightarrow x - 3x = -3$$
$$-2x = -3 \rightarrow x = \frac{3}{2}$$

Como $\frac{3}{2} = 1{,}5$, você pode conferir:

$$1{,}5 + 3 = 3 \cdot 1{,}5 = 4{,}5$$

Por outro lado, existem situações que podem ser resolvidas por equações que não são do 1º grau. Suponha, por exemplo, que desejamos encontrar um número **x** não nulo, tal que, dividindo-se 4 por este número encontremos o mesmos resultado se o subtrairmos de 4. Não é difícil montarmos a equação:

$$\frac{4}{x} = 4 - x$$

Porém, sua resolução não é tão simples como uma equação de 1º grau. Veja o que acontece:

$$\frac{4}{x} = 4 - x \rightarrow 4 = x\,(4 - x)$$
$$4 = 4\,x - x^2 \rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$$

Observe na equação que obtivemos, que temos um monômio do 1º grau **(−4x)** e um monômio do 2º grau (**x²**), que faz com que ela seja uma **equação do 2º grau**. Ainda não temos condições de resolver essa equação, mas podemos verificar que x = 2 é um valor que satisfaz equação. Veja:

$$2^2 - 4 \cdot 2 + 4 = 4 - 8 + 4 = 0$$

Para resolvermos uma equação do 1º grau, temos que fazer as transformações necessárias para isolar a incógnita **x** em um dos membros da equação, fazendo com que no outro membro tenhamos valores numéricos. Porém, isso não é possível para uma equação do 2º grau. Existirá algum processo que possa fazer com que encontremos as soluções deste tipo de equação? Se na equação do 1º grau temos uma solução, quantas serão as soluções para a equação de 2º grau? Vamos procurar respostas para essas questões.

Equações do segundo grau

Equação do 2º grau com incógnita **x** é toda equação do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, onde **a**, **b** e **c** são números reais, e $a \neq 0$.

No estudo de equações do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, as letras **a ≠ 0**, **b** e **c** são denominadas **coeficientes** da equação. Veja alguns exemplos:

- $3x^2 - 11x + 2 = 0 \rightarrow a = 3, b = -11$ e $c = 2$.
- $x^2 - 2x - 5 = 0 \rightarrow a = 1, b = -2$ e $c = -5$.
- $5x^2 - 7x = 0 \rightarrow a = 5, b = -7$ e $c = 0$.
- $x^2 - 1 = 0 \rightarrow a = 1, b = 0$ e $c = -1$.

Professor: Certifique-se se os alunos conseguem identificar corretamente os coeficientes a, b e c, se a ordem dos monômios for diferente da padrão.

Atividades

1. Qual é o número que somado com 11 ou multiplicado por 11 dá, nos dois casos, o mesmo resultado? $x = \frac{11}{10}$

2. Qual é o número **x**, tal que $4 - x = 4x$?
$x = \frac{4}{5}$

3. Considere os números 1, 2, 3, 4 e 5. Dois deles são soluções da equação do 2º grau $x^2 - 7x + 10 = 0$. Quais são esses números?
$x' = 2$ e $x'' = 5$

4. Considere a equação do 2º grau:

$$x^2 + x - 12 = 0.$$

3 é solução
–3 não é solução

a) 3 é solução dessa equação? E –3?

b) 4 é solução dessa equação? E –4?
4 não é solução
–4 é solução

5. Considere os números 3, 2, 1 e 0,5. Dois deles são soluções de $2x^2 - 5x + 2 = 0$. Quais?
3 → não é solução
2 → é solução
1 → não é solução
0,5 → é solução
S = {0,5; 2}

6. Em cada equação do 2º grau a seguir, diga quais são os valores de **a**, **b** e **c**:

a) $3x^2 + 11x + 6 = 0$ $a = 3, b = 11, c = 6$

b) $x^2 + x - 2 = 0$ $a = 1, b = 1, c = -2$

c) $2x^2 - 50 = 0$ $a = 2, b = 0, c = -50$

d) $x^2 - 4{,}5x + 4{,}5 = 0$ $a = 1, b = -4{,}5, c = 4{,}5$

Uso de calculadora

7. Verifique, usando a calculadora, se –35 é uma raiz da equação $x^2 - 315x - 12\,250 = 0$
sim

Resolvendo as primeiras equações do 2º grau

Vamos iniciar a resolução de equações do 2º grau por um caso muito particular: a resolução de equações do tipo $(mx + n)^2 = k$. Note que o primeiro membro é o quadrado de uma expressão do 1º grau, e o segundo membro um valor numérico.

Para resolver a equação, devemos responder à seguinte pergunta: *qual é o valor de x no monômio que permite que este resulte k, quando elevado ao quadrado?*

Observe que, se o monômio foi elevado ao quadrado resultando **k**, seu valor poderá ser $\sqrt{k}$ ou $-\sqrt{k}$

Observe algumas resoluções com base neste conceito:

a) Vamos resolver a equação $(x-3)^2 = 9$.

$$(x-3)^2 = 9 \rightarrow x - 3 = \pm\sqrt{9}$$

Logo:

$$x - 3 = \pm 3$$

Para $x - 3 = 3$ temos $x = 6$;
Para $x - 3 = -3$ decorre que $x = 0$.
Portanto, a equação tem duas raízes:
$x = 6$ e $x = 0$ e dizemos que seu conjunto solução é $S = \{0; 6\}$

b) Vamos, agora, resolver a equação $(3x-1)^2 = 25$.

$$(3x-1)^2 = 25 \rightarrow 3x - 1 = \pm 31\sqrt{25}$$
$$3x - 1 = \pm 5$$

Obteremos as duas raízes, fazendo:

$$3x - 1 = 5 \rightarrow x = 2$$
$$3x - 1 = -5 \rightarrow x = -\frac{4}{3}$$

Assim, $S = \left\{-\frac{4}{3}; 2\right\}$

c) Observe agora a equação $(x+5)^2 = -9$
Esta equação não terá solução no conjunto dos números reais, pois não existe um monômio que elevado ao quadrado resulte -9. Analisando por outro ângulo, não existe no conjunto dos reais $\sqrt{-9}$. Logo, para esta equação, $S = \varnothing$.

Atividades

8. Resolva as seguintes equações:

a) $(x-10)^2 = 36$ $S = \{4, 16\}$

b) $(x+5)^2 = 4$ $S = \{-3, -7\}$

c) $\left(\frac{x}{2} - 3\right)^2 = 49$ $S = \{-8, 20\}$

d) $\left(\frac{x}{3} + 5\right)^2 = 16$ $S = \{-27, -3\}$

9. Com $x \in R$, resolva a equação $(5x-4)^2 = -9$. não existem raízes reais.

10. Com $x \in R$, resolva as equações:

a) $(x-3)^2 = 16$ $S = \{-1, 7\}$

b) $(x-3)^2 = -16$ não existem raízes reais

c) $\left(\frac{2x}{3} + 4\right)^2 = -1$ não existem raízes reais

d) $(x+2)^2 = 0$ $S = \{-2\}$

11. Com $x \in R$, resolva a equação $x^2 - 6x + 9 = 16$. $S = \{-1, 7\}$

Trinômio quadrado perfeito

Chamamos de trinômio quadrado perfeito ao quadrado de uma expressão do tipo $(mx + n)$. Assim $(mx + n)^2 = m^2x^2 + 2mnx + n^2$ é a expressão de um quadrado perfeito, onde **m** e **n** são números reais diferentes de zero.

Observe alguns exemplos:

a) $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$

b) $9x^2 - 6x + 1 = (3x - 1)^2$

c) $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = (x - \sqrt{2})^2$

A resolução de equações de segundo grau que apresentam quadrados perfeitos é simples. Veja o exemplo:

$$x^2 + 6x + 9 = 16$$

$$(x + 3)^2 = 16 \rightarrow x + 3 = \pm\sqrt{16} \rightarrow x + 3 = \pm 4$$

Para $x + 3 = 4 \rightarrow x = 1$

Para $x + 3 = -4 \rightarrow x = -7$

Logo, $S = \{-7;1\}$

Atividades

12. A seguir, cada trinômio é o quadrado de uma expressão, representada por ★. Qual é essa expressão?

a) $x^2 + 8x + 16 = (★)^2$ $(x + 4)^2$

b) $x^2 - 10x + 25 = (★)^2$ $(x - 5)^2$

c) $4x^2 + 12x + 9 = (★)^2$ $(2x + 3)^2$

d) $16x^2 - 8x + 1 = (★)^2$ $(4x - 1)^2$

13. A expressão dada é um trinômio quadrado perfeito. Qual é o monômio que está no lugar de ★?

a) $x^2 + ★ + 36$ $12x$

b) $4x^2 - ★ + 36$ $24x$

c) $x^2 - ★ + 49$ $14x$

d) $9x^2 + ★ + 49$ $42x$

14. Qual é o monômio do 2º grau que deve ser colocado no lugar de ★, para que a expressão dada seja um trinômio quadrado perfeito?

a) $★ - 16x + 64$ x^2

b) $★ - 16x + 4$ $16x^2$

c) $★ + 44x + 121$ $4x^2$

d) $★ - 44x + 4$ $121x^2$

15. Com $x \in R$, resolva as equações:

a) $x^2 - 6x + 9 = 49$ $S = \{-4, 10\}$

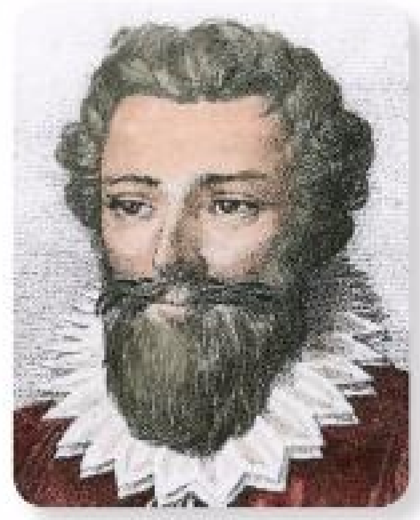
b) $x^2 + 2x + 1 = 100$ $S = \{-11; 9\}$

c) $4x^2 - 36x + 81 = 9$ $S = \{3, 6\}$

d) $9x^2 + 30x + 25 = -16$
não existem raízes reais

Quando, quem e onde

Desde a Antiguidade os matemáticos buscavam um processo para se resolver equações do segundo grau. Diversos métodos práticos foram aplicados para casos específicos, mas apenas no século IX o matemático árabe Al-Khowarizmi estabeleceu um processo metódico para resolver equações de 2º grau, sem, no entanto, representá-lo simbolicamente.


Wikimedia

Viète

Apenas no século XII, o matemático hindu Bhaskara propôs um método que traduzia as ideias de Al-Khowarizmi para a resolução de equações de 1º e 2º graus, utilizando representações geométricas.

Com base nos trabalhos de Bhaskara, o francês François Viète (1540-1603), que é conhecido como o pai da Álgebra, aprimorou a fórmula de resolução da equação do segundo grau com uma incógnita, que ficou conhecida como fórmula de Bhaskara.

Fórmula de Bhaskara

O desenvolvimento da fórmula de Bhaskara baseia-se em fazer com que uma equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$ seja reduzida a um trinômio quadrado perfeito. Isso pode ser feito através de transformações convenientes nos dois membros da equação. Vamos, então, deduzir a fórmula de Bhaskara para:

$$\mathbf{ax^2 + bx + c = 0, \text{ com } a \neq 0}$$

Isolamos $ax^2 + bx$ no primeiro membro e, em seguida, multiplicamos os dois membros da equação por 4a:

$$\mathbf{ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow ax^2 + bx = -c}$$

$$\mathbf{4a^2x^2 + 4abx = -4ac}$$

Em seguida, utlizaremos o seguinte artifício:

Pesquisamos um termo que deve ser colocado no lugar de ▼ na expressão $4a^2x^2 + 4abx +$ ▼ para que ela se transforme num trinômio quadrado perfeito. Para que obtenhamos um quadrado perfeito, já temos o quadrado de 2ax e um duplo produto de 2ax por b. Logo, o termo ▼ é $\mathbf{b^2}$. Sendo assim, somamos $\mathbf{b^2}$ aos dois membros da equação, obtendo:

$$4a^2x^2 + 4abx + \mathbf{b^2} = -4ac + \mathbf{b^2}$$

$$\underbrace{4a^2x^2 + 4abx + \mathbf{b^2}}_{\text{trinômio quadrado perfeito}} = b^2 - 4ac$$

$$(2ax + b)^2 = \underbrace{b^2 - 4ac}_{\Delta}$$

Chamando $b^2 - 4ac$ de Δ (lê-se **delta**) teremos $(2ax + b)^2 = \Delta$.

Vamos analisar, agora, quais os possíveis valores de x na equação:

$$\mathbf{(2ax + b)^2 = \Delta}$$

Como Δ é igual a $(2ax + b)^2$, não existirão valores reais de x que sejam raízes da equação se Δ for negativo.

Assim, podemos dizer que:

- Quando $\Delta < 0$, a equação não tem raízes reais.
- Quando $\Delta \geq 0$, teremos:

$$(2ax + b)^2 = \Delta \rightarrow 2ax + b = \pm\sqrt{\Delta}$$

Agora, resolvemos essas duas equações do 1º grau, isolando **x**:

$$2ax + b = \sqrt{\Delta} \rightarrow x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

ou

$$2ax + b = -\sqrt{\Delta} \rightarrow x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Assim, na equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq$ e $\Delta = b^2 - 4ac$, temos:

- **se $\Delta < 0 \rightarrow$ a equação não tem raízes reais**
- **se $\Delta \geq 0 \rightarrow x = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$**

Professor: Muitas vezes, o aluno acredita que o sinal de –b na fórmula de Bhaskara indica que este valor deve ser sempre negativo. Lembre-o que –b significa "b com o sinal trocado". Portanto, se b = 3, –b = –3, se b = –5, –b = 5, por exemplo.

Observe os exemplos:

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$,

$a = 1$, $b = -5$ e $c = 6$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 \rightarrow \Delta = 1$

Como $\Delta > 0$, a equação tem duas soluções:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2} \begin{cases} \dfrac{5+1}{2} = 3 \\ \text{ou} \\ \dfrac{5-1}{2} = 2 \end{cases}$$

Portanto, as raízes da equação são $x = 3$ e $x = 2 \rightarrow S = \{2; 3\}$

b) Note como resolvemos a equação $9x^2 - 12x + 4 = 0$.

$a = 9$, $b = -12$ e $c = 4$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 4 = 144 - 144 \rightarrow \Delta = 0$

A equação tem as seguintes soluções:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-12) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 9} = \frac{12 \pm 0}{18} \begin{cases} \dfrac{12+0}{18} = \dfrac{\cancel{12}^{\,2}}{\cancel{18}_{\,3}} = \dfrac{2}{3} \\ \text{ou} \\ \dfrac{12-0}{18} = \dfrac{\cancel{12}^{\,2}}{\cancel{18}_{\,3}} = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Neste caso, dizemos que a equação tem duas raízes reais e iguais a $\frac{2}{3}$.

c) Vamos usar a fórmula de Bhaskara para resolver a equação $5x^2 + 4x + 2 = 0$.

$a = 5$, $b = 4$ e $c = 2$

$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 5 \cdot 2 = 16 - 40 \rightarrow \Delta = -24$

Como $\Delta < 0$, a equação não tem soluções reais.

Portanto, $S = \varnothing$.

Atividades

16. Resolva as seguintes equações, utilizando a fórmula de Bhaskara:

a) $2x^2 + 7x + 5 = 0$ $S = \{-1; -\frac{5}{2}\}$

b) $x^2 + 5x - 14 = 0$ $S = \{-7; 2\}$

c) $x^2 - 6x + 9 = 0$ $S = \{3\}$

d) $-x^2 + 8x + 9 = 0$ $S = \{-1, 9\}$

e) $2x^2 + 3x + 11 = 0$ não existem raízes reais

f) $25x^2 - 10x + 1 = 0$ $\frac{1}{5}$

17. Resolva a equação $x^2 - 9x + 20 = 12$. $S = \{1; 8\}$

18. Resolva as equações:

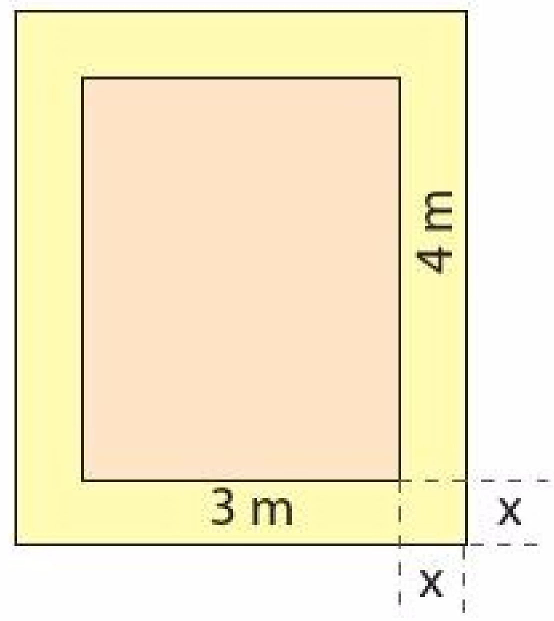
a) $x^2 - 7x + 12 = 2$ $S = \{2; 5\}$

b) $x^2 + x - 12 = -15$ não existem raízes reais

c) $x^2 + 9x + 8 = 8$ $S = \{0; -9\}$

d) $x^2 + 10x + 24 = -1$ $S = \{-5\}$

19. Um canteiro retangular tem 4 m de comprimento e 3 m de largura. Ao seu redor, externamente, será feito um passeio de largura **x**. Há material para cimentar uma área de 30 m². Para se utilizar todo esse material, qual deve ser a largura **x** desse passeio? $S = \{1,5 \text{ m}\}$



Interpretar texto

20. O comprimento e a largura de uma piscina são números pares consecutivos e a profundidade é 1,8 m. Qual é o comprimento e a largura dessa piscina, sabendo que sua capacidade é de 216000 L? 10 m e 12 m

21. Apresentamos a seguir um quebra-cabeça da Índia antiga. Leia o texto com atenção e escreva-o na forma de uma equação, encontrando sua solução.

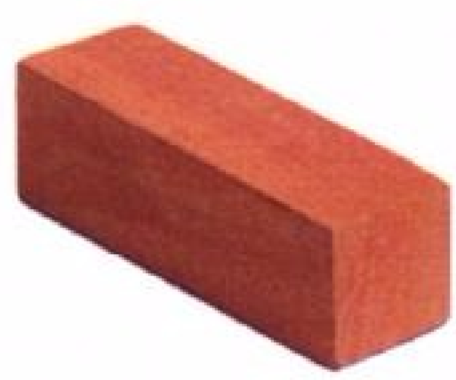
"Alegravam-se os macacos divididos em dois bandos: sua oitava parte ao quadrado no bosque brincava.
Com alegres gritos, doze gritando no campo estão. Sabes quantos macacos há na manada no total?" 48 ou 16 macacos.

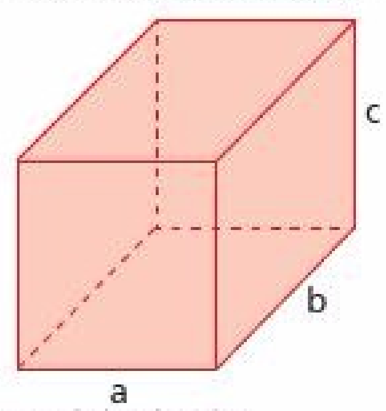
Desafio

O paralelepípedo é um bloco retangular de granito considerado o pavimento mais antigo do mundo e, segundo alguns especialistas, é uma alternativa ecológica para áreas externas como ruas, praças, condomínios, fazendas, entre outros.

O volume do paralelepípedo a seguir é *abc* e sua área é a soma das áreas das suas faces.

Hshii | Dreamstime.com





paralelepípedo

Sabendo que as dimensões a, b, c são números ímpares consecutivos e a soma das áreas das faces do paralelepípedo da figura é 142 cm², pede-se calcular o seu volume.

Equações do 2º grau incompletas

Uma equação do 2º grau é **incompleta** quando o coeficiente **b = 0** ou o coeficiente **c = 0** ou, ainda, quando ambos são nulos. Lembre-se de que o coeficiente **a** nunca é nulo, pois trata-se de uma equação do 2º grau.

Observe os exemplos:

- $3x^2 + 2x = 0 \rightarrow a = 3,\ b = 2$ e $c = 0$.
- $2x^2 - 8 = 0 \rightarrow a = 2,\ b = 0$ e $c = -8$.
- $x^2 = 0 \rightarrow a = 1,\ b = 0$ e $c = 0$.

As equações incompletas podem ser resolvidas utilizando-se a fórmula de Bhaskara. No entanto, existem processos mais simples para a sua resolução. Vamos estudá-los nos casos em que **b = 0** e **c = 0**, pois quando ambos são nulos a equação reduz-se a $x^2 = 0$ e tem $x = 0$ como solução:

a) b = 0 → equações do tipo $ax^2 + c = 0$

Essas equações podem ser resolvidas isolando-se $\mathbf{x^2}$ num dos membros. Acompanhe os exemplos:

- Vamos resolver a equação $5x^2 - 80 = 0$.

  $5x^2 - 80 = 0 \rightarrow 5x^2 = 80 \rightarrow x^2 = 16 \rightarrow x = \pm\sqrt{16}$

  Logo, $x = 4$ ou $x = -4 \rightarrow S = \{-4; 4\}$
- Vamos resolver a equação $3x^2 + 30 = 0$.

  $3x^2 + 30 = 0 \rightarrow 3x^2 = -30 \rightarrow x^2 = -10$

Como não existe nenhum número real que, elevado ao quadrado, resulte –10, a equação não tem solução. Portanto, $S = \varnothing$.

b) c = 0 equações do tipo $ax^2 + bx = 0$

Neste caso, é mais simples resolvê-las colocando-se **x** ou seus múltiplos em evidência.

$$ax^2 + bx = 0 \rightarrow x\,(ax + b) = 0$$

Como temos um **produto igual a zero**, um dos fatores (ou ambos) deve ser zero. Sendo assim, devemos supor os dois casos para encontrar as raízes:

$$ax^2 + bx = 0 \rightarrow \underbrace{x\,(ax + b)}_{\text{produto nulo}} = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ \text{ou} \\ ax + b = 0 \end{array} \right.$$

Veja que, nesse caso, **x = 0**, será sempre uma solução, pois colocamos o **x** em evidência. A outra solução virá da equação do 1º grau **ax + b = 0**. Acompanhe os exemplos:

- Vamos resolver a equação $4x^2 - 12x = 0$.

$$4x^2 - 12x = 0 \rightarrow 4x(x - 3) = 0 \left\langle \begin{array}{l} 4x = 0 \rightarrow x = 0 \\ \text{ou} \\ x - 3 = 0 \rightarrow x = 3 \end{array} \right.$$

Portanto, as raízes da equação são $x = 0$ e $x = 3$ e $S = \{0; 3\}$.

• Vamos resolver a equação $3x^2 - 7x = 0$.

$$3x^2 - 7x = 0 \rightarrow x(3x-7) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ \text{ou} \\ 3x - 7 = 0 \rightarrow x = \frac{7}{3} \end{array} \right.$$

Portanto, as raízes da equação são $x = 0$ e $x = \frac{7}{3}$ ou $S = \left\{0; \frac{7}{3}\right\}$.

Atividades

22. Considere a equação $2x^2 - 50 = 0$. Resolva essa equação do 2º grau incompleta:

a) sem usar a fórmula de Bhaskara; $x = \pm 5$

b) usando a fórmula de Bhaskara. $x' = 5$ $x'' = -5$

23. Considere a equação $x^2 - 6x = 0$. Resolva essa equação do 2º grau incompleta:

a) sem usar a fórmula de Bhaskara; $x = 6$

b) usando a fórmula de Bhaskara. $x' = 0$ e $x'' = 6$

24. Resolva as equações a seguir, onde **x** é a variável real:

a) $x^2 = 25$ $x = \pm 5$

b) $x^2 - 100 = 0$ $x = \pm 10$

c) $5x^2 - 45 = 0$ $x = \pm 3$

d) $x^2 = -25$ não existem raízes reais

25. Encontre os valores reais de **x**, tais que:

a) $x^2 - 7x = 0$ $S = \{0; 7\}$

b) $2x^2 - 16x = 0$ $S = \{0; 8\}$

c) $5x^2 + 20x = 0$ $S = \{0; -4\}$

d) $-2x^2 - 42x = 0$ $S = \{0; -21\}$

26. Com $x \in R$, resolva as equações:

a) $x^2 - 9 = 0$ $S = \{-3; +3\}$

b) $x^2 - 9x = 0$ $S = \{0; 9\}$

c) $x^2 + 9 = 0$ não existem raízes reais

d) $x^2 + 9x = 0$ $S = \{0; -9\}$

27. Com $x \in R$, resolva:

a) $x^2 = 7$ $S = \{-\sqrt{7}; \sqrt{7}\}$

b) $x^2 = -7$ não existem raízes reais

c) $3x^2 - 27 = 0$ $S = \{-3; +3\}$

d) $2x^2 - 7x = 0$ $S = \{0; \frac{6}{5}\}$

Resolvendo equações por fatoração

Quando estudamos produtos notáveis, aprendemos que podemos fatorar algumas expressões algébricas como, por exemplo, a diferença de quadrados ou o trinômio quadrado perfeito. Observe os dois casos a seguir:

a) $x^2 - 25 = (x + 5)(x - 5)$

b) $x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$

Agora, vamos estudar a forma de se fatorar o trinômio do segundo grau:

$$\mathbf{ax^2 + bx + c, \text{ com } a = 1}$$

Observe a multiplicação a seguir:

$$(x - 5)(x - 4) = x^2 - 4x - 5x + 20 = x^2 \mathbf{- 9}x + \mathbf{20}$$

Note que no trinômio do segundo grau obtido, o coeficiente -9 é a soma $(-5) + (-4)$ e o coeficiente 20 (termo independente de x) é o produto $(-5) \cdot (-4) = +20$.

Será que isto ocorre sempre? Vamos analisar de forma genérica, efetuando a multiplicação $(x + a)(x + b)$:

$$(x + a)(x + b) = x^2 + bx + ax + ab = x^2 + \mathbf{(a + b)}x + \mathbf{ab}$$

De fato, num trinômio do segundo grau, com coeficiente de **x^2 igual a 1**, o coeficiente de **x** será a soma **a + b** e o termo independente será o produto **ab**.

A partir disso, podemos executar a fatoração de um trinômio do segundo grau. Observe o exemplo a seguir:

Vamos fatorar o trinômio de 2º grau $x^2 + 4x + 3$.

Precisamos de dois números tais que sua soma seja 4 e seu produto 3. Vamos representar esta situação da seguinte forma:

$$\begin{cases} a + b = 4 \\ a \cdot b = 3 \end{cases}$$

Fazendo algumas tentativas para **a** e **b**, podemos descobrir que, neste caso,

$$\mathbf{a = 3} \quad \text{e} \quad \mathbf{b = 1}.$$

Podemos então fatorar o trinômio fazendo:

$$\mathbf{x^2 + 4x + 3 = (x + 3)(x + 1)}$$

Fernanda Youssef

A partir de processos de fatoração, podemos resolver, quando possível, uma equação do segundo grau sem lançar mão da fórmula de Bhaskara.

Observe, a resolução da equação $x^2 - x - 20 = 0$, usando a fatoração.

Para fatorar o trinômio $x^2 - x - 20$, precisamos de dois números cuja soma seja -1 e cujo produto seja 20. Os números que satisfazem essas duas condições são -5 e 4 e o trinômio pode ser fatorado como $(x - 5)(x + 4)$.

Agora podemos resolver a equação $x^2 - x - 20 = 0$, pois:

$$\mathbf{x^2 - x - 20 = 0 \rightarrow (x - 5)(x + 4) = 0}$$

Temos novamente duas hipóteses:

$$(x - 5)(x + 4) = 0 \begin{cases} (x - 5) = 0 \rightarrow x = 5 \\ \text{ou} \\ (x + 4) = 0 \rightarrow x = -4 \end{cases}$$

Portanto, as raízes dessa equação são:

$$\mathbf{x = 5 \text{ e } x = -4}$$

ou

$$\mathbf{S = \{-4; 5\}}.$$

É importante salientar que esse tipo de resolução, que se baseia nos coeficientes do trinômio do segundo grau, só é recomendável quando conseguimos encontrar os números que nos permitem a fatoração através de cálculo mental. Caso essa pesquisa seja muito demorada, devemos aplicar a fórmula de Bhaskara.

Atividades

28. Fatore os trinômios do segundo grau:

a) $x^2 - 6x + 8$ $(x - 2)(x - 4)$

b) $x^2 + 10x + 21$ $(x + 3)(x + 7)$

c) $x^2 - 3x - 10$ $(x - 5)(x + 2)$

d) $x^2 - x - 30 = 0$ $(x + 5)(x - 6)$

29. Quando for possível, fatore:

a) $5x^2 - 15x + 10$ $(x - 1)(x - 2)$

b) $-x^2 - 4x - 4$ $-(x + 2)^2$

c) $x^2 + x + 1$ não é possível

d) $2x^2 - 1$ $(x\sqrt{2} - 1)(x\sqrt{2} + 1)$

e) $-4x^2 + 16x - 15$ $[x - \frac{5}{2}][x - \frac{3}{2}]$

f) $3x^2 + 7x + 5$ não é possivel

30. Simplifique a expressão $\dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 - 5x + 6}$. $\dfrac{x + 2}{x - 2}$

31. Simplifique as seguintes expressões:

a) $\dfrac{x - 4}{x^2 - 5x + 4}$ $\dfrac{1}{x - 1}$

b) $\dfrac{x^2 - 3x - 4}{3x + 3}$ $\dfrac{x - 4}{3}$

c) $\dfrac{x^2 - 7x}{x^2 + 3x - 70}$ $\dfrac{x}{x + 10}$

d) $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1}$ $\dfrac{x}{x + 10}$

32. Resolva as seguintes equações sem utilizar a fórmula de Bhaskara:

a) $x^2 - 8x + 15 = 0$ $S = \{3; 5\}$

b) $x^2 - 9x + 14 = 0$ $S = \{2, 7\}$

c) $x^2 + 6x + 8 = 0$ $S = \{-2; -4\}$

d) $x^2 + 12x + 11 = 0$ $S = \{-1; -11\}$

e) $x^2 - 5x + 6 = 0$ $S = \{2; 3\}$

f) $x^2 + 5x - 6 = 0$ $S = \{-6; 1\}$

g) $x^2 - x - 12 = 0$ $S = \{-3; 4\}$

h) $x^2 - 14x - 32 = 0$ $S = \{-2; 16\}$

i) $x^2 - 12x + 36 = 0$ $S = \{6\}$

j) $x^2 + 4x + 4 = 0$ $S = \{2\}$

33. Resolva as equações tentando, inicialmente, não utilizar a fórmula de Bhaskara.

a) $x^2 - 13x + 12 = 0$ $S = \{1; 12\}$

b) $x^2 + 10x + 21 = 0$ $S = \{-7; -3\}$

c) $2x^2 - 7x + 6 = 0$ $S = \{\frac{3}{2}; 2\}$

d) $x^2 + x - 56 = 0$ $S = \{-8; 7\}$

e) $x^2 - 5x + 71 = 0$ não existem raízes reais

f) $x^2 - 14x + 49 = 0$ $S = \{7\}$

g) $x^2 - 12x + 20 = 0$ $S = \{2; 10\}$

h) $x^2 - 8x + 14 = 0$ $S = \{3; \sqrt{2}\}$

i) $x^2 - (3 + \sqrt{2})x + 3\sqrt{2} = 0$

Número de raízes reais de uma equação do segundo grau

Já sabemos que, para uma equação do segundo grau $ax^2 + bc + c = 0$ (com $a \neq 0$), as raízes são determinadas pela fórmula de Bhaskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ onde } \Delta = b^2 - 4ac$$

Se existirem raízes reais, toda equação de segundo grau terá duas raízes, diferentes ou iguais. Para determinarmos o número de raízes reais de uma equação de segundo grau, devemos analisar o valor de $\Delta = b^2 - 4ac$, para verificarmos a existência de $\sqrt{\Delta}$:

- Para $\Delta > 0 \rightarrow$ teremos duas raízes reais e diferentes, cujos valores são:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Para $\Delta = 0 \rightarrow$ teremos duas raízes reais iguais a um único valor:

$$x_1 = x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} = -\frac{b}{2a}$$

- Para $\Delta < 0 \rightarrow \sqrt{\Delta} \in R \rightarrow$ Não existem raízes reais para a equação.

Assim, sempre que for preciso estabelecer o número de raízes de uma equação do segundo grau, basta que analisemos o valor do Δ, pois ele discrimina quantas raízes reais a equação terá. Esta é razão pela qual o Δ é chamado de **discriminante da equação**. Observe alguns exemplos de aplicação dessa discussão:

a) Para quais valores do parâmetro **m** a equação $x^2 + 6x + m = 0$ terá duas raízes reais e distintas?

Neste caso, $\Delta = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot m \rightarrow \Delta = 36 - 4m$

Para que a equação tenha duas raízes reais e distintas, devemos ter $\Delta > 0$:

$$\Delta > 0 \rightarrow 36 - 4m > 0 \rightarrow -4m > -36 \rightarrow 4m < 36 \rightarrow m < 9$$

b) Para quais valores do parâmetro **p** a equação $x^2 + px + p = -3$ apresenta duas raízes reais iguais?

Primeiramente, reduzimos a equação à forma $ax^2 + bc + c = 0$:

$x^2 + px + p = -3 \rightarrow x^2 + px + p + 3 = 0$

$\Delta = p^2 - 4 \cdot 1 \cdot (p + 3) \rightarrow \Delta = p^2 - 4p - 12$

Para que a equação tenha duas raízes reais iguais, devemos ter $\Delta = 0$:

$$p^2 - 4p - 12 = 0 \rightarrow p = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 48}}{2} \rightarrow p = \frac{4 \pm \sqrt{64}}{2} \rightarrow p = \frac{4 \pm 8}{2}$$

Logo, para que a equação tenha duas raízes reais e iguais, $p = 6$ ou $p = -2$.

Atividades

34. Para que valores de **k**, a equação $2x^2 + kx + 2 = 0$ possui duas raízes reais e iguais? $k = \pm\sqrt{8}$

35. Determine "**a**" para que a equação do 2º grau $ax^2 + x + 1 = 0$. Admita duas raízes reais e distintas. $a < \frac{1}{4}$

36. Calcule o valor de **k** na equação $x^2 - 6x + + k = 0$ de modo que:

a) as raízes sejam reais e diferentes $k < 9$

b) as raízes sejam reais e iguais $k = 9$

c) as raízes não sejam reais $k > 9$

37. A equação $4x^2 + x + m = 0$ tem uma única raiz. Qual o valor de **m**? $m = \frac{1}{16}$

38. Se a equação $3x^2 + 2x + p = 0$ não possui raízes reais, determine: $p \in R / p > \frac{1}{3}$

a) o intervalo de variação para o parâmetro **p**.

b) Qual é o menor valor inteiro de **p**. $p = 1$

Desafio

Interpretar texto

Paulo se distraiu durante a aula de matemática e, ao copiar do quadro de giz uma equação do segundo grau, escreveu errado o termo em x. Ao resolver essa equação ele encontrou as raízes –4 e 15.

Luís, que conversava com Paulo, copiou errado o termo que não tem fator x e encontrou as raízes 3 e 4.

Qual é a equação original e correta que estava escrita no quadro de giz? Qual é seu conjunto solução?

Relação entre coeficientes e raízes

Sabemos que, para uma equação do segundo grau $ax^2 + bc + c = 0$ (com $a \neq 0$), as raízes são calculadas por:

$$\mathbf{x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad e \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

- Observe o que acontece se investigarmos o valor de $x_1 + x_2$:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

- Veja, agora, o que acontece com o produto das raízes:

$$x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) \cdot \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{b^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} =$$

$$= \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Em resumo, a soma e o produto das duas raízes de uma equação do segundo grau é dada pelas seguintes relações entre seus coeficientes:

$$\mathbf{ax^2 + bc + c = 0 \ (com\ a \neq 0) \rightarrow S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad e \quad P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}}$$

Observe nos exemplos a seguir a relação entre a soma e o produto das raízes e os coeficientes da equação.

a) Na equação $\mathbf{x^2 - 15x + 56 = 0}$, temos:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \rightarrow x_1 + x_2 = \frac{15}{1} \rightarrow x_1 + x_2 = 15$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \rightarrow x_1 \cdot x_2 = \frac{56}{1} \rightarrow x_1 \cdot x_2 = 56$$

Se resolvermos a equação ou o sistema que estabelecemos acima, encontraremos como raízes os valores 7 e 8, que somam 15 e têm produto 56.

b) Para a equação $\mathbf{x^2 - 10x + 25 = 0}$, temos:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \rightarrow x_1 + x_2 = \frac{10}{1} \rightarrow x_1 + x_2 = 10$$

$$x_1 . x_2 = \frac{c}{a} \rightarrow x_1 . x_2 = \frac{25}{1} \rightarrow x_1 \cdot x_2 = 25$$

Nesse caso, ao resolver a equação, encontraremos duas raízes iguais a 5. Observe que $5 + 5 = 10$ e $5 \cdot 5 = 25$, conforme a relação entre os coeficientes estabelece.

Atividades

39. Sabendo que o produto das raízes da equação $x^2 - 5x + m - 3 = 0$ é 5, calcule o valor de **m**. $m = 8$

40. Determine o valor de **m** para que a equação de segundo grau $mx^2 + (m + 1)x + 5 = 0$, tenha duas raízes reais opostas.
$m + 1 = 0$
$m = -1$

41. Encontre o valor de **n** para que a soma das raízes da equação do segundo grau.
$6x^2 + (n - 1)x - 2 = 0$ seja igual a $\frac{1}{5}$.
$n = -\frac{1}{5}$

42. Ache o valor de $p > 0$ na equação:

$$x^2 + px + 18 = 0$$

de modo que a soma dos quadrados das raízes da mesma seja 45.

*(Sugestão: a soma dos quadrados de dois valores **a** e **b** é $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$)*
$p = 9$

43. Determine o valor de **p**, sabendo-se que a equação $2x^2 + 5x + \frac{p}{4} = 0$ tem raízes tais que uma é o inverso da outra. $p = 8$

Equações do segundo grau literais

As equações do 2º grau na variável **x** que possuem coeficientes ou termos independentes indicados por outras letras são denominadas **equações literais**. As letras que aparecem numa equação literal, exceção feita à incógnita, são denominadas **parâmetros**.

Veja alguns exemplos:

- $kx^2 - 8x + 1 = 0$ $(k \neq 0)$ é uma equação de incógnita **x** e parâmetro **k**;
- a equação $3x^2 - 12m^2 = 0$ é uma equação literal incompleta, com incógnita **x** e parâmetro **m**.
- a equação $mx^2 - 2abx = 0$, com $m \neq 0$, também é literal, com incógnita **x** e parâmetros **m, a** e **b**.

A resolução de equações literais incompletas segue o mesmo processo das equações numéricas.

Observe os exemplos:

- Resolução da equação $kx^2 - 8x + 1 = 0$ $(k \neq 0)$

$\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot k \cdot 1 \rightarrow \Delta = 64 - 4k$

Professor: Mostre no quadro os processos de resolução das equações literais e destaque que a existência das raízes depende do valor que o k assume, no exemplo do texto. Esse tipo de assunto permite discutir hipóteses de soluções e, se achar conveniente, explore mais exemplos.

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4k}}{2k}$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{4(16 - k)}}{2k}$$

$$x = \frac{8 \pm 2\sqrt{16 - k}}{2k}$$

Dividindo-se o numerador e o denominador por 2, obtemos:

$$x_1 = \frac{4 + \sqrt{16 - k}}{k} \quad \text{ou} \quad x_2 = \frac{4 - \sqrt{16 - k}}{k}$$

Note que os valores e a existência das raízes são determinados pelo valor de **k**. Se, por exemplo, $k = 16$, note que $x_1 = x_2 = \frac{1}{4}$.

- Vamos, agora, resolver a equação literal incompleta $3x^2 - 12m^2 = 0$:

$3x^2 - 12m^2 = 0 \rightarrow 3x^2 = 12m^2$
$x^2 = 4m^2 \rightarrow x = \pm\sqrt{4m^2} \rightarrow x = \pm 2m$
Logo $x_1 = 2m$ e $x_2 = -2m$

- Da mesma forma, podemos resolver a equação literal incompleta

$mx^2 - abx = 0$ $(m \neq 0)$
$mx^2 - 2abx = 0 \rightarrow x(mx - 2ab) = 0$

Temos, portanto, duas soluções:

$$x_1 = 0 \text{ ou } mx - 2ab = 0 \rightarrow mx = 2ab \rightarrow x_2 = \frac{2ab}{m}$$

Os diferentes valores das raízes $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$ irão depender dos valores atribuídos aos parâmetros **a**, **b** e **m**.

Atividades

44. Resolva as seguintes equações literais:

a) $(x - a)^2 = a^2$ $S = \{0; 2a\}$

b) $9x^2 - 25m^2 = 0$ $S = \{-\frac{5m}{3}; \frac{5m}{3}\}$

c) $2 \cdot (x^2 + m^2) = 10m^2$ $S = \{-2\ m; 2\ m\}$

d) $4x^2 - 5a^2/6 = 3x^2 + a^2/6$ $S = \{-a; +a\}$

45. Resolva as equações literais a seguir:

a) $x^2 + 9m^6 = 0$ não existem raízes reais

b) $x^2 - 2mx + m^2 = 0$ $S = \{m\}$

c) $x^2 - (a + b)x + ab = 0$ $S = \{a; b\}$

d) $x^2 - (2m + n)x + 2\ mn = 0$ $S = \{2\ m; n\}$

e) $(mx + t)^2 = t^2$ $S = \{0; \frac{2t}{m}\}$

f) $(tx - 1)(x + t) = (tx - 1)(2x - t)$
$S = \{t \in R / t < 0\}$

46. Determine o valor de **k** na equação $(k - 2)x^2 + (3k - 4)x + (5k - 1) = 0$, para que uma das raízes seja igual a zero. $S = \{\frac{1}{5}\}$

47. Ache o valor de **p** na equação

$$x^2 + px + 9 = 0$$

para que ela não tenha raízes reais.
$p = 6$ ou $p = -6$

Equações biquadradas

Vamos estudar equações de quarto grau, que podem ser reduzidas a uma de segundo grau.

Observe, por exemplo, as equações:

- $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$
- $9x^4 - 13x^2 + 4 = 0$
- $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$

Veja que os primeiros membros são polinômios do 4º grau na variável **x**, com um termo em $\mathbf{x^4}$, outro termo em $\mathbf{x^2}$ e sem os termos em $\mathbf{x^3}$ e **x**. Possuem também um termo constante e os segundos membros nulos.

Equações desse tipo são denominadas de **equações biquadradas** e, genericamente, podem ser definidas como toda equação de incógnita **x**, da forma:

$$\mathbf{ax^4 + bx^2 + c = 0 \quad (a \neq 0)}$$

É importante salientar que nem toda equação do quarto grau é biquadrada. São biquadradas apenas as equações de quarto grau em que a incógnita só possui expoentes pares. As equações a seguir, por exemplo, **não** são biquadradas, pois possuem expoentes ímpares nas incógnitas.

- $x^4 - 2x^3 + x^2 + 1 = 0 \rightarrow$ equação de quarto grau que não é biquadrada
- $6x^4 + 2x^3 - 2x = 0 \rightarrow$ equação de quarto grau que não é biquadrada
- $x^4 - 3x = 0 \rightarrow$ equação de quarto grau que não é biquadrada

Resolução de uma equação biquadrada

A resolução de uma equação biquadrada se faz por um processo que se baseia na substituição da incógnita, de tal maneira que possamos reduzi-la a uma de 2º grau e utilizar a fórmula de Bhaskara para, ao final, retornar à incógnita original. De uma forma genérica, esse processo deve atender à seguinte sequência:

1. Faça $x^4 = y^2$ (y é a incógnita auxiliar) e $x^2 = y$;
2. A equação $ax^4 + bx^2 + c = 0$ ficará $ay^2 + by + c = 0$;
3. Resolva a equação $ay^2 + by + c = 0$, obtendo y_1 e y_2;
4. Calcule as quatro raízes da equação original fazendo $x = \pm\sqrt{y_1}$ e $x = \pm\sqrt{y_2}$.

Note que cada **raiz positiva** da equação $ay^2 + by + c = 0$ dá origem a duas raízes simétricas para a biquadrada. Se ocorrer uma **raiz negativa** para $ay^2 + by + c = 0$, esta não dará origem a nenhuma raiz real para a biquadrada.

Acompanhe os exemplos:

a) Vamos determinar as raízes da equação biquadrada $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.
Substituindo $\mathbf{x^4}$ por $\mathbf{y^2}$ e $\mathbf{x^2}$ por $\mathbf{y}$, obtemos:

$$y^2 - 13y + 36 = 0$$

Resolvendo essa equação por Bhaskara, obtemos:

$\Delta = 169 - 144 \rightarrow \Delta = 25$

$y = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{2} \rightarrow y = \frac{13 \pm 5}{2} \rightarrow y_1 = 4$ e $y_2 = 9$

Como $x^2 = y$, temos:

$y_1 = 4 \rightarrow x = \pm\sqrt{4} \rightarrow x_1 = 2$ e $x_2 = -2$

$y_2 = 9 \rightarrow x = \pm\sqrt{9} \rightarrow x_3 = 3$ e $x_4 = -3$

Logo, a equação $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$, tem como solução $S = \{-3, -2, 2, 3\}$.

b) Observe a determinação das raízes de $x^4 + 4x^2 - 60 = 0$.

Substituindo $\mathbf{x^4}$ por $\mathbf{y^2}$ e $\mathbf{x^2}$ por $\mathbf{y}$, temos:

$y^2 + 4y - 60 = 0$

Resolvendo essa equação, obtemos:

$y_1 = 6$ e $y_2 = -10$

Como $x^2 = y$, temos:

$y_1 = 6 \rightarrow x = \pm\sqrt{6} \rightarrow x_1 = \sqrt{6}$ e $x_2 = -\sqrt{6}$

$y_2 = -10 \rightarrow x = \pm\sqrt{-10} \rightarrow x_3 \in R$ e $x_4 \in R$

Nesse caso, no universo dos números reais a solução será

$$S = \{-\sqrt{6}, \sqrt{6}\}.$$

Atividades

48. Resolva as equações em R:

a) $x^4 - 21x^2 + 98 = 0$ $S = \{-\sqrt{14}, \sqrt{14}, \sqrt{7}, \sqrt{7}\}$

b) $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$ $S = \{-4, 4; -2, 2\}$

c) $x^4 + x^2 - 110 = 0$ $S = \{-\sqrt{10}, \sqrt{10}\}$

d) $x^4 - 3x^2 = 4$ $S = \{-2; 2\}$

e) $x^4 + 12x^2 + 36 = 0$ $x^2 - 6$ não tem raízes reais

f) $-x^4 + 24x^2 - 144 = 0$ $S = \{-\sqrt{12}, -\sqrt{12}, \sqrt{12}, \sqrt{12}\}$

g) $x^4 - 144 = 0$ $S = \{-\sqrt{12}, \sqrt{12}\}$

49. Determine a soma e o produto das raízes da equação $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$. $S = 13$ $P = 36$

50. Se a equação $x^4 - kx^2 = 0$ tem solução $S = \{-9, 0, 9\}$, então:

a) $k = 9$

x b) $k = 81$

c) $k = 18$

d) $k = 0$

e) $k = -9$

51. A soma dos quadrados das raízes reais da equação $x^4 + 36 = 13x^2$ resulta:

a) 0

b) 5

c) 10

x d) 26

e) 40

52. O número de soluções da equação $5x^4 + x^2 - 3 = 0$ é:

a) 0

b) 1

x c) 2

d) 3

e) 4

53. A equação $x^4 - 2b^2x^2 + 1 = 0$

x a) Não tem soluções reais se $b = 0$.

b) Sempre tem apenas uma solução real.

c) Tem apenas duas soluções reais se $b > 1$.

d) Sempre tem quatro soluções reais.

e) Tem quatro soluções reais se $b = 0$.

54. O conjunto solução da equação $q^4 - 13q^2 + 36 = 0$ é:

a) $S = \{2, 3\}$

b) $S = \{0, 2, 3\}$

c) $S = \{-3, -2\}$

x d) $S = \{-3, -2, 2, 3\}$

e) $S = \{-3, 3\}$

Para estudar

55. Para cada equação do 2º grau a seguir, escreva em seu caderno os valores de **a**, **b** e **c**:

a) $x^2 - 10x + 2 = 0$

b) $3x^2 + x - 1 = 0$

c) $x^2 - 49 = 0$

d) $x^2 - 6x = 0$

e) $-x^2 + x = 0$

56. Encontre, se houver, a raiz de cada equação:

a) $(x + 8)^2 = 9$

b) $(x - 4)^2 = -49$

c) $(x + 5)^2 = 0$

d) $(x - 1)^2 = 14$

Interpretar texto

57. Um terreno tem forma quadrada. Num dos cantos do terreno, há um jardim com a forma de um quadrado, cuja área tem 36 m^2. Os lados desse jardim têm 10 metros a menos que os lados do terreno. Qual é a área do terreno?

58. Usando a fórmula de Bhaskara, resolva as seguintes equações:

a) $8x^2 - 2x - 1 = 0$

b) $x^2 + 2x - 8 = 0$

c) $x^2 + 11x + 28 = 0$

d) $-x^2 + 10x - 24 = 0$

e) $3x^2 - 2x = 0$

59. Com $x \in R$, resolva:

a) $x^2 - 121 = 0$

b) $2x^2 - 98 = 0$

c) $2x^2 = -8$

d) $4x^2 + 100 = 0$

60. Encontre os valores reais de **x**, tais que:

a) $x^2 - 3x = 0$

b) $x^2 + 13x = 0$

c) $6x^2 - 54x = 0$

d) $8x^2 + 8x = 0$

61. Fatore:

a) $x^2 - 8x + 15$

b) $x^2 - 8x + 16$

c) $x^2 - 4x$

d) $x^2 - 4$

62. Para que valores de **k**, a equação

$$x^2 + x + k = 0$$

possui duas raízes reais e iguais?

63. Calcule o valor de **k** na equação

$$x^2 - x + 2k = 0$$

de modo que:

a) as raízes sejam reais e diferentes

b) as raízes sejam reais e iguais

c) as raízes não sejam reais

64. Determine o valor de **m** para que a equação de segundo grau $x^2 + x + 2m - 1 = 0$, tenha duas raízes iguais.

65. Resolva as seguintes equações literais:

a) $4x^2 - 16m^2 = 0$

b) $4 \cdot (x^2 + m^2) = 8m^2$

66. Resolva as equações em R:

a) $2x^4 - 5x^2 + 3 = 0$

b) $-3x^4 + 10x^2 - 9 = 0$

c) $-x^4 - x^2 + 2 = 0$

d) $x^4 - 6x^2 = -9$

Resolução das atividades

1. $x + 11 = 11x \rightarrow x = \dfrac{11}{10}$

2. $4 - x = 4x \rightarrow 4 = 5x \rightarrow x = \dfrac{4}{5}$

3. $x' = 2$ e $x'' = 5$

4. $x^2 + x - 12 = 0$

a) $9 + 3 - 12 = 0 \rightarrow 3$ é solução

$9 - 3 - 12 \neq 0 \rightarrow -3$ não é solução

b) $16 + 4 - 12 \neq 0 \rightarrow 4$ não é solução

$16 - 4 - 12 = 0 \rightarrow -4$ é solução

5. $2x^2 - 5x + 2 = 0$

para $3 \rightarrow 2 \cdot 9 - 5 \cdot 3 + 2$

$18 - 15 + 2 \neq 0$ não é solução

para $2 \rightarrow 2 \cdot 4 - 5 \cdot 2 + 2 = 0$ é solução

para $1 \rightarrow 2 \cdot 1 - 5 \cdot 1 + 2 \neq 0$ não é solução

para $0,5 \rightarrow 2 \cdot 0,25 - 5 \cdot 0,5 + 2 = 0$ é solução

$S = \{0, 5, 2\}$

6. a) $3x^2 + 11x + 6 = 0$

$a = 3$ $b = 11$ $c = 6$

b) $x^2 + x - 2 = 0$

$a = 1$ $b = 1$ $c = -2$

c) $2x^2 - 50 = 0$

$a = 2$ $b = 0$ $c = -50$

d) $x^2 - 4,5x + 4,5 = 0$

$a = 1$ $b = -4,5$ $c = 4,5$

7. $x^2 - 315x - 12\,250 = 0$

para $-35 \rightarrow 1\,225 + 11\,025 - 12\,250 = 0$

sim, é uma raiz

8. a) $(x - 10)^2 = 36$

$x - 10 = \pm\sqrt{36}$

$x - 10 = \pm 6$

$x - 10 = 6$ ou $x - 10 = -6$

$x = 16$ $x = 4$

$S = \{4, 16\}$

b) $(x + 5)^2 = 4$

$x + 5 = \pm\sqrt{4}$

$x + 5 = \pm 2$

$x + 5 = 2$ ou $x + 5 = -2$

$x = -3$ $x = -7$

$S = \{-3, -7\}$

c) $\left(\dfrac{x}{2} - 3\right)^2 = 49$

$\dfrac{x}{2} - 3 = \pm\sqrt{49}$

$\dfrac{x}{2} - 3 = \pm 7$

$\dfrac{x}{2} - 3 = 7$ ou $\dfrac{x}{2} - 3 = -7$

$x - 6 = 14$ $x - 6 = -14$

$x = 20$ $x = -8$

$S = \{-8, 20\}$

d) $\left(\dfrac{x}{3} + 5\right)^2 = 16$

$\dfrac{x}{3} + 5 = \pm\sqrt{16}$

$\dfrac{x}{3} + 5 = \pm 4$

$x + 5 = \pm 12$

$x + 15 = +12$ ou $x + 15 = -12$

$x = -3$ $x = -27$

$S = \{-27, -3\}$

9. $(5x - 4)^2 = -9$

$5x - 4 = \pm\sqrt{-9}$

não existem raízes reais.

10. a) $(x - 3)^2 = 16$

$x - 3 = \pm\sqrt{16}$

$x - 3 = \pm 4$

$x - 3 = 4$ ou $x - 3 = -4$

$x = 7$ $x = -1$

$S = \{-1, 7\}$

b) $(x - 3)^2 = -16$

$x - 3 = \pm\sqrt{-16}$

não existem raízes reais

c) $\left(\dfrac{2x}{3} + 4\right)^2 = -1$

não existem raízes reais

d) $(x + 2)^2 = 0$

$x + 2 = 0$

$x = -2$

$S = \{-2\}$

11. $x^2 - 6x + 9 = 16$
$(x - 3)^2 = 16$
$x - 3 = \pm\sqrt{16}$
$x - 3 = \pm 4$
$x - 3 = 4$ ou $x - 3 = -4$
$x = 7$ $x = -1$
$S = \{-1, 7\}$

12. a) $x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$
b) $x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$
c) $4x^2 + 12x + 9 = (2x + 3)^2$
d) $16x^2 - 8x + 1 = (4x - 1)^2$

13. a) $12x$ b) $24x$ c) $14x$ d) $42x$

14. a) x^2 b) $16x^2$ c) $4x^2$ d) $121x^2$

15. a) $x^2 - 6x + 9 = 49$
$(x - 3)^2 = 49$

$x - 3 = \pm\sqrt{49}$
$x - 3 = \pm 7$
$x - 3 = 7$ ou $x - 3 = -7$
$x = 10$ $x = -4$
$S = \{-4, 10\}$

b) $x^2 + 2x + 1 = 100$
$(x + 1)^2 = 100$

$x + 1 = \pm\sqrt{100}$
$x + 1 = \pm 10$
$x + 1 = 10$ ou $x + 1 = -10$
$x = 9$ $x = -11$
$S = \{-11; 9\}$

c) $4x^2 - 36x + 81 = 9$
$(2x - 9)^2 = 9$

$2x - 9 = \pm\sqrt{9}$
$2x - 9 = \pm 3$
$2x - 9 = 3$ ou $2x - 9 = -3$
$2x = 12$ $2x = +6$
$x = 6$ $x = 3$

$S = \{3, 6\}$

d) $9x^2 + 30x + 25 = -16$

não existem raízes reais

16. a) $2x^2 + 7x + 5 = 0$

$\Delta = 7^2 - 4 \,.\, 2 \,.\, 5$

$\Delta = 49 - 40$

$\Delta = 9$

$x = -\dfrac{7 + \sqrt{9}}{2.2} = -\dfrac{7 \pm 3}{4}$

$x' = -\dfrac{7 + 3}{4} = -\dfrac{4}{4} = -1$

$x'' = -\dfrac{7 - 3}{4} = -\dfrac{10}{4} = -\dfrac{5}{2}$

$S = \left\{-1; -\dfrac{5}{2}\right\}$

b) $x^2 + 5x - 14 = 0$
$\Delta = 5^2 - 4 \cdot 1\,(-14)$
$\Delta = 25 + 56$
$\Delta = 81$

$x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{81}}{2\,.\,1} = \dfrac{-5 \pm 9}{2}$

$x' = \dfrac{-5 + 9}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$

$x'' = \dfrac{-5 - 9}{2} = -\dfrac{14}{2} = -7$

$S = \{-7; 2\}$

c) $x^2 - 6x + 9 = 0$

$\Delta = 36 - 4 \cdot 1 \cdot 9$

$\Delta = 0$

$x = \dfrac{+6 + \sqrt{0}}{2.1} = \dfrac{6}{2} = 3$

$S = \{3\}$

d) $-x^2 + 8x + 9 = 0$

$\Delta = 8^2 - 4 \,.\, (-1) \,.\, 9$

$\Delta = 64 + 36$

$\Delta = 100$

$x = \dfrac{-8 \pm \sqrt{100}}{4 \cdot (-1)} = \dfrac{-8 \pm 10}{-2}$

$x' = \dfrac{-8 + 10}{-2} = \dfrac{2}{-2} = -1$

$x'' = \dfrac{-8 - 10}{-2} = \dfrac{-18}{-2} = 9$

$S = \{-1, 9\}$

e) $2x^2 + 3x + 11 = 0$

$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 11$

$\Delta = 9 - 88$

$\Delta = -79$

não existem raízes reais

f) $25x^2 - 10x + 1 = 0$

$\Delta = 10^2 - 4 \cdot 25 \cdot 1$

$\Delta = 100 - 100$

$\Delta = 0$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{0}}{2 . 25} = \frac{10}{50} = \frac{1}{5} = S = \left\{\frac{1}{5}\right\}$$

17. $x^2 - 9x + 20 = 12$

$x^2 - 9x + 20 - 12 = 0$

$x^2 - 9x + 8 = 0$

$\Delta = 9^2 - 4 . 1 . 8$

$\Delta = 81 - 32$

$\Delta = 49$

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{49}}{2 . 1} = \frac{9 \pm 7}{2}$$

$$x' = \frac{9 + 7}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

$$x'' = \frac{9 - 7}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$S = \{1; 8\}$

18. a) $x^2 - 7x + 12 = 2$

$x^2 - 7x + 12 - 2 = 0$

$x^2 - 7x + 10 = 0$

$\Delta = 7^2 - 4 . 1 . 10$

$\Delta = 9$

$$x = \frac{+7 \pm \sqrt{9}}{2.1} = \frac{7 \pm 3}{2}$$

$$x' = \frac{7 + 3}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$x'' = \frac{7 - 3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$S = \{2; 5\}$

b) $x^2 + x - 12 = -15$

$x^2 + x - 12 + 15 = 0$

$x^2 + x + 3 = 0$

$\Delta = 1^2 - 4 . 1 . 3$

$\Delta = -11 \rightarrow$ não existem raízes reais

c) $x^2 + 9x + 8 = 8$

$x^2 + 9x = 0$

$x (x + 9) = 0$

$x = 0$ ou $x + 9 = 0$

$x = -9$

$S = \{0; -9\}$

d) $x^2 + 10x + 24 = -1$

$x^2 + 10x + 25 = 0$

$\Delta = 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25$

$\Delta = 100 - 100$

$\Delta = 0$

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{0}}{2 . 1} = -\frac{10}{2} = -5$$

$S = \{-5\}$

19. $2[x (3 + 2x)] + 2 \cdot 4x = 30$

$6x + 4x^2 + 8x = 30$

$4x^2 + 14x - 30 = 0$

$2x^2 + 7x - 15 = 0$

$\Delta = 49 - 4 \cdot 2 \cdot (-15)$

$\Delta = 49 + 120$

$\Delta = 169$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{169}}{2 . 2} = \frac{-7 \pm 13}{4}$$

$$x' = \frac{-7 \pm 13}{4} = \frac{6}{4} = 1{,}5\,m$$

$$x'' = \frac{-7 - 13}{4} = -\frac{20}{4} = -5 \text{ (não serve)}$$

$S = \{1{,}5 \text{ m}\}$

20. x e $x + 2$ representam o comprimento e a largura da piscina.

$216\,000 \text{ L} = 216\,000 \text{ dm}^3 = 216 \text{ m}^3$.

$x(x + 2)1{,}8 = 216 \rightarrow x^2 + 2x - 120 = 0$

$\Delta = 2^2 - 4(1)(-120) = 4 + 480 = 484$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{484}}{2(1)} \rightarrow x = \frac{-2 + 22}{2} = 10 \text{ ou}$$

$$x = \frac{-2 - 22}{2} = \cancel{12}$$

Os lados da piscina medem 10 m e $(10 + 2)$m = 12 m

21. x = números de macacos

$$\left(\frac{x}{8}\right)^2 = 12 = x \rightarrow \frac{x^2}{64} + 12 = x \rightarrow$$

$x^2 - 64x + 768 = 0$

$\Delta = (-64)^2 - 4(1)(768) = 4096 - 3072 = 1024$

$$x = \frac{-(-64) \pm \sqrt{1024}}{2(1)} \rightarrow x = \frac{64 + 32}{2} = 48 \text{ ou}$$

$$x = \frac{64 - 32}{2} = 16$$

O problema tem duas soluções: 48 ou 16 macacos.

22. $2x^2 - 50 = 0$

a) $2x^2 = 50$

$$x^2 = \frac{50}{2} = 25$$

$x = \pm 5$

b) $\Delta = 0 - 4 \cdot 2 \cdot (-50)$

$\Delta = 400$

$x = \frac{0 \pm \sqrt{400}}{2 . 2} = \pm \frac{20}{4}$

$x' = \frac{20}{4} = 5$

$x'' = -\frac{20}{4} = -5$

23. $x^2 - 6x = 0$

a) $x(x - 6) = 0$

$x = 0$ ou $x - 6 = 0$

$x = 6$

b) $\Delta = 36 - 4 \cdot 1 \cdot 0$

$\Delta = 36$

$$x = \frac{6 \pm 6}{2} \begin{cases} x' = \frac{6 - 6}{2} = 0 \\ x'' = \frac{6 + 6}{2} = 6 \end{cases}$$

24. a) $x^2 = 25$

$x = \pm 5$

b) $x^2 - 100 = 0$

$x^2 = 100$

$x = \pm 10$

c) $5x^2 - 45 = 0$

$x^2 = 9$

$x = \pm 3$

d) $x^2 = -25$

não existem raízes reais

25. a) $x^2 - 7x = 0$

$x(x - 7) = 0$

$x = 0$ ou $x - 7 = 0$

$x = 7$

$S = \{0; 7\}$

b) $2x^2 - 16x = 0$

$2x(x - 8) = 0$

$x = 0$ ou $x - 8 = 0$

$x = 8$

$S = \{0; 8\}$

c) $5x^2 + 2x = 0$

$5x(x + 4) = 0$

$5x = 0$ ou $x + 4 = 0$

$x = 0$ $x = -4$

$S = \{0; -4\}$

d) $-2x^2 - 42x = 0$

$-2x(x + 21) = 0$

$-2x = 0$ ou $x + 21 = 0$

$x = 0$ $x = -21$

$S = \{0; -21\}$

26. a) $x^2 - 9 = 0$

$x^2 = 9$

$x = \pm 3$

$S = \{-3; +3\}$

b) $x^2 - 9x = 0$

$x(x - 9) = 0$

$x = 0$ ou $x - 9 = 0$

$x = 9$

$S = \{0; 9\}$

c) $x^2 + 9 = 0$

$x^2 = -9 \rightarrow$ não existem raízes reais

d) $x^2 + 9x = 0$

$x(x + 9) = 0$

$x = 0$ ou $x + 9 = 0$

$x = -9$

$S = \{0; -9\}$

27. a) $x^2 = 7$

$x = \pm\sqrt{7}$

$S = \{-\sqrt{7}; \sqrt{7}\}$

b) $x^2 = -7 \rightarrow$ não existem raízes reais

c) $3x^2 - 27 = 0$

$3x^2 = 27$

$x^2 = 9$

$x = \pm 3$

$S = \{+3; -3\}$

d) $2x^2 - 7x = 0$

$x((2x - 7) = 0$

$x = 0$ ou $2x - 7 = 0$

$2x = 7$

$x = \frac{7}{2}$

$S = \left\{0; \frac{6}{5}\right\}$

28. a) $x^2 - 6x + 8 = 0$

$x^2 - 6x + 8 + 1 = 1$

$x^2 - 6x + 9 = 1$

$(x - 3)^2 = 1$

$x - 3 = \pm 1$

$x - 3 = 1$ ou $x - 3 = -1$

$x = 4$ $x = 2$

$S = \{2, 4\}$ $(x - 2)(x - 4)$

b) $x^2 + 10x + 21 = 0$

$x^2 + 10x + 21 + 4 = 4$

$x^2 + 10x + 25 = 4$

$(x + 5)^2 = 4$

$x + 5 = \pm 2$

$x + 5 = 2$ ou $x + 5 = -2$
$x = -3$ $x = -7$
$S = \{-3; -7\}$ $(x + 3)(x + 7)$

c) $x^2 - 3x - 10 = 0$
$\Delta = 9 + 4 \cdot 10$
$\Delta = 49$
$x' = \frac{3+7}{2} = \frac{10}{2} = 5$
$x'' = \frac{3-7}{2} = -\frac{4}{2} = -2$
$S = \{-2; 5\}$ $(x - 5)(x + 2)$

d) $x^2 - x - 30 = 0$
$\Delta = 1 + 120$
$\Delta = 121$
$x' = \frac{1+11}{2} = \frac{12}{2} = 6$
$x'' = \frac{1-11}{2} = -\frac{10}{2} = -5$
$S = \{-5; 6\}$ $(x + 5)(x - 6)$

29. a) $5x^2 - 15x + 10 = 0$
$x^2 - 3x + 2 = 0$
$(x - 1)(x - 2)$

b) $-x^2 - 4x - 4$
$-(x^2 + 4x + 4)$
$-(x + 2)^2$

c) $x^2 + x + 1 \rightarrow$ não é possível

d) $2x^2 - 1$
$(x\sqrt{2} - 1)(x\sqrt{2} + 1)$

e) $-4x^2 + 16x - 15 = 0$
$-(4x^2 - 16x + 15) = 0$
$4x^2 - 16x + 15 + 1 = 1$
$4x^2 - 16x + 16 = 1$
$(2x - 4)^2 = 1$
$2x - 4 = \pm 1$
$2x - 4 = 1$ ou $2x - 4 = -1$
$2x = 5$ $2x = 3$
$x = \frac{5}{2}$ $x = \frac{3}{2}$
$\left(x - \frac{5}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right)$

f) $3x^2 + 7x + 5$
não é possível

30. $\frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 5x + 6} = \frac{\cancel{(x-3)}(x + 2)}{\cancel{(x-3)}(x - 2)} = \frac{x + 2}{x - 2}$

31. a) $\frac{x - 4}{x^2 - 5x + 4} = \frac{\cancel{(x-4)}}{\cancel{(x-4)}(x - 1)} = \frac{1}{x - 1}$

b) $\frac{x^2 - 3x - 4}{3x + 3} = \frac{(x - 4)\cancel{(x+1)}}{3\cancel{(x+1)}} = \frac{x - 4}{3}$

c) $\frac{x^2 - 7x}{x^2 + 3x - 70} = \frac{x\cancel{(x-7)}}{\cancel{(x-7)}(x + 10)} = \frac{x}{x + 10}$

d) $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1} = \frac{\cancel{(x-1)}(x + 1)}{(x - 1)^{\cancel{2}}} = \frac{x}{x + 10}$

32. a) $x^2 - 8x + 15 = 0$
$x^2 - 8x + 15 + 1 = 1$
$x^2 - 8x + 16 = 1$
$(x - 4)^2 = 1$
$x - 4 = \pm 1$
$x - 4 = 1$ ou $x - 4 = -1$
$x = 5$ $x = 3$
$S = \{3; 5\}$

b) $x^2 - 9x + 14 = 0$
$S = -9$
$P = 14 \rightarrow 2$ e 7
$(x - 2)(x - 7) = 0$
$S = \{2, 7\}$

c) $x^2 + 6x + 8 = 0$
$S = -6$
$P = 8 \rightarrow -2$ e -4
$(x + 2)(x + 4)$
$S = \{-2; -4\}$

d) $x^2 + 12x + 11 = 0$
$S = -12$
$P = 11 \rightarrow -11$ e -1
$(x + 11)(x + 1)$
$S = \{-1; -11\}$

e) $x^2 - 5x + 6 = 0$
$S = 5$
$P = 6 \rightarrow 2$ e 3
$(x - 2)(x - 3)$
$S = \{2; 3\}$

f) $x^2 + 5x - 6 = 0$
$S = -5$
$P = -6 \rightarrow -6$ e 1
$(x - 1)(x + 6)$
$S = \{-6; 1\}$

g) $x^2 - x - 12 = 0$
$S = 1$
$P = -12 \rightarrow 4$ e -3
$(x - 4)(x + 3)$
$S = \{-3; 4\}$

h) $x^2 - 14x - 32 = 0$
$S = 14$
$P = -32 \rightarrow 16$ e -2
$(x - 16)(x + 2)$
$S = \{-2; 16\}$

i) $x^2 - 12x + 36 = 0$
$S = 12$
$P = 36 \rightarrow 6$ e 6
$(x - 6)^2$
$S = \{6\}$

j) $x^2 - 4x + 4 = 0$
$(x - 2)^2$
$S = \{2\}$

33. a) $x^2 - 13x + 12 = 0$
$S = 13$
$P = 12 \rightarrow 12$ e 1
$(x - 12)(x - 1)$
$S = \{1; 12\}$

b) $x^2 + 10x + 21 = 0$
$S = -10$
$P = 21 \rightarrow -7$ e -3
$(x + 7)(x + 3)$
$S = \{-7; -3\}$

c) $2x^2 - 7x + 6 = 0$
$\Delta = 49 - 48$
$\Delta = 1$

$$x = \frac{7+1}{4} \quad \begin{cases} x' = \dfrac{7+1}{4} = \dfrac{8}{4} = 2 \\[2ex] x'' = \dfrac{7-1}{4} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

$$S = \left\{\frac{3}{2}; 2\right\}$$

d) $x^2 + x - 56$
$S = -1$
$P = -56 \rightarrow -8$ e 7
$(x - 7)(x + 8)$
$S = \{-8; 7\}$

e) $x^2 - 5x + 71 = 0$
$\Delta = 25 - 4 \cdot 71$
$\Delta = 25 - 284$
$\Delta = -259$
não existem raízes reais

f) $x^2 - 14x + 49 = 0$
$(x - 7)^2$
$S = \{7\}$

g) $x^2 - 12x + 20 = 0$
$S = 12$
$P = 20 \rightarrow 2$ e 10
$(x - 2)(x - 10)$
$S = \{2; 10\}$

h) $x^2 - 8x + 14 = 0$
$\Delta = 64 - 4 . 14 . 1$
$\Delta = 64 - 56$
$\Delta = 8$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{8}}{2}$$

$$x' = \frac{8 + \sqrt{8}}{2} \quad \text{owu} \quad x'' = \frac{8 - \sqrt{8}}{2}$$

i) $x^2 - (3 + \sqrt{2})x + 3\sqrt{2} = 0$
$S = 3 + \sqrt{2}$
$P = 3\sqrt{2} \rightarrow 3$ e $\sqrt{2}$
$(x - 3)(x - \sqrt{2})$
$S = \{3; \sqrt{2}\}$

34. $2x^2 + kx + 2 = 0$
duas raízes reais e iguais
$\Delta = 0 \rightarrow k^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 0$
$k^2 - 8 = 0$
$k^2 = 8$
$k = \pm\sqrt{8}$

35. $ax^2 + x + 1 = 0$
duas raízes reais e distintas
$\Delta > 0 \rightarrow 1^2 - 4 \cdot a \cdot 1 > 0$
$1 - 4a > 0$
$1 > 4a$
$a < \dfrac{1}{4}$

36. $x^2 + 6x + k = 0$

a) duas raízes reais e distintas
$\Delta > 0 \rightarrow 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot k > 0$
$36 > 4k$
$k < 9$

b) duas raízes reais e iguais
$\Delta = 0 \rightarrow 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot k = 0$
$36 = 4k$
$k = 9$

c) raízes não sejam reais
$\Delta < 0 \rightarrow 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot k < 0$
$36 < 4k$
$k > 9$

37. $4x^2 + x + m = 0$
$\Delta = 0 \rightarrow 1^2 - 4 . 4 . m = 0$
$1 = 16m$
$m = \dfrac{1}{16}$

38. $3x^2 + 2x + p = 0$ sem raízes reais

a) $\Delta < 0 \rightarrow 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot p < 0$

$4 < 12\,p$

$p > \frac{4}{12}$

$p > \frac{1}{3}$

$p \in R \,/\, p > \frac{1}{3}$

b) $p = 1$

39. $x^2 - 5x + m - 3 = 0$

$S = -5$

$P = 5 = m - 3 \rightarrow m = 8$

40. $mx^2 + (m + 1)\,x + 5 = 0$

duas raízes reais e opostas

$m + 1 = 0$

$m = -1$

41. $6x^2 + (n - 1)\,x - 2 = 0$

$S = \frac{1}{5} = -\frac{n+1}{6}$

$6 = -5\,n + 5$

$1 = -5\,n$

$n = -\frac{1}{5}$

42. $x^2 + px + 18 = 0 \quad p > 0$

$x_1^2 + x_2^2 = 45 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$

$\left.\begin{array}{l} S = -p \\ P = 18 \end{array}\right\}$ $(-p)^2 - 2 \cdot 18 = 45$

$p^2 - 36 = 45$

$p^2 = 81$

$p = \pm\sqrt{81}$

$\therefore\; p = 9$

43. $2x^2 + 5x + \frac{p}{4} = 0$

duas raízes, uma inversa da outra

$x_2 = \frac{1}{x_1}$

$S = -\frac{5}{2} = x_1 + \frac{1}{x_1} = \frac{x_1^2 + 1}{x_1}$

$2x_1^2 + 2 = -5x_1$

$2x_1^2 + 5x + 2 = 0$

$\Delta = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 2$

$\Delta = 25 - 16$

$\Delta = 9$

$x = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2\,.\,2} = \frac{-5 \pm 3}{4}$

$x' = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$

$x'' = \frac{-8}{4} = -2$

$P = \frac{\frac{P}{4}}{2} = \frac{P}{8} = x'\,.\,x''$

$\frac{P}{8} = \left(-\frac{1}{2}\right)(-2) = 1$

$p = 8$

44. a) $(x - a)^2 = a^2$

$(a - a) = \pm\sqrt{a^2}$

$x - a = \pm\, a$

$x - a = a$ ou $x - a = -a$

$x = 2a$ $\quad x = 0$

$S = \{0;\, 2a\}$

b) $9x^2 - 25\,m^2 = 0$

$9x^2 = 25\,m^2$

$x^2 = \frac{25m^2}{9}$

$x = \pm\sqrt{\frac{25m^2}{9}}$

$x = \pm\frac{5m}{3}$

$S = \left\{-\frac{5m}{3};\, \frac{5m}{3}\right\}$

c) $2(x^2 + m^2) = 10\,m^2$

$(x^2 + m^2) = 5\,m^2$

$x^2 = 4\,m^2$

$x = \pm\sqrt{4m^2}$

$x = \pm\, 2\,m$

$S = \{-2\,m;\, 2\,m\}$

d) $4x^2 - \frac{5a^2}{6} = 3x^2 + \frac{a^2}{6}$

$x^2 = \frac{a^2}{6} + \frac{5a^2}{6}$

$x^2 = \frac{\cancel{6}a^2}{\cancel{6}}$

$x = \pm\sqrt{a^2}$

$x = \pm a$

S = {– a; + a}

45. a) $x^2 + 9\ m^6 = 0$

$x^2 = -9\ m^6$

não existem raízes reais

b) $x^2 - 2\ mx + m^2 = 0$

S = 2 m

$P = m^2 \rightarrow$ m e m

S = {m}

c) $x^2 - (a + b)\ x + ab = 0$

S = a + b

$P = a \cdot b \rightarrow$ a e b

S = {a; b}

d) $x^2 - (2m + n)\ x + 2\ m\ n = 0$

S = 2 m + n

$P = 2\ m\ n \rightarrow$ 2 m e n

S = {2 m; n}

e) $(mx + t)^2 = t^2$

$mx + t = \pm\sqrt{t^2}$

$mx + t = \pm t$

$mx = 0$ ou $mx = -2t$

$x = 0$ $x = -\frac{2t}{m}$

$S = \left\{0; \frac{2t}{m}\right\}$

f) $(tx - 1)\ (x + t) = (tx - 1)\ (2x - t)$

$tx^2 + t^2x - x - t = 2tx^2 - t^2x - 2x + t$

$tx^2 - 2tx^2 + t^2x + t^2x - x + 2x - t - t = 0$

$-tx^2 + (2t^2 + 1)\ x - 2t = 0$

C.E. $-t > 0$

$t < 0$

$S = \{t \in R\ /\ t < 0\}$

46. $(k - 2)x^2 + (3k - 4)x + (5k - 1) = 0$

uma das raízes seja igual a zero

$5k - 1 = 0$

$5k = 1$

$k = \frac{1}{5}$

$S = \left\{\frac{1}{5}\right\}$

47. $x^2 + px + 9 = 0$

$\Delta = 0 \rightarrow p^2 - 4.\ 9 = 0 \rightarrow p^2 = 36 \rightarrow p = 6$ ou $p = -6$

48. a) $x^4 - 21x^2 + 98 = 0$

$y^2 - 21y + 98 = 0$ $x^2 = y$

$\Delta = 441 - 4\ .\ 98$

$\Delta = 49$

$y = \frac{21 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{21 \pm 7}{2}$

$y_1 = \frac{21 \pm 7}{2} = \frac{28}{2} = 14$

$y_2 = \frac{21 - 7}{2} = \frac{14}{2} = 7$

$x^2 = 14$ $x_1 = +\sqrt{14}$, $x_2 = -\sqrt{14}$

$x^2 = 7$ $x_3 = +\sqrt{7}$, $x_4 = -\sqrt{7}$

$S = \{-\sqrt{14}, \sqrt{14}, -\sqrt{7}, \sqrt{7}\}$

b) $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$

$y^2 - 20y + 64 = 0$ $x^2 = y$

S = 20

$P = 64 \rightarrow$ 16 e 4

$x^2 = 16$ $x_1 = 4$, $x_2 = -4$

$x^2 = 4$ $x_3 = 2$, $x_4 = -2$

S = {– 4, 4; – 2, 2}

c) $x^4 + x^2 - 110 = 0$

$y^2 + y - 110 = 0 \quad x^2 = y$

$S = -1$

$P = -110 \rightarrow -11 \text{ e } 10$

$x^2 = -11$ não tem raízes reais

$$x^2 = 10 \begin{cases} x_1 = \sqrt{10} \\ x_2 = -\sqrt{10} \end{cases}$$

$S = \{-\sqrt{10}, \sqrt{10}\}$

d) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

$y^2 - 3x - 4 = 0 \qquad x^2 = y$

$S = 3$

$P = -4 \rightarrow 4 \text{ e } -1$

$x^2 = -1$ não tem raízes reais

$$x^2 = 4 \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

$S = \{-2; 2\}$

e) $x^4 + 12x^2 + 36 = 0$

$y^2 + 12y + 36 = 0 \qquad x^2 = y$

$S = -12$

$P = 36 \rightarrow -6 \text{ e } -6$

$x^2 - 6$ não tem raízes reais

f) $-x^4 + 24x^2 - 144 = 0$

$S = 24 \qquad x^2 = y$

$P = 144 \rightarrow 12 \text{ e } 12$

$$x^2 = 12 \begin{cases} x_1 = \sqrt{12} \\ x_2 = \square\sqrt{12} \end{cases}$$

$$x^2 = 12 \begin{cases} x_3 = \sqrt{12} \\ x_4 = -\sqrt{12} \end{cases}$$

$S = \{-\sqrt{12}, -\sqrt{12}, \sqrt{12}, \sqrt{12}\}$

g) $x^4 - 144 = 0 \qquad x^2 = y \rightarrow y^2 - 144 = 0$

$y = \pm\sqrt{144} \qquad y_1 = +12$

$y_2 = -12$

$$x^2 = -12 \begin{cases} x_1 = \sqrt{12} \\ x_2 = \square\sqrt{12} \end{cases}$$

$x^2 = -12$ não tem raiz real

$S = \{-\sqrt{12}, \sqrt{12}\}$

49. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

$S = 13$ $P = 36$

50. $x^4 - kx^2 = 0$ $S = \{-9, 0, 9\}$

$k = 81$ alternativa (b)

51. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

raízes $+3, -3, +2, -2$

a soma dos quadrados das raízes é 26 (d)

52. $5x^4 + x^2 - 3 = 0$

duas soluções reais alternativa (c)

53. $x^4 - 2b^2 x^2 + 1 = 0$

para $b = 0 \rightarrow x^4 = -1$

alternativa (a)

54. $q^4 - 13q^2 + 36 = 0$

alternativa (d)

Respostas da seção Para estudar

55. a) $a = 1$ $b = -10$ $c = 2$

b) $a = 3$ $b = 1$ $c = -1$

c) $a = 1$ $b = 0$ $c = -49$

d) $a = 1$ $b = -6$ $c = 0$

e) $a = -1$ $b = 1$ $c = 0$

56. a) $x = -5$ ou $x = -11$

b) não existem raízes reais

c) $x = -5$

d) $1 + \sqrt{14}$ ou $1 - \sqrt{14}$

57. O lado do terreno é 16 m.

58. a) $x = \frac{1}{2}$ ou $x = -\frac{1}{4}$

b) $x = 2$ ou $x = -4$

c) $x = -10$ ou $x = -1$

d) $x = 4$ ou $x = 6$

e) $x = 0$

59. a) $x = \pm 11$

b) $x = \pm 7$

c) não existem raízes reais

d) não existem raízes reais

60. a) $x = 0$ ou $x = 3$

b) $x = 0$ ou $x = -13$

c) $x = 0$ ou $x = 9$

d) $x = 0$ ou $x = -8$

61. a) $(x - 3)(x - 5)$

b) $(x-4)^2$

c) $x(x-4)$

d) $(x + 4)(x - 4)$

62. a) $k < \frac{1}{4}$

63. a) $k < \frac{1}{8}$

b) $k = \frac{1}{8}$

c) $k > \frac{1}{8}$

64. $m = \frac{5}{8}$

65. a) $x^2 = \pm 2m$ b) $x = m$

66. a) $S = \left\{ \frac{3}{4}; \frac{3}{2} \right\}$

b) Não tem raízes reais.

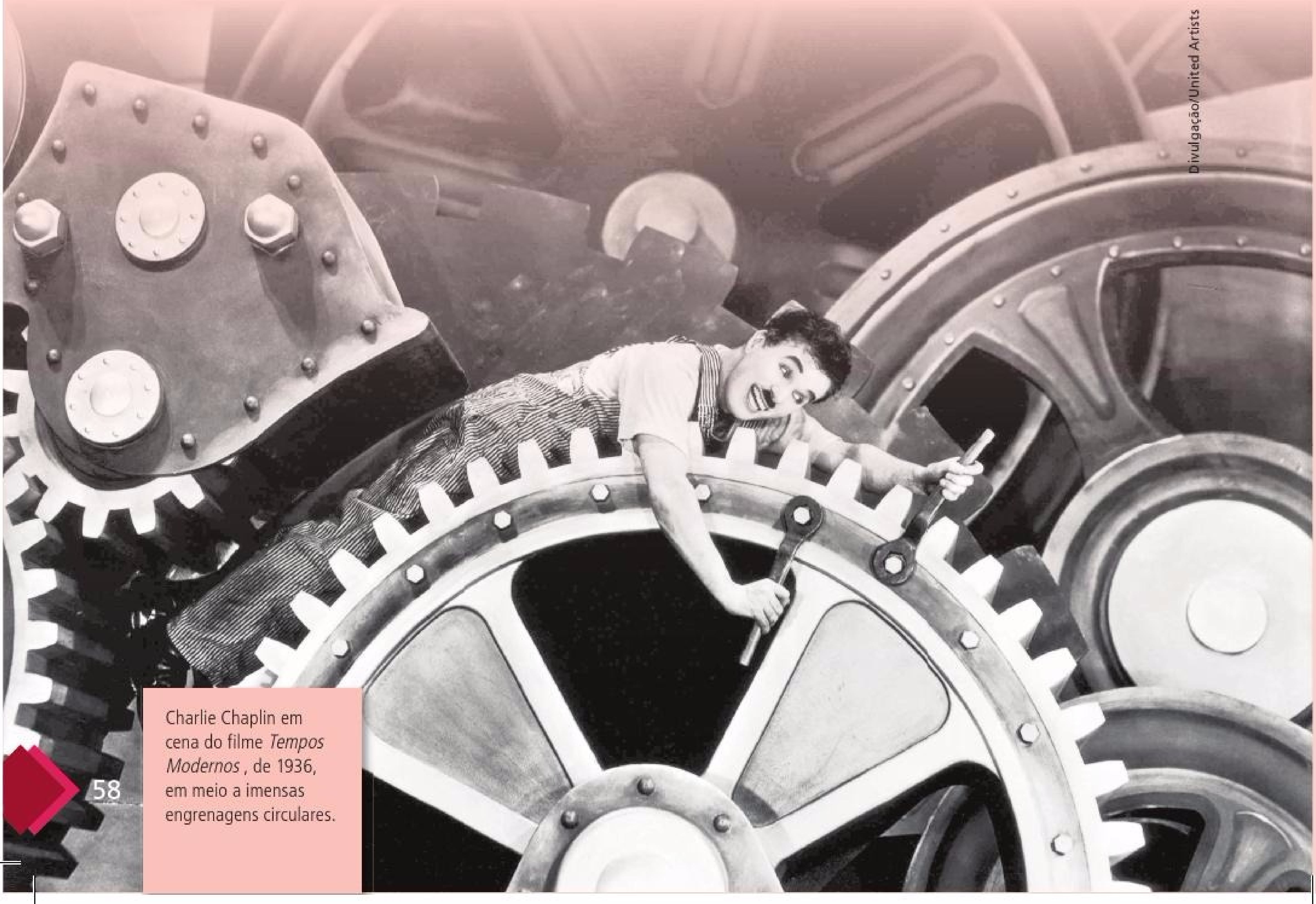
c) $S = \{-1; 1\}$

d) $S = \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$

capítulo 3

Pontos, retas e circunferências

- Posições relativas entre ponto e circunferência
- Potência de um Ponto
- Posições relativas entre reta e circunferência
- Posições relativas de duas circunferências



Divulgação/United Artists

Charlie Chaplin em cena do filme *Tempos Modernos* , de 1936, em meio a imensas engrenagens circulares.

Conversa Inicial

Quando Charlie Chaplin criou o filme *Tempos modernos*, procurou mostrar de uma forma ao mesmo tempo divertida e crítica o poder das engrenagens que faziam funcionar enormes máquinas na fábrica onde o protagonista trabalhava. A roda e as formas circulares sempre acompanharam os seres humanos em suas conquistas. A grande maioria das máquinas desenvolvidas até hoje possuem, com maior ou menor importância, alguma coisa parecida com as engrenagens mostradas no filme. Afinal, talvez tenha sido a observação da forma circular do Sol a mais primitiva noção geométrica que nossos ancestrais tiveram.

Foram as rodas das carruagens, dos trens e dos automóveis que transportaram os homens, seus sonhos e suas riquezas. E é a roda que se apresenta na maioria das instalações de parques de diversões que conhecemos.

Richard Warehan/AGE Fotostock/Grupo keystone

London Eye, Londres, Inglaterra, 2010.

Já estudamos detalhadamente os elementos de uma circunferência e os do círculo. Sabemos também que os círculos são todos semelhantes entre si e diferenciam-se apenas por seus raios e que a mesma coisa acontece com as circunferências.

Agora, porém, precisamos avançar no estudo de outras relações lineares e angulares que envolvem não apenas as circunferências. Afinal, elas raramente aparecem isoladamente nos problemas geométricos que precisamos resolver.

Vamos rever as relações que já conhecemos e aprender novas relações que envolvem:

Pontos e circunferências

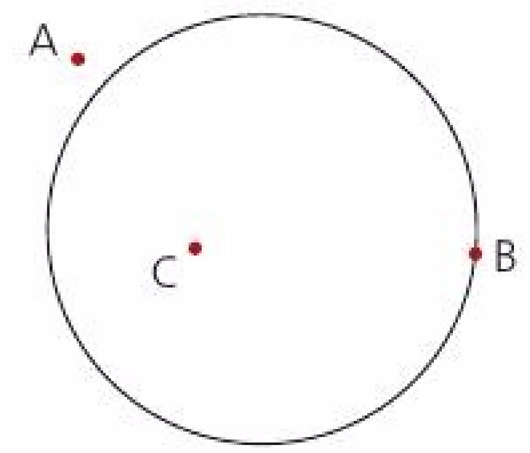
Retas e circunferências

Duas ou mais circunferências

Posições relativas entre ponto e circunferência

O pontos A, B e C mostram as três posições possíveis de um ponto em relação a uma circunferência.

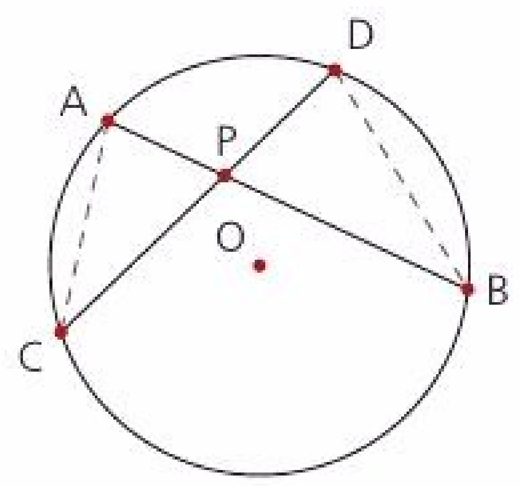
- A é externo à circunferência.
- B pertence à circunferência.
- C é interno à circunferência.



Potência de um Ponto

Vamos considerar, inicialmente, um ponto P interno a uma circunferência e que não seja seu centro O.

Professor, retome o conceito de ângulos inscritos na circunferência para fazer relações entre as cordas da mesma.

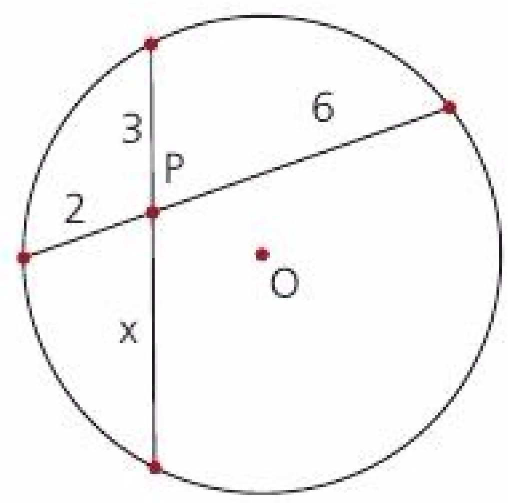


Traçando-se por P as cordas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, assim como as cordas $\overline{AC}$ e $\overline{DB}$, obtemos os triângulos APC e DPB, onde $D\hat{P}B = A\hat{P}C$ (opostos pelo vértice) e $C\hat{A}B = C\hat{D}B$ (ângulos inscritos de um mesmo ângulo central $C\hat{O}B$). Podemos escrever a proporção:

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{PB}} \rightarrow \overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PD} \cdot \overline{PC}$$

Cada um desses produtos é denominado **potência do ponto P** em relação à circunferência.

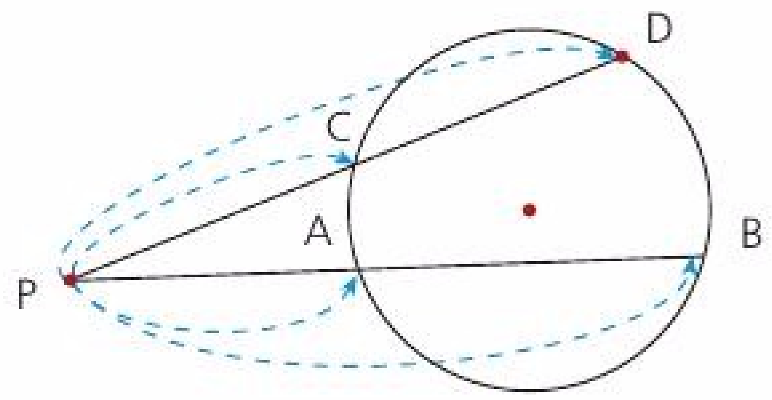
Observe o exemplo:



A potência do ponto P é $2 \cdot 6 = 12$ e podemos escrever:

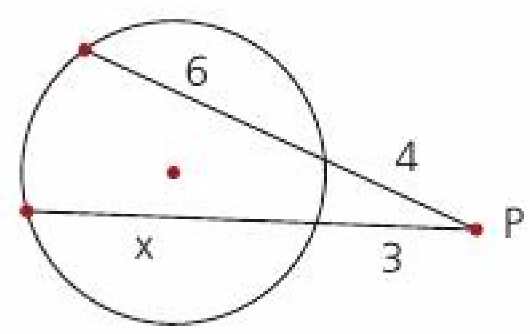
$$2 \cdot 6 = 3 \cdot x \rightarrow x = 4$$

Caso consideremos um ponto P externo à circunferência, definimos potência da mesma forma, tomando o cuidado de considerar adequadamente os segmentos. Observe:



$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$$

Veja como calculamos a potência do ponto P, externo à circunferência, no seguinte caso:

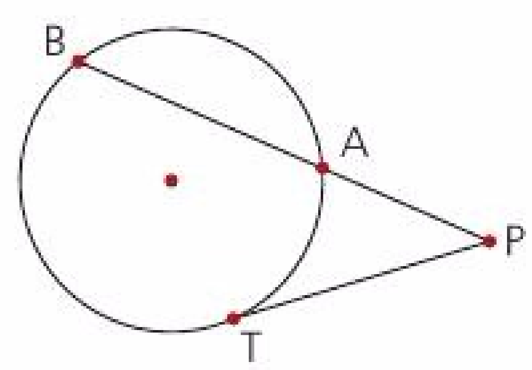


$$4 \cdot (4 + 6) = 3 \cdot (3 + x)$$

$$40 = 9 + 3x$$

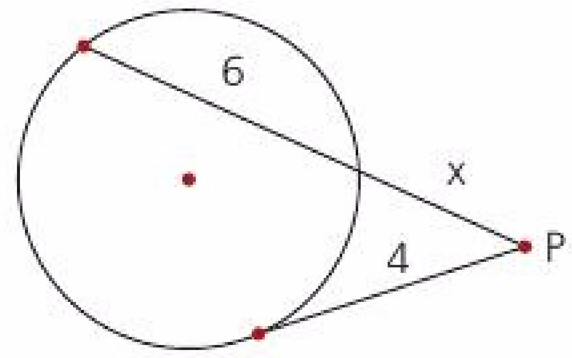
$$x = \frac{31}{3}$$

Pode ocorrer que um dos segmentos seja tangente à circunferência. Nesse caso, a potência do ponto será dada pelo quadrado da distância de P ao ponto de tangência à circunferência. Observe:



$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PT}^2$$

Acompanhe o exemplo:



$4^2 = x \cdot (x + 6) \rightarrow 16 = x^2 + 6x \rightarrow x^2 + 6x - 16 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac \rightarrow \Delta = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-16)$

$\Delta = 100 \rightarrow x = \dfrac{-6 \pm 10}{2} \rightarrow x = -8$ ou $x = 2$

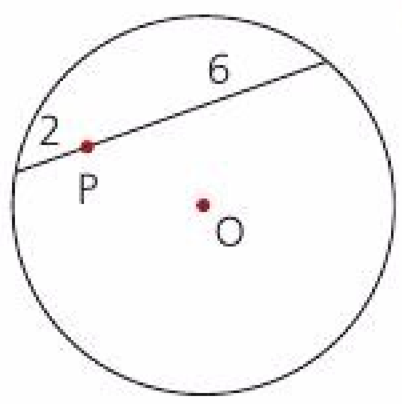
Como se trata de um segmento de reta, admitimos apenas a solução positiva $x = 2$.

Atividades

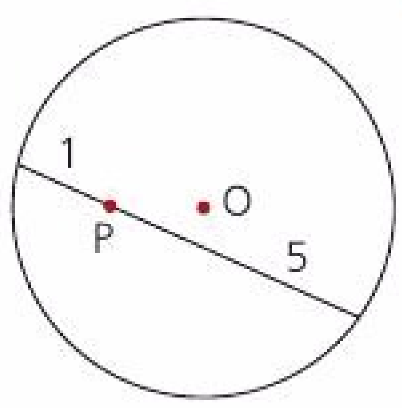
Professor, converse com os alunos sobre a importância da organização dos registros nas resoluções de exercícios. Faça modelos de resoluções organizadas para que o aluno tenha uma referência para utilizar.

1. Em cada caso a seguir, determine a potência do ponto P em relação à circunferência dada:

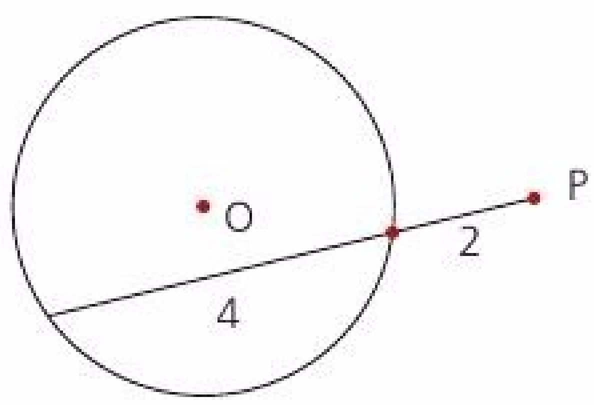
a) 12



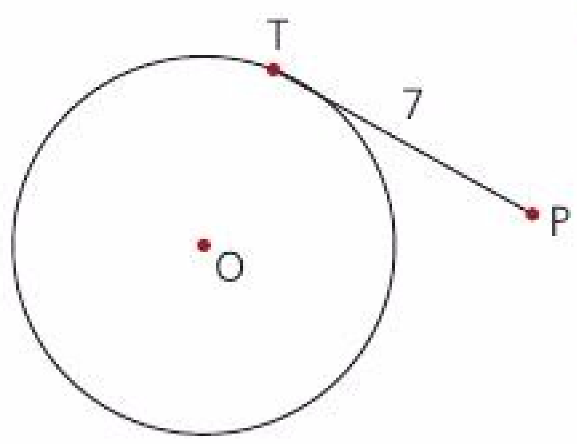
b) 5



c) 12

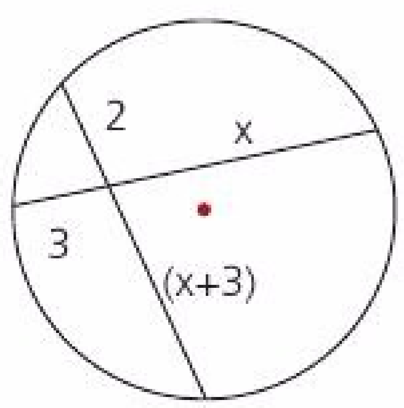


d) 49

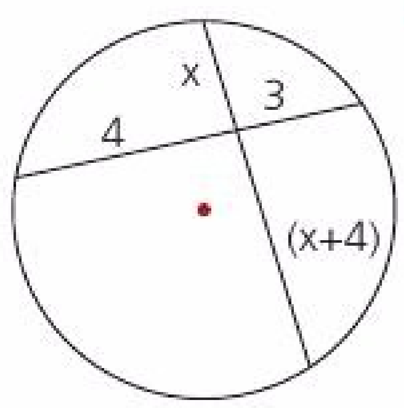


2. Determine a medida de **x** em cada caso:

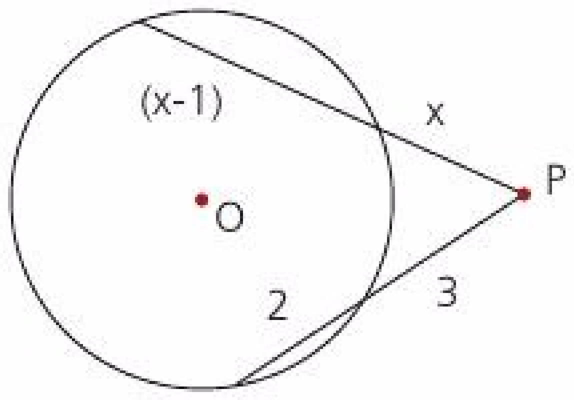
a) x = 6



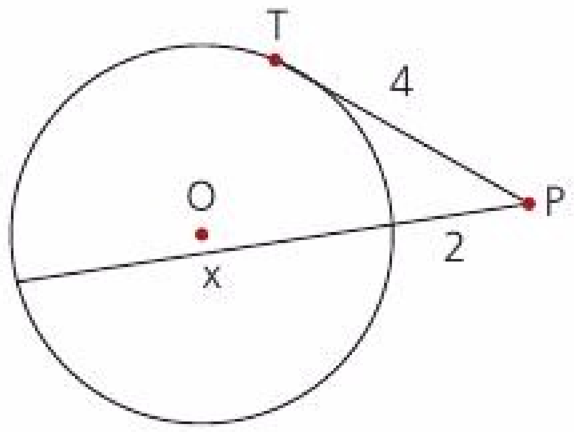
b) S = {2}



c) $S = \{3\}$

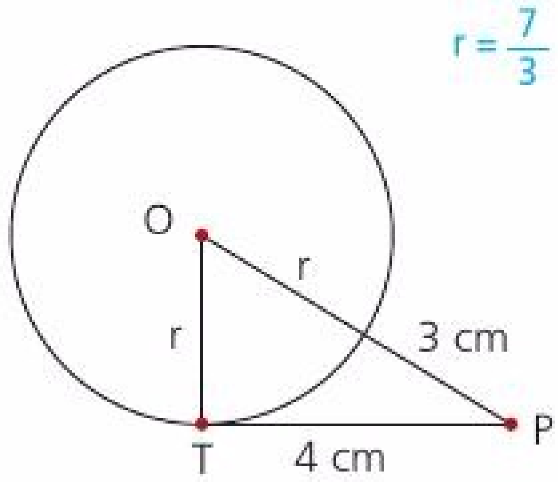


d) $S = \{6\}$

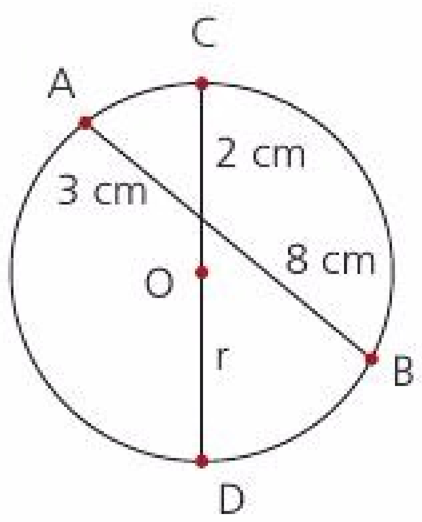


3. Em cada caso, determine o raio **r** da circunferência de centro O:

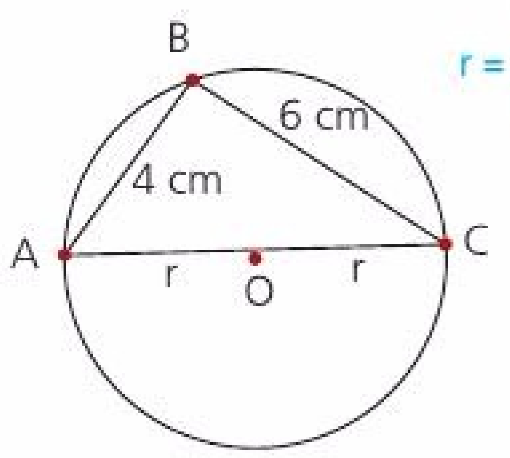
a) $r = \frac{7}{3}$



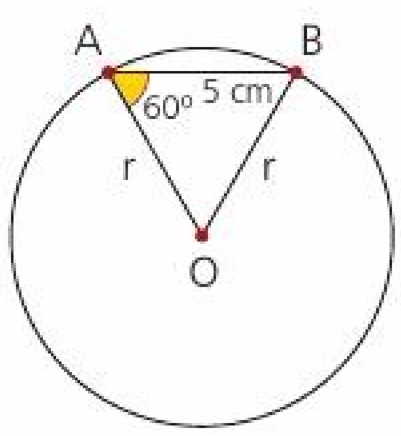
b) $r = 5$



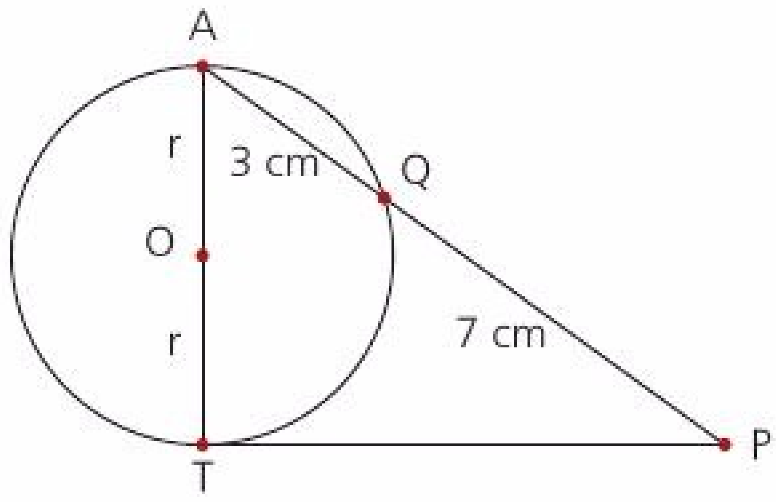
c) $r = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}}$



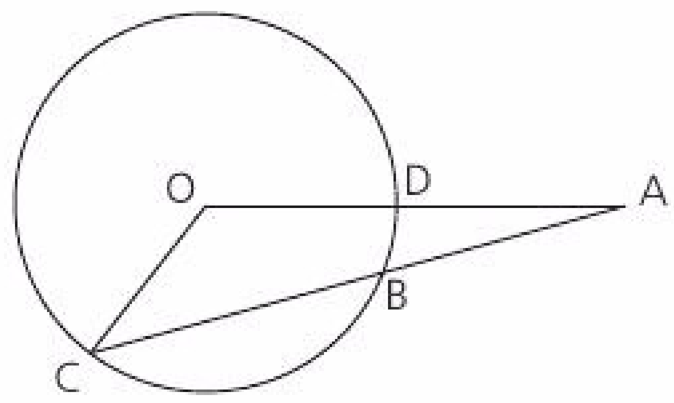
d) $r = 5$ cm



4. Determine o raio da circunferência de centro O da figura, sabendo que $\overline{PT}$ é tangente à circunferência. $r=15$



5. Na figura a seguir, $\overline{AB} = 8$ cm, $\overline{BC} = 10$ cm, $\overline{AD} = 4$ cm e o ponto O é o centro da circunferência. O perímetro do triângulo AOC mede, em cm:



a) 36
b) 45
c) 48
d) 50
x e) 54

Construir figura

6. Seja E um ponto externo a uma circunferência. Os segmentos $\overline{EA}$ e $\overline{ED}$ interceptam essa circunferência nos pontos B e A, e, C e D, respectivamente. A corda $\overline{AF}$ da circunferência intercepta o segmento $\overline{ED}$ no ponto G.

Se $\overline{EB} = 5$, $\overline{BA} = 7$, $\overline{EC} = 4$, $\overline{GD} = 3$ e $\overline{AG} = 6$, então $\overline{GF}$ vale:

a) 1
b) 2
c) 3
x d) 4
e) 5

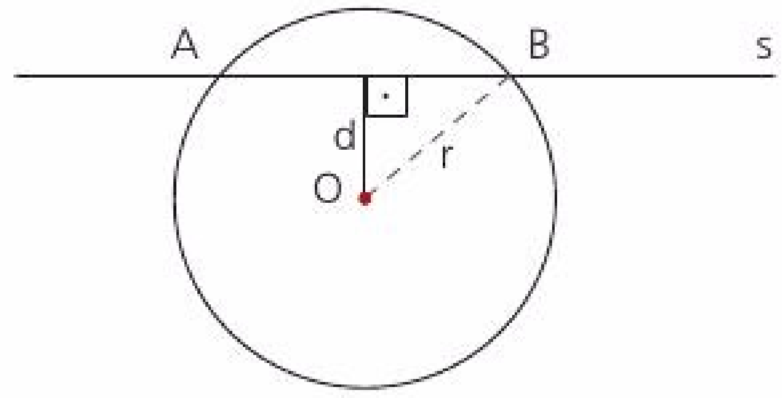
Posições relativas entre reta e circunferências

Vamos analisar três diferentes possibilidades de posicionamento de uma reta em relação a uma circunferência:

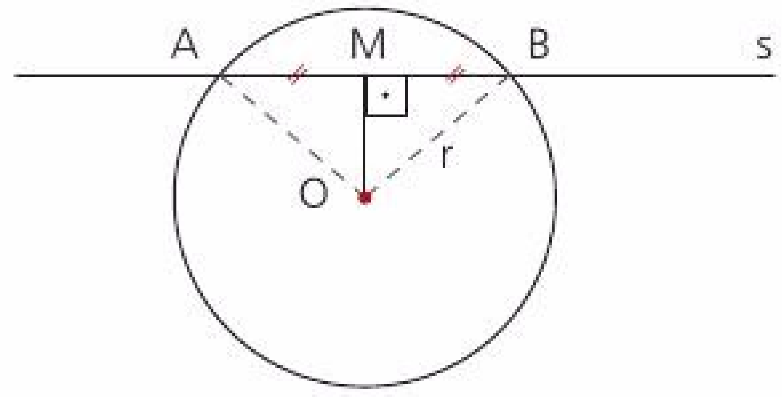
a) Reta secante à circunferência

Nesse caso, a reta **s** corta a circunferência em dois pontos: **A** e **B**. Note que a distância (**d**) entre o centro **O** da circunferência e a reta **s** é **menor** que o raio **r** da circunferência.

Professor, organize os alunos em grupos para que produzam cartazes com as propriedades dos arcos e dos ângulos, potência de ponto, as posições relativas entre duas circunferências e entre uma reta e uma circunferência. Faça uma sala de aula ambiente, afixando os cartazes nas paredes.

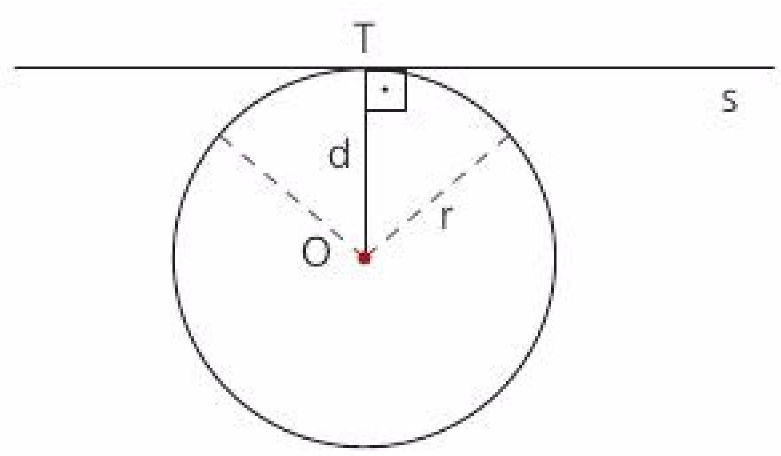


Note que, quando a reta **s** determina a corda, definem-se dois triângulos retângulos congruentes: OMA e OMB. Em função desta congruência, é fácil perceber que $\overline{AM} = \overline{MB}$ e $\overline{OM}$ é perpendicular a $\overline{AB}$. Em outras palavras, o segmento de reta, que une o centro de uma circunferência ao ponto médio da corda, é perpendicular à corda.



b) Reta tangente à circunferência

A reta **s** "toca" a circunferência em um único ponto **T**. Este ponto é chamado de **ponto de tangência** e, nesse caso, a distância entre a reta **s** e o centro **O** da circunferência é igual ao raio desta circunferência.

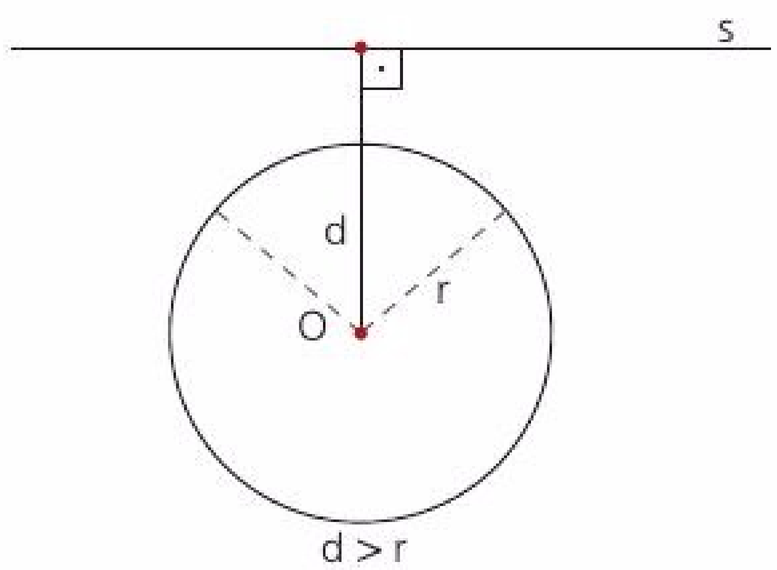


Como a distância do ponto **O** à tangente **s** é igual ao raio, e a distância a uma reta é dada pelo segmento perpendicular a ela, podemos dizer que:

Toda reta tangente a uma circunferência é perpendicular ao seu raio.

c) Reta externa à circunferência

Esta é a situação na qual a reta **s** e a circunferência não têm pontos comuns. Nesse caso, a distância do centro da circunferência à reta **s** é maior que o raio da circunferência.

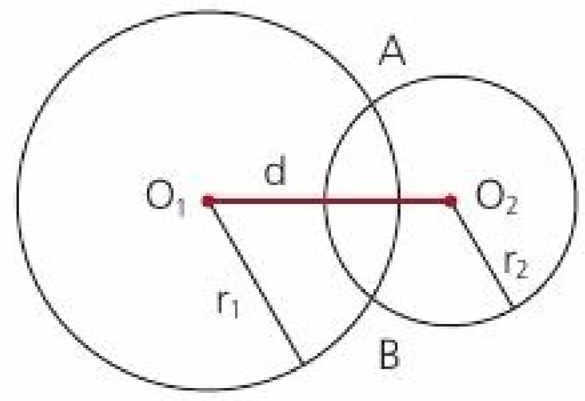


Posições relativas de duas circunferências

Da mesma forma que analisamos as posições entre retas e circunferências, vamos estudar três possibilidades para as posições relativas de duas circunferências:

a) Circunferências secantes

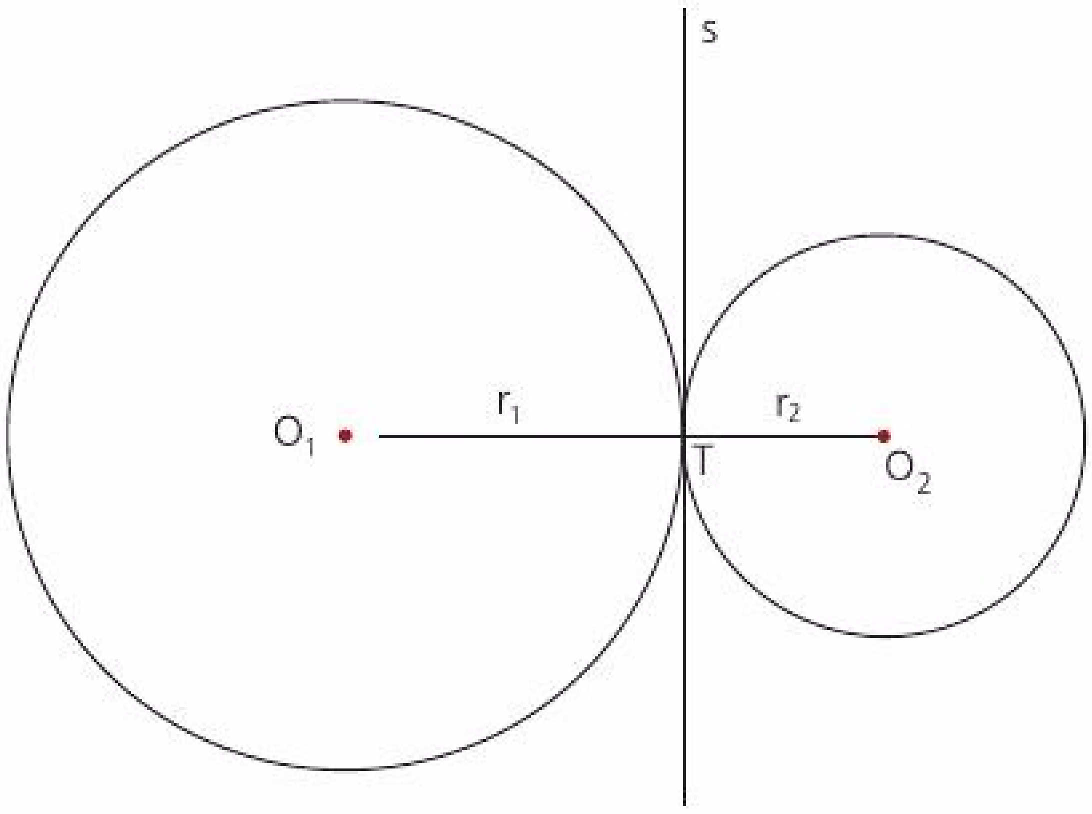
Duas circunferências são secantes quando têm dois pontos comuns. Neste caso, a distância entre seus centros é menor que a soma de seus raios.



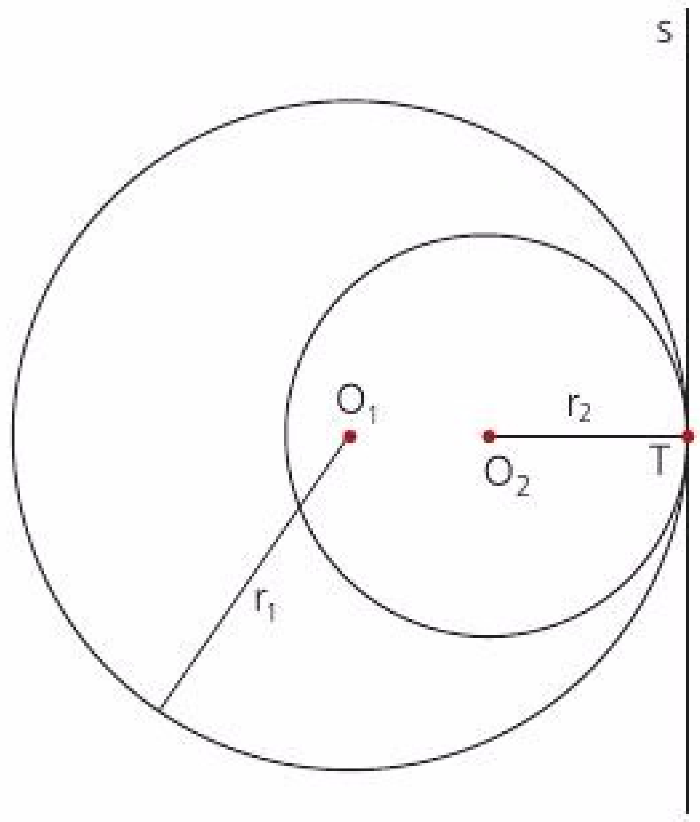
$$\mathbf{d < r_1 + r_2}$$

b) Circunferências tangentes

Duas circunferências são tangentes num ponto **T**, quando admitem uma reta tangente **s** comum. Observe que os centros das duas circunferências e o ponto de tangência **T** pertencem à mesma reta e que esta reta é perpendicular aos raios das duas circunferências. Neste caso, as circunferências podem ser tangentes externamente ou tangentes internamente.



Circunferências tangentes externamente



Circunferências tangentes internamente

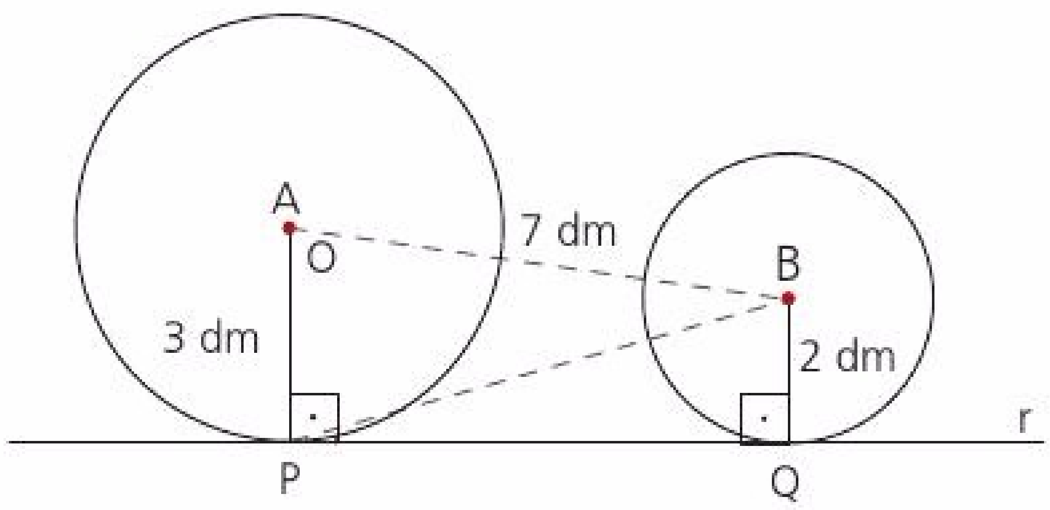
Observe que no primeiro caso, a distância entre os centros é a soma dos raios e, no segundo caso, a diferença. Assim, sendo **d** a distância entre os centros de duas circunferências tangentes, temos:

Circunferências tangentes externamente → $\mathbf{d = r_1 + r_2}$
Circunferências tangentes internamente → $\mathbf{d = r_1 - r_2}$

Atividades

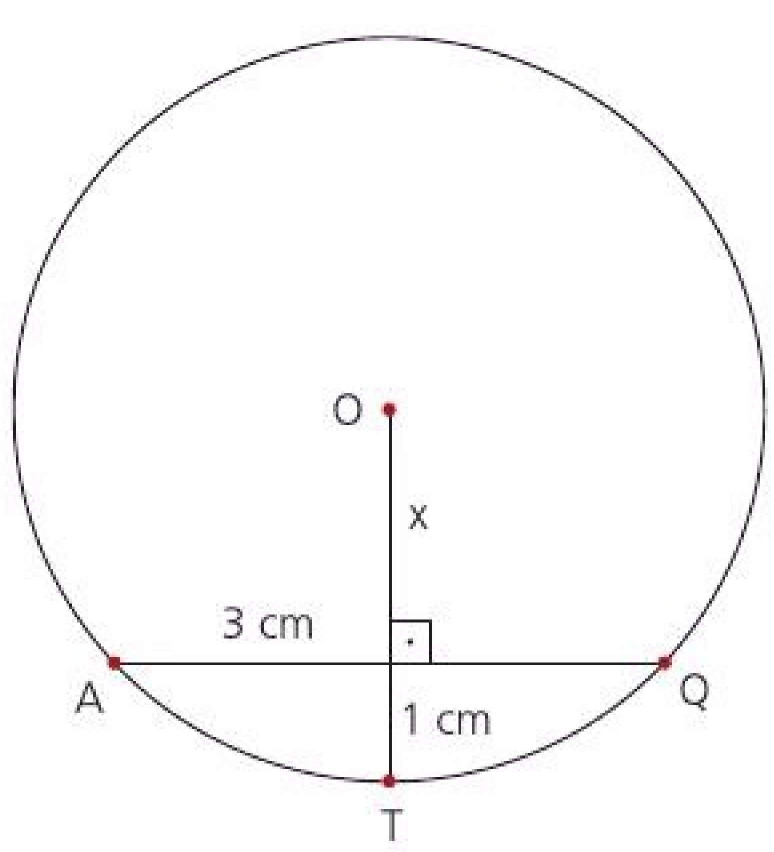
As atividades têm como base a interpretação dos enunciados e buscam avaliar o entendimento dos alunos sobre os principais tópicos do conteúdo.

7. Paulo fabricou uma bicicleta, com rodas de tamanhos distintos, o raio da roda maior (dianteira) mede 3 dm, o raio da roda menor mede 2 dm e a distância entre os centros A e B das rodas é de 7 dm. As rodas da bicicleta, ao serem apoiadas no solo horizontal, podem ser representadas no plano (desprezando-se os pneus) como duas circunferências, de centros A e B, que tangenciam a reta **r** nos pontos P e Q, como indicado na figura.



Determine a distância entre os pontos de tangência P e Q. PQ ≅ 6,9 dm

8. Determine a medida de **x** na figura a seguir, sendo $\overline{AQ}$ uma corda da circunferência.



x = 4 cm

9. A distância entre uma reta **s** e o centro **O** de uma circunferência é 5 cm. Se o diâmetro da circunferência é de 8 cm, qual é a posição relativa entre a reta **s** e a circunferência? Faça uma figura representando esta situação. s é externa à circunferência

Construir figura

10. Uma corda $\overline{AB}$ de um círculo mede 8 cm. E um ângulo $A\hat{C}B$, com vértice C situado sobre a circunferência, mede 30º. Determine:

a) A medida em cm do arco $A\hat{C}B$;
arco ACB = 41,86 cm

b) O raio **r** da circunferência.
r = 8

11. Sendo $\mathbf{r_1}$ e $\mathbf{r_2}$ os raios de duas circunferências C_1 e C_2, respectivamente, e **d** a distância entre os centros, dê as posições relativas em cada caso:

a) $r_1 = 2$ cm, $r_2 = 5$ cm e d = 10 cm
externas

b) $r_1 = 3$ cm, $r_2 = 7$ cm e d = 4 cm
tangente interna

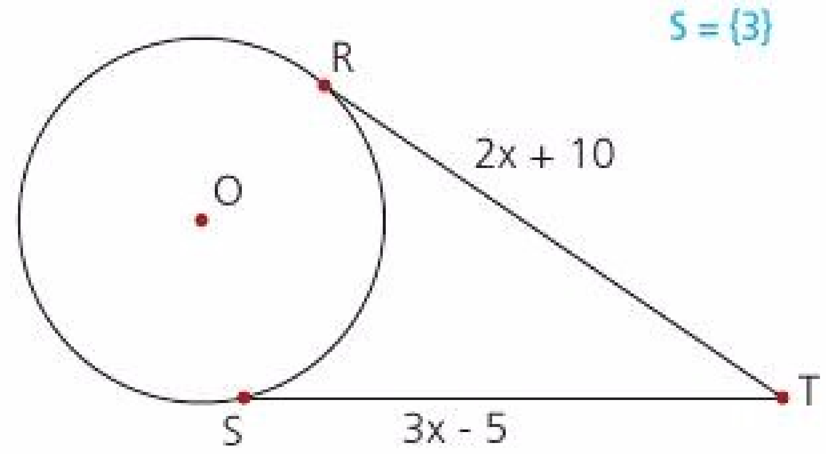
c) $r_1 = 5$ cm, $r_2 = 5$ cm e d = 8 cm
secantes

d) $r_1 = 4$ cm, $r_2 = 3$ cm e d = 7 cm
tangentes externas

e) $r_1 = 3$ cm, $r_2 = 2$ cm e d = 0
concêntricas

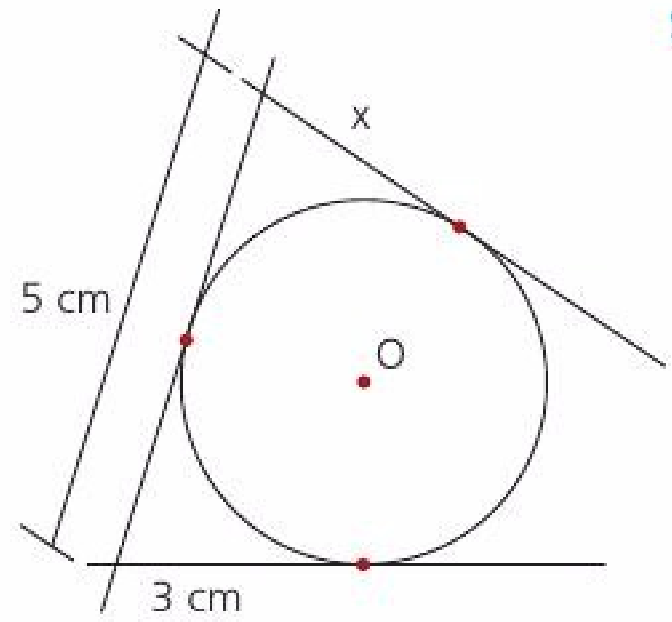
12. Determine **x** nos casos a seguir, onde os segmentos são tangentes às circunferências:

a)



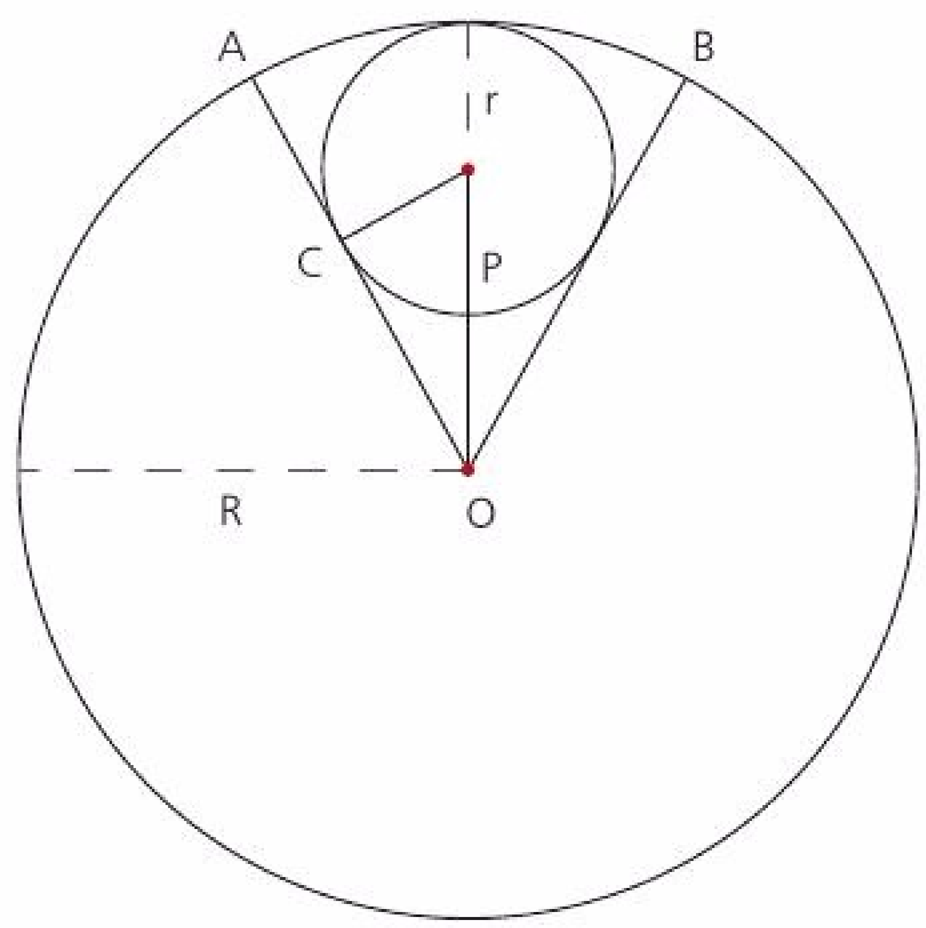
S = {3}

b)



S = {2}

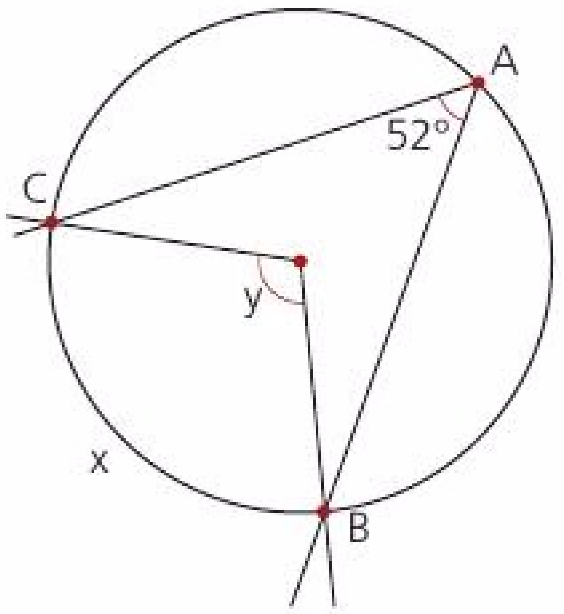
13. A figura mostra duas circunferências que se tangenciam interiormente. A circunferência maior tem centro em O e raio de 15 cm. A menor tem raio **r = 5 cm** e é tangente a OA no ponto C. Determine o perímetro do triângulo COP. 23, 65 cm



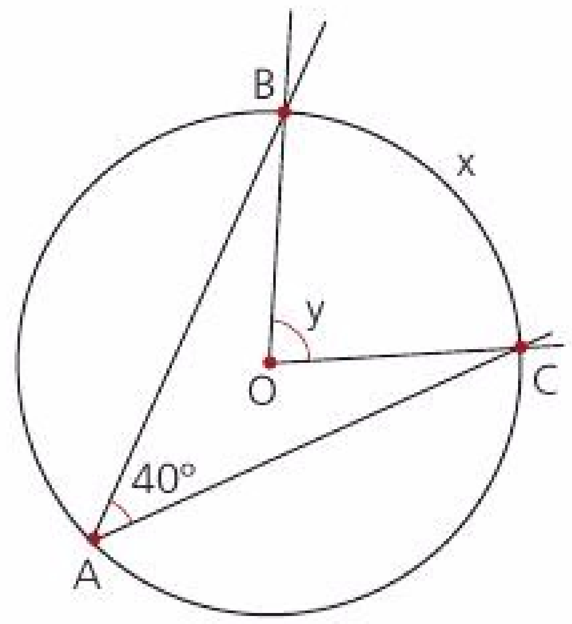
Para estudar

14. Nas figuras a seguir, determine o valor de **x** e **y**:

a)

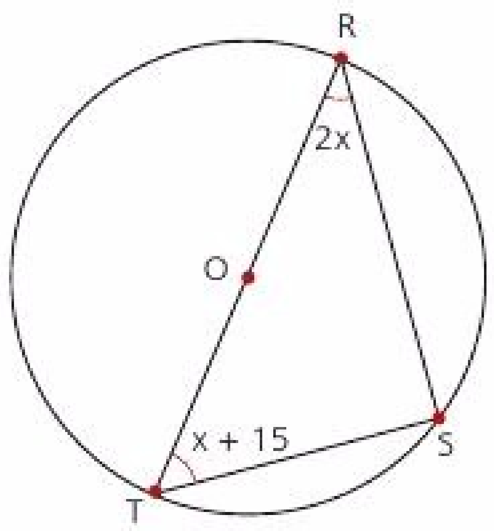


b)



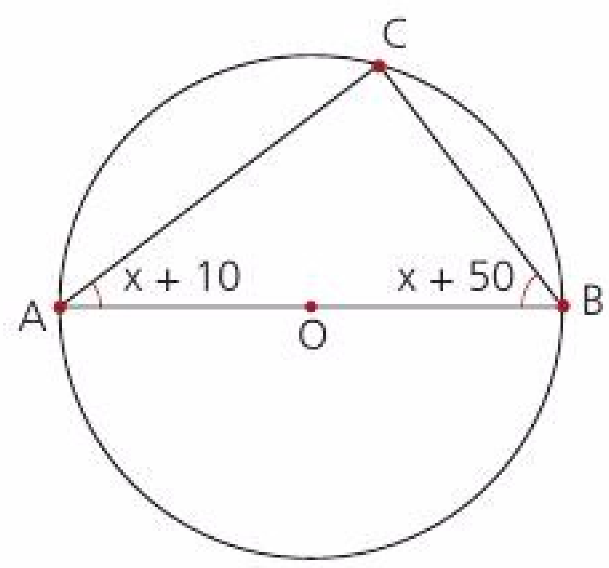
15. Determine o valor de **x** e o valor dos ângulos internos dos triângulos nas figuras a seguir:

a)



$\overline{RT}$ é o diâmetro

b)

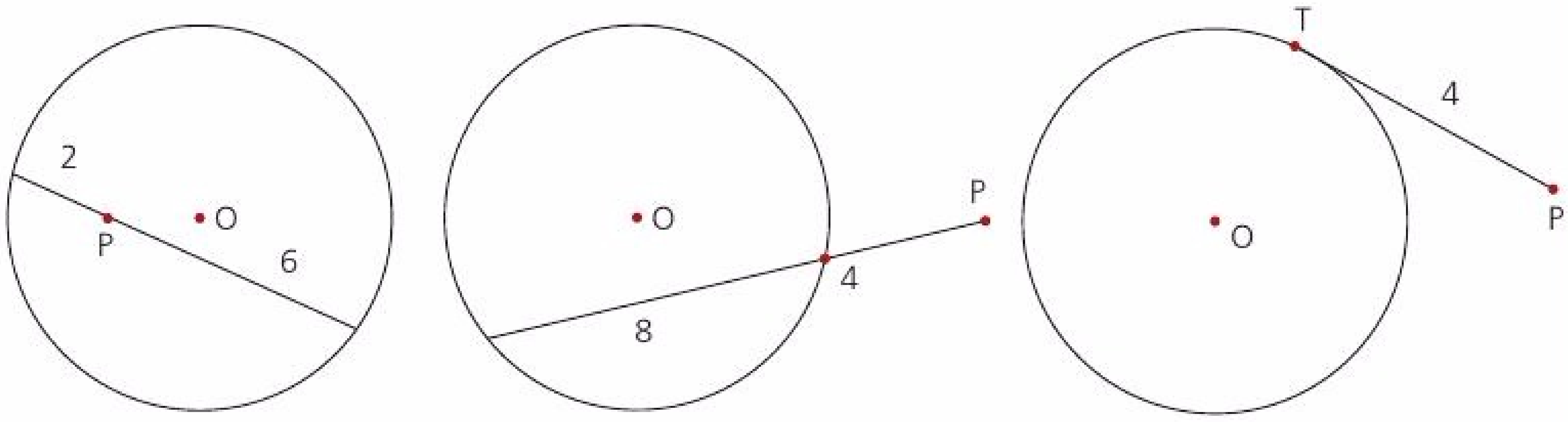


16. A medida de um ângulo central é dada por (2x – 24°). Esse ângulo determina na circunferência um arco cuja medida é dada por (x + 14°). Qual é a medida do ângulo inscrito determinado?

17. A que fração da circunferência corresponde o arco determinado pelos seguintes ângulos inscritos: 30°, 135° e 15°?

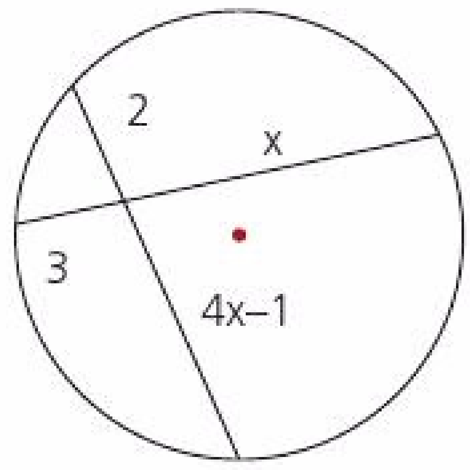
18. Em cada caso a seguir, determine a potência do ponto **P** em relação à circunferência dada:

a)

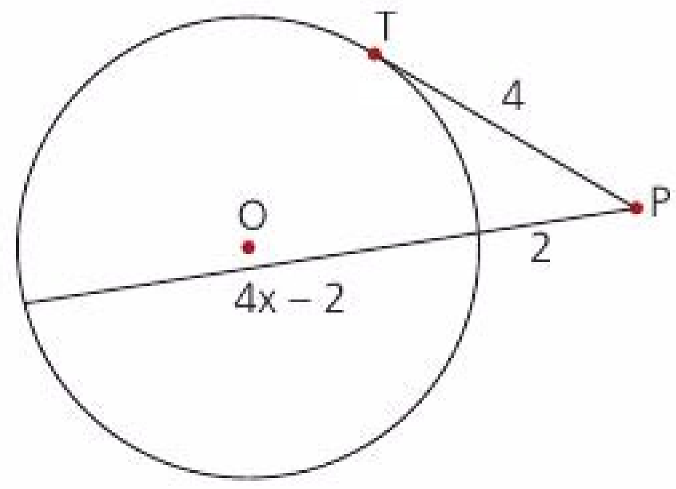


19. Determine a medida de **x** em cada caso:

a)

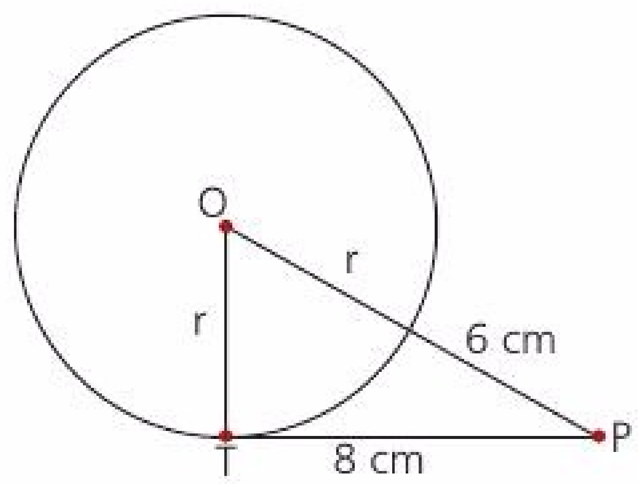


b)

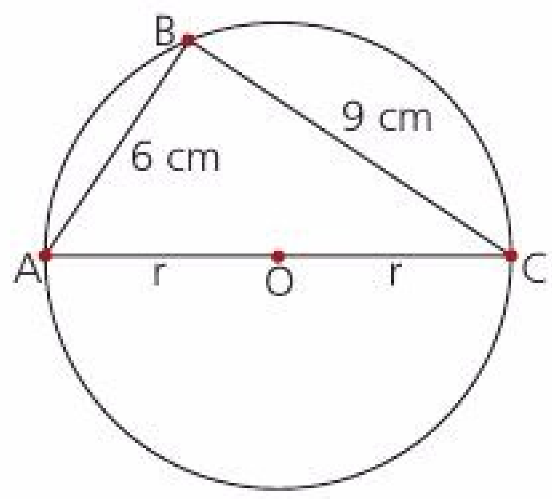


20. Em cada caso, determine o raio **r** da circunferência de centro **O**:

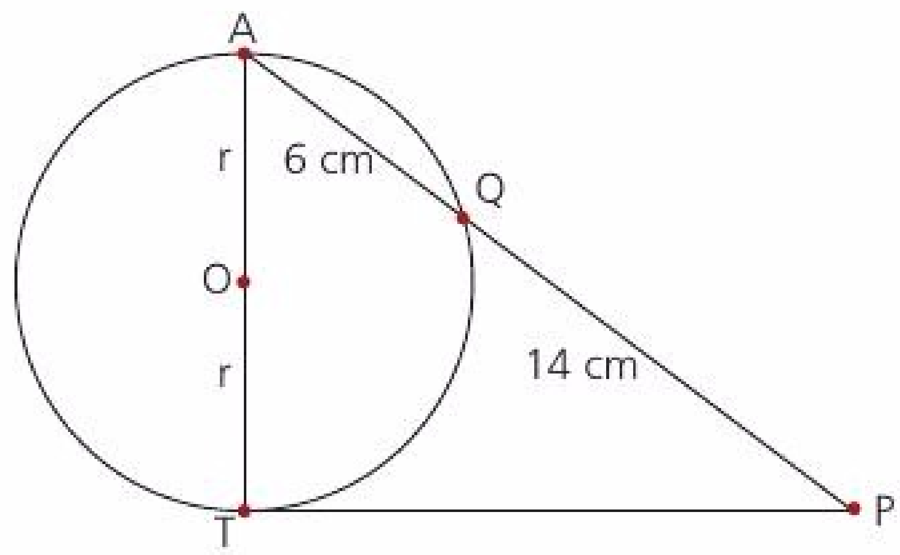
a)



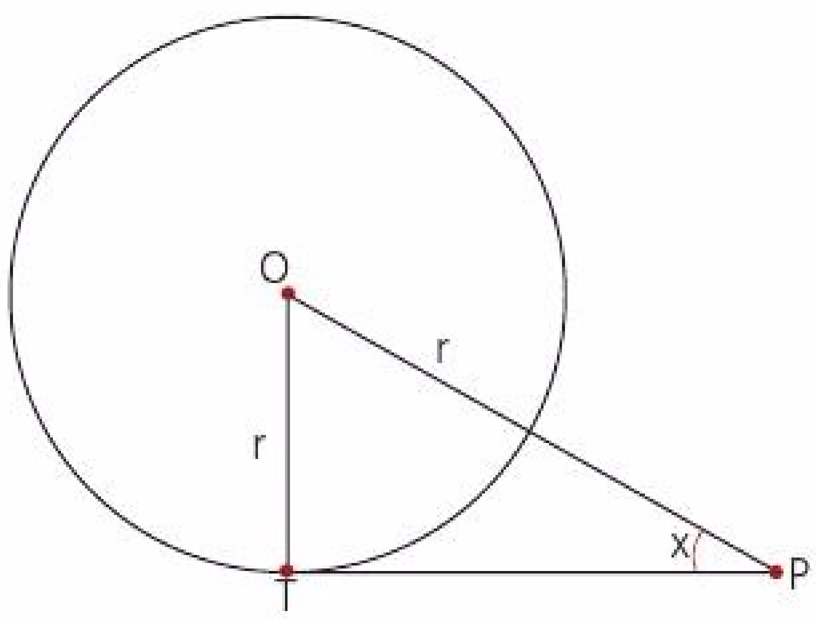
b)



21. Determine o raio da circunferência de centro **O** da figura, sabendo que $\overline{PT}$ é tangente à circunferência.

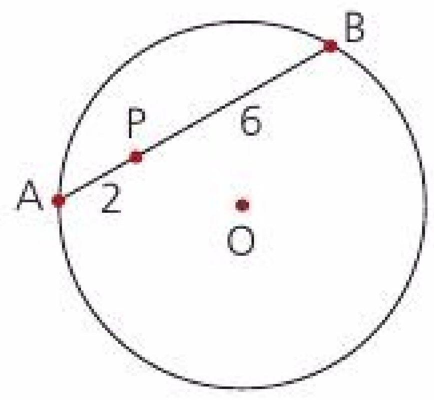


22. A figura mostra um segmento $\overline{PT}$ tangente à circunferência de centro **O**. Determine a medida do ângulo **x**.



Resolução das atividades

1. a)



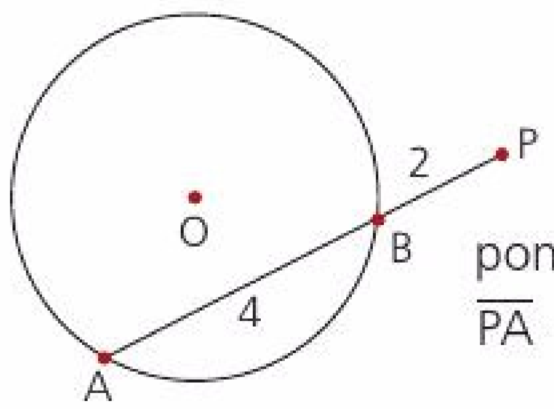
ponto interno

potência do ponto P

$\overline{AP} \cdot \overline{PB} = 2 \cdot 6 = 12$

b) $\overline{AP} \cdot \overline{PB} = 1 \cdot 5 = 5$

c)



ponto externo

$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = 6 \cdot 2 = 12$

d) $\overline{PT}^2 = 7^2 = 49$

2. a) $3 \cdot x = 2\,(x + 3)$

$3x = 2x + 6 \rightarrow x = 6$

b) $4 \cdot 3 = x\,(x + 4)$

$12 = x^2 + 4x$

$x^2 + 4x - 12 = 0$

$x_1 = -6 \rightarrow x_2 = 2$

$S = \{2\}$

c) $5 \cdot 3 = x \cdot (x - 1 + x)$

$15 = 2x^2 - x$

$2x^2 - x - 15 = 0$

$x_1 = 3 \rightarrow x_2 = -\frac{5}{2}$

$S = \{3\}$

d) $4^2 = 2\,(x + 2)$

$16 = 2x + 4 \rightarrow x = 6$

$S = \{6\}$

3. a) $4^2 = 3(3 + r)$

$16 = 9 + 3r$

$7 = 3r$

$r = \frac{7}{3}$

b) $3 \cdot 8 = 2\,(r + r - 2)$

$24 = 4r - 4$

$20 = 4r \rightarrow r = 5$

c) $(2r)^2 = 4^2 + 6^2$

$4r^2 = 16 + 36$

$4r^2 = 52$

$r^2 = 13$

$r = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}}$

d) r = 5 cm

4. $(PT)^2 = 7 \,.\, 10 = 70$

$PT = \sqrt{70}$

$10^2 = 70 + 2r$

$100 - 70 = 2r$

$30 = 2r$

$r = 15$

5. $18 \cdot 8 = 4\,(2r + 4)$

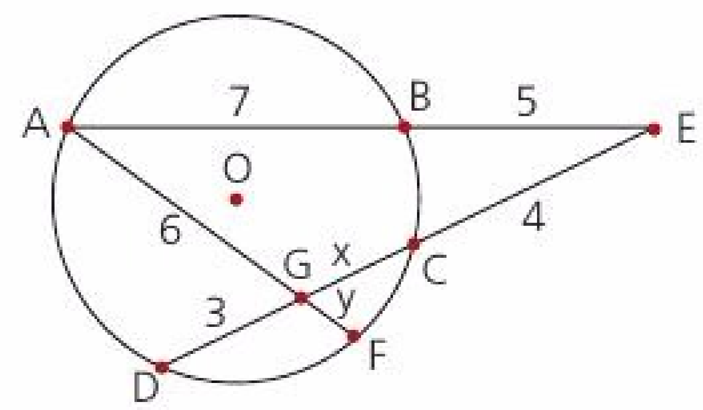
$144 = 8r + 16$

$128 = 8r$

$r = 16$

P = 54 m alternativa (e)

6.



$\overline{EB} \cdot \overline{EA} = \overline{EC} \cdot \overline{ED}$

$5 \cdot 12 = 4 \cdot \overline{ED}$

$\overline{ED} = \frac{60}{4} = 15$

$\overline{CD} = \overline{ED} - \overline{EC} = 15 - 4 = 11$

$\overline{CD} = \overline{DG} - \overline{GC} \rightarrow 11 = 3 + GC$

$\overline{GC} = 8$

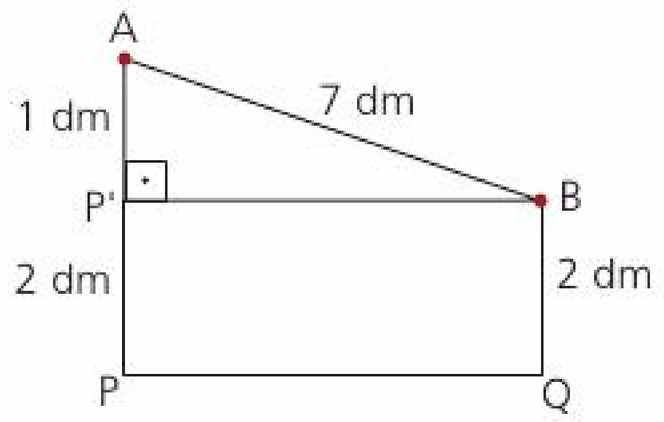
$\overline{DG} \cdot \overline{GC} = \overline{AG} - \overline{GF}$

$3 \cdot 8 = 6 \cdot \overline{GF}$

$\overline{GF} = \frac{24}{6}$

$\overline{GF} = 4$ alternativa (d)

7. $\overline{PQ} = ?$



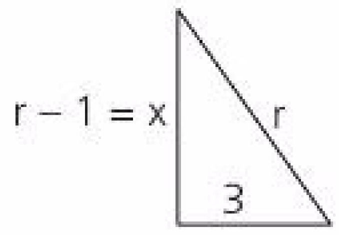
$\overline{PQ}^2 = 7^2 - 1^2$

$\overline{PQ}^2 = 48$

$\overline{PQ} = \sqrt{48}$

$\overline{PQ} \cong 6{,}9$ dm

8.



$r^2 = 3^2 + (r - 1)^2$

$\cancel{r^2} = 9 + \cancel{r^2} - 2r + 1$

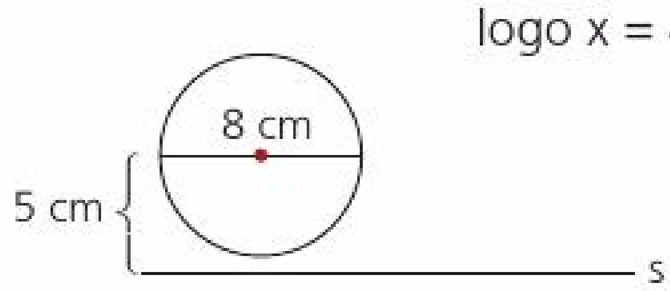
$0 = 10 - 2r$

$2r = 10$

$r = 5$ cm

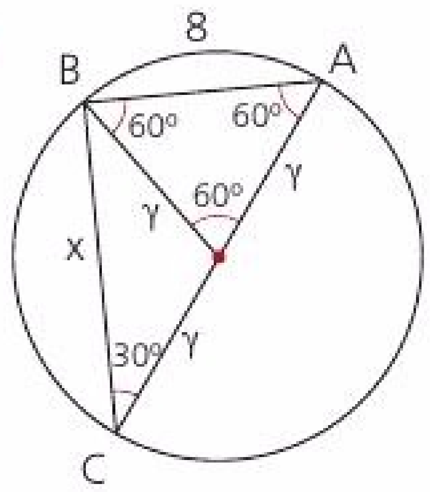
logo $x = 4$ cm

9.



a reta s é externa à circunferência

10.



a) $16^2 = 8^2 + x^2$

$256 - 64 = x^2$

$x = 8\sqrt{3}$

$C = 2\pi r$

$= 2 \cdot 8 \cdot \pi$

$= 50{,}24$

360 —— 50,24

360 —— x

$x = 41{,}86$ cm

arco $A\hat{C}B = 41{,}86$ cm

b) $r = 8$

11. a) externas

b) tangente interna

c) secantes

d) tangentes externas

e) concêntricas

12. a) $(2x + 10)^2 = (3x - 5)^2$

$4x^2 - 40x + 100 = 9x^2 - 30x + 25$

$4x^2 - 40x + 100 - 9x^2 + 30x - 25 = 0$

$-5x^2 - 10x + 75 = 0$

$S = -2$

$P = -15 \rightarrow -5$ e 3

$S = \{3\}$

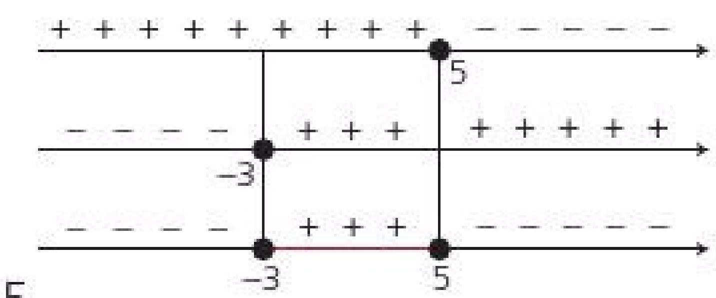
b) $x = 2$

$S = \{2\}$

13. $R = 15$

$r = 5$

$p = 10$



$\overline{OC}^2 = 5 \cdot 15$

$\overline{OC}^2 = 75$

$\overline{OC} = +5\sqrt{3}$

Perímetro do $\Delta COP = 5 + 10 + 5\sqrt{3}$

$= (15 + 5\sqrt{3}$ cm

$\cong 23{,}65$ cm

Respostas da seção Para estudar

14. a) $x = y = 104°$ b) $x = y = 80°$

15. a) 30°, 60° e 90°. b) 25°, 65°, 90°.

16. $x = 38°$

ângulo inscrito = 26°

17. $\frac{1}{12}$; $\frac{3}{8}$, e $\frac{1}{24}$.

18. a) 12 b) 32 c) 6

19. a) $x = \frac{2}{5}$ b) $x = 2$

20. a) $r = \frac{14}{3}$ cm b) $r = \frac{\sqrt{117}}{4}$ cm

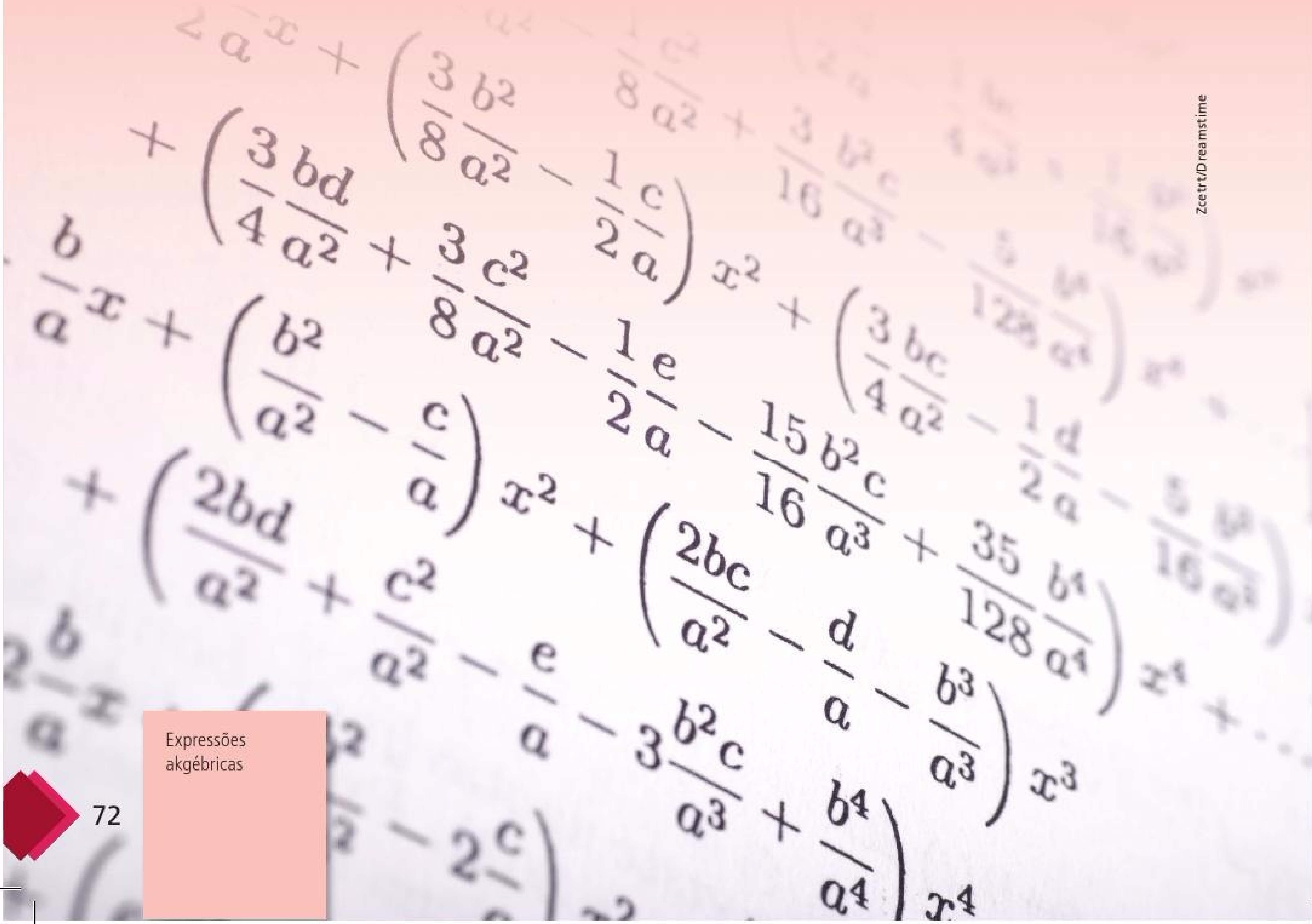
21. $r = \sqrt{30}$ cm

22. $x = 30°$

capítulo 4

Equações algébricas

- Equações irracionais
- Equações fracionárias
- Sistemas de Equações
- Problemas envolvendo equações do segundo grau



Zcetrt/Dreamstime

Conversa Inicial

Quando estudamos equações do segundo grau, vimos que existem relações entre os coeficientes de uma equação $ax^2 + bx + c = 0$ (com $a \neq 0$) e a existência de raízes reais, uma vez que esses coeficientes determinam o valor do discriminante Δ da equação.

Neste capítulo, vamos ampliar o estudo das equações em geral. Ao fazer isso, inevitavelmente encontraremos situações que só podem ser resolvidas com a utilização de equações de segundo grau, e, obviamente, com tudo o que aprendemos até aqui sobre os monômios, os polinômios e as frações algébricas.

Desde os tempos mais antigos, os matemáticos se preocupam com formas de expressar uma situação real que está sendo estudada. Sabemos que essa linguagem de expressão é a Álgebra, que nos fornece símbolos, formatos de escrita e regras operatórias que nos permitem chegar às soluções que nos interessam. O caminho é este:

Problema

↓

Expressão algébrica

↓

Equação algébrica

↓

Solução

As equações têm sido objeto de estudo de várias gerações de matemáticos. Desde a Babilônia, passando pelo Egito, pela Grécia, pela Índia e pelos árabes, construiram-se os mais diversos métodos e processos de resolução de equações. Assim foi que recebemos a herança da fórmula de Bhaskara, os processos algébricos de operações com polinômios, até atingirmos níveis mais sofisticados de cálculo.

O importante é compreender que, por trás da simples resolução de uma equação, existe uma história muito rica de elaboração de processos que sempre estarão presentes nas conquistas humanas. Esses processos são chamados de **algoritmos,** termo que significa **jeito de fazer**.

Equação algébrica → **Algoritmo** → **Solução**

A fórmula de Bhaskara é um algoritmo, pois traduz um processo, um caminho, um jetio de resolver equações do segundo grau. Vamos investigar outros algoritmos ao estudar equações algébricas e avançar um pouco mais no domínio da Álgebra.

Equações irracionais

Chamamos de equação irracional a toda equação onde a incógnita aparece sob um radical.

São exemplos de equações irracionais:

- $\sqrt{x + 1} = 3$
- $\sqrt{x} + \sqrt{(x + 12)} = 6$
- $\sqrt{x} + 1 = \sqrt{(x + 1)}$
- $\sqrt[3]{x - 3} + 1 = \sqrt[3]{x}$

O processo de resolução de uma equação irracional exige que o radical seja eliminado, para que a equação recaia numa equação do primeiro ou do segundo grau.

Basicamente, a eliminação do radical pode ser feita ao elevarmos ambos os membros da equação ao índice do radical, tantas vezes quantas forem necessárias para eliminá-lo. Vejamos dois exemplos iniciais:

a) Vamos resolver a equação $\sqrt{3x - 2} = 4$

$(\sqrt{3x - 2})^2 = 4^2 \rightarrow 3x - 2 = 16 \rightarrow 3x = 18 \rightarrow x = 6$

De fato, se substituirmos o resultado obtido na equação irracional original, verificamos que $x = 6$ é raiz da equação, pois:

$\sqrt{3x - 2} = 4 \rightarrow$ para $x = 6 \rightarrow \sqrt{3 \cdot 6 - 2} = \sqrt{16} = 4$

b) Observe, agora, o que ocorre na resolução de $\sqrt{5x + 1} = x - 1$

$\sqrt{5x + 1} = x - 1 \rightarrow (\sqrt{5x + 1})^2 = (x - 1)^2 \rightarrow 5x + 1 = x^2 - 2x + 1$

$x^2 - 7x = 0 \rightarrow x(x-7) = 0$

$x_1 = 7$ e $x_2 = 0$

Vamos verificar a validade das duas raízes obtidas:

- para $x = 7 \rightarrow \sqrt{5 \cdot 7 + 1} = 7 - 1 \rightarrow \sqrt{36} = 6 \rightarrow x = 7$ é uma raiz;
- para $x = 0 \rightarrow \sqrt{5 \cdot 0 + 1} = 0 - 1 \rightarrow \sqrt{1} = -1 \rightarrow x = 0$ não é uma raiz;

Note que no segundo exemplo, ao elevarmos os dois membros da equação ao quadrado, obtivemos uma nova equação que produziu uma raiz que não é compatível para a equação irracional original.

Isso pode acontecer quando elevamos os dois membros de uma igualdade ao quadrado. Suponha que os membros sejam A e B.

Professor: Ressalte que, para solucionar uma equação desse tipo, é necessário que passemos pelas três etapas propostas no texto.

Observe:

- se $A = B$, podemos dizer que $A^2 = B^2$
- se $A^2 = B^2$, podemos ter $A = B$ ou $A = -B$

Por essa razão, sempre que elevarmos os membros de uma equação irracional a um expoente, corremos o risco de introduzir raízes que não satisfazem a equação original. Assim, sempre devemos **verificar a validade** de cada raiz obtida na resolução da equação irracional. Sistematizando esse processo, podemos escrever que uma equação irracional deve ser resolvida cumprindo-se as seguintes etapas:

a) transformar a equação irracional em uma equação racional, elevando-se ambos os termos da equação ao índice do radical que contém a incógnita;

b) resolver a equação racional obtida;

c) verificar se as raízes encontradas satisfazem a equação irracional original.

Observe mais um exemplo da aplicação dessas etapas.

Vamos resolver a seguinte equação irracional:

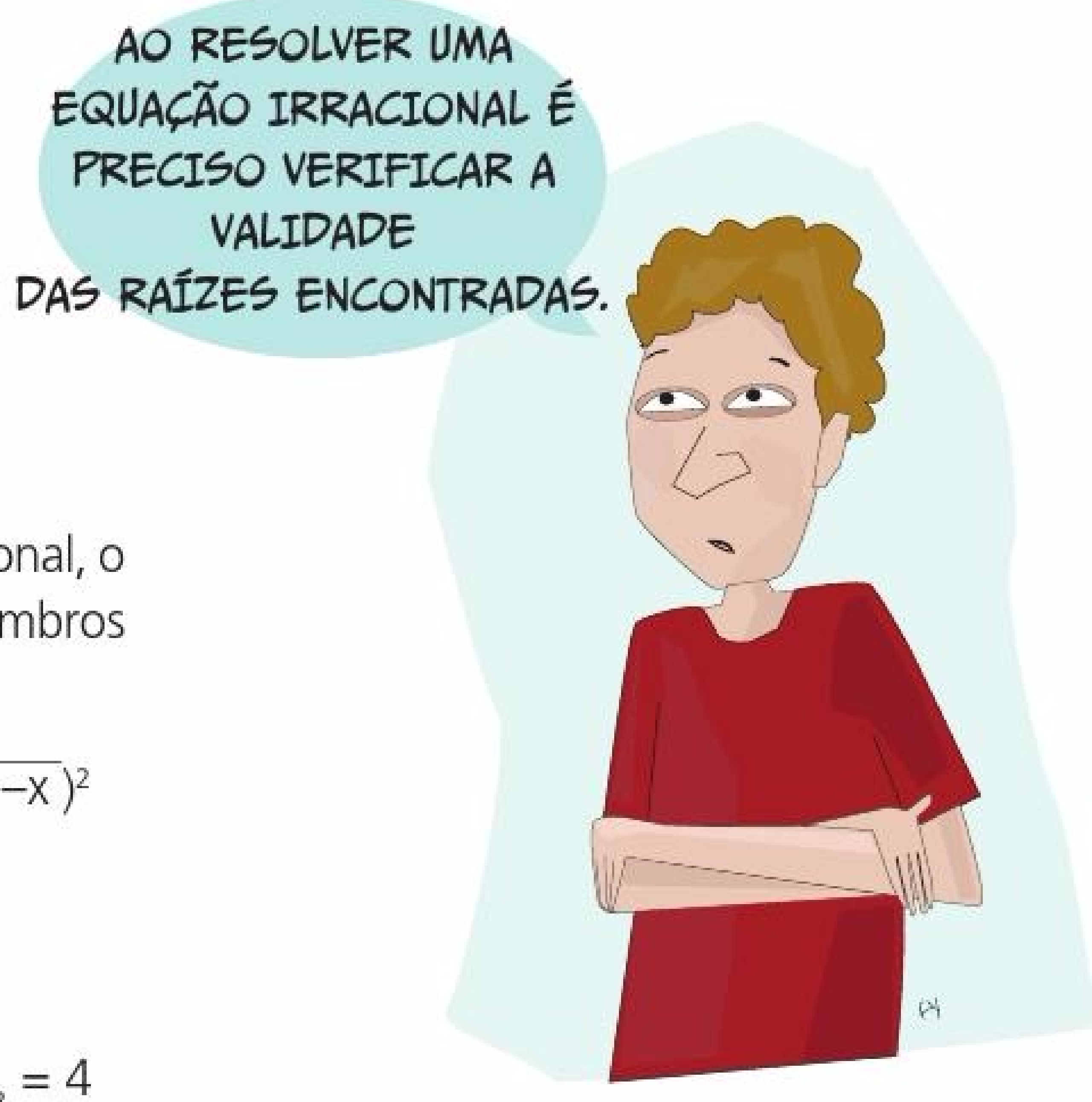
$$\sqrt{3x - 11} - \sqrt{5 - x} = 2$$

$$\sqrt{3x - 11} = 2 + \sqrt{5 - x}$$

$$(\sqrt{3x - 11})^2 = (2 + \sqrt{5 - x})^2$$

$$3x - 11 = 4 + 4\sqrt{5 - x} + 5 - x$$

$$x - 5 = \sqrt{5 - x}$$



Note que obtivemos uma nova equação irracional, o que exige que elevemos novamente os dois membros ao quadrado para eliminar o radical:

$$x - 5 = \sqrt{5 - x} \rightarrow (x - 5)^2 = (\sqrt{5 - x})^2$$

$$x^2 - 10x + 25 = 5 - x$$

$$x^2 - 9x + 20 = 0$$

resolvendo-se por Bhaskara, temos $x_1 = 5$ e $x_2 = 4$

Voltamos à equação irracional original para verificarmos a validade das raízes:

- $\sqrt{3x - 11} - \sqrt{5 - x} = 2 \rightarrow x = 5$, temos $\sqrt{3 \cdot 5 - 11} - \sqrt{5 - 5} \rightarrow 2 = 2$
  Logo, $x = 5$ é raiz da equação irracional.

- $\sqrt{3x - 11} - \sqrt{5 - x} = 2 \rightarrow x = 4$, temos $\sqrt{3 \cdot 4 - 11} - \sqrt{5 - 4} = 2 \rightarrow 1 \neq 2$
  Logo, $x = 4$ não é raiz da equação irracional.

Atividades

1. Resolva as seguintes equações irracionais.

a) $\sqrt{3 + x} = x + 3$ S = {–3, – 2}

b) $\sqrt{3 + x} = \sqrt{x} + \sqrt{3}$ S = {0}

c) $\sqrt{10x + 6} = x + 3$ S = {1; 3}

d) $\sqrt[3]{2x - 5} = 1$ S = {3}

e) $\sqrt[3]{x} + 1 = 3$ S = {8}

f) $x - 2\sqrt{x} = 0$ S = {0; 4}

g) $x + 2\sqrt{x} = 0$ S = {0, 4}

2. Resolva a equação $\sqrt{x} + 1 = \sqrt{(x - 1)}$.
S = {1}

3. Indique a alternativa que apresenta uma raiz da equação irracional a seguir.
S = {1; 7}

$$x - \sqrt{(2x + 2)} = 3$$

a) 1
b) 2
c) 3
d) 5
e) 7

4. Se **x** é um número real, tal que $x + \sqrt{(x - 1)} = 1$, o valor de **x** é:

a) 0
b) 1
c) 1 ou 2 S = {1; 2}
d) $-\frac{1}{2}$ ou 1
e) –1 ou –2

5. Resolva a equação $\sqrt{x} + \sqrt{(x + 12)} = 6$.
x = 4

6. Resolva a equação $\sqrt{(3x + 1)} + \sqrt{(x - 1)} = 6$.
S = {5; 65}

7. Encontre as raízes das seguintes equações:

a) $\sqrt{4 + x} + \sqrt{3 - x} = \sqrt{7}$ S = {–4; 3}

b) $\sqrt{x - \sqrt{x + 1}} = 1$ S = {0; 3}

8. As raízes da equação $\sqrt{x + 2} = \sqrt{3x - 5} - 1$ são respectivamente:

a) 2 e 5
b) 3 e 7
c) 2 e 6
d) 2 e 7 S = {2; 7}

9. O número de soluções da equação $x = \sqrt{(6 - x)}$, com $x > 0$, é igual a:

a) 0
b) 1
c) 2 S = {–3, 2}
d) 3
e) 4

10. Se $r = \sqrt[3]{\dfrac{3w}{4\pi d}}$, expresse **d** em termos de **r** e **w**. $\frac{3w}{4r^3}$

11. Se $v = \dfrac{1}{2}\sqrt{1 + \dfrac{t}{l}}$, expresse **l** em termos de **v** e **t**. $\frac{t}{4v^2 - 1}$

Equações fracionárias

Equações fracionárias são aquelas que possuem a incógnita no denominador. Nesse tipo de equação, pelo fato de a incógnita encontrar-se no denominador, precisamos prestar atenção às restrições de valores que a incógnita pode assumir, para que o denominador não seja igual a zero.

Veja alguns exemplos de equações fracionárias, as restrições e o processo de resolução:

Professor: Comente com seus alunos que esse tipo de equação precisa ser resolvido atendendo a algumas restrições, pois não podemos realizar divisões por zero. Detalhe no quadro cada exemplo.

a) $-\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{x}{2}=1$

Inicialmente, estabelecemos as restrições para o valor de x.

Nesse caso, a restrição é dada por $x-2\neq 0 \rightarrow x\neq 2$

Em seguida, reduzimos ambos os membros ao mesmo denominador:

mmc $(x-2, 2)=2(x-2)$, logo:

$$\frac{2}{x-2}+\frac{x}{2}=1 \rightarrow \frac{-4}{2(x-2)}+\frac{x(x-2)}{2(x-2)}=\frac{2(x-2)}{2(x-2)}$$

Eliminando-se os denominadores, encontramos:

$-4+x(x-2)=2(x-2) \rightarrow -4+x^2-2x=2x-4 \rightarrow x^2-4x=0$

Para $x^2-4x=0$, temos as raízes $x_1=0$ e $x_2=4$.

Comparando os valores obtidos com a restrição estabelecida incialmente, concluímos que ambos são raízes da equação. Logo, a solução é $S=\{0,4\}$

b) $x+\dfrac{1}{2x}-\dfrac{x+2}{4x}=0$

Nesse caso, $2x\neq 0 \rightarrow x\neq 0$ e $4x\neq 0 \rightarrow x\neq 0$

mmc $(2x, 4x)=4x \rightarrow x+\dfrac{1}{2x}-\dfrac{x+2}{4x}=0 \rightarrow \dfrac{4x^2}{4x}+\dfrac{2}{4x}-\dfrac{(x+2)}{4x}=\dfrac{0}{4x}$

Logo:

$4x^2+2-(x+2)=0 \rightarrow 4x^2-x=0 \rightarrow x(4x-1)=0 \rightarrow x_1=0$ e $x_2=\dfrac{1}{4}$

Observe que $x_1=0$ não pode ser raiz da equação em função da restrição inicial.

Logo, esta equação tem apenas a raiz $x_2=\dfrac{1}{4}$ e $S=\left\{\dfrac{1}{4}\right\}$.

c) $\dfrac{2}{x-5} - \dfrac{6}{x^2-25} = \dfrac{3}{4}$

Nesse caso, temos uma restrição dupla:

$x - 5 \neq 0 \rightarrow x \neq 5$

e

$x^2 - 25 \neq 0 \rightarrow x \neq -5$ e $x \neq 5$

mmc $(x-5,\ x^2-25, 4) = 4(x^2-25)$

$$\frac{2}{x-5} - \frac{6}{x^2-25} = \frac{3}{4} \rightarrow \frac{8(x+5) - 4 \cdot 6}{4(x^2-25)} = \frac{3(x^2-25)}{4(x^2-25)}$$

$$8x + 40 - 24 = 3x^2 - 75 \rightarrow 3x^2 - 8x - 91 = 0 \rightarrow \Delta = 1\,156$$

Logo, $\dfrac{-8 \pm 34}{6} \rightarrow x_1 = 7$ e $x_2 = -\dfrac{13}{3}$

Como os valores encontrados são diferentes das restrições estabelecidas, $x_1 = 7$ e $x_2 = -\dfrac{13}{3}$ são raízes da equação.

Atividades

12. Resolva as seguintes equações:

a) $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{1}{x-2}$ S = {–4; +4}

b) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+4} = \dfrac{2}{3}$ S = {–3; 2}

c) $\dfrac{x+2}{x-2} - \dfrac{x+6}{x} = 2$ S = {+3; –2}

d) $\dfrac{x+2}{x-2} + \dfrac{x+6}{x} = 2$ S = $\{\frac{6}{5}\}$

13. Resolva as equações:

a) $\dfrac{3x}{x-4} = x$ S = {0; 7}

b) $\dfrac{6}{(x-4)(x-1)} - \dfrac{2}{x-4} = \dfrac{x+2}{x-1}$ S = {–4; +4}

c) $\dfrac{8}{x-7} + \dfrac{8}{(x-7)(x-8)} = \dfrac{x}{x-8}$ S = {7; 8}

d) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{2x}{2x-5} = \dfrac{7x-5}{x(2x-5)}$ S = $\{0; \frac{5}{2}\}$

14. Resolva as seguintes equações:

a) $\dfrac{x}{x+4} + \dfrac{2}{x+3} = \dfrac{1}{x^2+7x+12}$
não tem raízes reais

b) $\dfrac{1}{x^2-5x+6} + \dfrac{1}{x-2} = 1$
S = {2; 4}

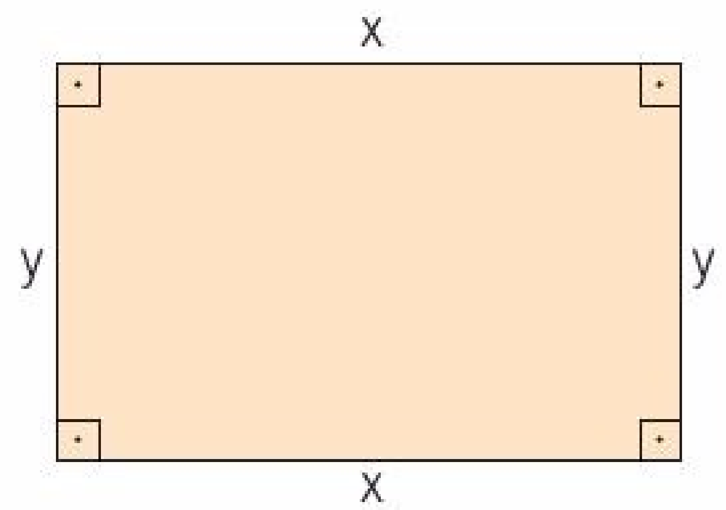
c) $\dfrac{1}{x^2-16} + \dfrac{1}{x^2-8x+16} = \dfrac{1}{x+4}$
S = {2; 8}

d) $\dfrac{10}{x^2+x} + \dfrac{2}{x} = 1$
S = {–3; 4}

Sistemas de Equações

Já estudamos sistemas de equações envolvendo apenas equações do primeiro grau. No entanto, existem diversas situações em que precisamos resolver um problema equacionando suas variáveis e, ao traduzir de forma algébrica as proposições do problema, a resolução recai em equações do segundo grau. Veja, por exemplo o seguinte problema:

Um retângulo tem 42 cm de perímetro e 80 cm^2 de área. Quanto medem seus lados?



Chamando de **x** e **y** as medidas dos lados, em centímetros, escrevemos as expressões do perímetro 2p e da área A:

$$2p = x + y + x + y = 2x + 2y$$

$$A = xy$$

A partir dos dados do problema, obtemos duas equações que formam um **sistema de equações** com duas incógnitas:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 42 \\ xy = 80 \end{cases}$$

Resolver o sistema de equações equivale a encontrar os valores de **x** e **y** que satisfazem as duas equações. Para isso, isolamos uma incógnita em uma das equações e substituímos na outra:

Da primeira equação, temos: $y = \dfrac{42 - 2x}{2} \rightarrow y = 21 - x$

Substituindo esse valor na segunda equação, temos:

$$x \cdot (21 - x) = 80 \rightarrow 21x - x^2 = 80 \rightarrow x^2 - 21x + 80 = 0$$

$$\Delta = 441 - 320 \rightarrow \Delta = 121$$

$$x = \frac{21 \pm \sqrt{121}}{2} \rightarrow x = 16 \text{ ou } x = 5$$

Substituindo os valores de **x** em **y** = 21 – x, obtemos os valores de **y**:

- Para $x = 16 \rightarrow y = 21 - 16 \rightarrow y = 5$
- Para $x = 5 \rightarrow y = 21 - 5 \rightarrow y = 16$

Professor: para que o aluno entenda o processo de resolução de sistemas de equações do 2º grau, é fundamental que ele domine as técnicas de resolução de sistema de 1º grau, ou seja, método da adição e método da substituição. Se achar conveniente, resgate alguns exemplos de sistemas do 1º grau antes de iniciar esse tema.

Note que em qualquer um dos dois casos teremos um retângulo de lados 16 cm e 5cm. Dizemos que os pares de valores (16;5) e (5;16) são soluções do sistema.

Observe, agora, a solução do sistema de equações nas incógnitas **x** e **y**:

$$\begin{cases} x + 2y = 9 \\ xy = 4 \end{cases}$$

Na primeira equação, podemos isolar **x**:

$$x = 9 - 2y$$

Vamos substituir **x** por (9 – 2y), na segunda equação:

$$xy = 4 \rightarrow (9 - 2y)y = 4 \rightarrow 9y - 2y^2 = 4 \rightarrow 2y^2 - 9y + 4 = 0$$

$$\Delta = (-9)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4 = 81 - 32 \rightarrow \Delta = 49$$

$$y = \frac{9 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{9 \pm 7}{4}\ y = 4 \text{ ou } y = \frac{1}{2}$$

Substituindo, agora, os valores de **y** em x = 9 – 2y, obtemos os valores de **x**.

$$y = 4 \rightarrow x = 9 - 2y = 9 - 2 \cdot 4 \rightarrow x = 9 - 8 \rightarrow x = 1$$

$$y = \frac{1}{2} \rightarrow x = 9 - 2y = 9 - 2 \cdot \frac{1}{2} \rightarrow x = 9 - 1 \rightarrow x = 8$$

Neste caso, temos dois pares (**x**, **y**) como soluções do sistema.

$$S = \left\{(1;\ 4);\ \left(8;\ \frac{1}{2}\right)\right\}$$

Atividades

15. Resolva os sistemas:

a) $\begin{cases} x - 2y = 2 \\ xy = 12 \end{cases}$ S = {(–4 , 6); (–3, 2)}

b) $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ xy = -20 \end{cases}$ S = {(–2; 10); (5; –4)}

c) $\begin{cases} x - 3y = 8 \\ xy = 3 \end{cases}$ $S = \{(-1; -3); [-9; \frac{1}{3}]\}$

d) $\begin{cases} x = y^2 \\ x - y = 42 \end{cases}$ S = {(49; 7); (36; –6)}

16. Com $x \in R$ e $y \in R$, resolva os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x - y = 5 \\ xy = 36 \end{cases}$ S = {(–4; –9); (9; 4)}

b) $\begin{cases} x^2 + y = 10 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$ $S = \{(3, 1); [-\frac{5}{2}; \frac{15}{4}]\}$

c) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{x}{2} = \dfrac{75}{y} \end{cases}$ S = {(10; 15); (–10; –15)}

d) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = x - 12 \\ x + y = 6 \end{cases}$ S = {(9; –3); (8; –2)}

Problemas envolvendo equações do segundo grau

Como vimos no estudo dos sistemas de equações, a resolução de problemas que envolvem equações de segundo grau deve passar pelas seguintes etapas:

- Identificação das incógnita
- Montagem das equações que traduzem os dados dos sistemas
- Resolução das equações
- Verificação da validade dos valores encontrados

Observe os exemplos a seguir:

a) A diferença entre dois números naturais é 12 e seu produto 28. Quais são esses números?

- Chamaremos os números de **x** e **y**.
- As equações que traduzem a situação problema são:

$$\begin{cases} x - y = 12 \\ xy = 28 \end{cases}$$

- A resolução do sistema se faz por substituição:

$$x = 12 + y \rightarrow (12 + y) \cdot y = 28 \rightarrow y^2 + 12y - 28 = 0$$

$$\Delta = 256 \rightarrow y = \frac{-12 \pm 16}{2} \rightarrow y = -14 \text{ ou } y = 2$$

Como o problema estabelece que os números são naturais, a solução $y = -14$ não é compatível. Logo:

$$y = 2 \rightarrow x = 12 + y \rightarrow x = 14.$$

Assim, a resposta do problema proposto é $x = 14$ e $y = 2$. Logo:

$$S = \{(14; 2)\}$$

Fernanda Youssef

Atividades

17. Um retângulo tem 18 cm de perímetro e 18 cm^2 de área. Quanto medem os seus lados?
S = {(3; 6)}

18. Dois números têm soma 7 e produto 10. Quais são eles?
S = {(2; 5)}

19. Num retângulo, com área de 80 cm^2, o comprimento tem 11 cm a mais que a largura. Calcule o comprimento e a largura do retângulo.
S = {(5; 16)}

20. Um número natural não nulo cujo quadrado do seu antecessor é igual ao sucessor do seu quíntuplo. Qual é esse número natural?
S = {6}

21. A multiplicação de **x** por **y** dá 100. A divisão de **x** por **y** dá 4. Quais são os números **x** e **y**? S = {20; 5}

22. Determine dois números inteiros consecutivos tais que a soma de seus quadrados seja 85. S = {6; 7}

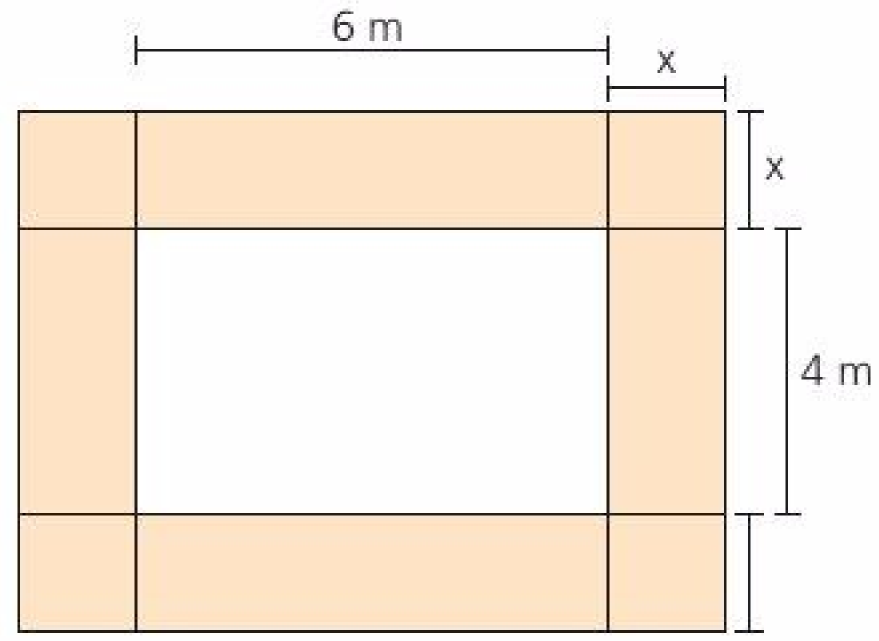
23. A diferença entre os quadrados de dois inteiros consecutivos é 15. Quais são esses números? S = {6; 7}

Interpretar texto

24. Um professor dispunha de 144 doces para repartir igualmente entre seus alunos. No dia da distribuição, 12 alunos faltaram e os que estavam presentes receberam 1 doce a mais do que receberiam se a turma estivesse completa. Quantos alunos tem a turma?
S = {48}

25. Se aumentarmos 2 metros a um dos lados de um quadrado e diminuirmos 5 metros ao lado consecutivo, a área do retângulo obtido se iguala a de um quadrado com 12 m de lado. Quanto mede o lado do quadrado original? 14 metros

26. O modelo a seguir representa uma piscina retangular que será construída em um condomínio. Ela terá 4 metros de largura e 6 metros de comprimento. Em seu contorno, será construída uma moldura de lajotas, representada pela área sombreada da figura a seguir.

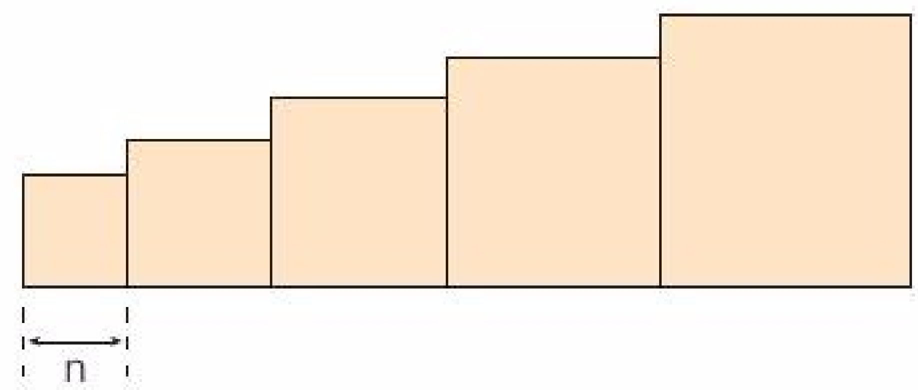


a) Considerando que a largura da moldura mede **x** metros, represente a área da moldura por uma expressão algébrica.
$A_{moldura} = 4x^2 + 20x$

b) Determine a medida **x** para que a moldura tenha área de 39 m^2. S = {1,5 m}

Interpretar figura

27. Na sequência de quadrados abaixo representada, as medidas dos lados dos quadrados são números consecutivos. Nesta sequência de quadrados, **a soma das áreas dos três menores é igual à soma das áreas dos dois maiores.**



a) Simbolizando a medida do lado do quadrado menor por **n**, escreva a equação que descreve a propriedade mencionada no texto acima. $2n^2 + 14n + 25$

b) Determine as medidas dos lados desses quadrados.
S = {10 x 10; 11 x 11; 12 x 12; 13 x 13; 14 x 14}

Para estudar

28. Resolva as seguintes equações irracionais:

a) $\sqrt{1+x} = 1 + x$

b) $\sqrt{5+x} = \sqrt{x} + \sqrt{5}$

c) $\sqrt{2x+1} = x - 1$

d) $\sqrt{2x-5} = 1$

29. Resolva a equação $\sqrt{x} + 2 = \sqrt{x-1}$.

30. Resolva as equações irracionais:

a) $\sqrt{x} + 1 = \sqrt{x-1}$

b) $\sqrt{x} - 1 = 5 - \sqrt{2x-1}$

31. Resolva as equações:

a) $\dfrac{6}{x} - \dfrac{4}{x-2} = \dfrac{3x+5}{x^2-2x}$

b) $\dfrac{x+2}{x+3} = \dfrac{x+4}{x+6}$

c) $\dfrac{x^2}{x^2+2x+1} - \dfrac{2x-1}{x+1} = \dfrac{1}{(x+1)^2}$

32. Encontre o conjunto solução das equações fracionárias:

a) $\dfrac{x+1}{x-1} - \dfrac{2}{x-1} = \dfrac{x-1}{x+1}$

b) $\dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{x+7} = \dfrac{15}{x^2+7x}$

c) $\dfrac{2}{x+2} + \dfrac{2}{x-2} = \dfrac{x}{x^2-4}$

d) $\dfrac{x+2}{x+1} - \dfrac{5}{x^2+2x+1} = 1$

33. Resolva os sistemas:

a) $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ xy = 10 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = y^2 \\ x - y = 20 \end{cases}$

34. Resolva os sistemas:

a) $\begin{cases} x + y = 4 \\ x^2 + y^2 = 40 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y = 6 \\ x^2 - y = 2 \end{cases}$

35. Um retângulo tem 12 cm de perímetro e 8 cm^2 de área. Quanto medem os seus lados?

36. Dois números têm soma 15 e produto 56. Quais são eles?

Interpretar texto

37. Num retângulo, com área de 99 cm^2, o comprimento tem 2 cm a mais que a largura. Calcule o comprimento e a largura do retângulo.

38. Um número natural não nulo é tal que o quadrado do seu sucessor é uma unidade menor que seu quíntuplo. Determine este número.

39. A diferença entre os quadrados de dois inteiros consecutivos é 19. Quais são esses números?

Resolução das atividades

1. a) $(\sqrt{3+x})^2 = (x+3)^2$

$3 + x = x^2 + 6x + 9$

$x^2 + 6x + 6 - x - 3 = 0$

$x^2 + 5x + 6 = 0$

$S = -5$

$P = 6 \rightarrow -3$ e -2

$S = \{-3, -2\}$

b) $(\sqrt{3+x})^2 = (\sqrt{x} + \sqrt{3})^2$

$3 + x = x + 2\sqrt{3x} + 3$

$\cancel{3} + \cancel{x} - \cancel{x} - \cancel{3} = 2\sqrt{3x}$

$(0)^2 = (2\sqrt{3x})^2$

$0 = 12x$

$x = 0$

$S = \{0\}$

c) $(\sqrt{10x+6})^2 = (x+3)^2$

$10x + 6 = x^2 + 6x + 9$

$x^2 + 6x + 9 - 10x - 6 = 0$

$x^2 - 4x + 3 = 0$

$S = 4$

$P = 3 \rightarrow 3$ e 1

$S = \{1; 3\}$

d) $(\sqrt[3]{2x-5})^3 = (1)^3$

$2x - 5 = 1$

$2x = 6$

$x = 3$

$S = \{3\}$

e) $\sqrt[3]{x} + 1 = 3$

$(\sqrt[3]{x})^3 = (2)^3$

$x = 8$

$S = \{8\}$

f) $x - 2\sqrt{x} = 0$

$(x)^2 = (2\sqrt{x})^2$

$x^2 = 4x$

$x^2 - 4x = 0$

$x(x-4) = 0$

$x = 0$ ou $x - 4 = 0$

$x = 4$

$S = \{0; 4\}$

g) $x + 2\sqrt{x} = 0$

$(x)^2 = (-2\sqrt{x})^2$

$x^2 = 4x$

$x^2 - 4x = 0$

$x(x-4) = 0$

$x = 0$ ou $x - 4 = 0$

$x = 4$

$S = \{0, 4\}$

2. $(\sqrt{x} + 1)^2 = (\sqrt{(x-1)})^2$

$x + 2\sqrt{x} + 1 = x - 1$

$2\sqrt{x} = \cancel{x} - 1 - \cancel{x} - 1$

$(2\sqrt{x})^2 = (-2)^2$

$4x = 4$

$x = 1$

$S = \{1\}$

3. $x - \sqrt{(2x+2)} = 3$

$(-\sqrt{(2x+2)})^2 = (3-x)^2$

$2x + 2 = 9 - 6x + x^2$

$x^2 - 6x + 9 - 2x - 2 = 0$

$x^2 - 8x + 7 = 0$

$S = 8$

$P = 7 \rightarrow 7$ e 1

$S = \{1; 7\}$

4. $x + \sqrt{(x-1)} = 1$

$((\sqrt{(x-1)})^2 = (1-x)^2$

$x - 1 = 1 - 2x + x^2$

$x^2 - 2x + 1 - x + 1 = 0$

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$S = 3$

$P = 2 \rightarrow 2$ e 1

$S = \{1; 2\}$ alternativa (c)

5. $\sqrt{x} + \sqrt{(x-12)} = 6$

$(\sqrt{(x-12)})^2 = (6 - \sqrt{x})^2$

$x + 12 = 36 - 12\sqrt{x} + x$

$\cancel{x} + 12 - 36 - \cancel{x} = -12\sqrt{x}$

$(-24)^2 = (-12\sqrt{x})^2$

$576 = 144x$

$x = 4$

6. $\sqrt{(3x+1)} + \sqrt{(x-1)} = 6$

$(\sqrt{(3x+1)})^2 = (6 - \sqrt{(x-1)})^2$

$3x + 1 = 36 - 12\sqrt{(x-1)} + (x-1)$

$3x + 1 - 36 - x + 1 = -12\sqrt{(x-1)}$

$(2x - 34)^2 = (-12\sqrt{(x-1)})^2$

$4x^2 - 136x + 1156 = 144\ (x-1)$

$4x^2 - 136x + 1156 - 144x + 144 = 0$

$4x^2 - 280x + 1300 = 0$

$x^2 - 70x + 325 = 0$

$S = 70$

$P = 325 \rightarrow 5$ e 65

$S = \{5; 65\}$

7. a) $\sqrt{4+x} + \sqrt{3-x} = \sqrt{7}$

$(\sqrt{4+x})^2 = (\sqrt{7} - \sqrt{3-x})^2$

$4 + x = 7 - 2\sqrt{7}\sqrt{3-x} + (3-x)$

$4 + x = 7 - 3 + x = -2\sqrt{7(3-x)}$

$2x - 6 = -2\sqrt{7(3-x)}$

$(x-3)^2 = (-\sqrt{7(3-x)})^2$

$x^2 - 6x + 9 = 21 - 7x$

$x^2 - 6x + 9 - 21 + 7x = 0$

$x^2 + x - 12 = 0$

$S = -1$

$P = -12 \rightarrow -4$ e 3

$S = \{-4; 3\}$

b) $(\sqrt{x - \sqrt{x+1}})^2 = (1)^2$

$x - \sqrt{x+1} = 1$

$(-\sqrt{x+1})^2 = (1-x)^2$

$x + 1 = 1 - 2x + x^2$

$x^2 - 2x + 1 - x - 1 = 0$

$x^2 - 3x = 0$

$x\ (x-3) = 0$

$x = 0$ ou $x - 3 = 0$

$x = 3$

$S = \{0; 3\}$

8. $(\sqrt{x+2})^2 = (\sqrt{3x-5} - 1)^2$

$x + 2 = 3x - 5 - 2\sqrt{3x-5} + 1$

$x + 2 - 3x + 5 - 1 = -2\sqrt{3x-5}$

$(-2x + 6)^2 = (-2\sqrt{3x-5})^2$

$4x^2 - 24x + 36 = 4\ (3x-5)$

$4x^2 - 24x + 36 - 12x + 20 = 0$

$4x^2 - 36x + 56 = 0$

$x^2 - 9x + 14 = 0$

$S = 9$

$P = 14 \rightarrow 2$ e 7

$S = \{2; 7\}$ (d)

9. $(x)^2 = (\sqrt{(6-x)})^2$

$x^2 = 6 - x$

$x^2 + x - 6 = 0$

$S = -1$

$P = -6 \rightarrow -3$ e 2

$S = \{-3, 2\}$ (c)

10. $r = \sqrt[3]{\dfrac{3w}{4\pi d}} \rightarrow r^3 = \left(\sqrt[3]{\dfrac{3w}{4\pi d}}\right)^3 \rightarrow$

$r^3 = \dfrac{3w}{4\pi d} \rightarrow d = \dfrac{3w}{4\pi r^3}$

11. $v = \dfrac{1}{2}\sqrt{1 + \dfrac{t}{l}} \rightarrow v^2 = \left(\dfrac{1}{2}\sqrt{1 + \dfrac{t}{l}}\right)^2 \rightarrow$

$v^2 = \dfrac{1}{4}\left(1 + \dfrac{t}{l}\right) \rightarrow 4v^2 = 1 + \dfrac{t}{l} \rightarrow$

$\dfrac{t}{l} = 4v^2 - 1 \rightarrow l = \dfrac{t}{4v^2 - 1}$

12. a) $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{1}{x-2}$

$x^2 - 4 + 3\ (x-2) = 3\ (x+2)$

$x^2 - 4 + 3x - 6 = 3x + 6$

$x^2 - 4 + \cancel{3x} - 6 - \cancel{3x} - 6 = 0$

$x^2 = 16$

$x = \pm 4$

$S = \{-4; +4\}$

b) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+4} = \dfrac{2}{3}$

$3x + 12 + 3x = 2x^2 + 8x$

$2x^2 + 8x - 6x - 12 = 0$

$2x^2 + 2x - 12 = 0$

$x^2 + x - 6 = 0$

$S = \{-3; 2\}$

c) $\dfrac{x+2}{x-2} - \dfrac{x+6}{x} = 2$

$\cancel{x^2} + 2x - \cancel{x^2} + 2x - 6x + 12 = 2x^2 - 4x$

$-2x + 12 = 2x^2 - 4x$

$2x^2 - 2x - 12 = 0$

$S = \{+3; -2\}$

d) $\dfrac{x+2}{x-2}+\dfrac{x+6}{x}=2$

$x^2 + 2x + x^2 + 4x - 12 = 2x^2 - 4x$

$\cancel{2x^2} + 6x - 12 - \cancel{2x^2} + 4x = 0$

$10x - 12 = 0$

$x = \dfrac{12}{10} = \dfrac{6}{5}$

$S = \left\{\dfrac{6}{5}\right\}$

13. a) $\dfrac{3x}{x-4} = x$

$3x = x^2 - 4x$

$x^2 - 7x = 0$

$x(x - 7) = 0$

$x = 0$ ou $x - 7 = 0$

$x = 7$

$S = \{0; 7\}$

b) $\dfrac{6}{(x-4)(x-1)} - \dfrac{2}{(x-4)} = \dfrac{x+2}{(x-1)}$

$6 - 2(x - 1) = (x + 2)(x - 4)$

$6 - 2x + 2 = x^2 - 4x + 2x - 8$

$x^2 - \cancel{2x} - 8 + \cancel{2x} - 8 = 0$

$x^2 = 16$

$x = \pm 4$

$S = \{-4; +4\}$

c) $\dfrac{8}{(x-7)} + \dfrac{8}{(x-7)(x-8)} = \dfrac{x}{(x-8)}$

$8(x - 8) + 8 = x(x - 7)$

$8x - 64 + 8 = x^2 - 7x$

$x^2 - 7x - 8x + 56 = 0$

$x^2 - 15x + 56 = 0$

$S = \{7; 8\}$

d) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{2x}{2x-5} = \dfrac{7x-5}{x(2x-5)}$

$2x - 5 + 2x^2 = 7x - 5$

$2x^2 - 5x = 0$

$x(2x - 5) = 0$

$x = 0$ ou $2x - 5 = 0$

$x = \dfrac{5}{2}$ $S = \left\{0; \dfrac{5}{2}\right\}$

14. a) $\dfrac{x}{x+4} + \dfrac{2}{x+3} = \dfrac{1}{x^2+7x+12}$

$x(x + 3) + 2(x + 4) = 1$

$x^2 + 3x + 2x + 8 - 1 = 0$

$x^2 + 5x + 7 = 0$

$\Delta = 25 - 4 \cdot 7$

$\Delta = -3$

não tem raízes reais

b) $\dfrac{1}{\underbrace{x^2-5x+6}_{(x-3)(x-2)}} + \dfrac{1}{x-2} = 1$

$1 + (x - 3) = x^2 - 5x + 6$

$x^2 - 6x + 8 = 0$

$S = \{2; 4\}$

c) $\dfrac{1}{\underbrace{x^2-16}_{(x+4)(x-4)}} + \dfrac{1}{\underbrace{x^2-8x+16}_{(x-4)^2}} = \dfrac{1}{(x+4)}$

$x - 4 + x + 4 = (x - 4)^2$

$2x = x^2 - 8x + 16$

$x^2 - 10x + 16 = 0$

$S = \{2; 8\}$

d) $\dfrac{10}{x^2+x} + \dfrac{2}{x} = 1$

$x(x + 1)$

$10 + (x + 1)2 = x^2 + x$

$10 + 2x + 2 = x^2 + x$

$x^2 - x - 12 = 0$

$S = \{-3; 4\}$

15. a) $x - 2y = 2$

$xy = 12 \rightarrow x = \dfrac{12}{y}$

$\dfrac{12}{y} - 2y = 2$

$12 - 2y^2 = 2y$

$2y^2 + 2y - 12 = 0$

$y^2 + y - 6 = 0$

$S = \{(-4, 6); (-3, 2)\}$

b) $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ xy = -20 \end{cases} \rightarrow x = -\dfrac{20}{y}$

$2x + y = 6$

$$2\left(-\frac{20}{y}\right) + y = 6$$

$-40 + y^2 = 6y$

$y^2 - 6y - 40 = 0$

$y = 10$ ou $y = -4$

$S = \{(-2;\ 10);\ (5;\ -4)\}$

c) $\begin{cases} x - 3y = 8 \\ xy = 3 \rightarrow x = \dfrac{3}{y} \end{cases}$

$$\frac{3}{y} - 3y = 8$$

$3 - 3y^2 = 8y$

$-3y^2 - 8y + 3 = 0$

$y = -3$ ou $y = +\dfrac{1}{3}$

$$S = \left\{(-1;\ -3);\ \left(-9;\ \frac{1}{3}\right)\right\}$$

d) $\begin{cases} x = y^2 \\ x - y = 42 \end{cases}$

$y^2 - y - 42 = 0$

$S = \{(49;\ 7);\ (36;\ -6)\}$

16. a) $\begin{cases} x - y = 5 \\ xy = 36 \rightarrow x = \dfrac{36}{y} \end{cases}$

$$\frac{36}{y} - y = 5$$

$36 - y^2 = 5y$

$-y^2 - 5y + 36 = 0$

$y_1 = -9$ $\qquad y_2 = 4$

$x_1 = -4$ $\qquad x_2 = 9$

$S = \{(-4;\ -9);\ (9;\ 4)\}$

b) $\begin{cases} x^2 + y = 10 \quad x\,(-2) \\ x + 2y = 5 \end{cases}$

$$\begin{cases} -2x^2 - 2y = -20 \\ x + 2y = 5 \end{cases} +$$

$-2x^2 + x = -15$

$-2x^2 + x + 15 = 0$

$x_1 = 3 \qquad x_2 = -\dfrac{5}{2}$

$y = \dfrac{5 - x}{2} \rightarrow y_1 = 1$ e $y_2 = \dfrac{15}{4}$

$$S = \left\{(3,\ 1);\ \left(-\frac{5}{2};\ \frac{15}{4}\right)\right\}$$

c) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{x}{2} = \dfrac{75}{y} \end{cases} \rightarrow x = \dfrac{2}{3}y$

$$\frac{\frac{2}{3}y}{2} = \frac{75}{y}$$

$$\frac{2}{3}y^2 = 150$$

$2y^2 = 450$

$y^2 = 225$

$y = \pm 15$

$x_1 = \dfrac{2\,.\,15}{3} = 10$

$x_2 = \dfrac{2 \cdot (-15)}{3} = -10$

$S = \{(10;\ 15);\ (-10;\ -15)\}$

d) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = x - 12 \\ x + y = 6 \rightarrow y = 6 - x \end{cases}$

$$\frac{x}{6 - y} = x - 12$$

$x = 6x - 72 - x^2 + 12x$

$-x^2 + 17x - 72 = 0$

$x_1 = 9 \qquad x_2 = 8$

$y_1 = -3 \qquad y_2 = -2$

$S = \{(9;\ -3);\ (8;\ -2)\}$

17. $P = 2a + 2b = 18$

$A = a \cdot b = 18 \rightarrow a = \dfrac{18}{b}$

$$2\,.\,\frac{18}{b} + 2b = 18$$

$36 + 2\,b^2 = 18b$

$2\,b^2 - 18\,b + 36 = 0$

$b^2 - 9\,b + 18 = 0$

$b_1 = 3 \qquad b_2 = 6$

$a_1 = 6 \qquad a_2 = 3$

$S = \{(3;\ 6)\}$

18. $\begin{cases} x + y = 7 \\ x \cdot y = 10 \rightarrow x = \dfrac{10}{y} \end{cases} \rightarrow \dfrac{10}{y} + y = 7$

$10 + y^2 = 7y$
$y^2 - 7y + 10 = 0$
$y_1 = 2 \qquad y_2 = 5$
$x_1 = 5 \qquad y_2 = 2$
$S = \{(2; 5)\}$

19. $A = a \cdot b = 80 \rightarrow b = \dfrac{80}{a}$
$b = a + 11$

$\dfrac{80}{a} = a + 11 \rightarrow 80 = a^2 = 11a$

$a^2 + 11a - 80 = 0$

$a_1 = 5 \qquad \cancel{a_2 = -16}$ não serve

$b = \dfrac{80}{5} = 16$

$S = \{(5; 16)\}$

20. $(x - 1)^2 = 5x + 1$
$x^2 - x + 1 = 5x + 1$
$x^2 - 6x = 0 \rightarrow x = 0$ ou $x - 6 = 0$
$x = 6$
$S = \{6\}$

21. $\begin{cases} x \cdot y = 100 \\ \dfrac{x}{y} = 4 \rightarrow x = 4y \end{cases}$

$4y \cdot y = 100 \qquad x = 4 \cdot 5$
$4y^2 = 100 \qquad x = 20$
$y^2 = 25 \rightarrow y = 5$
$S = \{20; 5\}$

22. $x^2 + (x + 1)^2 = 85$
$x^2 + x^2 + 2x + 1 = 85$
$2x^2 + 2x - 84 = 0$
$x^2 + x - 42 = 0$
$S = \{6; 7\}$

23. $(x + 1)^2 - (x)^2 = 15$
$\cancel{x^2} + 2x + 1 - \cancel{x^2} = 15$
$2x = 14 \rightarrow x = 7$
$S = \{6; 7\}$

24. x = alunos
y = doces

$\begin{cases} \dfrac{144}{x} = y \\ \dfrac{144}{(x - 12)} = y + 1 \end{cases}$

$\dfrac{144}{(x - 12)} = \dfrac{144}{x} + 1$

$\dfrac{144}{(x - 12)} = \dfrac{144 + x}{x}$

$\cancel{144x} = \cancel{144x} + x^2 - 1\,728 - 12x$

$x^2 - 12x - 1\,728 = 0 \rightarrow x_1 = 48$

$\cancel{x_2 = -36}$

$S = \{48\}$

25. $(x + 2)(x - 5) = 144$

$x^2 - 5x - 2x - 10 = 144$

$x^2 - 3x - 104 = 0 \rightarrow x_1 = 14$

$\cancel{x_2 = -11}$

14 metros

26. a) $A_{moldura} = 4x^2 + 20x$

b) $39 = 4x^2 + 20x$

$4x^2 + 20x - 39 = 0$

$\Delta = 400 - 4 \cdot 4 \cdot (-39)$

$\Delta = 400 + 624$

$\Delta = 1\,024$

$$x = -\frac{20 \pm 32}{2 . 4} = -\frac{20 \pm 32}{8} \rightarrow x_1 = -\frac{20 \pm 32}{8} = 1{,}5\,m \rightarrow x_2 = \frac{-20 - 32}{8} = \frac{-52}{8}$$

$S = \{1{,}5 \text{ m}\}$

27. a) $(n)^2 + (n + 1)^2 + (n + 2)^2 = (n + 3)^2 + (n + 4)^2$

$n^2 + n^2 + 2n + 1 + n^2 + 4n + 4 = n^2 + 6n + 9 + n^2 + 8n + 16$

$3n^2 + 6n + 5 = 2n^2 + 14n + 25 \rightarrow n^2 - 8n - 20 = 0$

b) $n^2 - 8n - 20 = 0 \rightarrow n_1 = 10$

$\cancel{n_2 = -2}$

S = {10 x 10; 11 x 11; 12 x 12;
13 x 13; 14 x 14}

Respostas da seção Para estudar

28. a) $S = \{-1\}$

b) $S = \{0\}$

c) $S = \{4\}$

d) $S = \{3\}$

29. $S = \varnothing$

30. a) $S = \varnothing$

b) $S = \{36\}$

31. a) $S = \{-17\}$

b) $S = \varnothing$

c) $S = \{0, 1\}$

32. a) $S = \{1\}$

b) $S = \{-1\}$

c) $S = \{0\}$

d) $S = \{-4, 1\}$

33. a) $S = \{(5; 2)\}$

b) $S = \{(25, 5); (16, -4)\}$

34. a) $S = \varnothing$

b) $\{(2; 2), (-3; 7)\}$

35. 2 e 4

36. 7 e 8

37. 11 cm e 9 cm

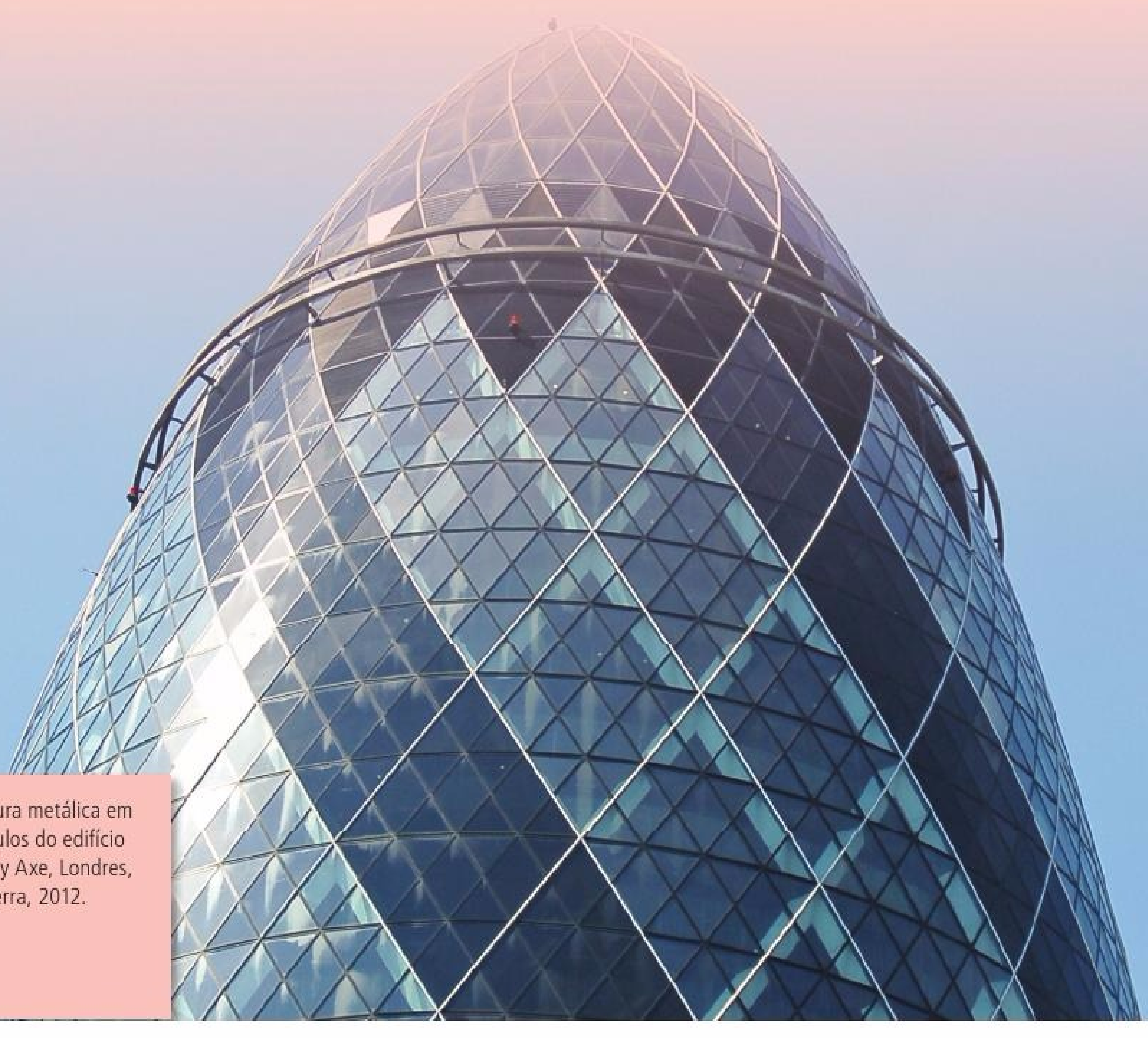
38. 1

39. 9 e 10

capítulo 5

Semelhança de triângulos

- Segmentos Proporcionais
- O Teorema de Tales
- Semelhança
- Semelhança de triângulos



Dennis Owusu-ansah/Dreamstime

Estrutura metálica em triângulos do edifício St Mary Axe, Londres, Inglaterra, 2012.

Conversa Inicial

O que melhor define uma figura geométrica é a palavra **forma**. Em diversas situações duas ou mais figuras planas mantêm entre si relações que dependem de sua forma.

Porém, a forma das figuras planas também é determinada por suas medidas lineares e medidas angulares. Sendo assim, podemos entender as relações entre as formas de figuras planas estudando como os segmentos, os ângulos e as suas dimensões se relacionam.

Existe uma sutil diferença entre ser igual e ser semelhante. Ser igual é ser semelhante e ter todas as dimensões iguais. Assim, duas formas são iguais quando têm as mesmas proporções e as mesmas dimensões.

Professor, ressalte para os alunos que figuras iguais são semelhantes, mas figuras semelhantes não são necessariamente iguais.

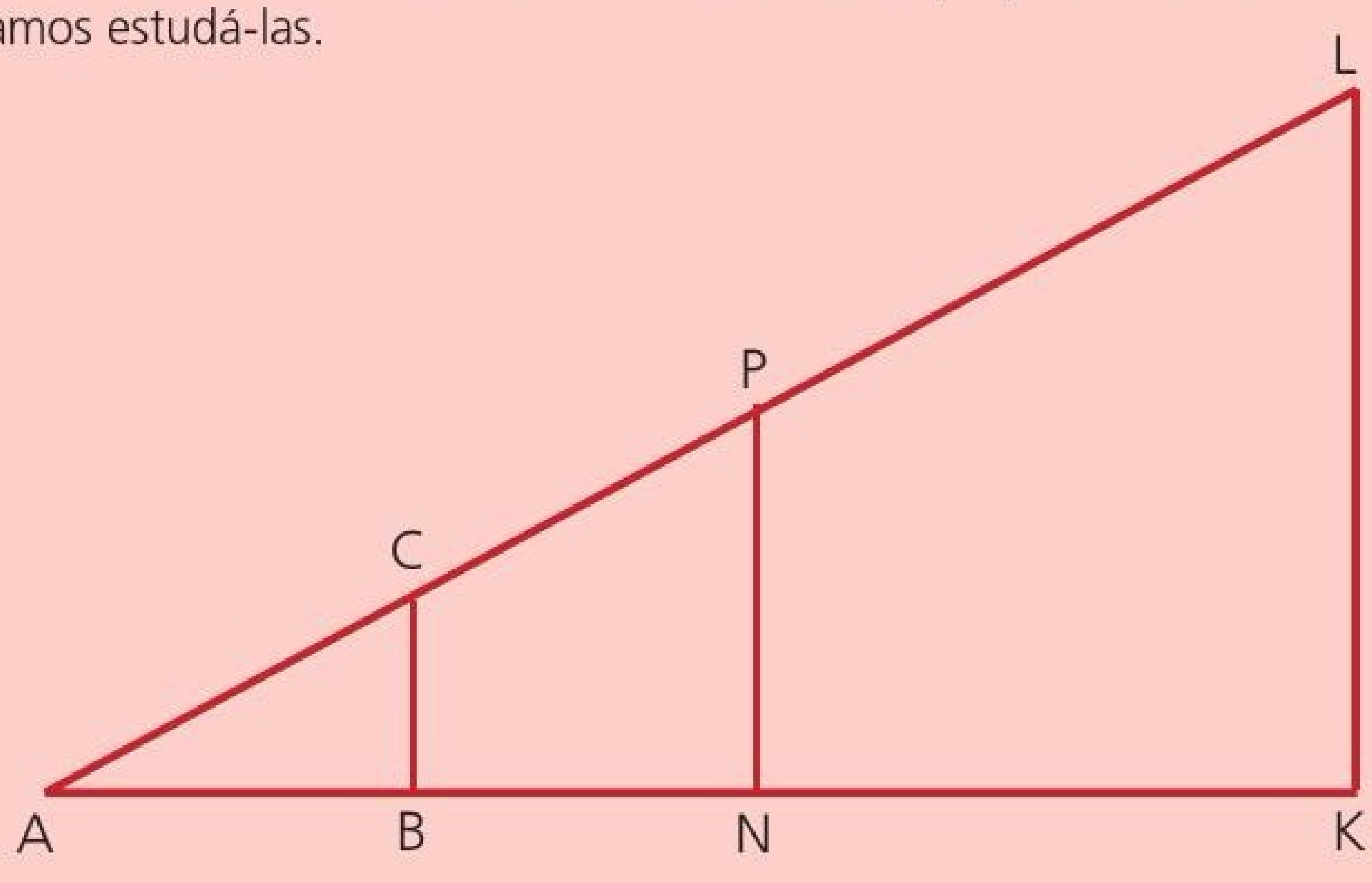

Lionel Valenti/PhotoXpress

Matrioskas

As ***matrioskas*** são bonecas que se encaixam umas nas outras. Elas são originárias da Rússia e têm os mais diferentes e bonitos acabamentos.

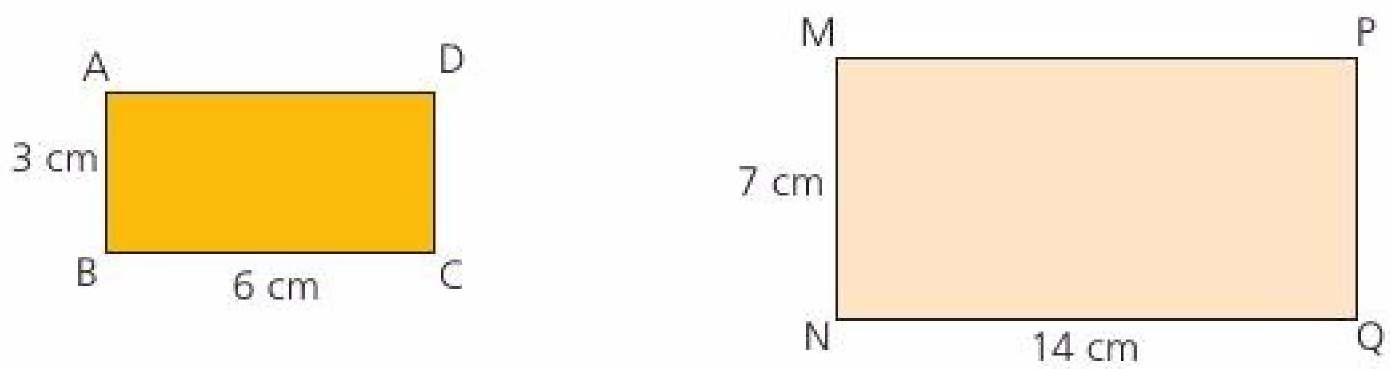
Você acha que elas são semelhantes ou iguais?

Elas são tão semelhantes quanto os triângulos ABC, ANP, AKL. É lógico que as ***matrioskas*** são mais graciosas, mas a formosura da semelhança e das proporções é a mesma nelas e nos triângulos. Vamos estudá-las.



Segmentos Proporcionais

Vamos considerar os retângulos ABCD e MNQP abaixo:



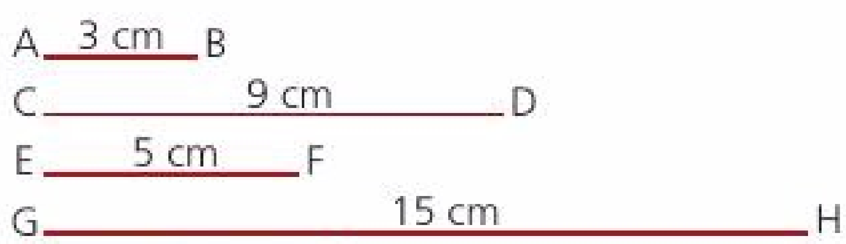
Observe o que acontece com as razões $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ e $\frac{\overline{MN}}{\overline{NQ}}$:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{3cm}{6cm} = \frac{1}{2} \text{ e } \frac{\overline{MN}}{\overline{NQ}} = \frac{7cm}{14cm} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{NQ}}$$

Dizemos, então, que os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{MN}$ e $\overline{PQ}$ são, nessa ordem, proporcionais, pois suas medidas formam uma proporção.

Atividades

1. Verifique se os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ e $\overline{GH}$, nessa ordem, formam uma proporção:



Sim, formam proporção.

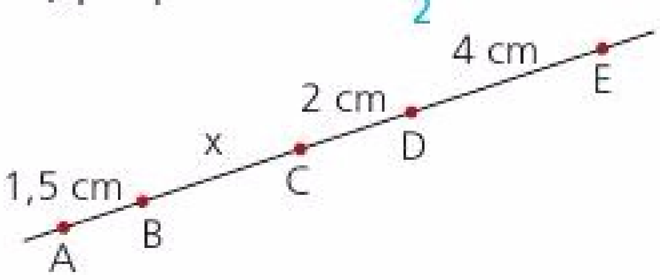
2. Em cada caso, verifique se os segmentos, na ordem apresentada, são proporcionais:

a) $\overline{AB}$ = 4 cm, $\overline{CD}$ = 6 cm, $\overline{EF}$ = 6 cm e $\overline{GH}$ = 9 cm; Sim.

b) $\overline{AB}$ = 2,5 cm, $\overline{CD}$ = 7,5 cm, $\overline{EF}$ = 1 cm e $\overline{GH}$ = 3 cm; Sim.

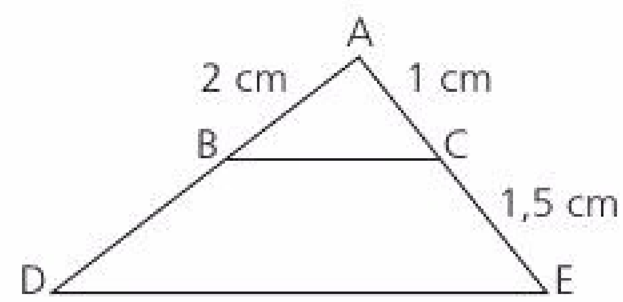
c) $\overline{AB}$ = 18 cm, $\overline{CD}$ = 9 cm, $\overline{EF}$ = 4 cm e $\overline{GH}$ = 8 cm. Não.

3. Determine o valor de **x**, sabendo que os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DE}$ são, nessa ordem, proporcionais. $\frac{1}{2}$

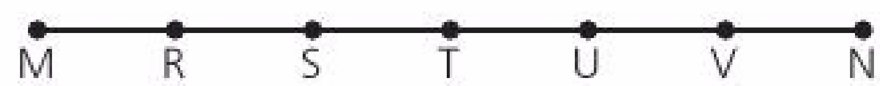


4. Considere os segmentos $\overline{AB} = 3x$, $\overline{CD} = x + 10$, $\overline{EF}$ = 9 cm e $\overline{GH}$ = 18 cm. Calcule as medidas de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, considerando que elas estão em metros e que os quatro segmentos são, na ordem dada, proporcionais. $x = 2$

5. No triângulo a seguir, os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BD}$, $\overline{AC}$ e $\overline{CE}$ são, nessa ordem, proporcionais. Calcule a medida do lado $\overline{AD}$. $x = 3$



6. O segmento de reta $\overline{MN}$ foi dividido em 6 partes de mesma medida.



Copie o segmento $\overline{MN}$ e as afirmações a seguir em seu caderno. Analise as afirmações e complete com verdadeiro (V) ou falso (F).

a) (V) $\frac{\overline{MR}}{\overline{MS}} = \frac{1}{2}$

b) (F) $\frac{\overline{RT}}{\overline{TN}} = \frac{2}{5}$

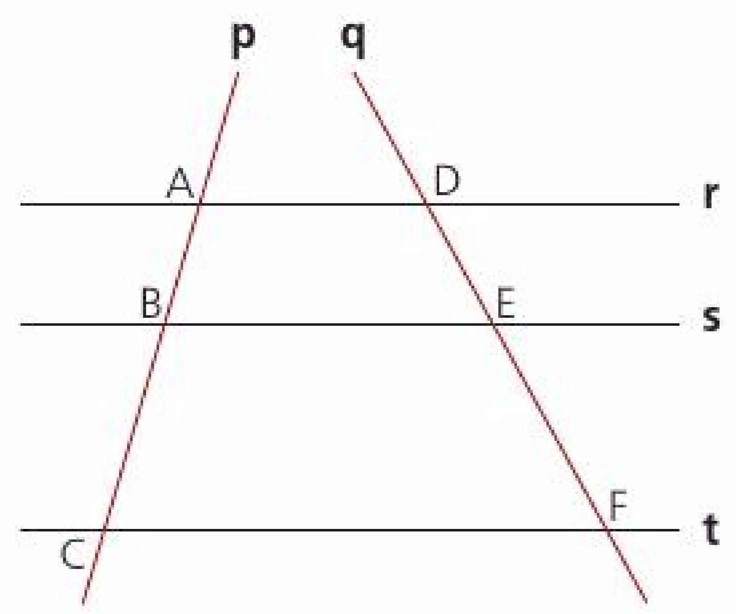
c) (V) $\frac{\overline{SN}}{\overline{UN}} = 2$

d) (V) $\frac{\overline{VT}}{\overline{NM}} = \frac{1}{3}$

e) (F) $\frac{\overline{RV}}{\overline{MN}} = \frac{3}{2}$

O Teorema de Tales

Considere a figura a seguir, onde as retas **r**, **s** e **t** são paralelas e as retas **p** e **q** são transversais a essas paralelas.



Professor, O Teorema de Tales possui inúmeras aplicações nas diversas situações envolvendo cálculo de distâncias inacessíveis e possui grande aplicabilidade nas questões relacionadas à Astronomia.

Note que **p** intercepta as paralelas **r**, **s** e **t** nos pontos A, B e C e que a reta **q** intercepta **r**, **s** e **t** nos pontos D, E e F. Dessa forma, o feixe de retas paralelas (**r**, **s** e **t**) determina os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ na transversal **p** e os segmentos $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ e $\overline{DF}$ na transversal **q**.

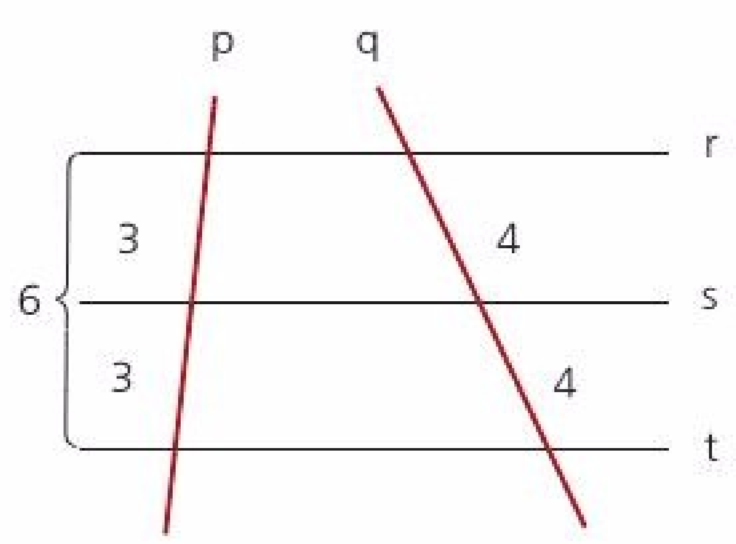
O teorema de Tales afirma que um feixe de paralelas cortado por transversais determina nessas últimas segmentos de retas proporcionais.

Assim, podemos estabelecer as seguintes ordens de segmentos proporcionais:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}} \quad \text{e} \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{DF}} \quad \text{e} \quad \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DF}}{\overline{EF}}$$

Por praticidade, a partir deste ponto deixaremos de representar a unidade de medida dos segmentos. A menos que haja uma informação contrária, consideraremos que todos os segmentos de uma mesma figura têm a mesma unidade de medida. Observe as proporcionalidades nos exemplos a seguir:

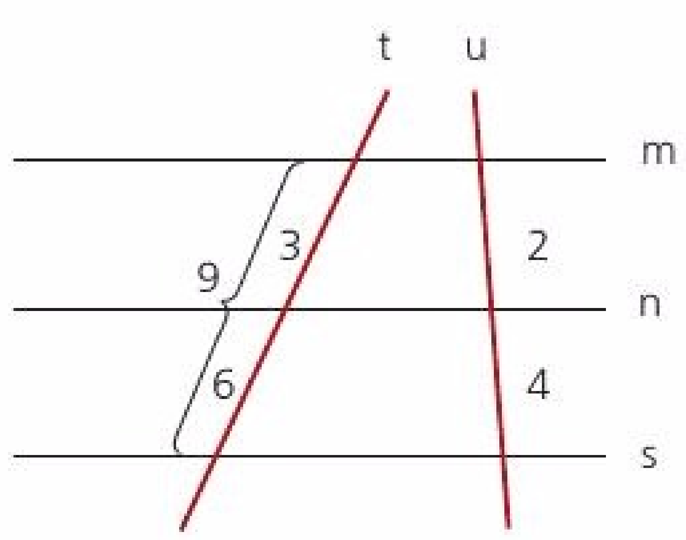
a)



r // s // t

$$\frac{3}{3} = \frac{4}{4} \quad \text{e} \quad \frac{3}{6} = \frac{4}{8}$$

b)



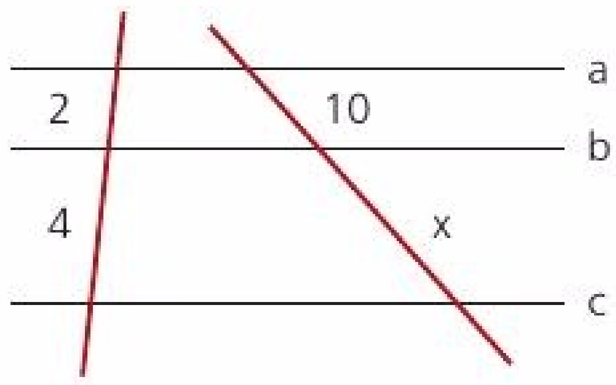
m // n // s

$$\frac{3}{6} = \frac{2}{4} \quad \text{e} \quad \frac{3}{9} = \frac{2}{6}$$

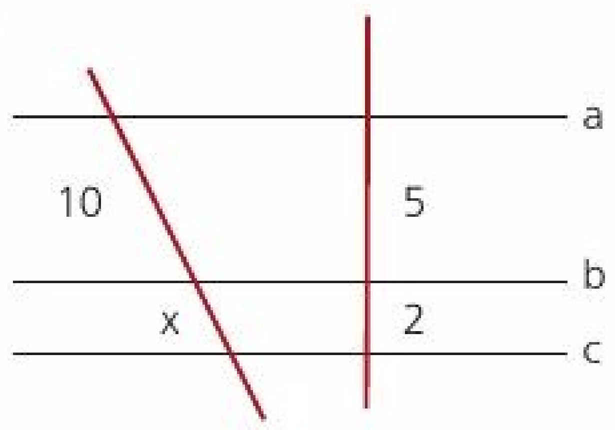
Atividades

7. Calcule **x** em cada uma das figuras, sabendo que a//b//c:

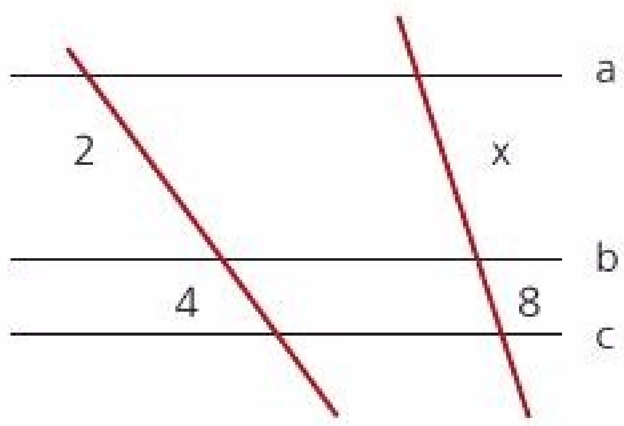
a) x = 20



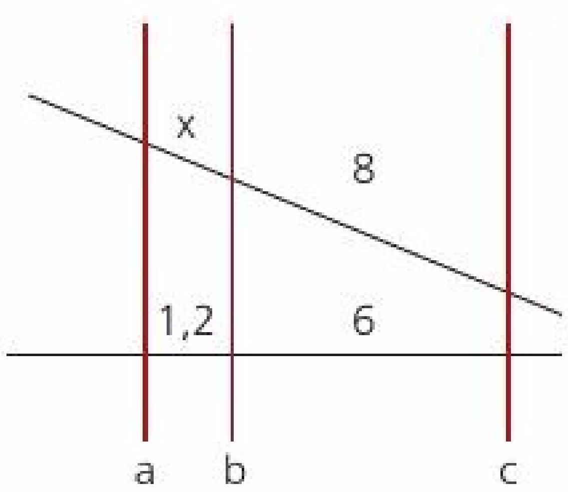
b) x = 4



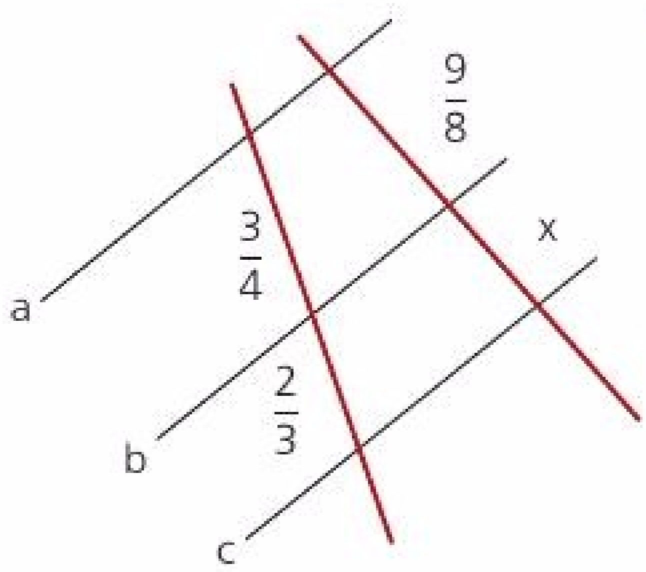
c) x = 4



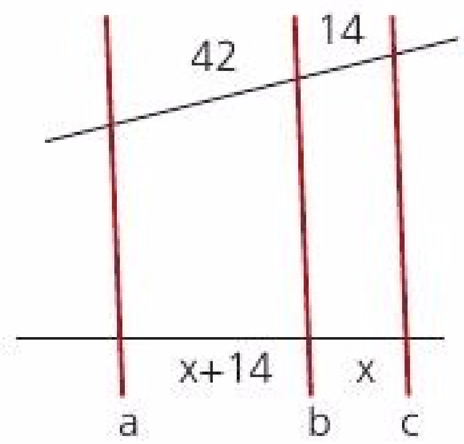
d) x = 1,6



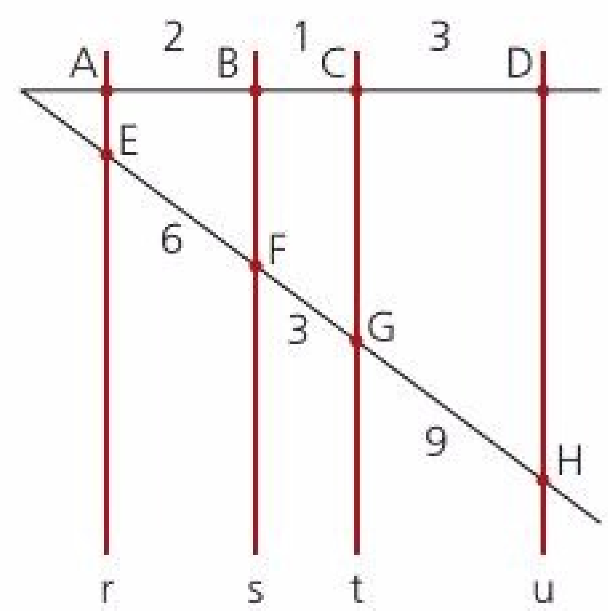
e) x = 1



f) x = 7



8. Observe a figura r//s//t//u.



Responda no seu caderno:

a) Qual é a razão entre os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$? 2

b) Qual é a razão entre os segmentos $\overline{EF}$ e $\overline{FG}$? 2

c) Os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{EF}$ e $\overline{FG}$ são, nessa ordem, proporcionais? Sim.

d) Fazendo o mesmo raciocínio, verifique se os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ e $\overline{GH}$ são, nessa ordem, proporcionais. Sim.

e) Verifique, agora, se os segmentos $\overline{AC}$, $\overline{CD}$, $\overline{EG}$ e $\overline{GH}$ são, nessa ordem, proporcionais. Sim.

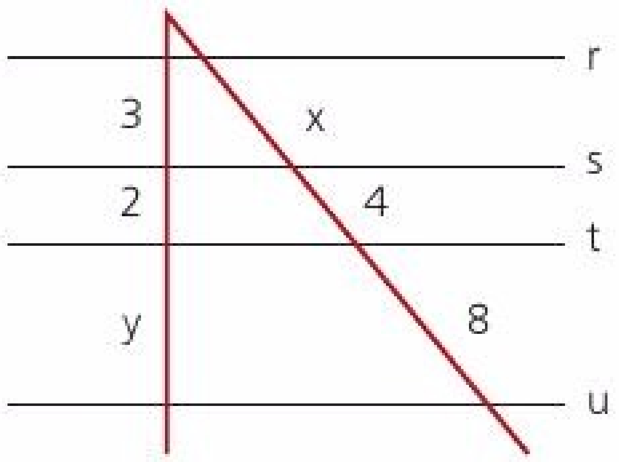
f) Faça o mesmo para os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BD}$, $\overline{EF}$ e $\overline{FH}$. São proporcionais.

g) Os segmentos $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{EH}$ e $\overline{FG}$ são, nessa ordem, proporcionais? Por quê? São proporcionais (teorema de Tales).

h) Os segmentos $\overline{BD}$, $\overline{AD}$, $\overline{FH}$ e $\overline{EH}$ são, nessa ordem, proporcionais? Por quê? São proporcionais (teorema de Tales).

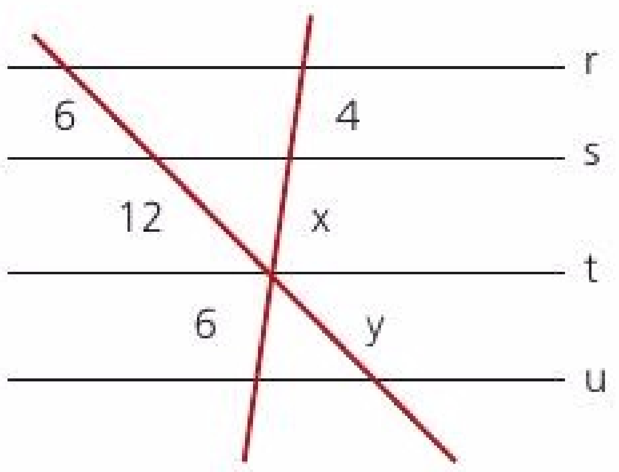
9. Sabendo-se que, nas figura r//s//t//u, determine os valores de **x** e **y** em cada figura:

a)



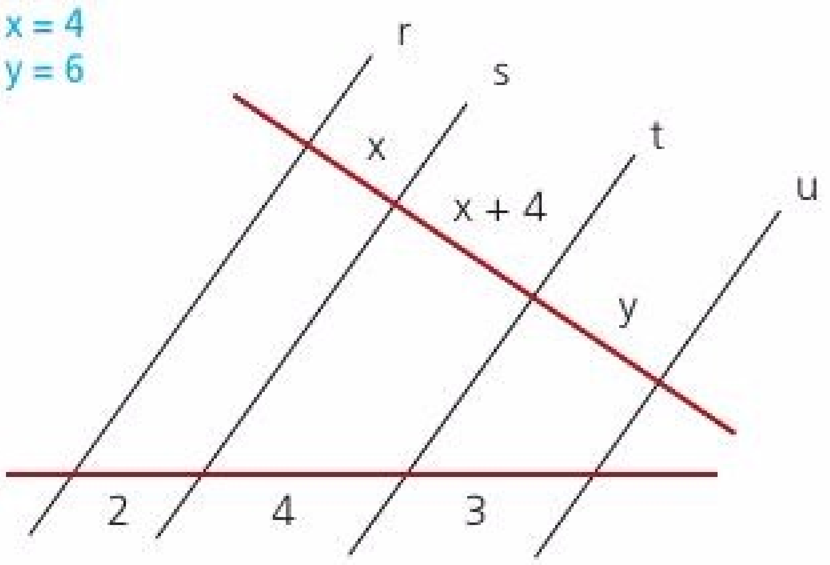
x = 6
y = 4

b)

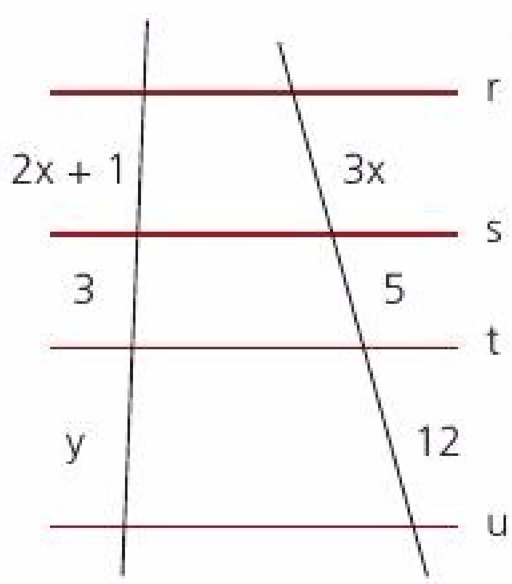


x = 8
y = 9

c) x = 4
y = 6



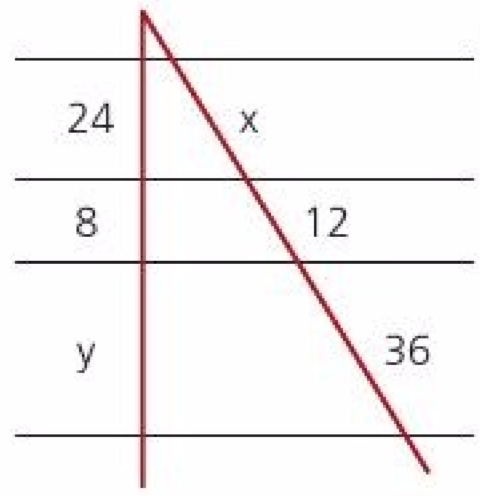
d)



x = – 5

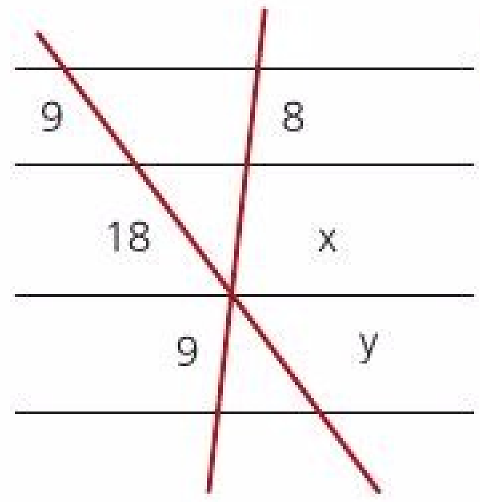
10. Calcule **x** e **y** determinados nas transversais pelos feixes de paralelas a seguir:

a)



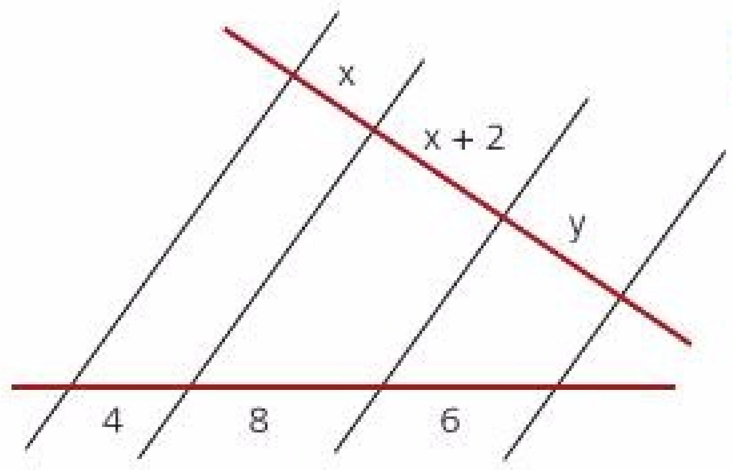
x = 36
y = 24

b)



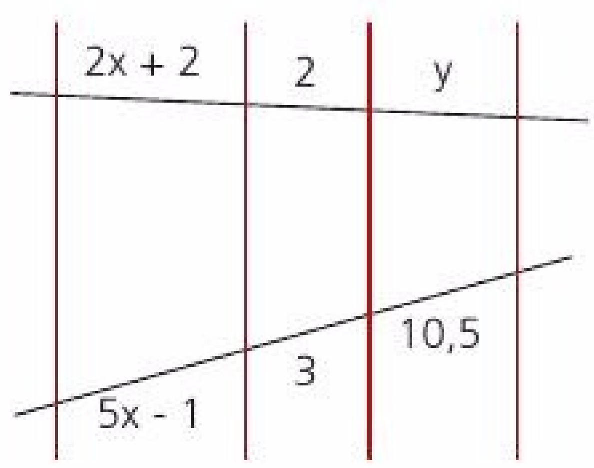
x = 16
y = 10, 125

c)



x = 2
y = 3

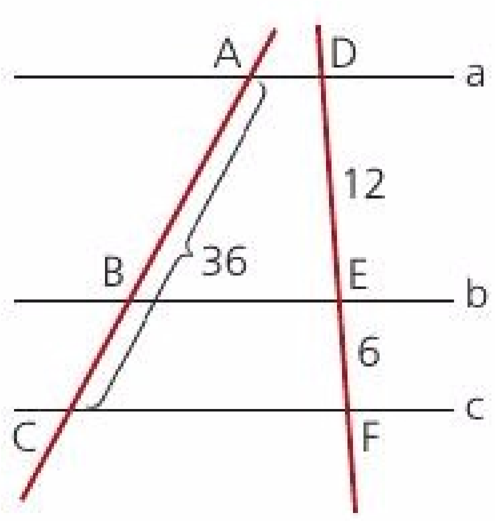
d)



x = 2
y = 7

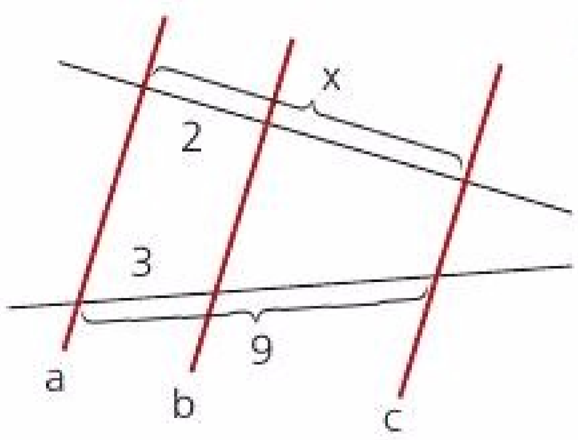
11. Nas figuras a seguir, as retas **a**, **b** e **c** são paralelas. Determine **x** e **y** em cada uma.

a)



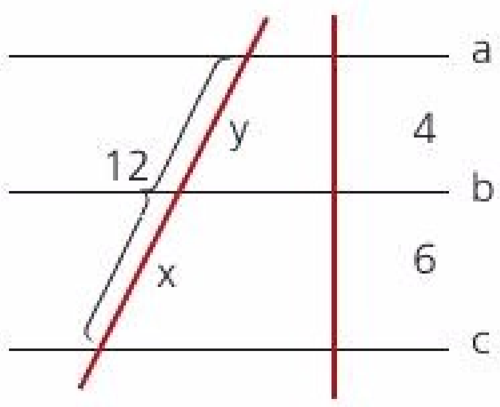
y = 12

b)



x = 6

c)



x = 7,2
y = 4,8

12. Faça a figura correspondente, em seu caderno, e resolva o seguinte problema:

Dois segmentos adjacentes, de 7 cm e 3 cm, são determinados por um feixe de três paralelas sobre uma das transversais que intercepta as retas desse feixe.

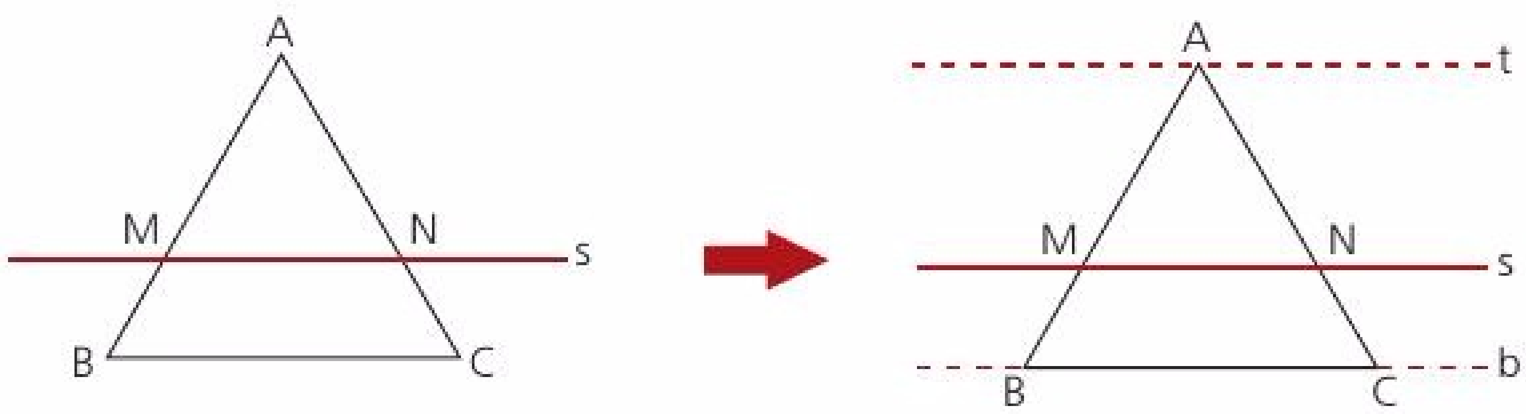
Numa outra transversal, não paralela à primeira, o menor segmento determinado pelo feixe mede 4 cm. Qual é a medida do outro segmento determinado nessa transversal?

Interpretar texto

$x = 9,\overline{3}$ cm

O teorema de Tales no triângulo

Uma importante aplicação do teorema de Tales ocorre quando traçamos uma paralela a um dos lados de um triângulo qualquer. Considere, por exemplo, o triângulo ABC e uma reta **s** paralela ao lado $\overline{BC}$, que intercepta os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ nos pontos M e N, respectivamente.

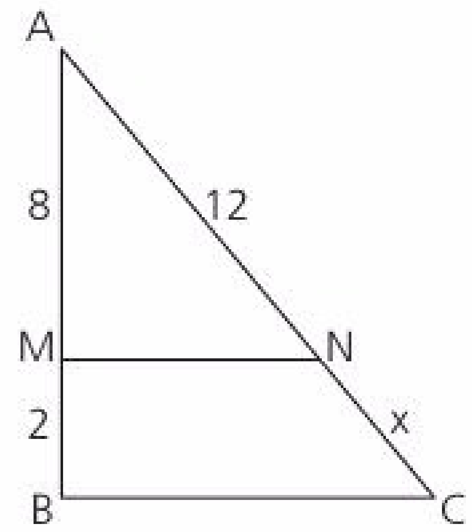


Prolongando-se o lado $\overline{BC}$ e traçando-se pelo vértice A a reta **t**, paralela ao lado $\overline{BC}$, obtemos um feixe de três paralelas (**t**, **s** e **b**), cortado pelos lados transversais $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, onde ficam determinados os segmentos $\overline{AM}$, $\overline{MB}$, $\overline{AN}$ e $\overline{NC}$ que são, nessa ordem proporcionais. Assim, no triângulo ABC, se $\overline{MN} // \overline{BC}$, temos:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{NC}} \quad \text{e} \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AN}} \quad \text{e} \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{NC}}$$

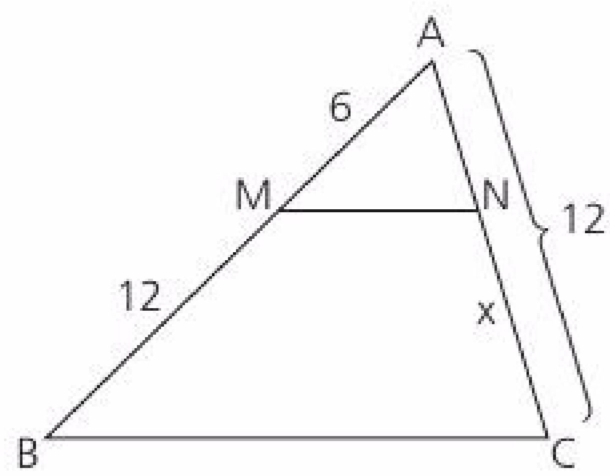
Observe os exemplos:

- No triângulo ABC a seguir, $\overline{MN} // \overline{BC}$.



Logo: $\dfrac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \dfrac{\overline{AN}}{\overline{NC}} \rightarrow \dfrac{8}{2} = \dfrac{12}{x} \rightarrow x = 3$

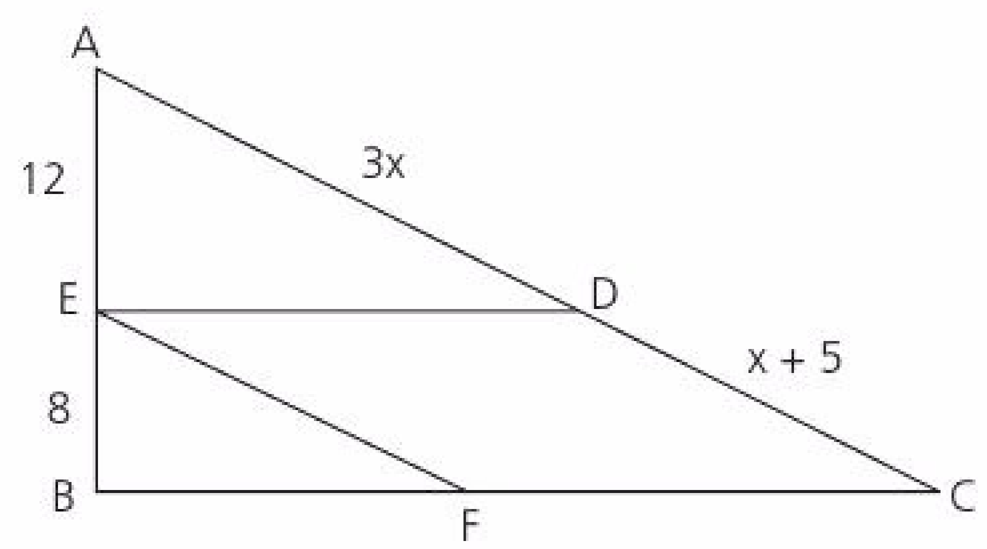
- MN//BC no triângulo ABC a seguir:



Logo: $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{MB}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{NC}} \rightarrow \dfrac{12 + 6}{12} = \dfrac{12}{x} \rightarrow x = 8$

Atividades

13. Na figura a seguir, o quadrilátero EDCF é um paralelogramo. Considerando todas as medidas em centímetros, determine:



a) o valor de x; 5

b) o perímetro do paralelogramo EDCF; 38 cm

c) a medida de $\overline{BF}$; 6 cm

d) o perímetro do triângulo ABC. 60 cm

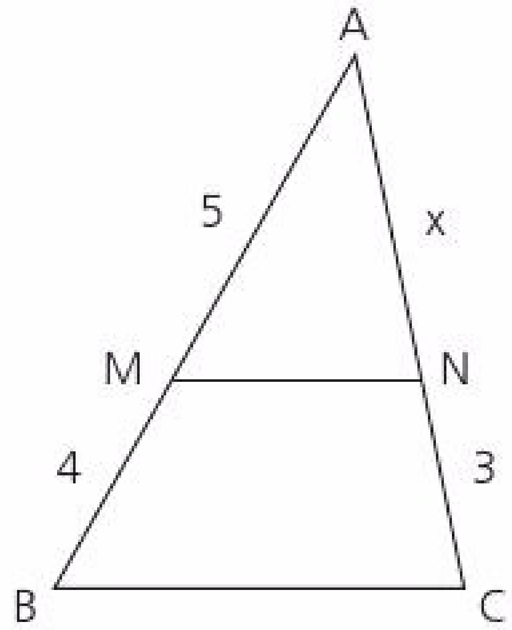
14. Faça a figura em seu caderno e resolva os problemas: Construir figura

a) Uma reta é paralela ao lado $\overline{BC}$ de um triângulo ABC e intercepta os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ nos pontos M e N, de tal maneira que $\overline{AM}$ = 6 cm e $\overline{NA}$ = 8 cm. Determine a medida do lado $\overline{AC}$, sabendo-se que o lado $\overline{AB}$ mede 10 cm. $x = 13,\overline{3}$

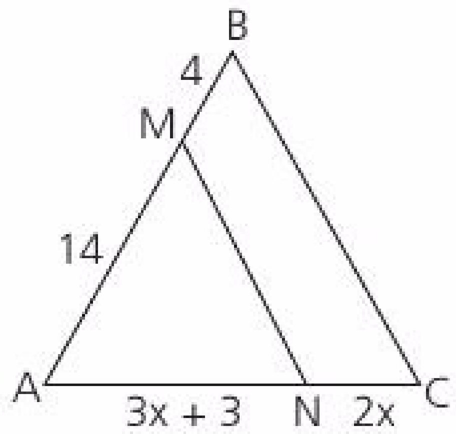
b) Num triângulo ABC, os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ medem, respectivamente 12 cm e 15 cm. Marcando-se sobre $\overline{AB}$ um ponto distante 4 cm de A e por ele traçando-se uma paralela a $\overline{BC}$, quais serão as medidas dos segmentos determinados sobre o lado $\overline{AC}$? $x = 5$ $y = 10$

15. Em cada figura a seguir, $\overline{MN}$ // $\overline{BC}$. Determine o valor de **x**:

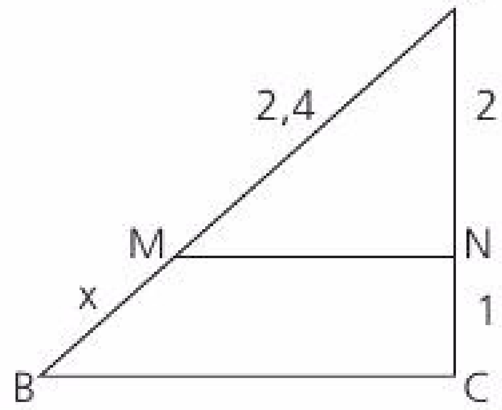
a) $x = 3{,}75$



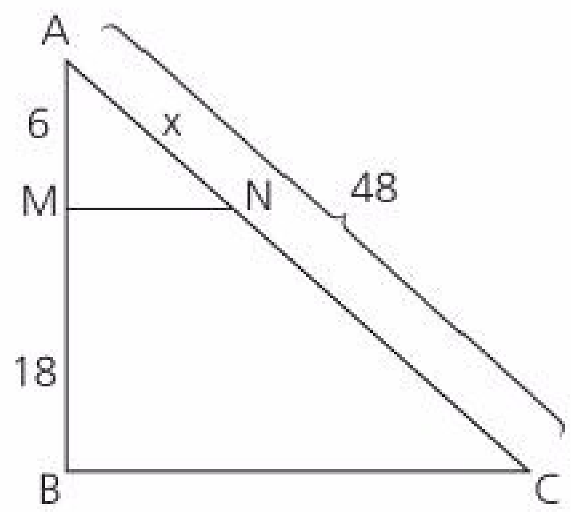
b) $x = 0{,}75$



c) $x = 1{,}2$



d) $x = 12$



Semelhança

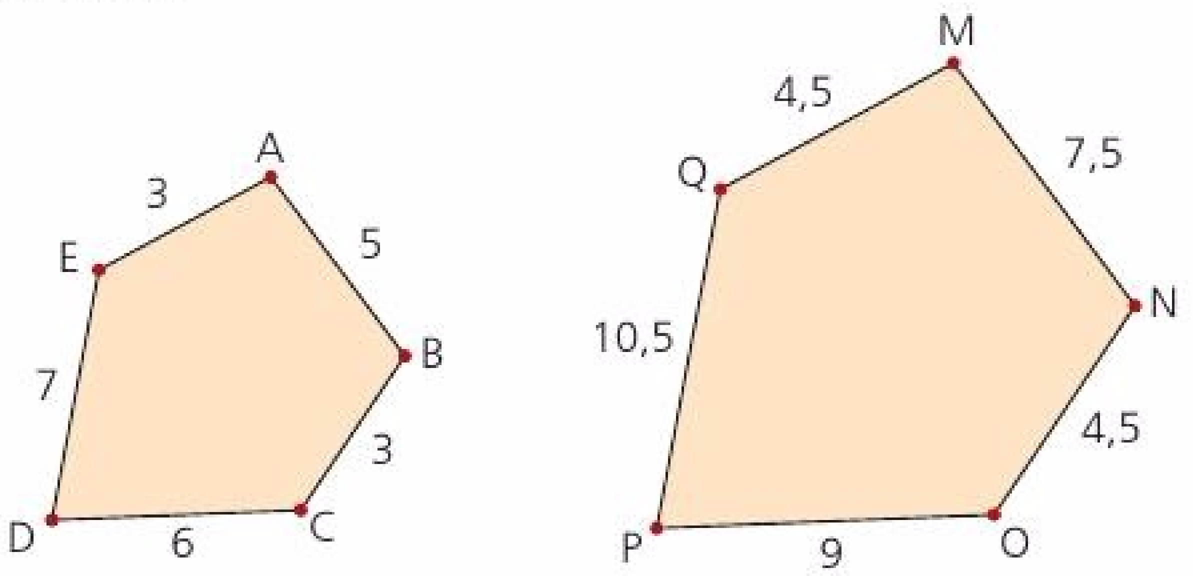
Em nosso cotidiano, quando dizemos que dois objetos são semelhantes, estamos nos referindo ao fato de serem parecidos. As lindas e tradicionais bonequinhas russas nos dão um belo exemplo de objetos semelhantes. Todas têm a mesma forma, mas as dimensões são diferentes.

Professor, leia o texto com os alunos e converse com eles sobre outras situações em que podemos perceber a semelhança: mapas, fotos, miniaturas de carros, maquetes e outros.

Lionel Valenti/PhotoXpress

No estudo da Geometria, quando duas figuras são semelhantes, elas têm a mesma forma e mantêm entre si uma série de relações que vamos estudar.

Assim, uma ampliação, uma redução e até mesmo uma congruência são exemplos da semelhança entre duas figuras. Observe, por exemplo, os dois pentágonos a seguir:



Se os ângulos correspondentes $\hat{A}$ e $\hat{M}$, $\hat{E}$ e $\hat{Q}$, $\hat{D}$ e $\hat{P}$, $\hat{C}$ e $\hat{O}$ e $\hat{B}$ e $\hat{N}$ forem congruentes, os dois pentágonos terão os lados correspondentes proporcionais:

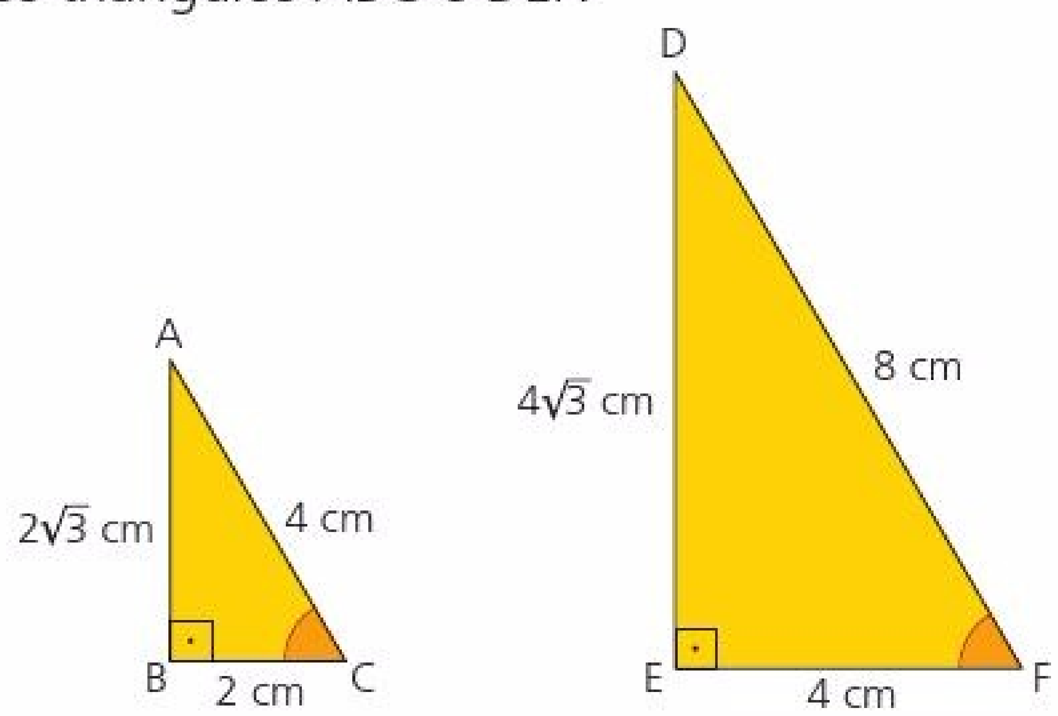
$$\frac{\overline{AE}}{\overline{MQ}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{NO}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{PO}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{QP}} \rightarrow \frac{3}{4,5} = \frac{5}{7,5} = \frac{3}{4,5} = \frac{6}{9} = \frac{7}{10,5}$$

Ocorrendo essas duas condições (ângulos congruentes e lados correspondentes proporcionais), dizemos que ABCDE e MNOPQ são **pentágonos semelhantes**.

Dois polígonos são semelhantes quando têm ângulos correspondentes congruentes e lados respectivamente proporcionais.

Observe outros exemplos de polígonos semelhantes:

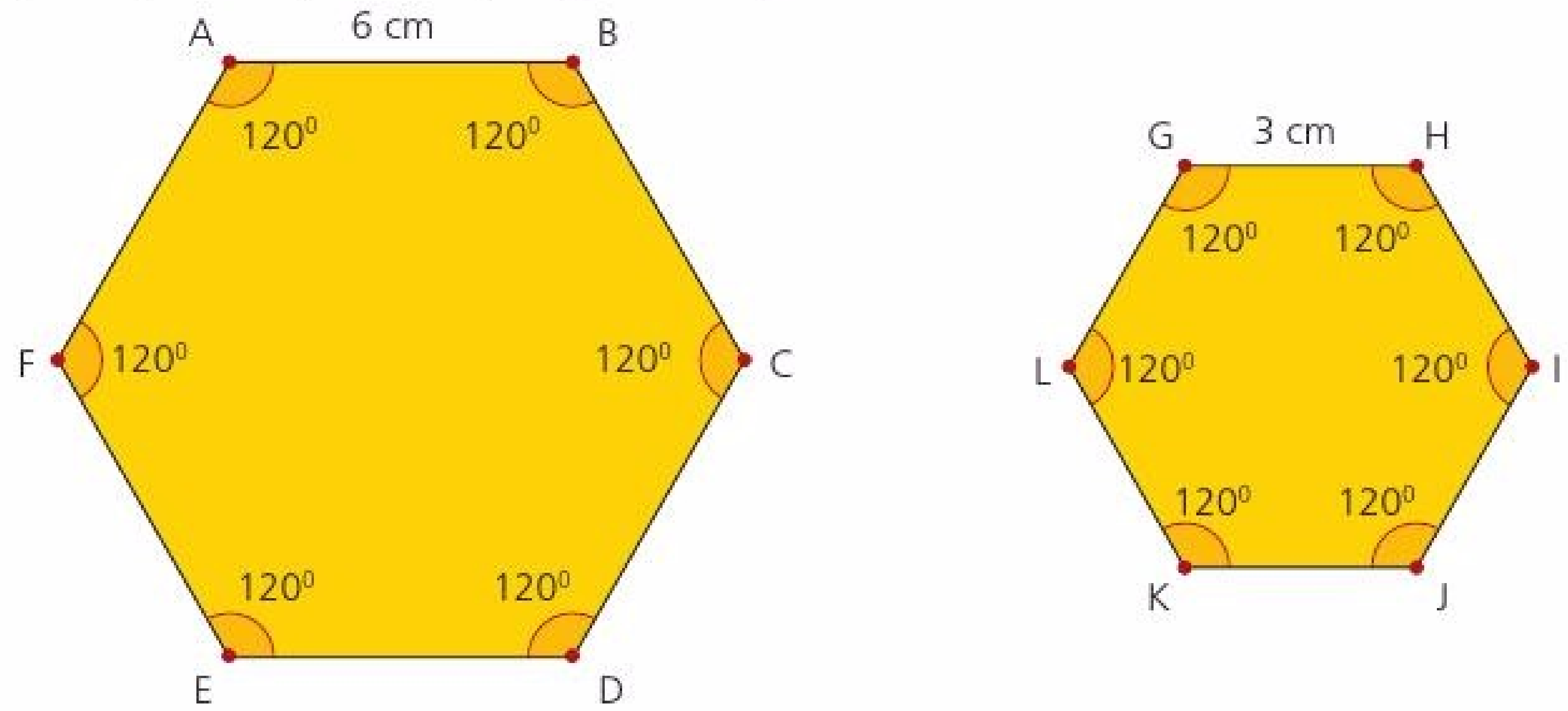
- Considere os triângulos ABC e DEF:



Os dois triângulos são semelhantes, pois têm três ângulos congruentes 90°, 60° e 30°. Assim, os lados correspondentes são proporcionais, pois:

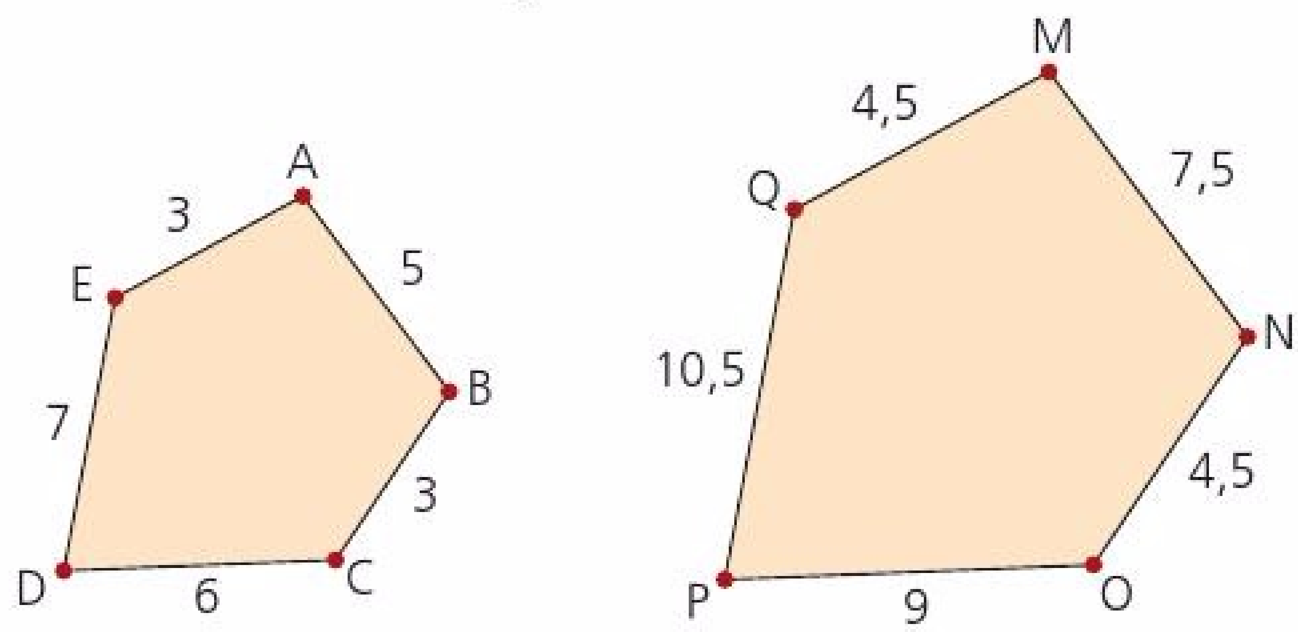
$$\frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = \frac{4}{8} = \frac{2}{4}$$

- Os dois hexágonos a seguir são regulares. Assim, seus ângulos internos medem 120°. Se o lado $\overline{AB}$ = 6 cm e $\overline{GH}$ = 3 cm, a razão $\frac{6}{3}$ será mantida em todos os pares de lados correspondentes. Podemos também dizer que todos os hexágonos regulares são semelhantes e que o mesmo ocorre para quaisquer duplas de polígonos regulares.



Razão de semelhança

Vamos retomar os dois pentágonos semelhantes que estudamos na introdução do conceito de semelhança.



Vimos que se ABCDE e MNOPQ são semelhantes, os lados correspondentes são proporcionais:

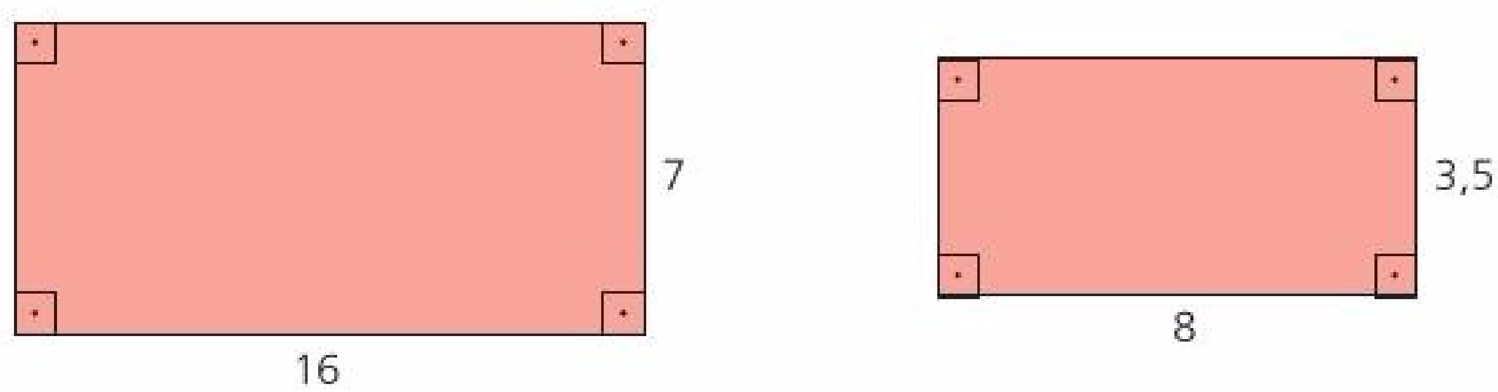
$$\frac{3}{4,5} = \frac{5}{7,5} = \frac{3}{4,5} = \frac{6}{9} = \frac{7}{10,5} = \frac{2}{3}$$

Note que as razões entre os lados correspondentes são sempre iguais a $\frac{2}{3}$.

Essa razão constante, existente entre os lados correspondentes é denominada **razão de semelhança** entre os polígonos e é representada pela letra **k.**

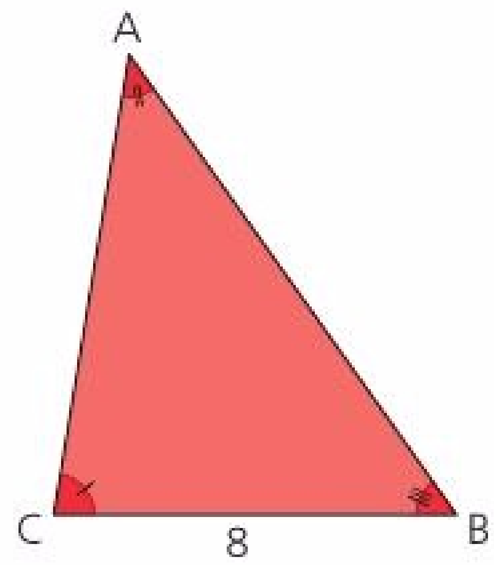
Observe os exemplos:

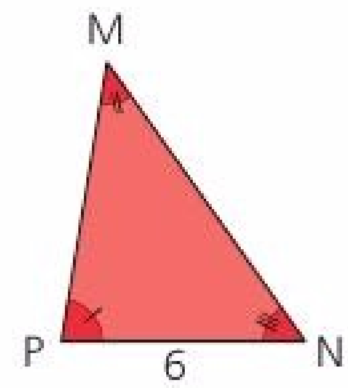
- Os dois retângulos da figura a seguir são semelhantes.



Logo, podemos escrever $\frac{16}{8} = \frac{7}{3,5} = 2$. A razão de semelhança entre os retângulos será k = 2.

• Considere, agora, os triângulos a seguir. Eles têm ângulos internos congruentes e, portanto, são semelhantes.





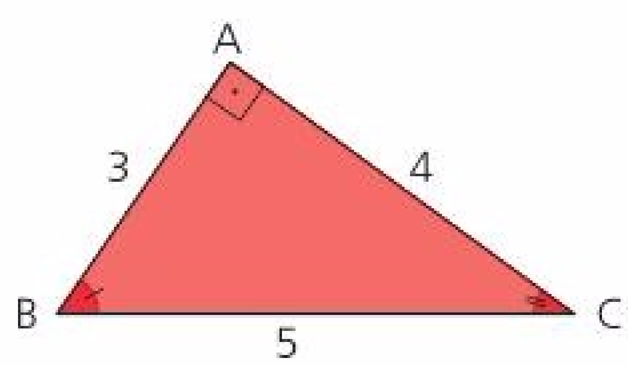
Mesmo conhecendo apenas as medidas de dois lados correspondentes, sabendo que os triângulos ABC e MNP são semelhantes, podemos dizer que a razão de semelhança do triângulo ABC para o MNP será:

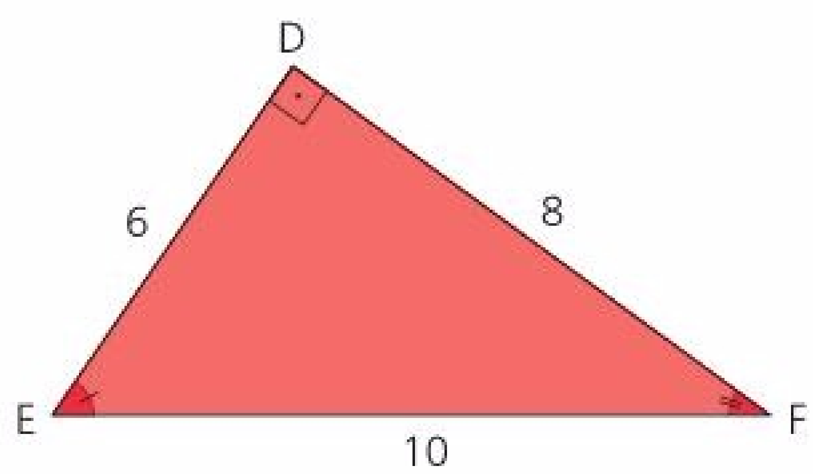
$$k = \frac{8}{6} \rightarrow k = \frac{4}{3}$$

Note que a razão de semelhança $k = \frac{4}{3}$ é definida como **"razão de semelhança do triângulo ABC para o triângulo MNP"**, ou seja, está definida para uma ordem de proporcionalidade. Já a **razão de semelhança do triângulo MNP para o triângulo ABC** será dada por:

$$k_1 = \frac{6}{8} \rightarrow k_1 = \frac{3}{4}$$

A razão de semelhança entre dois polígonos não se limita à proporcionalidade de lados correspondentes. Ela ocorre também entre os **perímetros** dos polígonos semelhantes. Veja, por exemplo, os dois triângulos retângulos semelhantes ABC e DEF:





• A razão de semelhança de ABC para DEF é:

$$\frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} \rightarrow \text{razão} = \frac{1}{2} \rightarrow k = \frac{1}{2}$$

• A razão de semelhança do **perímetro** de ABC para o **perímetro** de DEF é:

$$\frac{3 + 4 + 5}{6 + 8 + 10} = \frac{12}{24} \rightarrow k = \frac{1}{2}$$

De forma geral, podemos dizer que, se dois polígonos são semelhantes, a razão entre seus perímetros é igual à razão entre dois lados correspondentes quaisquer desses polígonos.

Atividades

Interpretar texto

16. A razão de semelhança de um triângulo ABC para um outro MNP é $\frac{3}{4}$. Responda:

a) Qual dos dois triângulos tem lados e dimensões menores, em relação aos lados correspondentes do outro? Justifique sua resposta. ΔABC

b) Se os lados do triângulo ABC são 4 cm, 6 cm e 8 cm, calcule as medidas dos lados correspondentes em MNP. 5,$\overline{3}$; 8; 10,5 cm

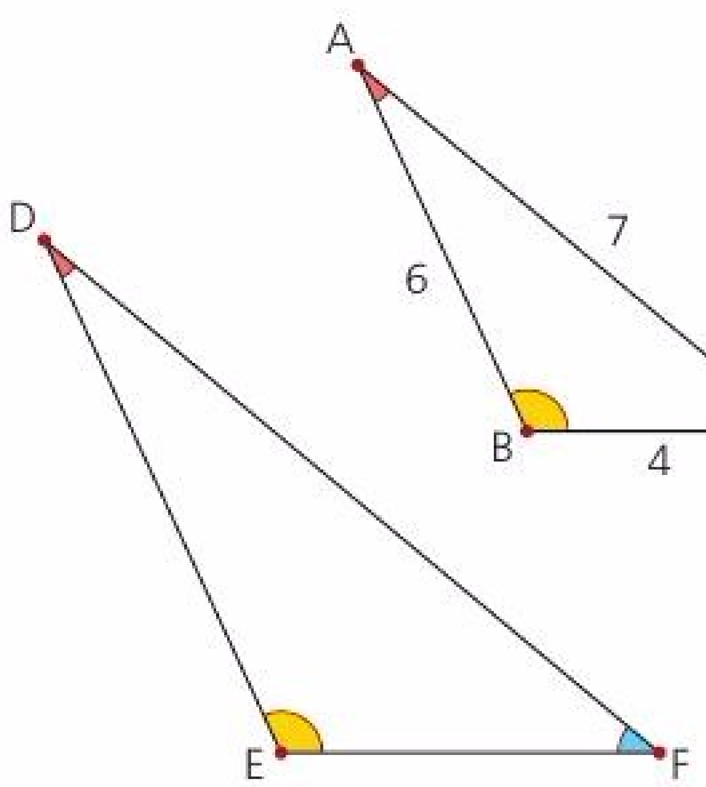
c) Qual é a razão de semelhança entre os perímetros de ABC e MNP? $\frac{3}{4}$

17. Os lados de um triângulo medem 6 cm, 10 cm e 12 cm. O maior lado de um outro triângulo semelhante a esse mede 9 cm. Calcule a razão de semelhança entre o primeiro e o segundo triângulo. $\frac{4}{3}$

18. Os perímetros de dois triângulos semelhantes medem 36 cm e 54 cm, respectivamente. O menor lado do segundo mede 15 cm. Determine a medida do menor lado do primeiro. $x = 10$ cm

19. Os lados de um triângulo ABC medem 4 cm, 6 cm e 9 cm. Quais são as medidas de um triângulo semelhante a ABC, cujo perímetro mede 76 cm? 16 cm, 24 cm, 36 cm

20. Os triângulos ABC e DEF são semelhantes.

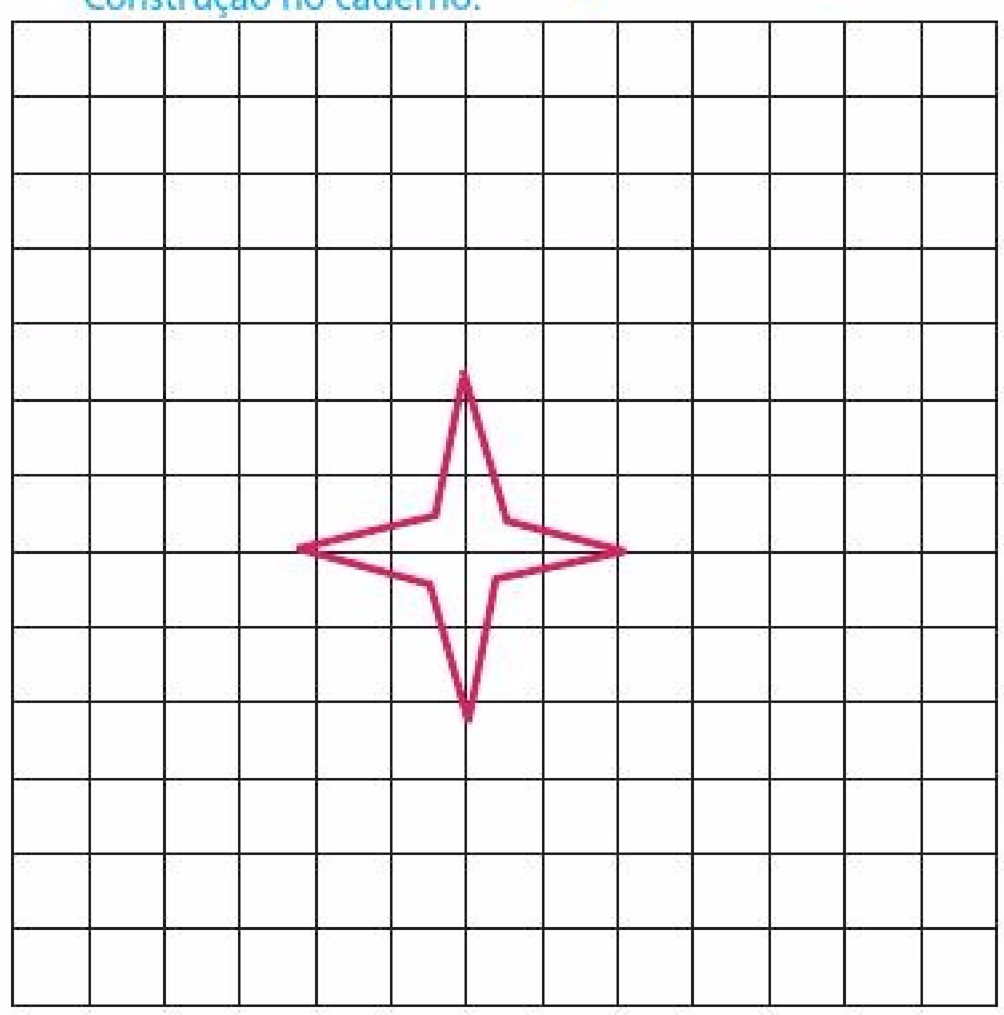


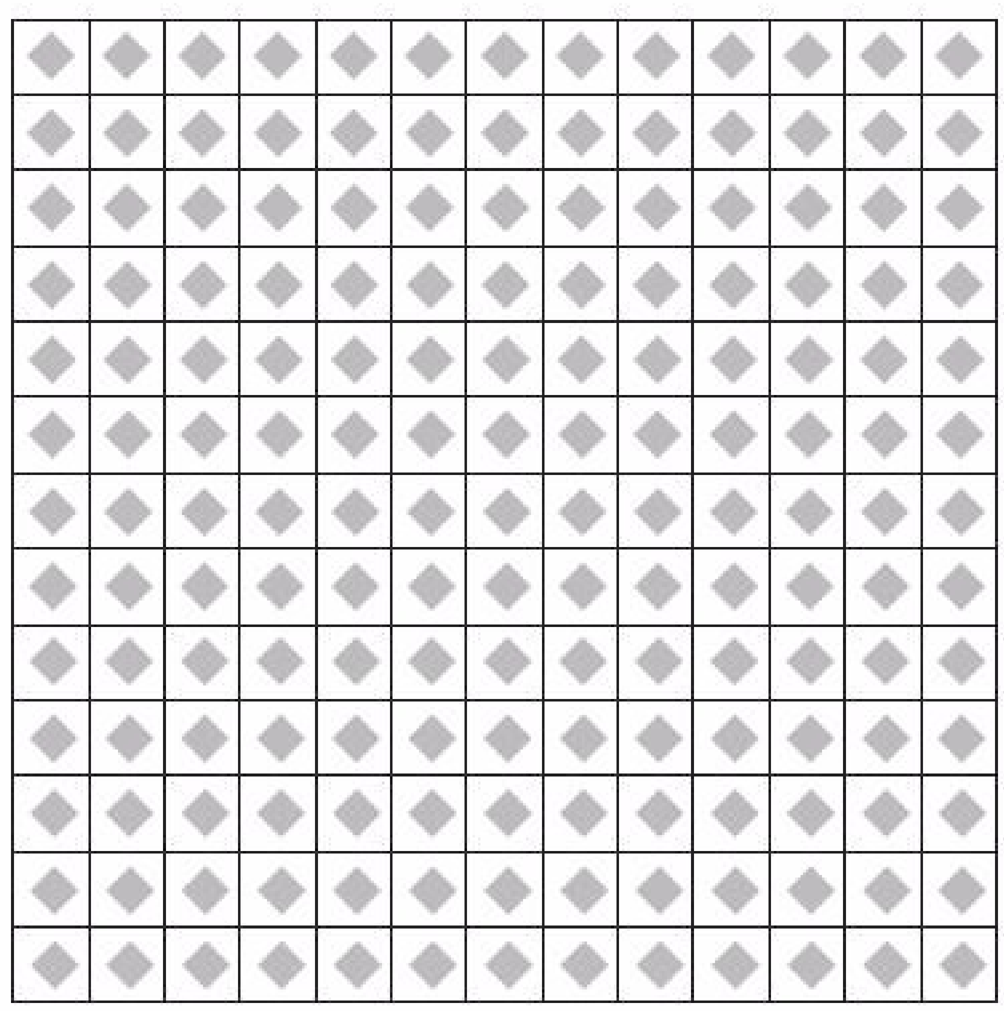
Determine o perímetro do triângulo DEF, sabendo que a razão de semelhança entre ABC e DEF é $\frac{3}{5}$. 10 cm; 11,$\overline{6}$ cm; 6,$\overline{6}$ cm

21. O perímetro de um pentágono é 100 cm e seu menor lado mede 12 cm. Qual é a medida do perímetro de um pentágono semelhante a esse, cujo menor lado mede 36 cm? 300 cm

22. Copie a malha quadriculado em seu caderno e amplie a figura dada de modo que as medidas dos lados sejam o dobro das medidas originais. Construir figura

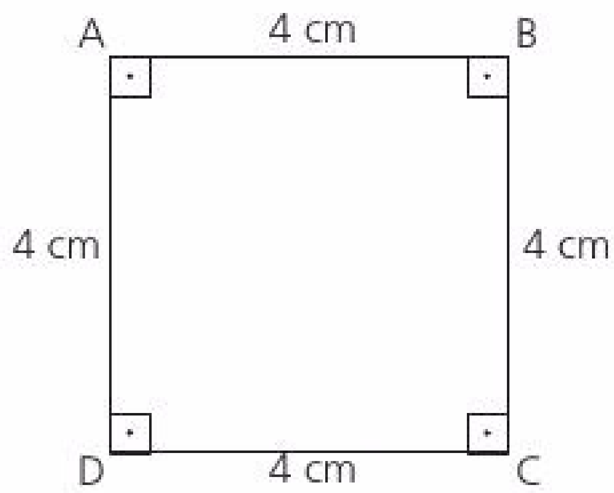
Construção no caderno.

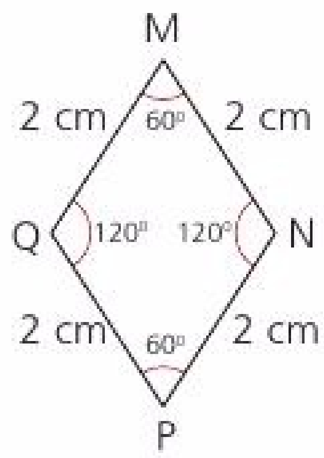




Semelhança de triângulos

Já conhecemos as condições gerais de semelhança de dois polígonos: lados correspondentes proporcionais e ângulos correspondentes congruentes. No entanto, nem sempre ter lados correspondentes proporcionais implica que dois polígonos têm ângulos correspondentes congruentes. Veja, por exemplo, o caso de um quadrado ABCD de lado 4 cm e um losango MNPQ de lados 2cm:





Note que os lados correspondentes são proporcionais, pois:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{NP}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{QM}} = \frac{4}{2} = 2$$

Porém, os ângulos internos do quadrado são todos iguais a 90°, enquanto os do losango são iguais a 60°, 60°, 120° e 120°. Essa diferença entre os ângulos internos correspondentes é suficiente para que os dois polígonos não sejam semelhantes.

No caso de dois triângulos (lados proporcionais e ângulos internos congruentes), basta que uma das condições seja necessária. Se uma ocorrer, a outra também ocorrerá, devido à característica de rigidez, que se observa nos triângulos e que os demais polígonos não possuem.

Assim, podemos dizer que os triângulos têm as seguintes propriedades:

- Se dois triângulos têm lados correspondentes proporcionais, então seus ângulos internos correspondentes são congruentes;
- Se dois triângulos têm ângulos correspondentes congruentes, então seus lados correspondentes serão proporcionais.

Casos de semelhança de triângulos

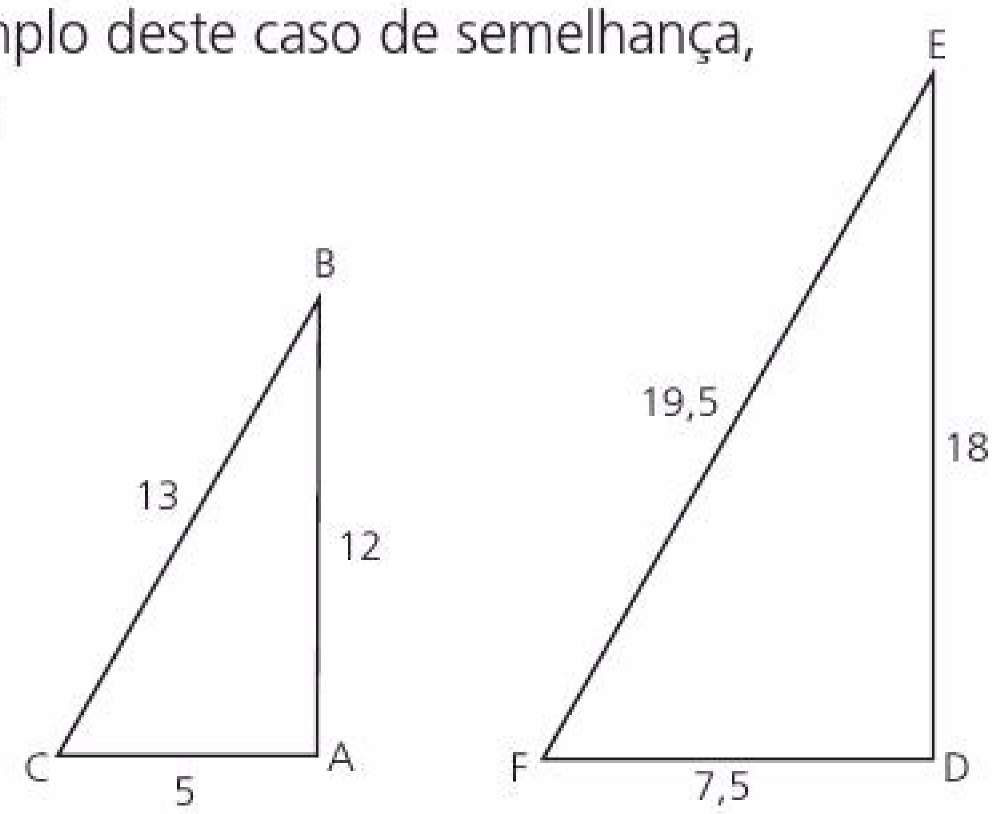
Considerando as características de dois triângulos, existem alguns casos que nos permitem estabelecer a semelhança entre dois triângulos.

1º caso

Denominado de **LLL (lado-lado-lado)** este caso é uma consequência da propriedade que estudamos há pouco: se dois triângulos têm os lados correspondentes proporcionais eles serão semelhantes, pois, como vimos, os ângulos internos correspondentes serão congruentes.

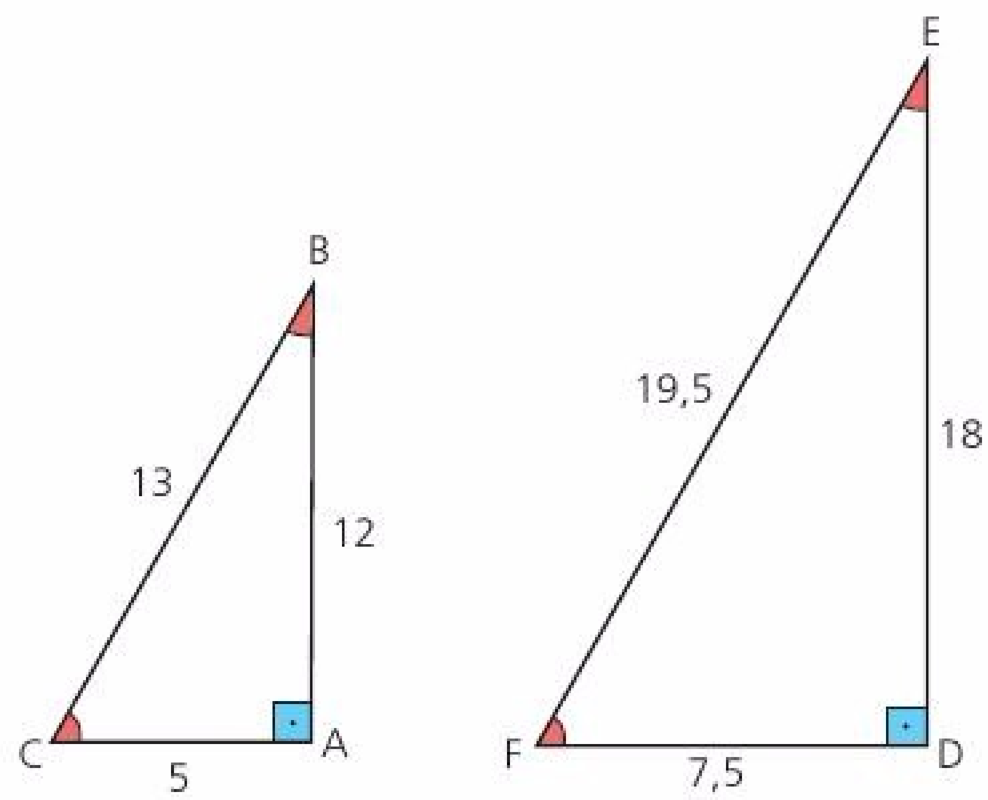
Se possível, solicite que os alunos façam no quadro as representações e estimule o uso de diferentes cores para representar a situação proposta.

Considere, como exemplo deste caso de semelhança, os triângulos ABC e DEF:



Como $\dfrac{13}{19{,}5} = \dfrac{12}{18} = \dfrac{5}{7{,}5} \rightarrow \hat{A} \equiv \hat{D}, \hat{B} \equiv \hat{E}, \hat{C} \equiv \hat{F}$.

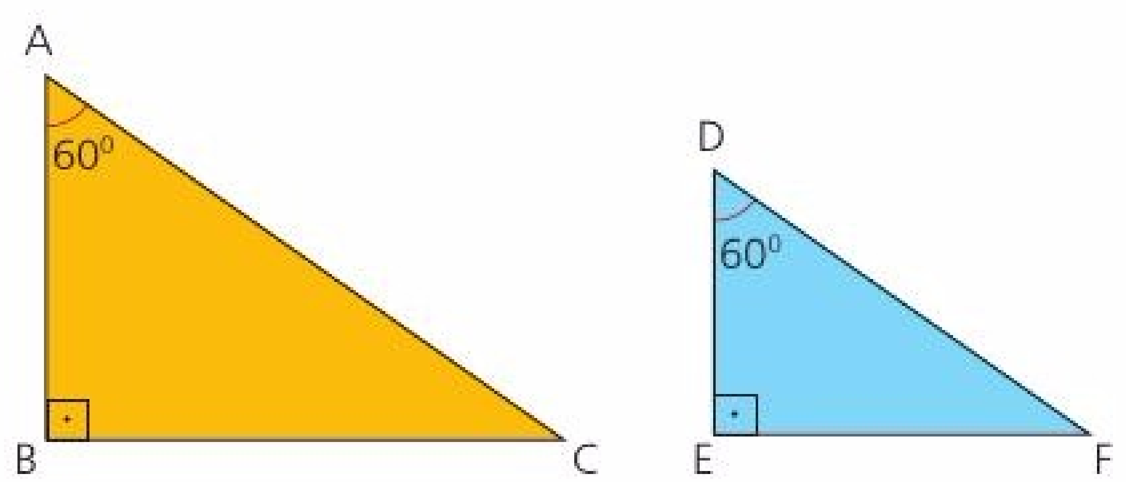
Assim, os ângulos internos correspondentes dos dois triângulos serão congruentes. Observe:



2º caso

Este caso é denominado **AA (ângulo – ângulo)** e fundamenta-se no fato de que, se dois triângulos têm dois pares de ângulos correspondentes congruentes, terão os três ângulos correspondentes congruentes. Como vimos, se isto ocorrer, eles terão lados correspondentes proporcionais.

Assim, concluímos que bastam dois ângulos congruentes para que dois triângulos sejam semelhantes.



Observe, como exemplo, os triângulos ABC e DEF:

Note que $\hat{A} = \hat{D} = 60^\circ$ e $\hat{B} = \hat{E} = 90^\circ$.

Assim, $\hat{C} = \hat{F} = 180^\circ - 60^\circ - 90^\circ = 30^\circ$

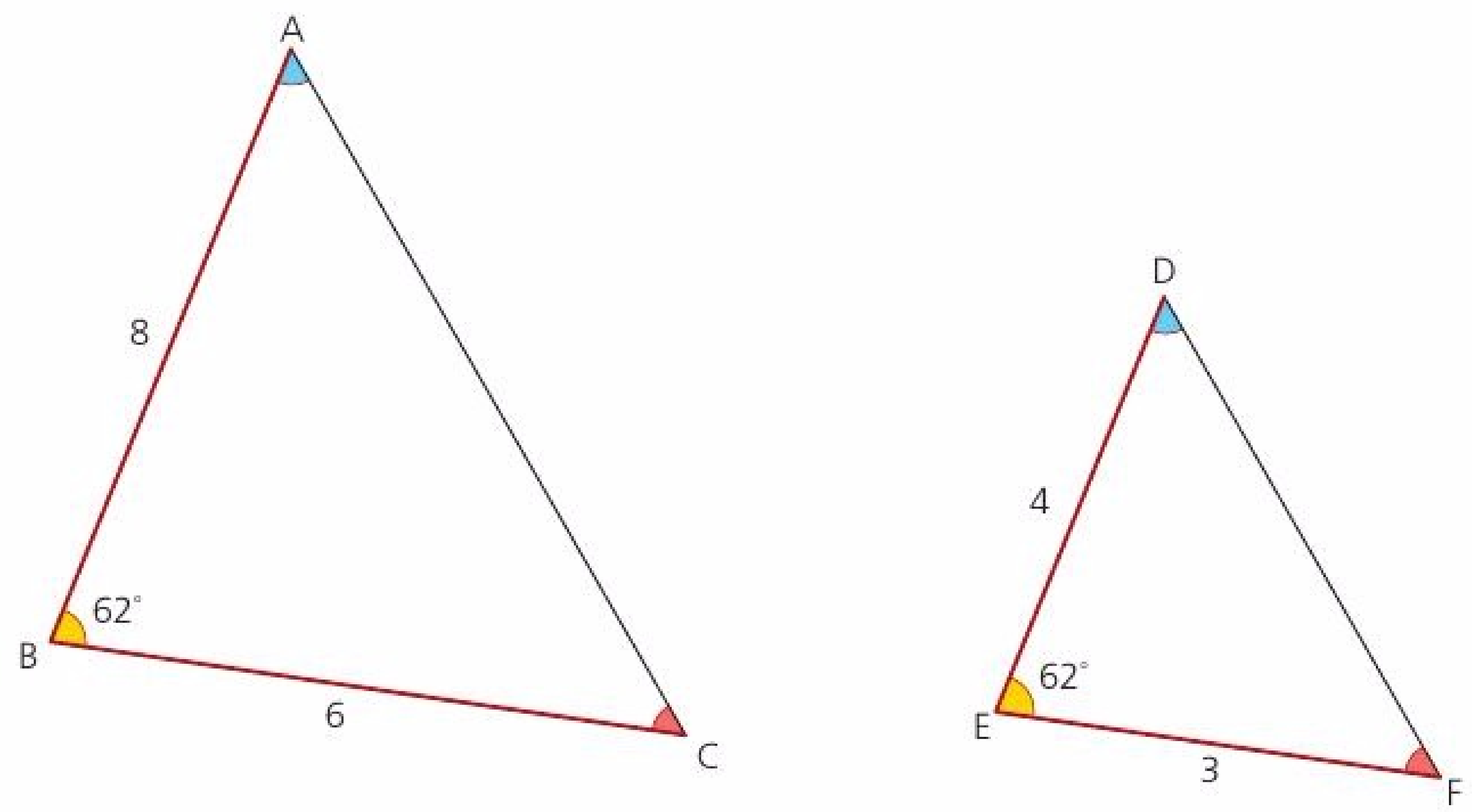
Neste caso, como temos dois ângulos correspondentes congruentes, os triângulos são semelhantes e:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$$

3º caso

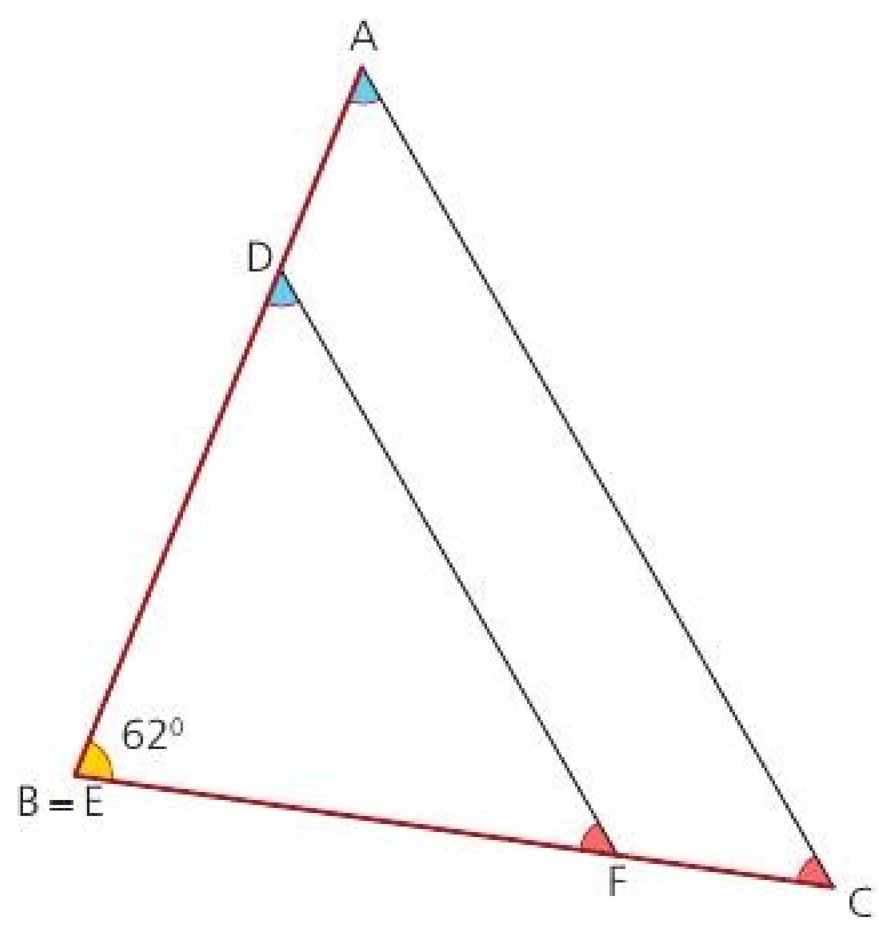
Este caso de semelhança de dois triângulos ocorre quando eles têm dois lados proporcionais e os ângulos definidos por esses lados nos dois triângulos congruentes. Por essa razão, este caso é denominado **LAL (lado – ângulo – lado).**

Vamos analisar este caso partir dos triângulos ABC e DEF:



Como $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{DE}$ e $\overline{EF}$ são proporcionais nessa ordem, pois $\frac{8}{4} = \frac{6}{3}$, e $\hat{B} = \hat{E} = 62°$, os triângulos ABC e DEF são semelhantes. Se fizermos uma translação do triângulo DEF, fazendo o vértice E coincidir com o vértice B do triângulo ABC, verificamos que $\hat{A} = \hat{D}$ e $\hat{C} = \hat{F}$, pois $\overline{DF} \parallel \overline{AC}$.

Professor, aproveite para comentar com os alunos que, como consequência da semelhança de triângulos, podemos dizer que: se um segmento de reta une os pontos médios de dois lados de um triângulo, então ele será paralelo ao terceiro lado e sua medida será a metade da medida do terceiro lado.



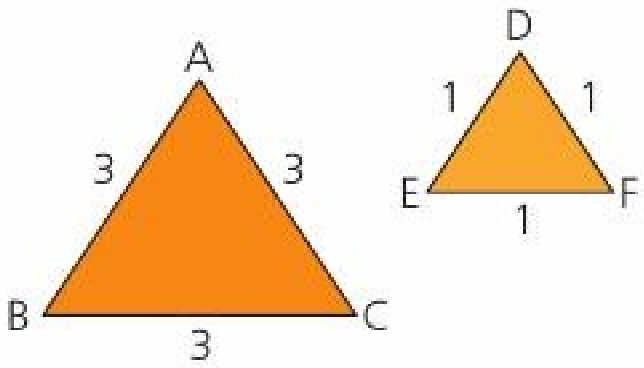
Assim, se os pares de ângulos correspondentes nos dois triângulos são congruentes, os dois triângulos são semelhantes. Note que esta situação é idêntica àquela em que analisamos paralelas cortadas por transversais, onde ficam determinados segmentos proporcionais.

Atividades

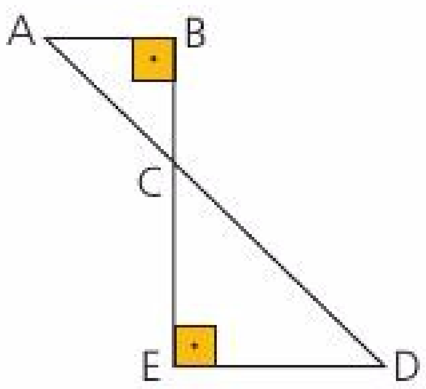
Interpretar figuras

23. Os pares de triângulos a seguir são semelhantes. Identifique o caso de semelhança (LLL, AA ou LAL) em cada um dos casos.

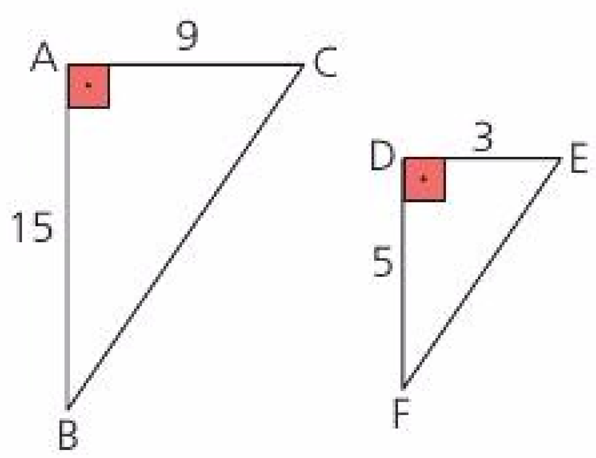
a) LLL



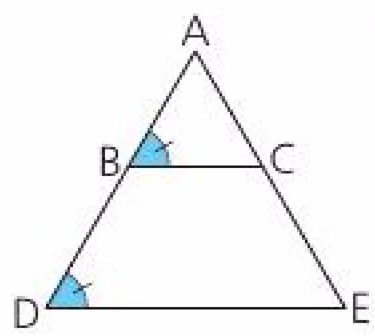
b) AA



c) LAL

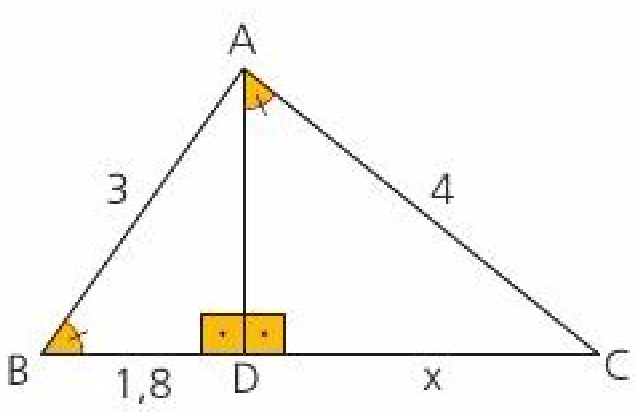


d) AA

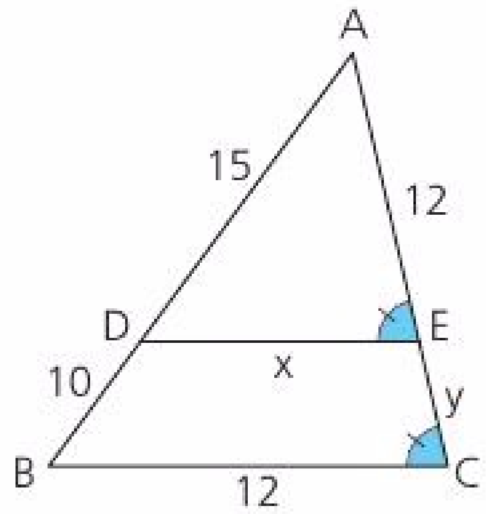


24. Identifique os triângulos semelhantes em cada caso e determine os valores de **x** e **y** indicados nas figuras:

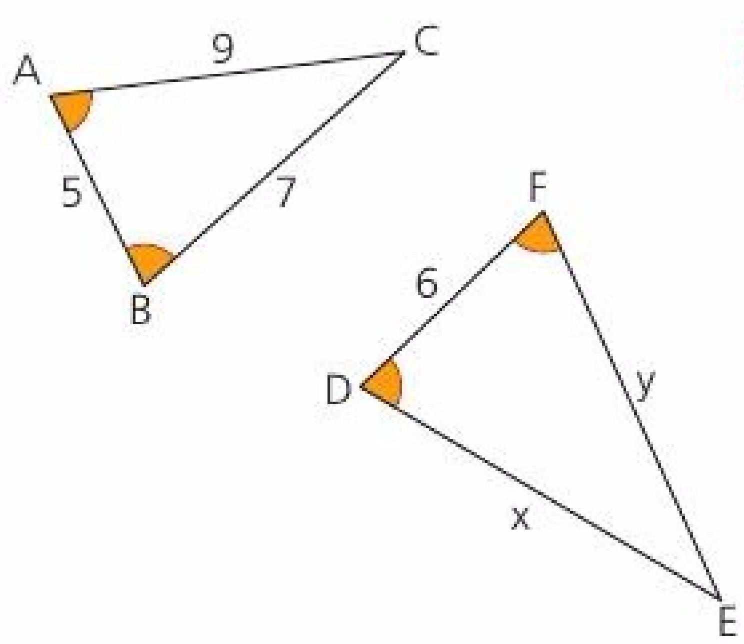
a) x = 3,2



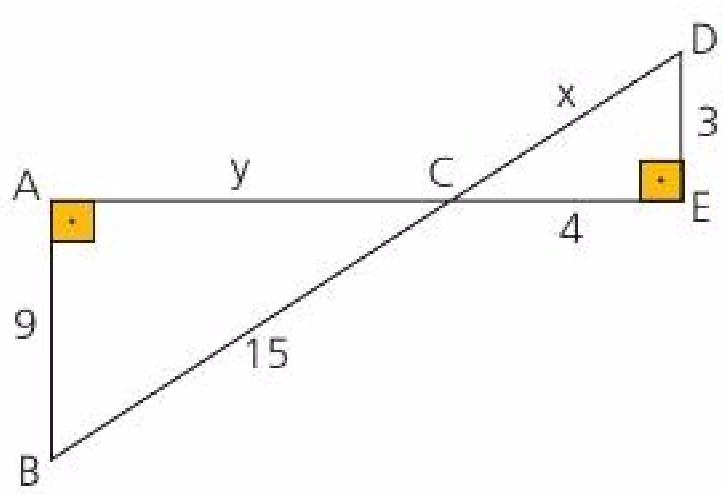
b) x = 7,2



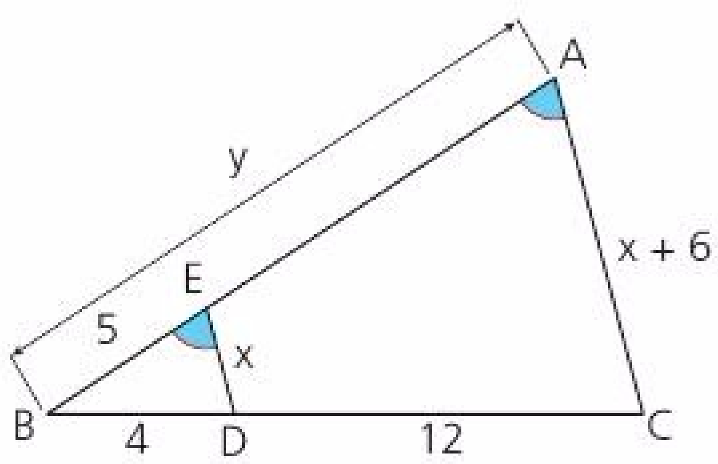
c) x = 8,4
y = 10,8



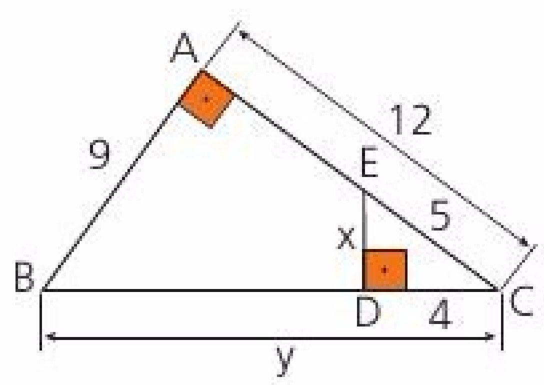
d) x = 5
y = 12



e) x = 2
y = 20

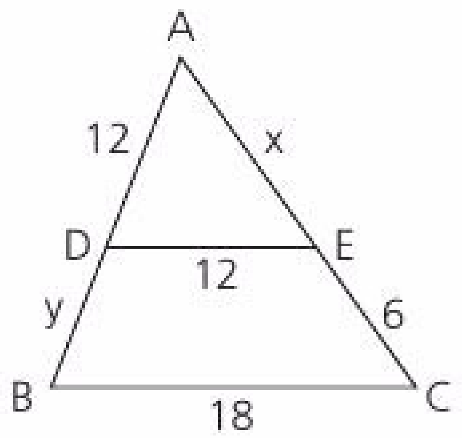


f) x = 3
y = 15



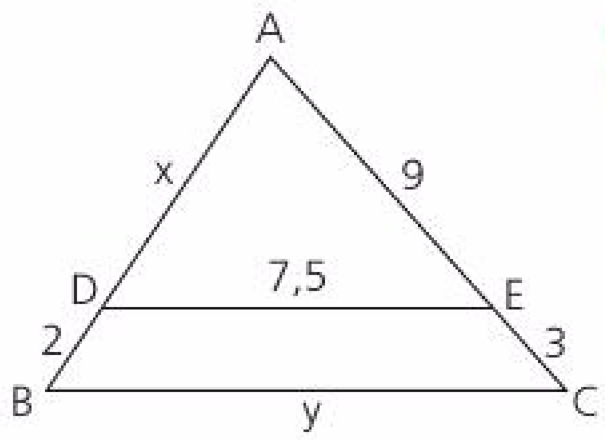
25. Identifique os triângulos semelhantes em cada figura e determine **x** e **y**.

a) $y = 12$ e $x = 6$



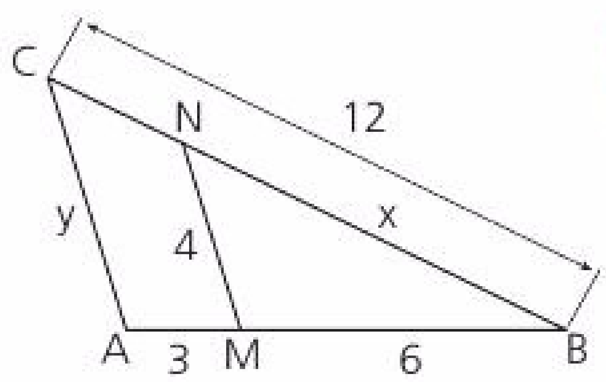
$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

b) $x = 6$
$y = 10$



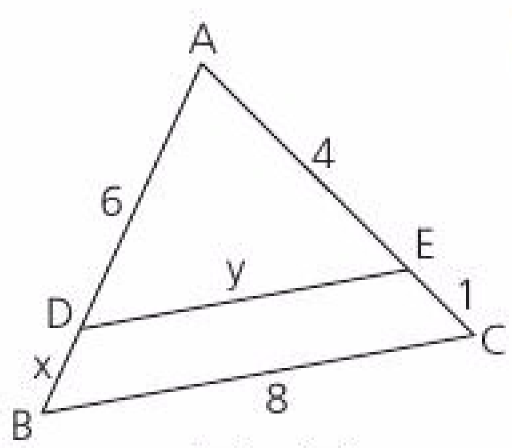
$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

c) $x = 8$
$y = 6$



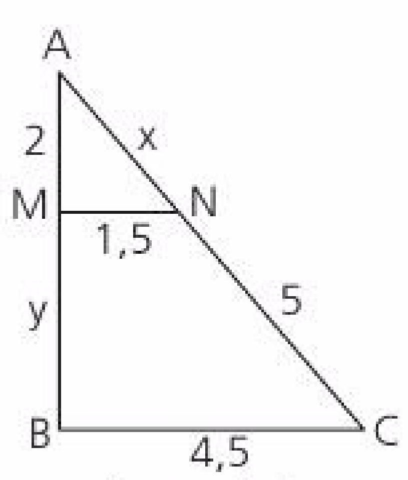
$\overline{AC} \parallel \overline{MN}$

d) $y = 4{,}8$



$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

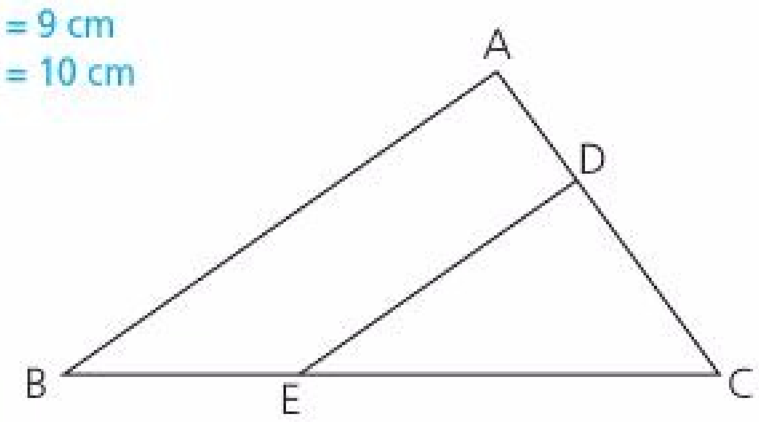
e) $x = 2{,}5$
$y = 4$



$\overline{MN} \parallel \overline{BC}$

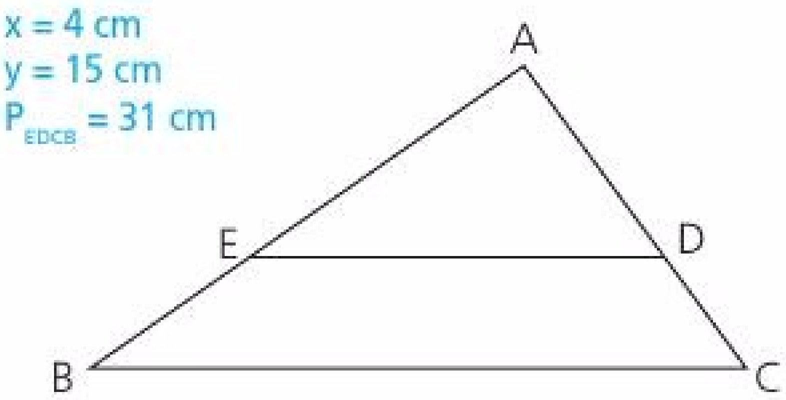
26. Na figura a seguir o lado $\overline{AB} = 12$ cm, $\overline{BC} = 15$ cm, $\overline{DE} = 8$ cm e $\overline{DC} = 6$ cm. Determine as medidas de $\overline{AC}$ e $\overline{EC}$, sabendo que $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$.

$x = 9$ cm
$y = 10$ cm

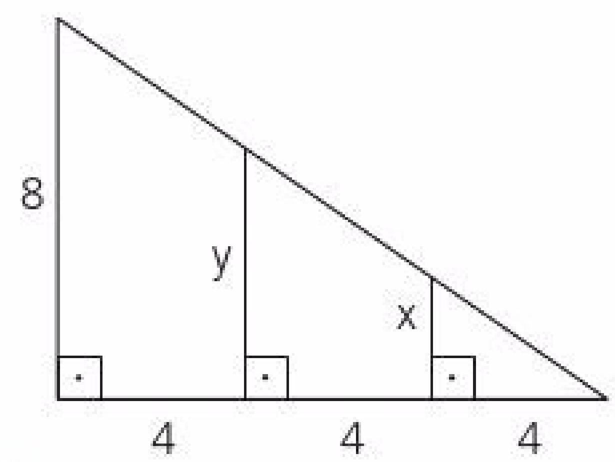


27. Calcule o perímetro do trapézio EDCB, sabendo-se que sua base menor mede 10 cm, $\overline{AE} = 4$ cm, $\overline{EB} = 2$ cm e $\overline{AC} = 12$ cm.

$x = 4$ cm
$y = 15$ cm
$P_{EDCB} = 31$ cm

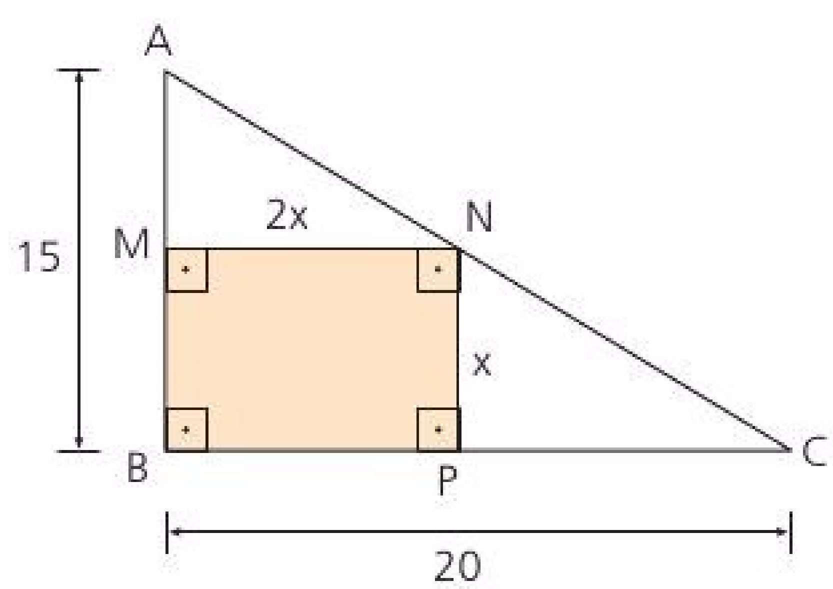


28. Determine **x** e **y** na figura a seguir:



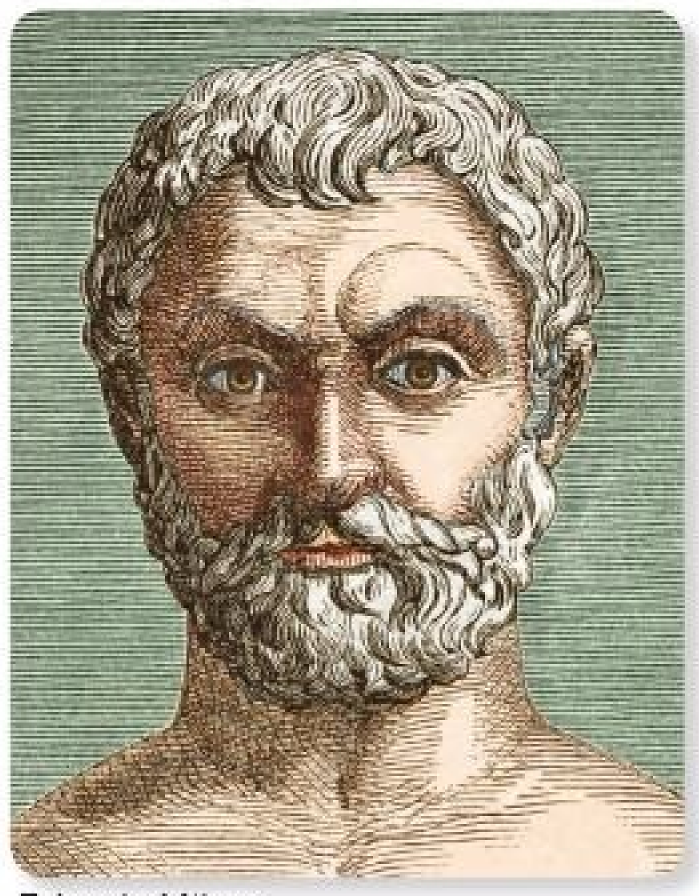
$x = 2{,}6$
$y = 5{,}\overline{3}$

29. Determine a área do retângulo MNPC na figura abaixo. $x = 6$
$A_{MNPB} = 6 \cdot 12 = 72$



Quando, quem e onde

Tales de Mileto, que viveu entre 640 e 580 a.C, para muitos historiadores é um dos criadores da Geometria, como a conhecemos hoje e, por essa razão é considerado um dos *sete sábios* da Grécia antiga. Estudou profundamente as propriedades dos números e das figuras planas, tendo deixado uma série de importantes proposições geométricas, ainda hoje aplicáveis em várias situações de nosso cotidiano.

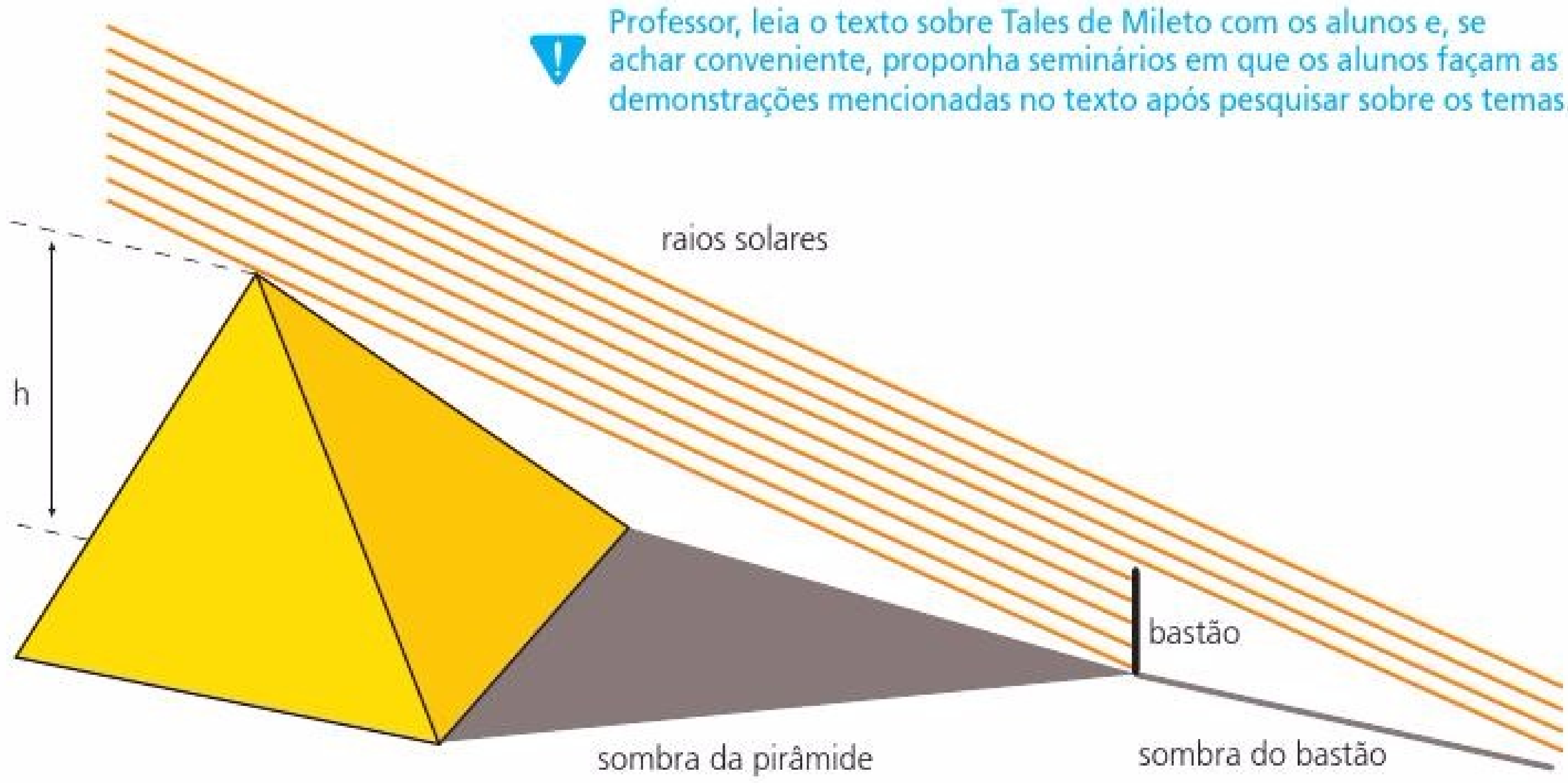


Tales de Mileto

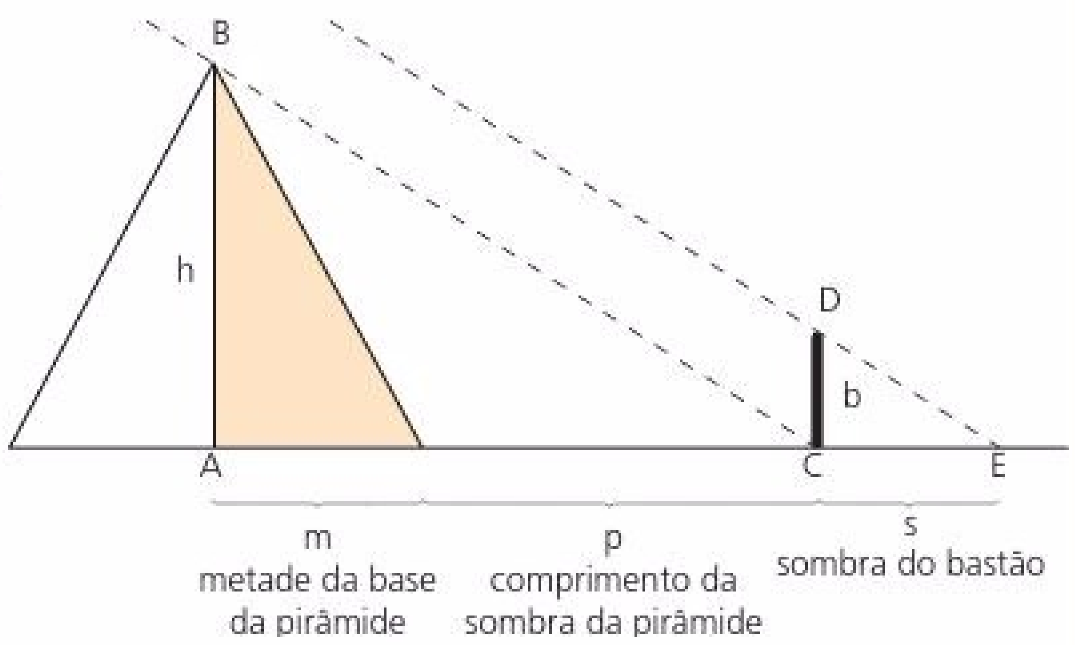
O cálculo da altura de uma pirâmide egípcia, feito por Tales, é um dos mais notáveis exemplos da aplicação dos conceitos de semelhança de triângulos e proporcionalidade de segmentos, conceitos para os quais Tales contribuiu decisivamente em seus trabalhos.

Para fazer o cálculo da altura h de uma pirâmide, Tales considerou que os raios de sol são paralelos e utilizou a medida da sombra da pirâmide, a medida da sombra de um bastão, cuja altura é fácil de medir e a distância do ponto onde está fincado o bastão para o centro da base da pirâmide.

Professor, leia o texto sobre Tales de Mileto com os alunos e, se achar conveniente, proponha seminários em que os alunos façam as demonstrações mencionadas no texto após pesquisar sobre os temas.



Se olharmos a figura de perfil, teremos o seguinte esquema:



Tales observou que os triângulos BAC e DCE são semelhantes.

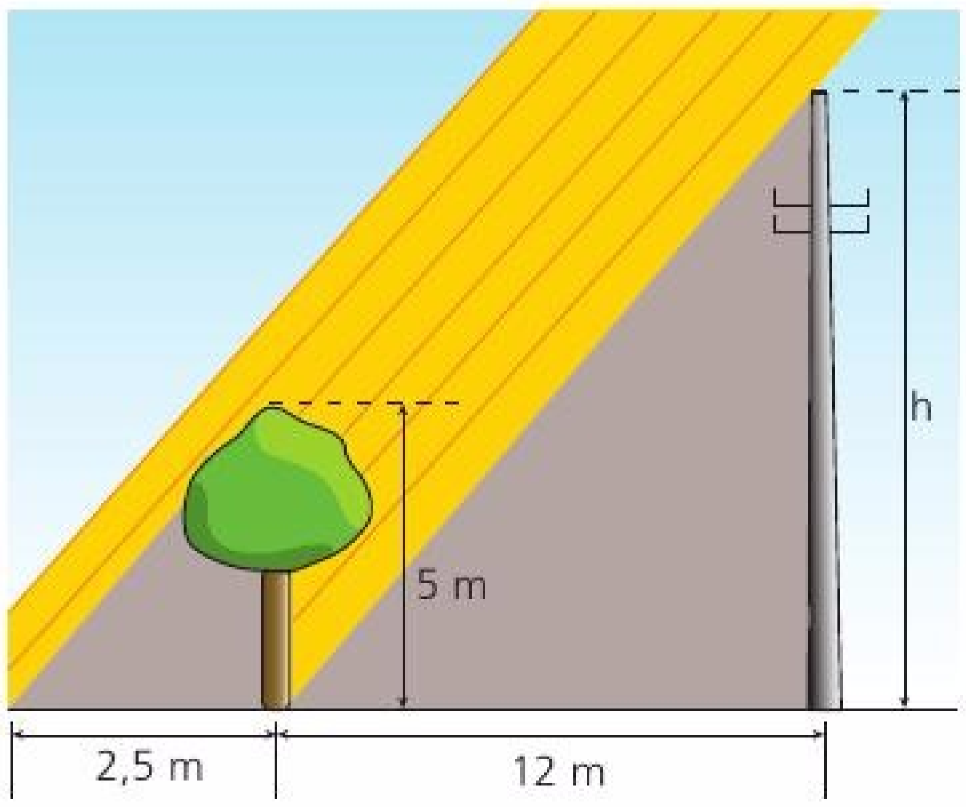
Portanto:

$$\frac{h}{b} = \frac{m+p}{s} \rightarrow H = \frac{b(m+p)}{s}$$

Atividades

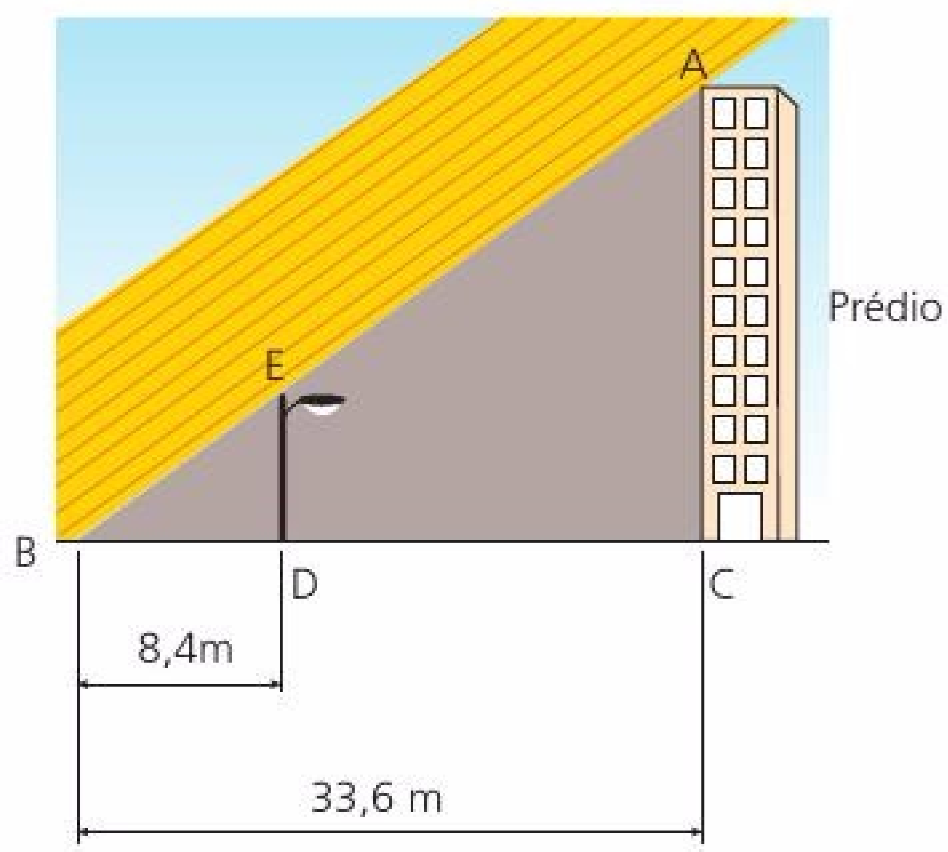
30. Determine a altura da torre, considerando que uma árvore de 5 m de altura, distante 12m do pé da torre, tem uma sombra de 2,5 m enquanto, no mesmo instante, a sombra da torre é de 12 m. h = 24 m

A figura é apenas um esquema ilustrativo.



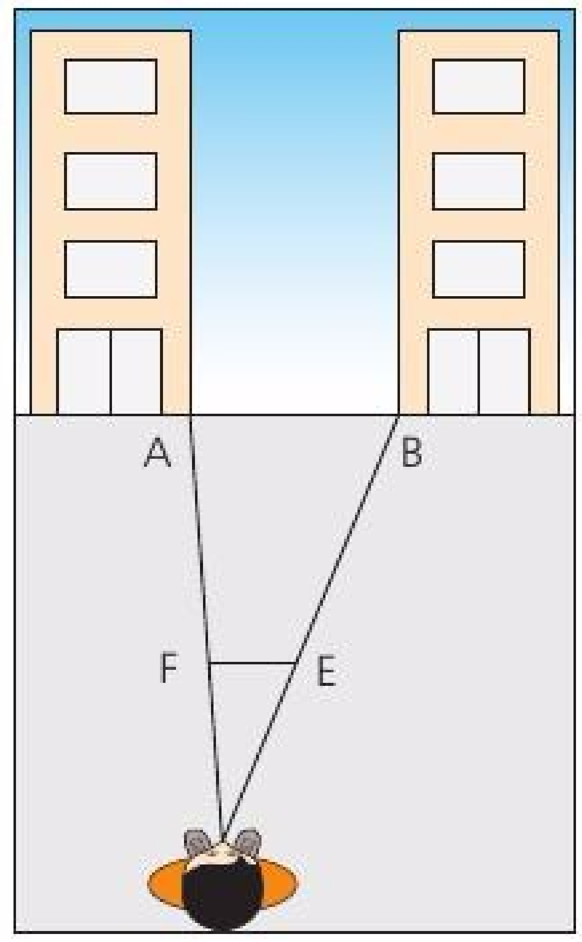
31. Calcule a altura do prédio da figura, sabendo que sua sombra mede 33,6 m, nlo mesmo instante em que a sombra de um poste de 7 m de altura mede 8,4 m. h = 28 m

A figura é apenas um esquema ilustrativo.



32. Determine a distância $\overline{AB}$ entre os dois prédios, sabendo que o observador está a 120 metros do ponto A, 140 metros do ponto B e, respectivamente, a 6 metros e 7 metros de F e E, que distam entre si 4 metros. x = 80 m

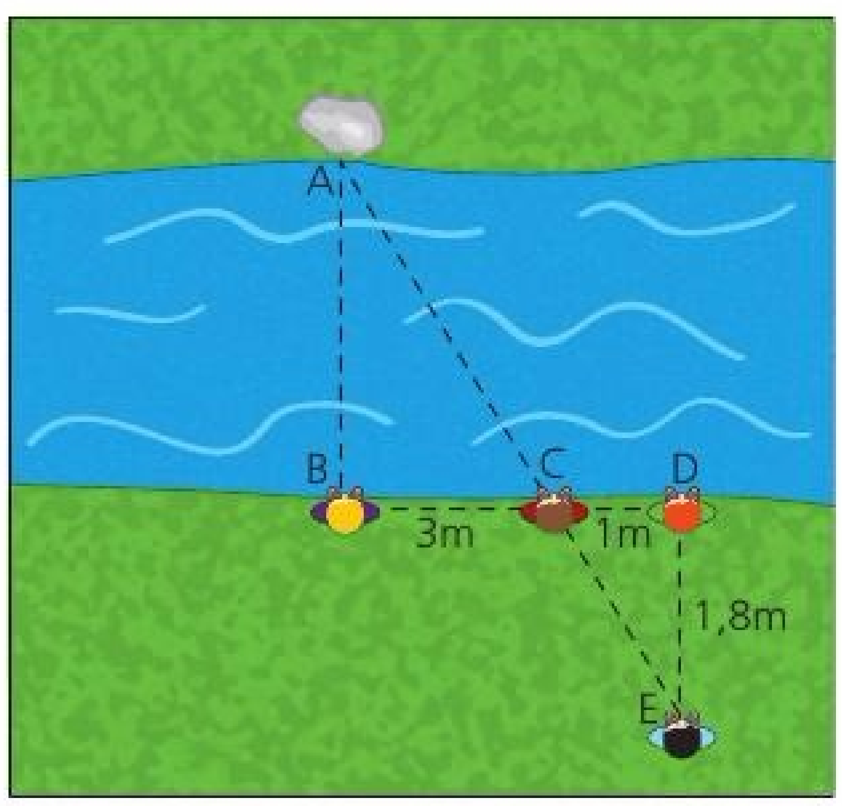
A figura é apenas um esquema ilustrativo.



33. Para medir a distância $\overline{AB}$ entre as duas margens de um rio, quatro pessoas se posicionaram nos pontos B, C, D e E e mediram as distâncias entre elas, indicadas na figura.

Determine a distância $\overline{AB}$. AB = 5,4 m

A figura é apenas um esquema ilustrativo.



Para estudar

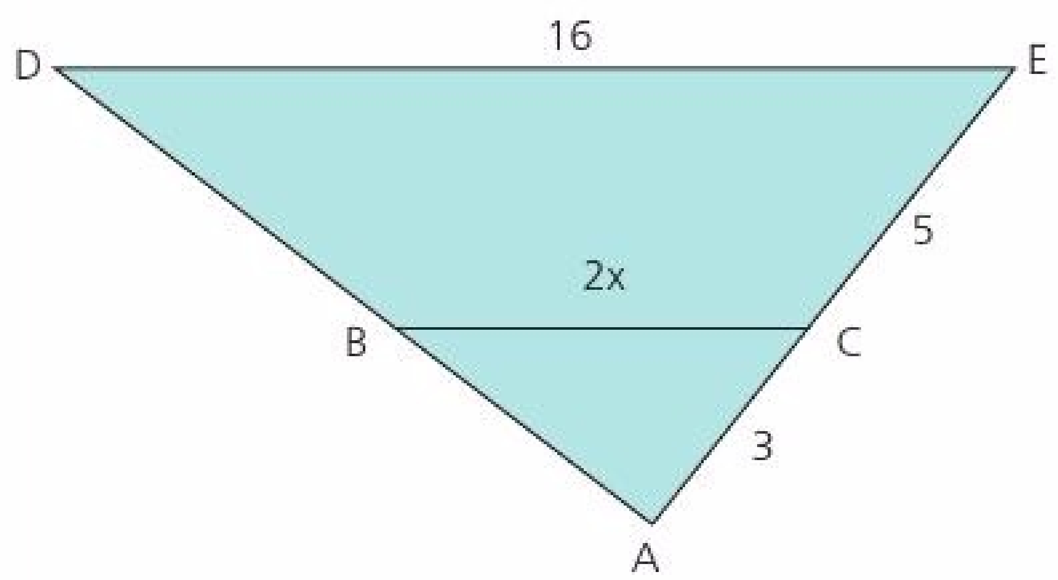
34. Em cada caso, verifique se os segmentos, na ordem apresentada, são proporcionais:

a) $\overline{AB} = 3$ cm, $\overline{CD} = 6$ cm, $\overline{EF} = 6$ cm e $\overline{GH} = 12$ cm;

b) $\overline{AB} = 1{,}5$ cm, $\overline{CD} = 7{,}5$ cm, $\overline{EF} = 1$ cm e $\overline{GH} = 5$ cm;

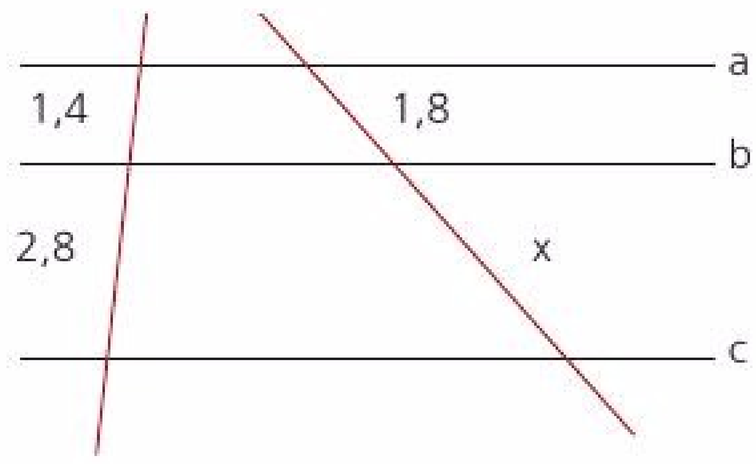
c) $\overline{AB} = 0{,}12$ cm, $\overline{CD} = 0{,}36$ cm, $\overline{EF} = 1$ cm e $\overline{GH} = 3$ cm.

35. No triângulo a seguir, os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BD}$, $\overline{AC}$ e $\overline{CE}$ são, nessa ordem, proporcionais. Calcule a medida do lado $\overline{AD}$.

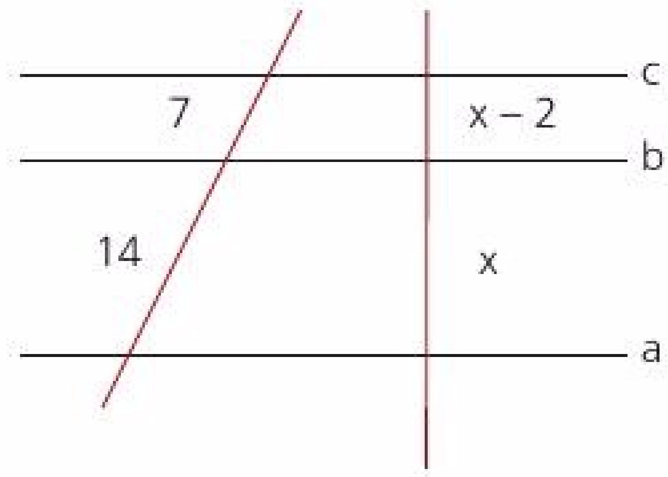


36. Calcule **x** em cada uma das figuras, sabendo que a // b // c:

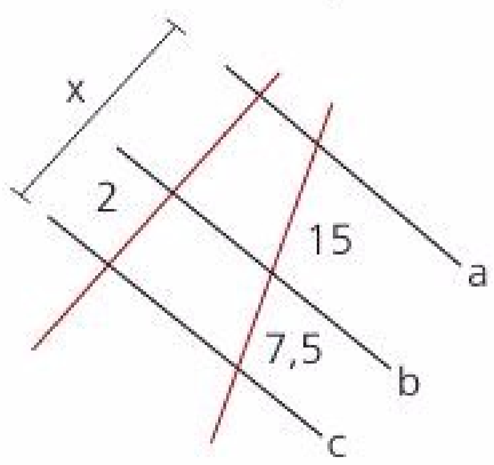
a)



b)

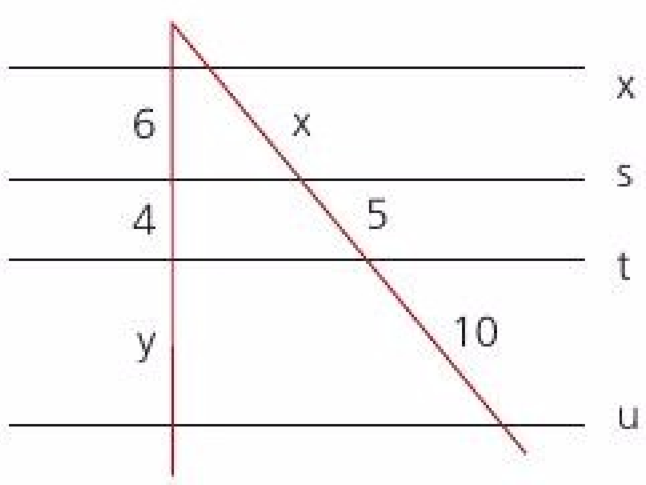


c)

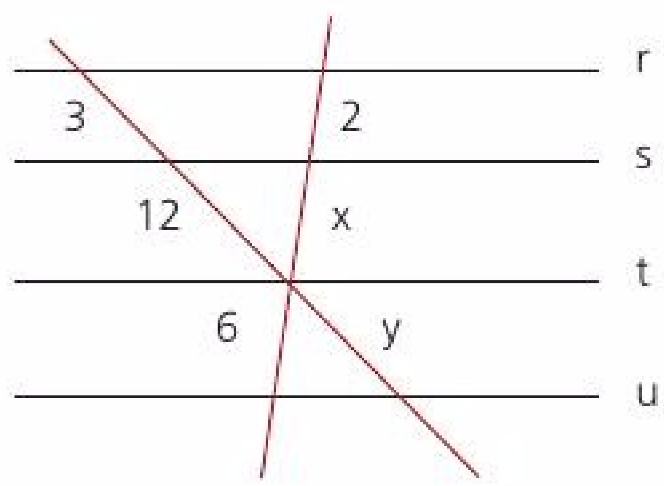


37. Sabendo-se que, nas figura r//s//t//u, determine os valores de **x** e **y** em cada figura:

a)

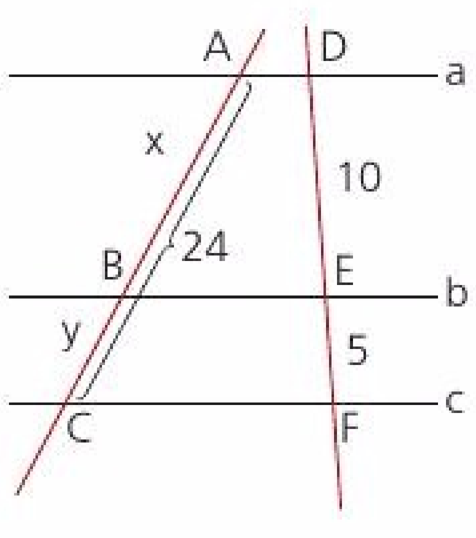


b)

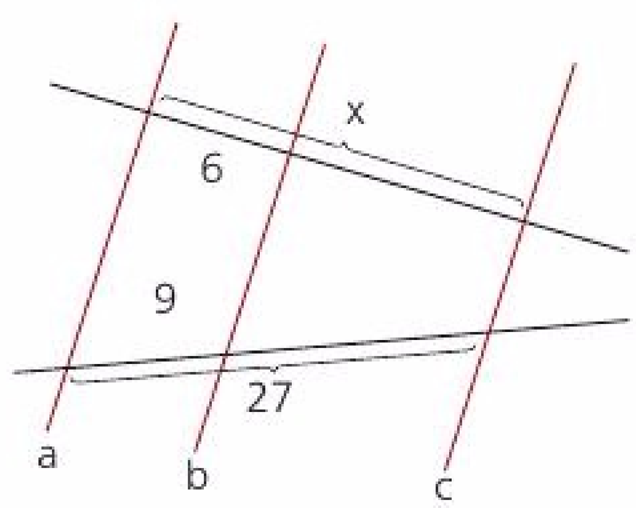


38. Nas figuras a seguir, as retas **a**, **b** e **c** são paralelas. Determine **x** e **y** em cada uma.

a)

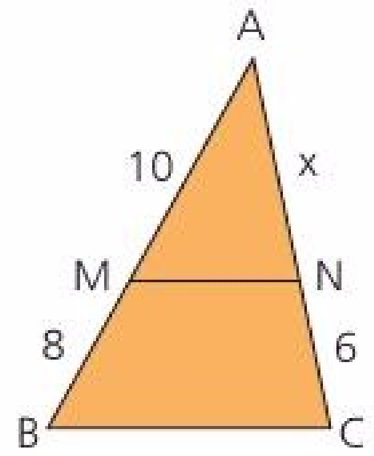


b)

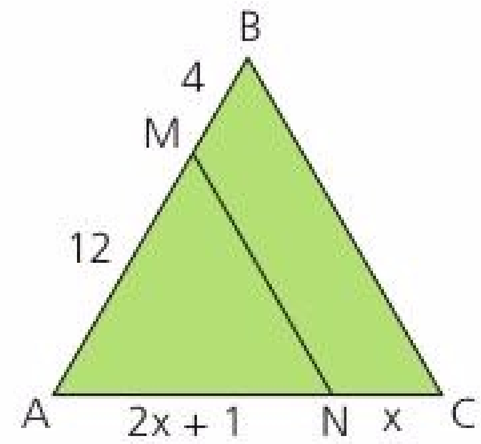


39. Em cada figura a seguir, $\overline{MN} // \overline{BC}$. Determine o valor de **x**:

a)



b)



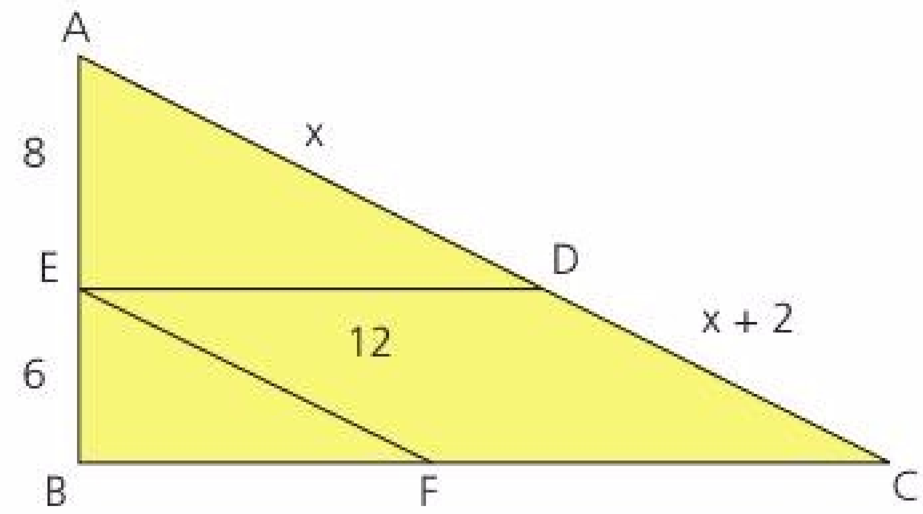
40. Na figura a seguir, o quadrilátero EDCF é um paralelogramo. Considerando todas as medidas em centímetros, determine:

a) o valor de x

b) o perímetro o paralelogramo EDCF

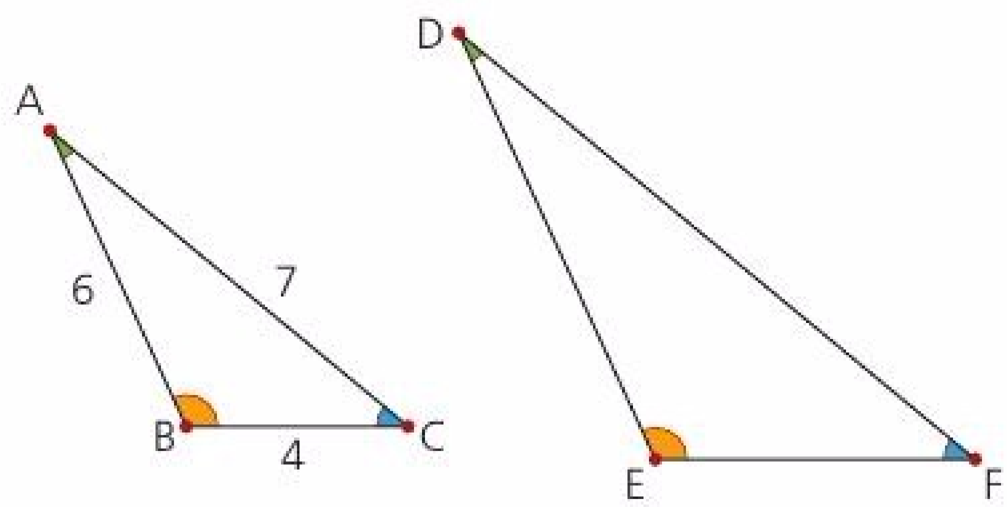
c) a medida de $\overline{BF}$

d) o perímetro do triângulo ABC



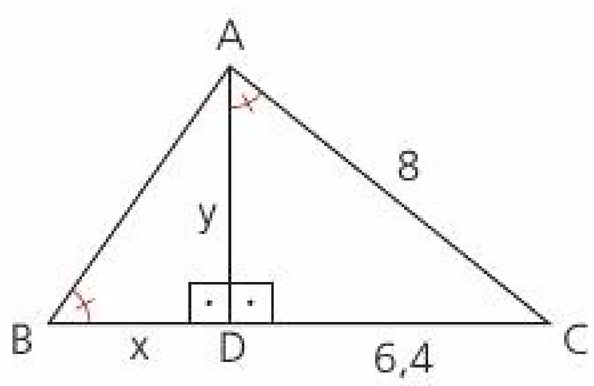
41. Os lados de um triângulo medem 6 cm, 10 cm e 12 cm. O maior lado de outro triângulo semelhante a esse mede 9 cm. Calcule a razão de semelhança entre o primeiro e o segundo triângulo.

42. Os triângulos ABC e DEF são semelhantes. Determine o perímetro do triângulo DEF, sabendo que a razão de semelhança entre ABC e DEF é 0,5.

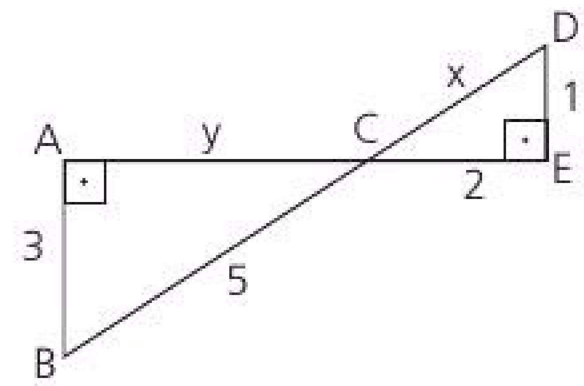


43. Identifique os triângulos semelhantes em cada caso e determine os valores de **x** e **y** indicados nas figuras.

a)



b)



Construir figuras

44. Determine a altura de uma torre, considerando que uma árvore de 4,2 m de altura, distante 14 m do pé da torre, tem uma sombra de 1,8 m enquanto, no mesmo instante, a sombra da torre é de 9 m.

45. Calcule a altura de um prédio, sabendo que sua sombra mede 34,4 m, no mesmo instante em que a sombra de um poste de 6 m de altura mede 8,6 m.

Resolução das atividades

1. $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

$\frac{\overline{EF}}{\overline{GH}} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

Sim, formam proporção.

2. a) $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$\frac{\overline{EF}}{\overline{GH}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

Sim, são proporcionais.

b) $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{2,5}{7,5} = \frac{1}{3}$

$\frac{\overline{EF}}{\overline{GH}} = \frac{1}{3}$

Sim, são proporcionais.

c) $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{18}{9} = 2$

$\frac{\overline{EF}}{\overline{GH}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

Não são proporcionais.

3. $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{1,5}{x} \rightarrow \frac{1,5}{x} = \frac{1}{2} \rightarrow x = 3$

$\frac{\overline{CD}}{\overline{DE}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

4. $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{3x}{x + 10}$

$\frac{\overline{EF}}{\overline{GH}} = \frac{9}{8} = \frac{1}{2}$

$\frac{3x}{x + 10} = \frac{1}{2} \rightarrow 6x = x + 10$

$5x = 10$

$x = 2$

5. $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{2}{1}$

$\frac{\overline{BD}}{\overline{CE}} = \frac{x}{1,5} \rightarrow \frac{x}{1,5} = \frac{2}{1} \rightarrow x = 3$

6 a) V
b) F
c) V
d) V
e) F

7. a) $\frac{2}{4} = \frac{10}{x} \rightarrow 2x = 40 \rightarrow x = 20$

b) $\frac{10}{x} = \frac{5}{2} \rightarrow 5x = 20 \rightarrow x = 4$

c) $\frac{2}{4} = \frac{x}{8} \rightarrow 4x = 16 \rightarrow x = 4$

d) $\frac{x}{8} = \frac{1,2}{6} \rightarrow 6x = 96 \rightarrow x = 1,6$

e) $\frac{\frac{9}{8}}{x} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{3}}$

$\frac{3x}{4} = \frac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{8}_{4}} \cdot \frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{3}_{1}} \rightarrow x = \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}$

$x = 1$

f) $\frac{{}^{3}\cancel{42}}{{}_{1}\cancel{14}} = \frac{x + 14}{x}$

$x + 14 = 3x$

$14 = 2x$

$x = 7$

8. a) $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{2}{1} = 2$

b) $\frac{\overline{EF}}{\overline{FG}} = \frac{6}{3} = 2$

c) Sim, são proporcionais.

d) $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{2}{3}$

$\frac{\overline{EF}}{\overline{GH}} = \frac{\cancel{6}}{\cancel{9}} = \frac{2}{3}$

Sim, são proporcionais.

e) $\frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} = \frac{3}{3} = 1$

$\frac{\overline{EG}}{\overline{GH}} = \frac{9}{9} = 1$

Sim, são proporcionais.

f) $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

$\dfrac{\overline{EF}}{\overline{FH}} = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2}$

São proporcionais.

g) $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{BC}} = \dfrac{6}{1} = 6$

$\dfrac{\overline{EH}}{\overline{FG}} = \dfrac{18}{3} = 6$

São proporcionais (teorema de Tales).

h) $\dfrac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$

$\dfrac{\overline{FH}}{\overline{EH}} = \dfrac{12}{18} = \dfrac{2}{3}$

São proporcionais (teorema de Tales).

9. a) $\dfrac{3}{{}_{1}\cancel{2}} = \dfrac{x}{\cancel{4}_{2}}$

$x = 6$

$\dfrac{2}{y} = \dfrac{\cancel{4}^{1}}{\cancel{8}_{2}}$

$Y = 4$

b) $\dfrac{\cancel{6}}{{}_{2}\cancel{12}} = \dfrac{4}{x}$

$x = 8$

$\dfrac{{}^{3}\cancel{6}}{y} = \dfrac{\cancel{4}^{\cancel{2}\,1}}{\cancel{6}_{3}}$

$y = 9$

c) $\dfrac{x}{x+4} = \dfrac{\overset{1}{\cancel{2}}}{\cancel{4}_{2}}$

$2x = x + 4$

$x = 4$

$\dfrac{{}^{2}\cancel{4}}{y} = \dfrac{\cancel{2}^{1}}{3}$

$y = 6$

d) $\dfrac{2x+1}{3} = \dfrac{3x}{5}$

$10x + 5 = 9x$

$x = -5$

e) $\dfrac{3}{y} = \dfrac{5}{12}$

$y = \dfrac{36}{5}$

$y = 7{,}2$

10. a) $\dfrac{{}^{3}\cancel{24}}{{}_{1}\cancel{8}} = \dfrac{x}{12}$

$x = 36$

$\dfrac{8}{y} = \dfrac{\cancel{12}^{1}}{\cancel{36}_{3}}$

$y = 24$

b) $\dfrac{{}^{1}\cancel{9}}{{}_{2}\cancel{18}} = \dfrac{8}{x}$

$x = 16$

$\dfrac{9}{y} = \dfrac{8}{9}$

$y = 10,\ 125$

c) $\dfrac{x}{x+2} = \dfrac{\cancel{4}^{1}}{\cancel{8}_{2}}$

$2x = x + 2$

$x = 2$

$\dfrac{{}^{1}\cancel{2}}{y} = \dfrac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{6}_{3}}$

$y = 3$

d) $\dfrac{2x+2}{2} = \dfrac{5x-1}{3}$

$6x + 6 = 10x - 2$

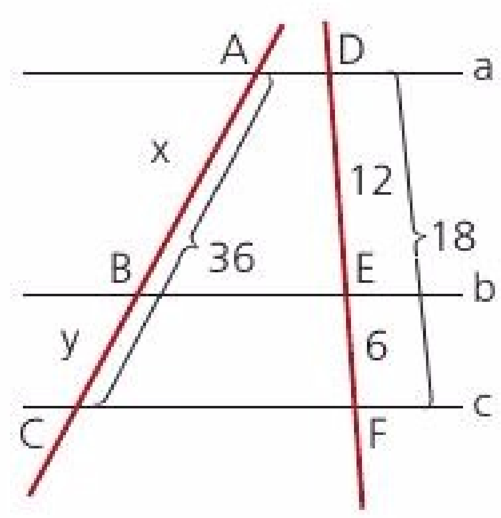
$8 = 4x$

$x = 2$

$\dfrac{2}{y} = \dfrac{3}{10{,}5}$

$y = \dfrac{21}{3} \rightarrow y = 7$

11. a)



$\frac{\cancel{18}^{1}}{12} = \frac{\cancel{36}^{2}}{x}$

$x = 24$

$\frac{\cancel{18}^{1}}{6} = \frac{\cancel{36}^{2}}{y}$

$y = 12$

b) $\frac{x}{2} = \frac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{3}_{1}}$

$x = 6$

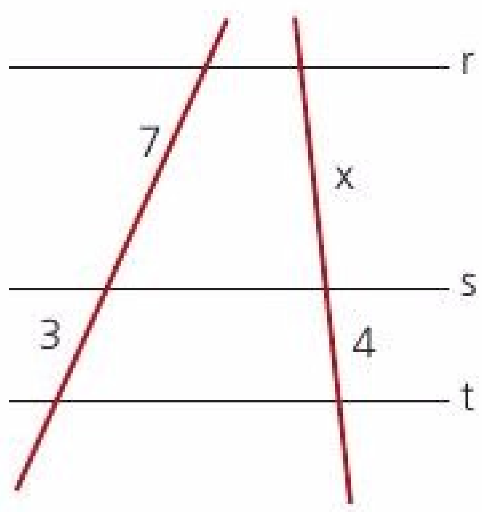
c) $\frac{12}{x} = \frac{\cancel{10}^{5}}{\cancel{6}_{3}}$

$x = 7{,}2$

$\frac{12}{y} = \frac{\cancel{10}^{5}}{\cancel{4}_{2}}$

$y = 4{,}8$

12.



r // s // t

$\frac{7}{3} = \frac{x}{4} \quad x = \frac{28}{3} \rightarrow x = 9{,}\overline{3}$ cm

13. a) $\frac{3x}{x+5} = \frac{\cancel{12}^{3}}{\cancel{8}_{2}}$

$6x = 3x + 15$

$3x = 15$

$x = 5$

b) $\overline{DC} = 10$ cm

$\overline{EF} = 10$ cm

$\overline{ED} = y$

$\overline{AD} = 15$

$\overline{AE} = 12$

$\overline{AD}^2 = \overline{ED}^2 + \overline{AE}^2$

$225 = y^2 + 144$

$y^2 = 81$

$y = 9$

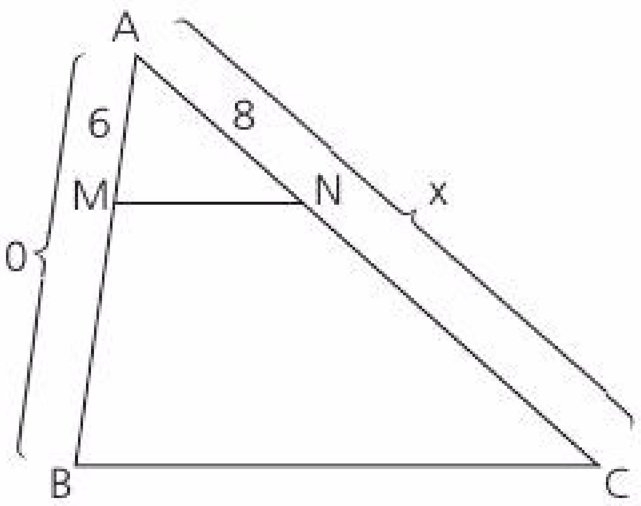
$\overline{ED} = \overline{FC} = 9$

Perimetro EDCF = 38 cm

c) BF = 6 cm

d) 2p = 60 cm

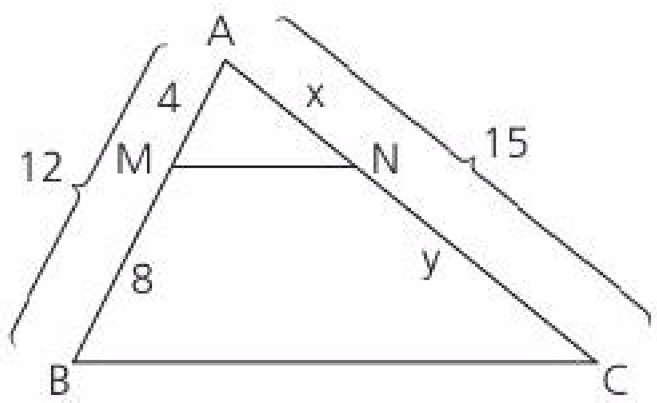
14. a)



$\frac{{}^{5}\cancel{10}}{{}^{3}\cancel{6}} = \frac{x}{8}$

$x = \frac{40}{3} \rightarrow x = 13{,}\overline{3}$

b)



$\frac{{}^{1}\cancel{4}}{{}^{1}\cancel{3}\cancel{12}} = \frac{x}{\cancel{15}_{5}}$

$x = 5$

$y = 10$

15. a) $\frac{5}{4} = \frac{x}{3}$

$x = \frac{15}{4} = 3{,}75$

b) $\frac{{}^{7}\cancel{14}}{{}^{1}\cancel{2}\cancel{4}} = \frac{3x+3}{\cancel{2}x}$

$3x + 3 = 7x$

$3 = 4x$

$x = \frac{3}{4} = 0{,}75$

c) $\frac{2{,}4}{x} = \frac{2}{1}$

$2x = 2{,}4$

$x = 1{,}2$

d) $\frac{6}{{}_1\cancel{24}} = \frac{x}{{}_2\cancel{48}}$

$x = 12$

16. $\frac{\Delta ABC}{\Delta MNP} = \frac{3}{4}$

a) Δ ABC = 0,75 Δ MNP

O Δ ABC é 0,75 vezes menor que o Δ MNP.

b) Δ MNP $5{,}\overline{3}$; 8; 10,5 centímetros

c) $\frac{3}{4}$

17. $k = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$

18. $\frac{{}^{2}\cancel{4}\cancel{36}}{{}_{1}\cancel{2}\cancel{6}\cancel{54}} = \frac{x}{\cancel{15}_5}$

x = 10 cm

19. 1º Δ ABC P = 4 + 6 + 9 = 19

$\frac{1º\ \Delta}{2º\ \Delta} = \frac{19}{76} = \frac{1}{4}$

2º Δ = 16 cm, 24 cm, 36 cm

20. $\frac{\Delta ABC}{\Delta DEF} = \frac{3}{5}$

$\frac{{}^1\cancel{3}}{5} = \frac{{}^2\cancel{6}}{\overline{DE}}$ DE = 10 cm

$\frac{3}{5} = \frac{7}{\overline{DF}}$ DF = $11{,}\overline{6}$ cm

$\frac{4}{\overline{EF}} = \frac{3}{5}$ EF = $6{,}\overline{6}$ cm

21. $\frac{100}{\cancel{12}_1} = \frac{x}{\cancel{36}_3}$

x = 300 cm

22. Construção no caderno.

23. a) LLL
b) AA
c) LAL
d) AA

24. a) AA

$3^2 = 1{,}8^2 + y^2$

$9 = 3{,}24 + y^2$

$y^2 = 5{,}76$

$y = 2{,}4$

$\frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}$

$\frac{4}{x} = \frac{3}{2{,}4} \rightarrow x = 3{,}2$

b) AA

$\frac{{}^3\cancel{15}}{{}^5\cancel{25}} = \frac{x}{12} \rightarrow x = 7{,}2$

c) AA

$\frac{5}{6} = \frac{7}{x} \rightarrow x = 8{,}4$

$\frac{5}{6} = \frac{9}{y} \rightarrow y = 10{,}8$

d) AA

$\frac{3}{9} = \frac{x}{15} \rightarrow x = 5$

$\frac{3}{9} = \frac{4}{y} \rightarrow y = 12$

e) AA

$\frac{{}^1\cancel{4}}{{}^4\cancel{16}} = \frac{x}{x+6}$

$4x = x + 6$

$x = 2$

$\frac{{}^1\cancel{4}}{{}^4\cancel{16}} = \frac{5}{y}$

$y = 20$

f) AA

$\frac{x}{9} = \frac{\cancel{4}^{\,1}}{\cancel{12}_{\,3}} \rightarrow x = 3$

$\frac{{}^1\cancel{4}}{{}^3\cancel{12}} = \frac{5}{y} \rightarrow y = 15$

25. a) $y = 12$ e $x = 6$

b) $\frac{\cancel{9}^{3}}{x} = \frac{\cancel{3}^{1}}{2} \rightarrow x = 6$

$\frac{7{,}5}{y} = \frac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{12}_{4}} \rightarrow y = 10$

c) $\frac{\cancel{12}^{4}}{x} = \frac{\cancel{9}^{\cancel{3}\,1}}{\cancel{6}_{2}} \rightarrow x = 8$

$\frac{\cancel{6}^{\cancel{2}\,1}}{\cancel{4}_{2}} = \frac{\cancel{9}^{\cancel{3}\,1}}{y} \rightarrow y = 6$

d) $\frac{\cancel{6}^{3}}{x} = \frac{\cancel{4}^{2}}{1} \rightarrow x = \frac{3}{2} = 1{,}5$

$\frac{y}{6} = \frac{4}{5} \rightarrow y = 4{,}8$

e) $\frac{\cancel{1{,}5}^{1}}{\cancel{4{,}5}_{3}} = \frac{x}{5 + x}$

$3x = 5 + x$

$2x = 5$

$x = 2{,}5$

$\frac{\cancel{1{,}5}^{1}}{\cancel{4{,}5}_{3}} = \frac{2}{2 + y}$

$6 = 2 + y$

$y = 4$

26. $\frac{\cancel{8}^{\cancel{2}\,1}}{\cancel{12}_{3}} = \frac{\cancel{6}^{3}}{x} \rightarrow x = 9$ cm

$\frac{\cancel{8}^{2}}{\cancel{12}_{\cancel{3}\,1}} = \frac{y}{\cancel{15}_{5}} \rightarrow y = 10$ cm

27. $\frac{\cancel{12}^{2}}{x} = \frac{\cancel{6}^{1}}{2} \rightarrow x = 4$ cm

$\frac{\cancel{10}^{5}}{y} = \frac{\cancel{4}^{\cancel{2}\,1}}{\cancel{6}_{3}} \rightarrow y = 15$ cm

$P_{EDCB} = 31$ cm

28. $\frac{x}{8} = \frac{\cancel{4}^{1}}{\cancel{12}_{3}} \rightarrow x = 2{,}6$

$\frac{y}{8} = \frac{\cancel{8}^{2}}{\cancel{12}_{3}} \rightarrow y = 5{,}\overline{3}$

29. $\frac{x}{\cancel{15}_3} = \frac{20 - 2x}{\cancel{20}_4}$

$4x = 60 - 6x$

$10x = 60$

$x = 6$

$A_{MNPB} = 6 \cdot 12 = 72$

30. $\frac{h}{12} = \frac{\cancel{5}^{2}}{\cancel{2,5}_{1}}$

$h = 24$ m

31. $\frac{h}{\cancel{33,6}_4} = \frac{7}{\cancel{84}_1}$

$h = 28$ m

32. $\frac{x}{4} = \frac{\cancel{120}^{20}}{\cancel{6}_{1}} \rightarrow x = 80$ m

33. $\frac{1}{1,8} = \frac{3}{AB} \rightarrow AB = 5,4$ m

Respostas da seção Para estudar

34. a) Sim.

b) Sim.

c) Sim.

35. $x = 3$

$AD = 16$

36. a) $x = 3,6$

b) $x = 4$

c) $x = 4$

37. a) $x = 7,5$ e $y = 8$

b) $x = 8$ e $y = 9$

38. a) $x = 16$ e $y = 8$

b) $x = 18$

39. a) $x = 7,5$

b) $x = 1$

40. a) $x = 10$

b) 48

c) 10

d) 68

41. $k = 1,\overline{3}$

42. 12, 8, 14

43. a) $x = 3,6$, $y = 23,04$

b) $x = \frac{5}{3}$ e $y = 6$

44. Aproximadamente 21m

45. Altura = 24m

capítulo 6

Funções

- Par Ordenado
- Funções
- Função Afim
- Função Quadrática

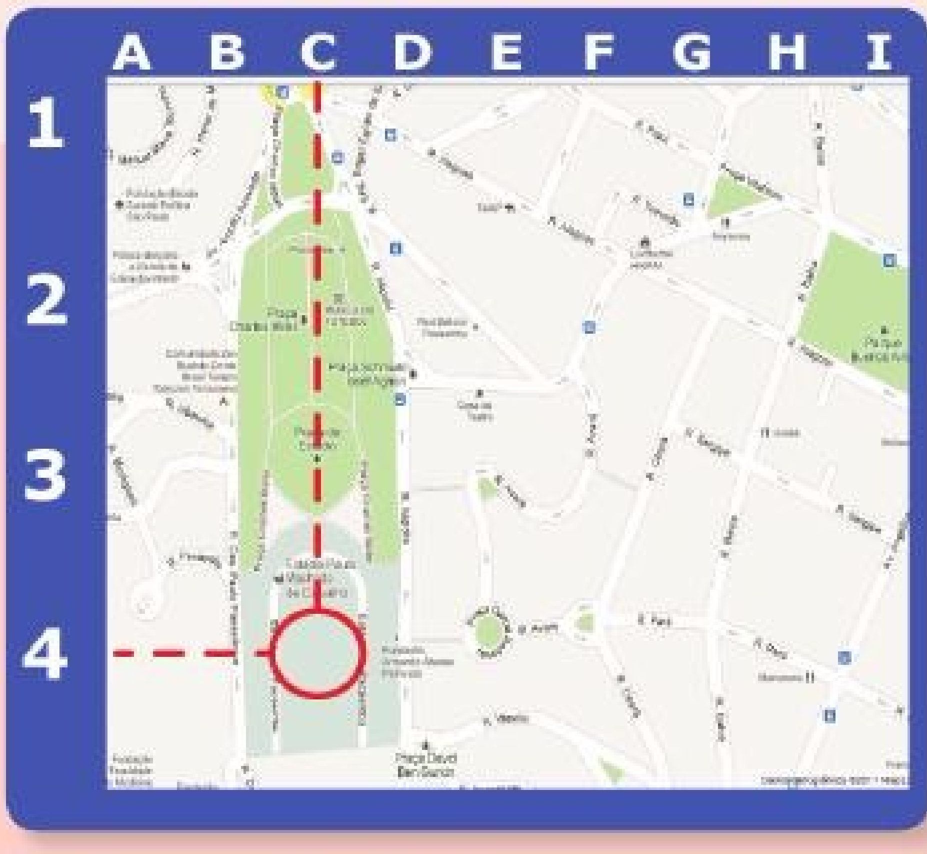
Bandit/Dreamstime

A torre de Pisa, em Pisa, na Itália, onde Galileu Galilei realizou os primeiros experimentos sobre a queda livre de um corpo.

Conversa Inicial

Antes de existirem os aparelhos GPS e os mapas que podemos encontrar na internet, era comum consultar guias de ruas. Para consultá-los utilizávamos corriqueiramente o conceito de coordenadas.

Veja, por exemplo, como um desse guias mostra o mapa da região do Pacaembu, onde se localiza o estádio Paulo Machado de Carvalho, em São Paulo. Observe que a referência do estádio é coluna C e linha 4. Ou seja, para localizarmos o estádio do Pacaembu, precisamos de duas coordenadas.



Mapa da região do Pacaembu.

MapLink/Tele Atlas

Vista de satélite da mesma região.

Essas coordenadas não passam de uma forma de localizar pontos num plano. São formadas por dois valores chamados **par ordenado**. Veja que temos duas informações, numa determinada ordem, que representam uma terceira informação, neste caso a posição do estádio. Pares ordenados são utilizados para representar pontos num gráfico e esses são utilizados para representar diversos fenômenos. Quando estabelecemos um conjunto de pares ordenados que representam um fenômeno, estamos construindo uma **função.**

Foi assim, quando Galileu Galilei relacionou o tempo de queda de uma esfera lançada da Torre de Pisa, na Itália, com a distância percorrida na queda. Mais tarde, o estudo de funções mostrou que a queda livre tem um gráfico chamado parábola.

O estudo de funções que iniciaremos agora tem como objetivo mostrar como é possível relacionar grandezas e medidas em pares ordenados e expressar essa relação em gráficos para melhor entendê-las.

Paulo Fridman/Pulsar Imagens

A ponte Juscelino Kubitschek, sobre o lago Paranoá, em Brasília, DF, é sustentada por três arcos de parábolas.

Par Ordenado

Dizemos que um par ordenado (x, y) de um ponto P é formado por um valor **x**, chamado **abscissa** de P e um por um valor **y** chamado **ordenada** de P.

Dizemos também que dois pares ordenados (x, y) e (a, b) serão iguais quando x = a e y = b.

Observe nessa definição que:

Se $x \neq y \rightarrow (x, y) \neq (y, x)$

Os pares ordenados são obtidos a partir de uma operação entre dois conjuntos denominada **produto cartesiano.** Vamos estudar essa operação.

Produto Cartesiano

O produto cartesiano de A por B (A e B, não vazios) é o conjunto formado por todos os pares ordenados (x, y) tais que $x \in A$ e $y \in B$.

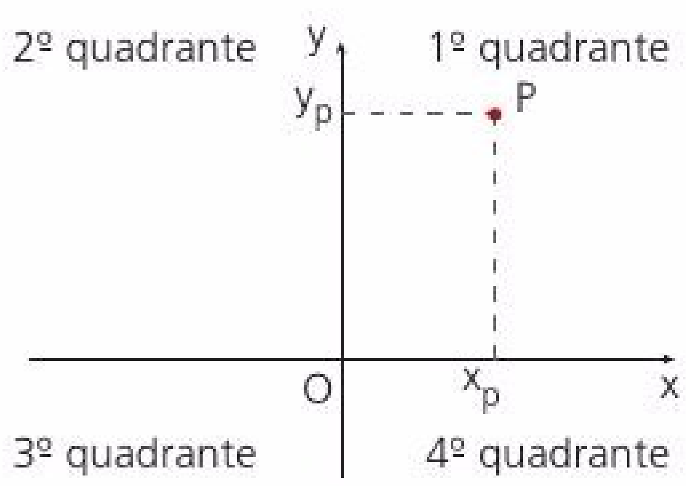
$$A \cdot B = \{(x, y) \ / \ x \in A \text{ e } y \in B\}$$

Considere, por exemplo, os conjuntos A = {0,3,7} e B = {5,1}. Para esses dois conjuntos podemos fazer:

- A · B = {(0,5); (0,1); (3,5);(3,1);(7,5);(7,1)}, nesse caso, as abscissas pertencem ao conjunto A e as ordenadas pertencem a B;
- B · A = {(5,0); (5,3); (5,7); (1,0); (1,3); (1,7)}, nesse caso as abscissas pertencem a B e as ordenadas pertencem a A.

Veja que $A \cdot B \neq B \cdot A$, pela ordem em que as coordenadas dos pares ordenados se apresentam.

Pode-se representar graficamente produto cartesiano de dois conjuntos numéricos utilizando-se o chamado **sistema cartesiano ortogonal** ou **plano cartesiano.** Este sistema é constituído por dois eixos (retas orientadas) perpendiculares, que dividem o plano em quatro quadrantes, como mostra a figura:



No plano cartesiano, convencionamos:

- O = origem = ponto de coordenadas (0,0)
- $\overleftrightarrow{Ox}$ = eixo das abscissas $\quad x_p$: abscissa de P
- $\overleftrightarrow{Oy}$ = eixo das ordenadas $\quad y_p$: ordenada de P

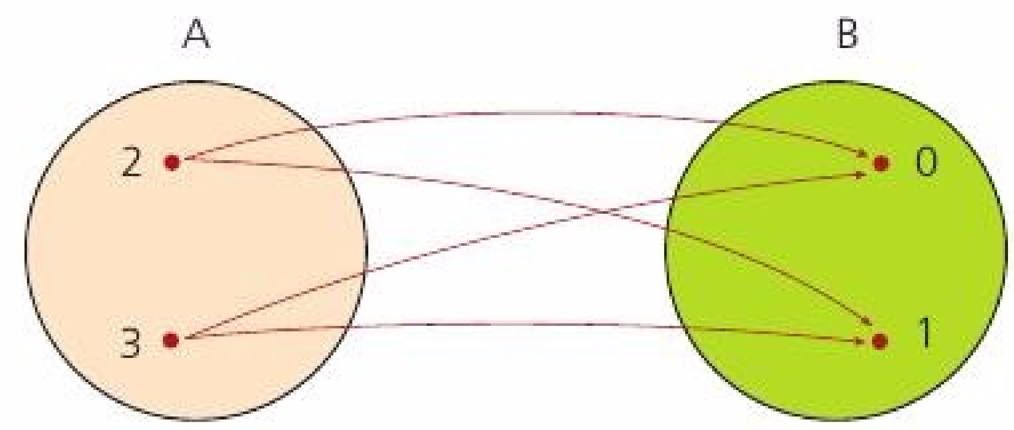
Dizemos que (x, y) é o par ordenado do ponto P relativamente ao sistema de eixos Oxy.

Acompanhe atentamente os exemplos a seguir:

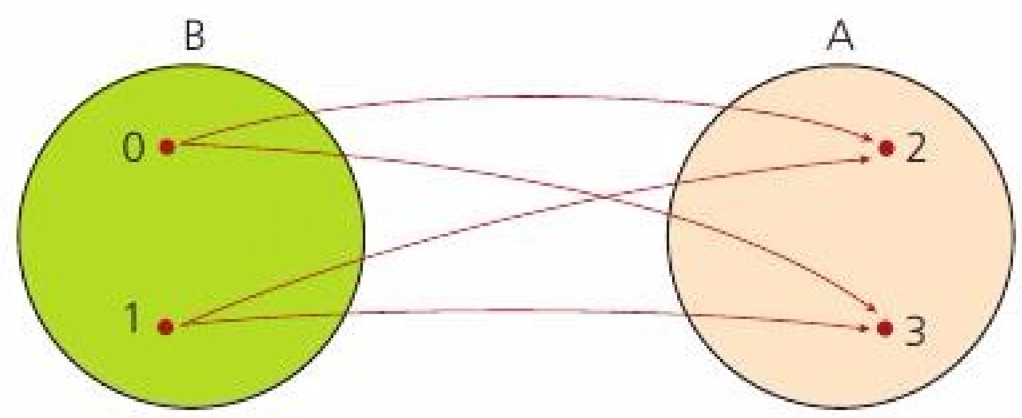
a) Vamos determinar o produto cartesiano de A por B e, depois, de B por A, sendo A = {2, 3} e B = {0, 1}.

- O produto cartesiano de A por B é o conjunto formado pelos seguintes pares ordenados:
  A · B = {(2; 0), (2; 1), (3; 0), (3; 1)}

Esses pares ordenados podem ser representados também por meio de um diagrama:



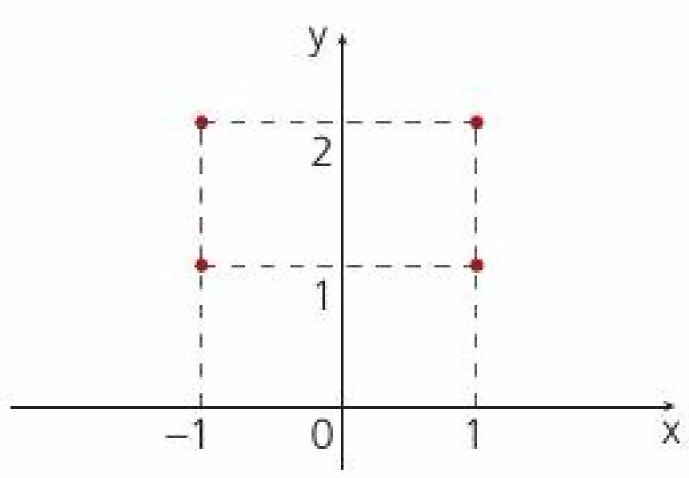
- Vamos, agora determinar B · A e representá-los por um diagrama.
  B · A = {(0; 2), (0; 3), (1; 2), (1; 3)}



Note que a representação em diagramas é feita utilizando-se setas que indicam a ordem dos elementos no par ordenado.

b) Veja como representamos o produto cartesiano de A por B no plano cartesiano, para os conjuntos A = {–1, 1} e B = {1, 2}.
   Temos: A · B = {(–1, 1), (–1, 2), (1; 1), (1; 2)}.

A representação gráfica de A · B é dada pelos quatro pontos destacados no plano cartesiano a seguir:

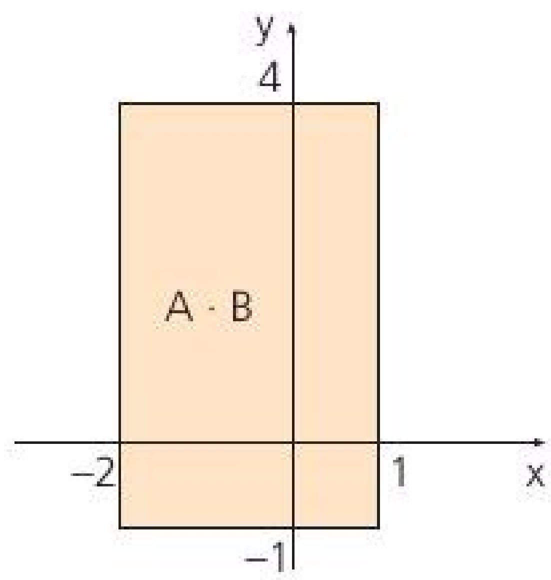


Observe que o número de elementos de $A \cdot B$ é igual ao número de elementos de A multiplicado pelo número de elementos de B, quando A e B são conjuntos finitos.

c) Se o número de elementos do produto cartesiano de dois conjuntos A e B é $n(A \cdot B) = 10$ e $A = \{1, 3\}$, vamos determinar quantos elementos tem o conjunto B:

$$n(A \cdot B) = n(A) \cdot n(B) \rightarrow 10 = 2 \cdot n(B) \rightarrow n(B) = 5$$

d) Vamos, agora, fazer o produto cartesiano de intervalos numéricos. Dados os intervalos $A = [-2, 1]$ e $B = [-1, 4]$ represente no plano cartesiano $A \cdot B$. Nesse caso, a representação gráfica de $A \cdot B$ corresponde à região assinalada, pois os dois conjuntos têm infinitos elementos.



Atividades

1. Dados os conjuntos $A = \{0, 1, -1\}$, $B = \{-2, 3\}$ e $C = \{4\}$, escreva o conjunto dos pares ordenados dos produtos:
{0, 1, –1}, B = {–2, 3}, C = {4}

a) $A \cdot B$ {(0, –2), (0, 3), (1, –2), (1, 3), (–1, –2), (–1, 3)}

b) $B \cdot A$ {(–2, 0), (–2, 1), (–2, –1), (3, 0), (3, 1), (3, –1)}

c) B^2 (considere que $B^2 = B \cdot B$)
{(–2, –2), (–2, 3), (3, –2), (3, 3)}

d) $C \cdot B$ {(4, –2), (4, 3)}

2. O número de elementos de um conjunto P é 2^p e o de um conjunto Q é 2^q. Calcule o número de elementos de $Q \cdot P$ nos seguintes casos:

a) $p = q = 3$ p = q = 3; p · q = 9

b) $p = 2$ e $q = 5$ p = 2 e q = 5; p · q = 10

3. Dados $A = [2; 4]$ e $B = [1; 4]$, represente no plano cartesiano os produtos indicados:

a) $A \cdot B$ {(2, 1), (2, 4); (4, 1), (4, 4)}

b) $B \cdot A$ {(1, 2), (1, 4), (4, 2), (4, 4)}

c) $A \cdot A$ {(2, 2), (2, 4), (4, 2), (4, 4)}

d) $B \cdot B$ {(1, 1), (1, 4), (4, 1), (4, 4)}

4. Considere os conjuntos:

$C = \{c \in R \mid c \geq 0\}$

e

$D = \{d \in R \mid d \leq 3\}$.

Represente no plano cartesiano:

a) $C \cdot D$ C · D = {(0, 3), (0, 2), (0, 1), (0, 0), (1, 3), (1, 2), (1, 1), (1, 0), (2, 3), (2, 2), (2, 1), (2, 0), (3, 3), (3, 2), (3, 1), (3, 0)}

b) $D \cdot C$ D · C = {(3, 0), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (2, 0), (2, 1), (2, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3)}

Funções

Antes de formularmos o conceito de **função**, é interessante que você observe que ele está presente em nosso cotidiano. É comum, por exemplo, encontrarmos numa papelaria que fornece cópias, tabelas que relacionam a quantidade de cópias com o preço a ser cobrado.

Número de cópias em A4	Preço (R$)
1	R$ 0,25
2	R$ 0,50
3	R$ 0,75
4	R$ 1,00

Observe que nessa tabela existe uma correspondência entre a quantidade de cópias e o preço. Conhecido o preço de uma cópia, podemos calcular o número de cópias que desejarmos

Número de cópias em A4	Preço (R$)
1	$1 \cdot 0{,}25 = 0{,}25$
2	$2 \cdot 0{,}25 = 0{,}50$
8	$8 \cdot 0{,}25 = 2{,}00$

Podemos também representar esses valores no plano cartesiano.

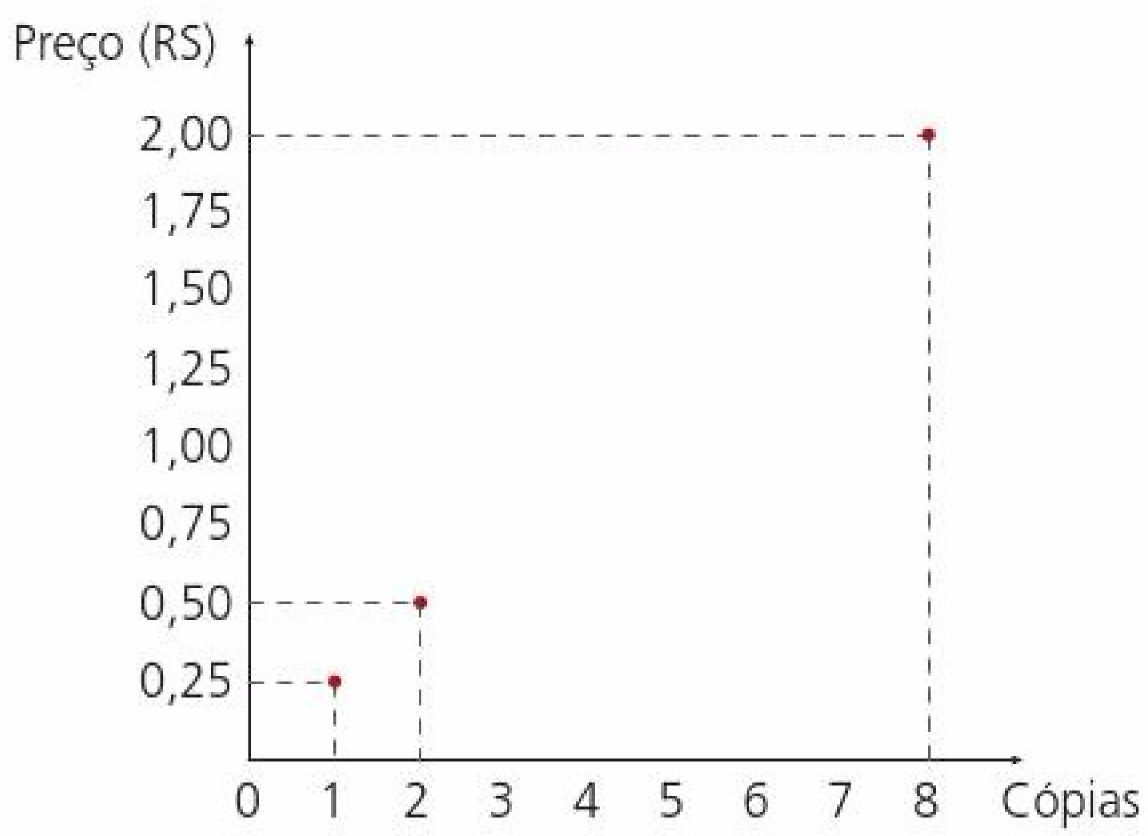


Gráfico de preços pelo número de cópias

E se quisermos saber o preço de **n** cópias? Da mesma forma como procedemos para encontrar 1, 2 e 8 cópias, multiplicamos **n** por 0,25.

Indicando o preço pela letra P, temos:

$$P = 0{,}25 \cdot n$$

Essa é uma fórmula que relaciona a quantidade de cópias **n** com seu preço P. Dizemos que P, o preço, é uma função de **n**, do número de cópias.

Podemos determinar também o número de cópias a partir de um valor cobrado. Se o valor cobrado foi de R$ 12, 75, quantas cópias foram cobradas?

$$\mathbf{n \cdot 0{,}25 = 12{,}75}$$

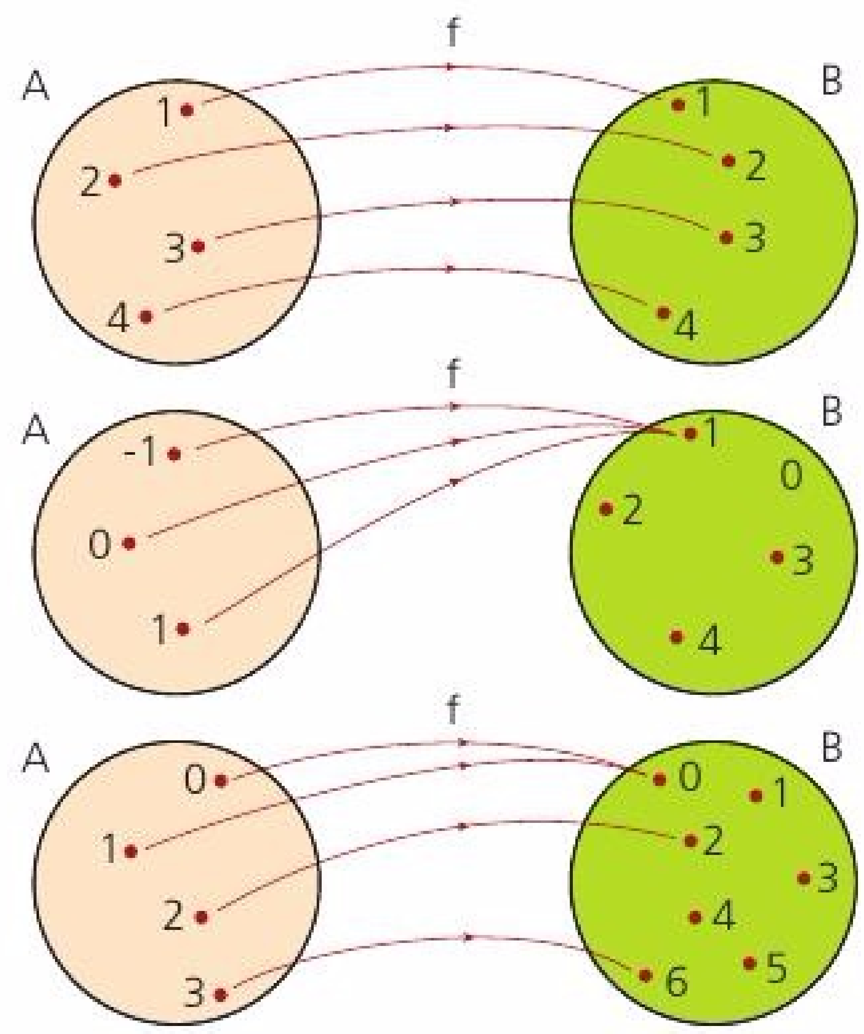
Resolvendo essa equação: $n = \dfrac{12{,}75}{0{,}25} = 51$

Foram feitas 51 cópias.

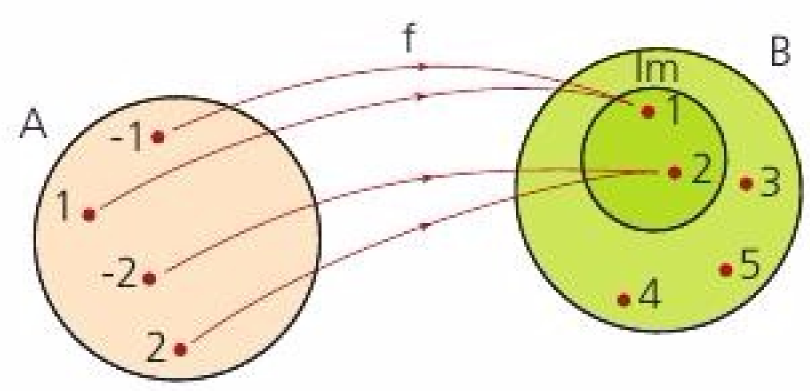
Agora, vamos estudar o conceito de função.

Dados os conjuntos A e B, uma função f: A → B (lê-se "uma função de A em B") é uma lei, regra (ou conjunto de instruções) que diz como associar a cada elemento $x \in A$, denominado **variável** da função, um único elemento $y = f(x) \in B$. O conjunto A chama-se **domínio** e B é o **contradomínio** da função f.

Veja alguns exemplos de representação de funções de A em B em diagramas:



Observe que em cada diagrama todos os elementos de A tem um único correspondente em B.



O conjunto formado pelos correspondentes de A em B é chamado de **conjunto imagem (Im)**. Nesse caso, representamos os conjuntos Domínio (D), Contradomínio (CD) e Imagem (Im) da seguinte forma:

$$D = \{-2, -1, 1, 2\}$$
$$CD = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$Im = \{1, 2\}$$

Gráfico de uma função

O gráfico de uma função f: A → B é o subconjunto G do produto cartesiano A · B formado por todos os pares ordenados (x, y), em que **x** é um ponto qualquer do conjunto A e **y** = f(x) um ponto do conjunto B.

Veja como representamos o conjunto G de forma simbólica:

$$\mathbf{G = \{(x, y) \in A \cdot B \mid y = f(x)\}}$$

Para construir gráficos de funções definidas por leis y = f(x), montamos uma tabela a partir de alguns valores **x** do domínio, obtendo **y** através da fórmula da função. A cada par (x, y) associamos um ponto no plano cartesiano. O conjunto de todos os pontos (x, y) será o gráfico de f(x). O domínio será representado no eixo **x**, também chamado de eixo das abscissas e o contradomínio, no eixo **y**, chamado de eixo das ordenadas.

Acompanhe atentamente os exemplos a seguir:

a) Dados os conjuntos A = {0, 1, 2}, B = {0, 1, 2, 3, 4, 5} e a função f: A → B definida pela lei f = {(x, y) ∈ A · B / y = 2x + 1} vamos obter os pares ordenados de **f**, o domínio, o conjunto imagem, e representar a função na forma de diagrama e no plano cartesiano. Iniciamos pela construção da tabela que relaciona x e y = 2x + 1:

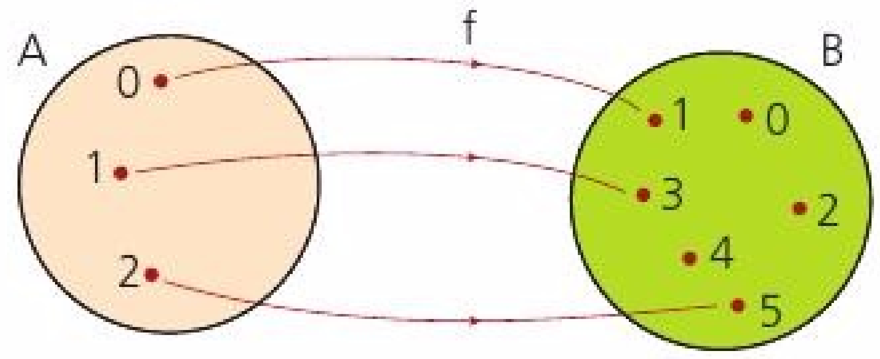
$x \in A$	$y \in B$ e $y = 2x + 1$
0	$y = 2 \cdot 0 + 1 = 1$
1	$y = 2 \cdot 1 + 1 = 3$
2	$y = 2 \cdot 2 + 1 = 5$

Observe na tabela que os pares ordenados de f são (0;1); (1;3) e (2;5)

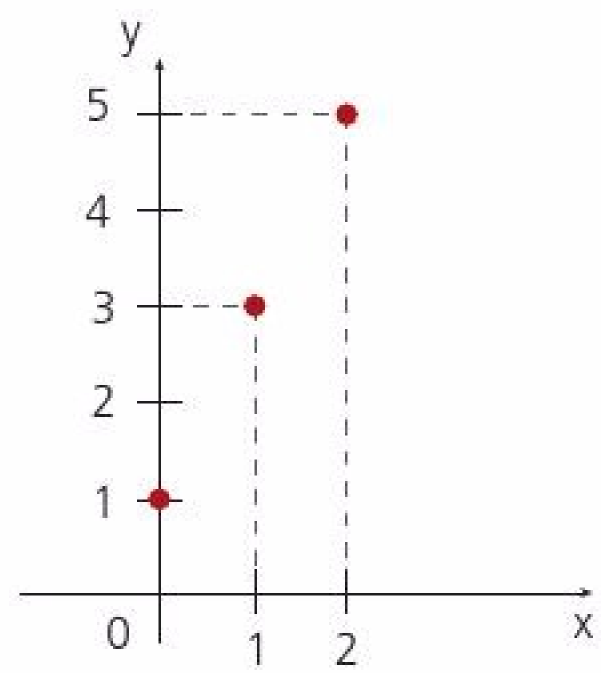
Como o domínio é formado pelos primeiros elementos dos pares e a imagem pelos segundos elementos, teremos:

$$D = \{0, 1, 2\} \text{ e } Im = \{1, 3, 5\}.$$

Conhecendo-se os pares ordenados, podemos representar a função em um diagrama e também no plano cartesiano.



Representação da função em diagrama.



Representação da função no plano cartesiano.

b) Dizemos que uma função é de variável real quando seu domínio e seu contradomínio é o conjunto dos números reais. Seja, por exemplo, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, uma função de variável real, definida pela lei $f(x) = x^2 - 3x$.

Para essa função, podemos determinar, por exemplo, a imagem de –2 substituindo **x** por –2 na lei da função e, em seguida efetuando os cálculos.

$$f(-2) = (-2)^2 - 3(-2) = 10$$

Da mesma forma, se substituirmos **x** por 0, obteremos f(0), que é a imagem de zero.

$$f(0) = 0^2 - 3(0) = 0$$

c) Neste exemplo, vamos obter o valor da variável **x**, conhecendo-se sua imagem. Seja a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida pela lei $f(x) = 3x + 4$. Qual o valor de **x** cuja imagem é zero?

Para encontrar o elemento do domínio que tem imagem igual a zero igualamos a função a zero.

$$f(x) = 0$$

$$3x + 4 = 0 \to 3x = -4$$

$$x = -\frac{4}{3}$$

Logo, para $x = -\frac{4}{3}$ temos $f\left(-\frac{4}{3}\right) = 0$.

Dizemos que, nesse caso, resolvemos uma equação. Por essa razão, quando temos um elemento do domínio cuja imagem é zero, ele é chamado de **raíz da função,** pois, para encontrá-lo, resolvemos a equação f(x) = 0.

d) Considere, agora, a função f: A → B, em que A = {–2, –1, 1, 2} e B = {–1, 0, 1, 2, 3, 4} e f(x) = x + 1. Vamos construir seu gráfico.

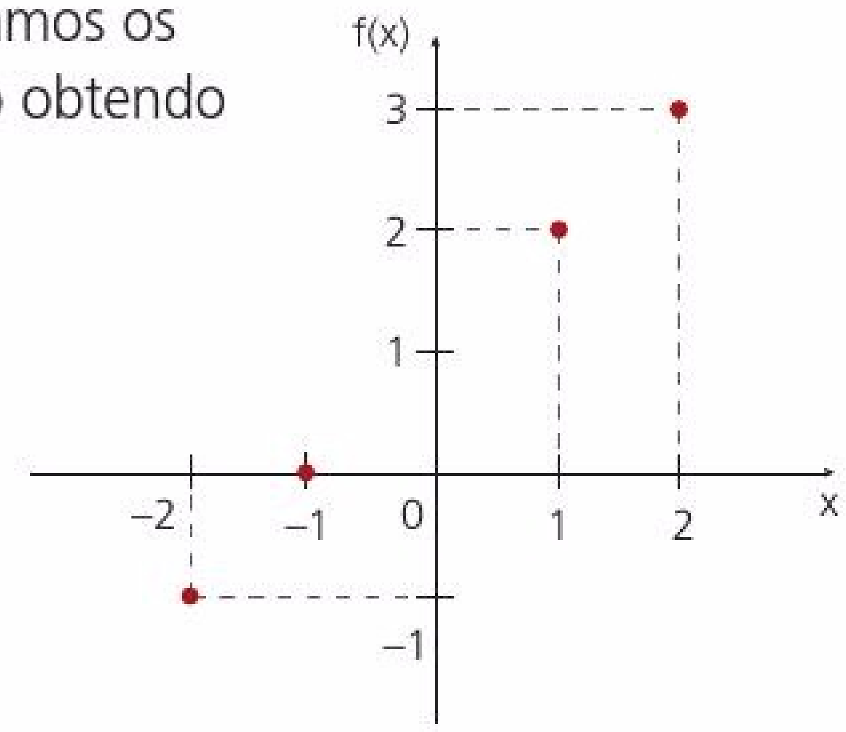
Inicialmente organizamos uma tabela em que substituímos **x** por –2, –1, 1 e 2, efetuamos o cálculo e obtemos y = f(x):

x	f(x) = x + 1
–2	–2 + 1 = –1
–1	–1 + 1 = 0
1	1 + 1 = 2
2	2 + 1 = 3

→

x	f(x)
–2	–1
–1	0
1	2
2	3

Em seguida, representamos os pares ordenados no plano obtendo assim o gráfico:



e) Vamos agora esboçar o gráfico de uma função de variável real. Seja a função f: R → R, por y = –2x + 1.

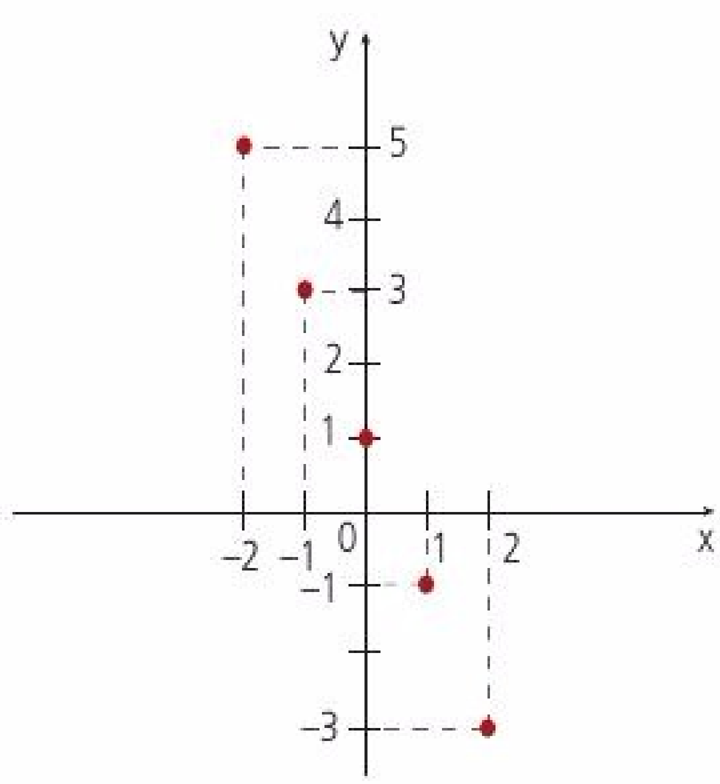
Para organizar a tabela de valores escolhemos alguns valores, já que o domínio é o conjunto infinito dos números reais. Depois efetuamos os cálculos e obtemos **y**.

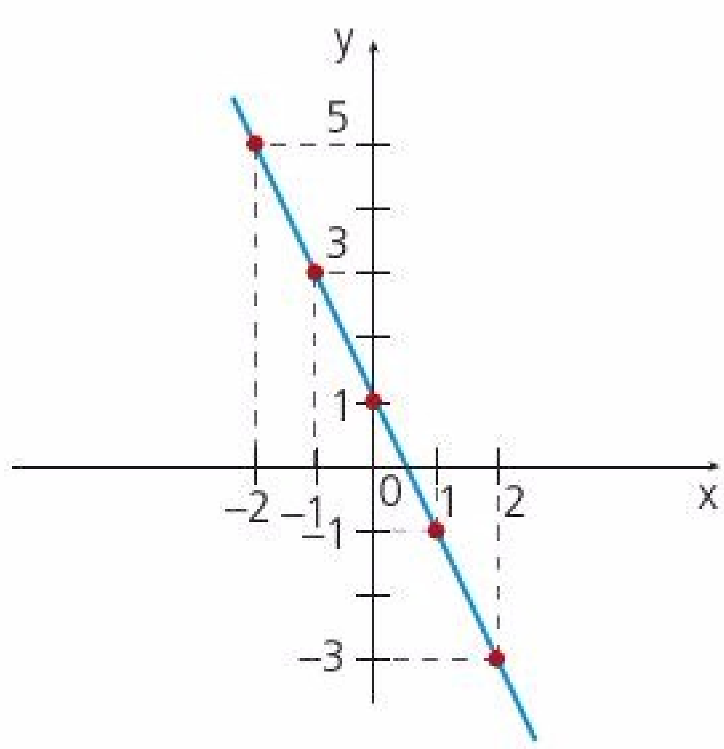
x	y = –2x + 1
–2	–2 × (–2) + 1 = 5
–1	–2 × (–1) + 1 = 3
0	–2 × 0 + 1 = 1
1	–2 × 1 + 1 = –1
2	–2 × 2 + 1 = –3

→

x	y = f(x)
–2	5
–1	3
0	1
1	–1
2	–3

Representamos esses pares ordenados no plano.





A tabela mostra que os pontos (–2, 5), (–1, 3), (0, 1), (1, –1) e (2, –3) que pertencem ao gráfico são alinhados, isto é, pertencem todos a uma mesma reta. Como a função é de variável real, podemos traçar a reta que passa pelos pontos.

É possível demonstrar que esses estão na mesma reta, isto é, que o gráfico dessa função é uma reta. Veremos mais adiante que isso sempre irá ocorrer para funções de variáveis reais do tipo $y = f(x) = ax + b$.

Atividades

5. Seja $f: R \to R$ uma função definida pela lei $f(x) = x^2 - x + 1$. Determine:

a) $f(0)$ $f(0) = 1$ b) $f\left(\frac{1}{2}\right)$ $\frac{7}{4}$ c) $f(\sqrt{2})$ $3 - \sqrt{2}$

6. Determine o conjunto imagem da função $f: A \to B$, sendo $A = \{-2, 0, 2\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e $f(x) = x^2$.
$Im = \{0, 4\}$

7. Dados os conjuntos $A = \{x \in Z \mid -3 \leq x \leq 2\}$ e $B = \{x \in Z \mid -5 \leq x \leq 5\}$, determine o conjunto imagem das funções $f: A \to B$ definidas pelas leis:

a) $y = f(x) = x$ $Im = \{x \in Z / -3 \leq x \leq 2\}$ b) $y = f(x) = 2x + 1$ $Im = \{(-3, -5), (-2, -3), (-1, -1), (0, 1), (1, 3), (2, 5)\}$

8. Sabendo que $f: R \to R$ é definida por $f(x) = 2x - 8$, determine quais elementos do domínio têm as seguintes imagens:

a) -2 $x = 3$ b) $\frac{2}{5}$ $\frac{21}{5}$

9. Construa o gráfico das seguintes funções: $f : R \to R$

a) $f(x) = x + 2$ c) $f(x) = 2x + 2$

b) $f(x) = x - 2$ d) $f(x) = 2x + \frac{1}{2}$

Construções no caderno.

10. Um pesquisador descobriu que a população de peixes de um lago $f(x)$ variava em função dos **x** meses do ano, segundo a lei $f(x) = -10x^2 + 100x + p$, em que p representa a população dos peixes no início do ano.

a) Se em janeiro de 2011 a população inicial de peixes era $p = 2000$, qual seria a população do lago em abril ($x = 4$) e junho ($x = 6$) desse ano? 2240

b) Em que mês de 2011 a população atingiria 2210 peixes? março e julho

Determinação do domínio de uma função

O domínio de uma função de variável real pode ser determinado verificando-se quais são os valores que a variável real pode assumir na fórmula da função. Por essa razão, o domínio de uma função é também chamado **domínio de validade** ou de **existência da função**. Observe nos exemplos como podemos determinar o domínio de uma função.

a) $f(x) = 2x + 1$
Nesse caso, qualquer $x \in R$ pode ser operado por $f(x) = 2x + 1$, existindo, assim, uma imagem correspondente.
Logo, $D = R$.

b) $f(x) = \dfrac{1}{x - 2}$

Em $f(x) = \dfrac{1}{x - 2}$, o domínio da função é obtido impondo-se a condição de existência da fração, ou seja o denominador deve ser diferente de zero. Assim:

$$x - 2 \neq 0, \text{ portanto } x \neq 2$$

Logo $D = \{x \in R \;/\; x \neq 2\}$

c) $f(x) = \sqrt{x + 1}$

O domínio de $f(x) = \sqrt{x + 1}$ é obtido impondo-se a condição de existência do radical, ou seja, o radicando deve ser maior que zero ou igual a zero. Podemos, então, escrever:

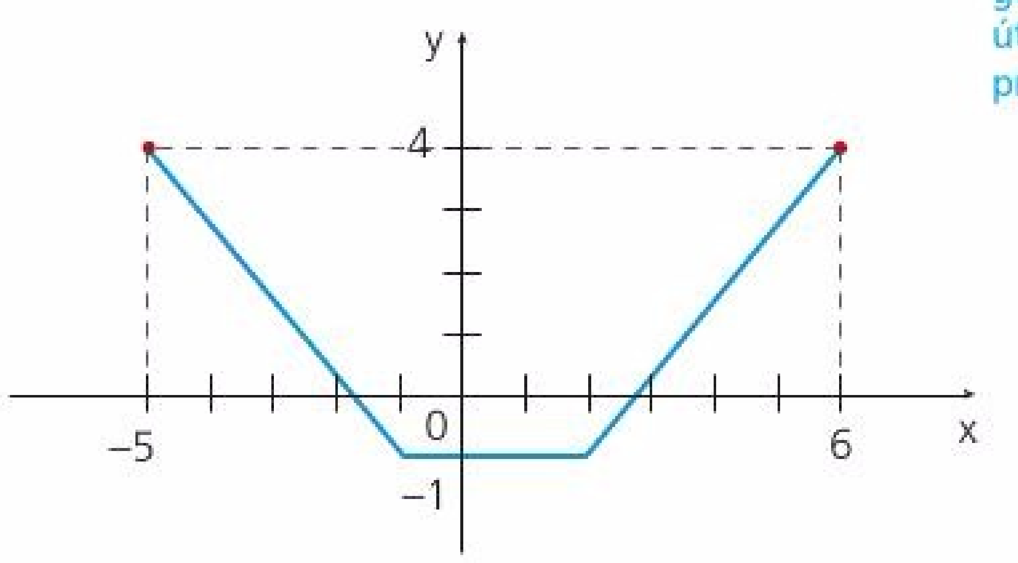
$$x + 1 \geq 0, \text{ portanto, } x \geq -1$$

Logo, $D = \{x \in R \;/\; x \geq -1\}$

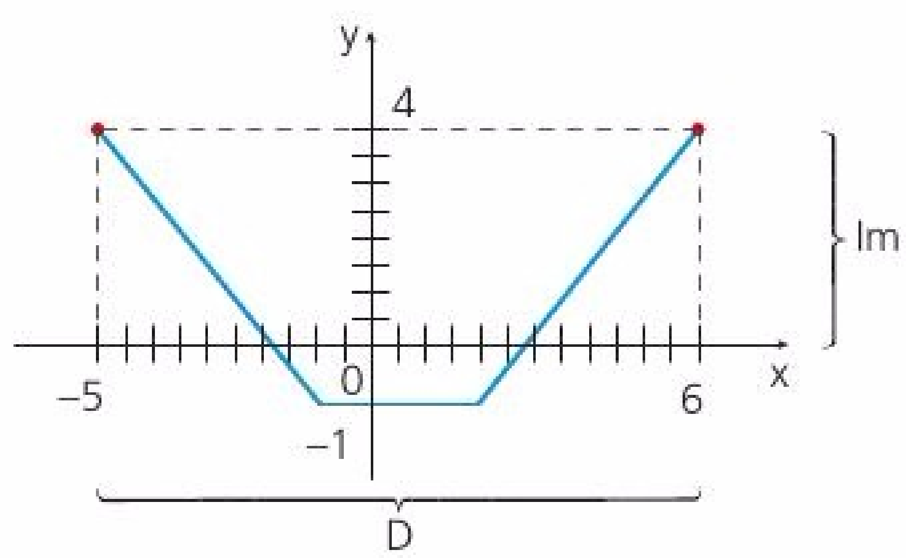
Também é possível determinar o domínio e a imagem de uma função a partir de seu gráfico. Observe o exemplos.

Considere uma função que tem o seguinte gráfico:

Professor: Enfatize o uso das projeções, pois, em geral, elas não são triviais para os alunos, e são úteis para que eles enxerguem os sinais das funções, principalmente quando forem estudar as inequações.



Para obtermos o domínio e a imagem a partir do gráfico, projeta-se a curva nos eixos $\overleftrightarrow{Ox}$ e $\overleftrightarrow{Oy}$, respectivamente.



O domínio será dado pela projeção no eixo Ox e a Imagem no eixo Oy:

$$D = \{x \in R \;/\; -5 \leq x \leq 6\}$$
$$Im = \{y \in R \;/\; -1 \leq y \leq 4\}$$

Atividades

11. Determine o domínio de cada uma das seguintes funções de variáveis reais:

a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$ Dm = $x \in R$

b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ D = $\{x \in R / x \geq 0\}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ D = $\{x \in R / x \neq 0\}$

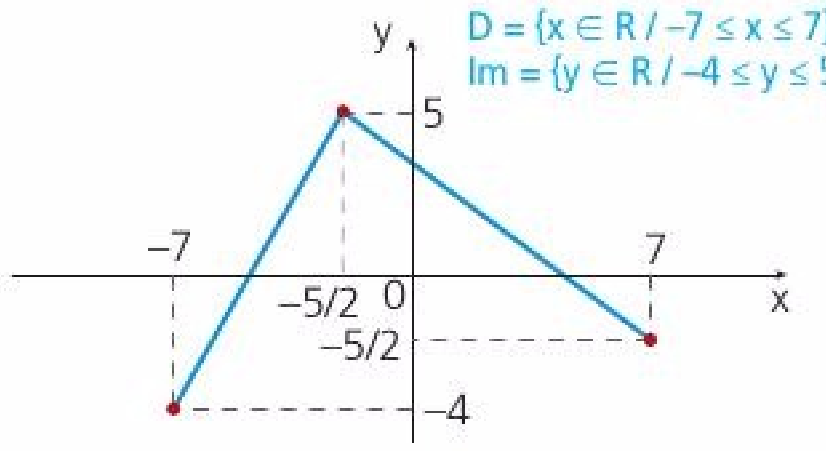
d) $f(x) = \dfrac{1}{x - 3}$ D = $\{x \in R / x \neq 3\}$

e) $f(x) = \sqrt{2x - 7}$ D = $\{x \in R / x \geq \frac{7}{2}\}$

f) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{4 - x}}$ D = $\{x \in R / x < 4\}$

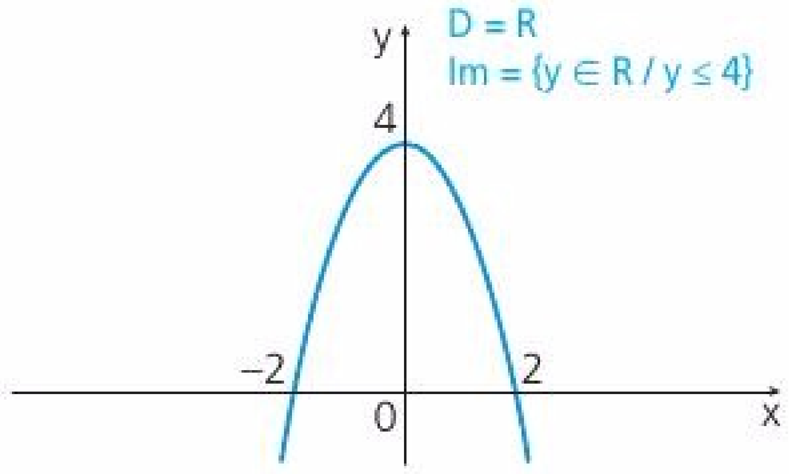
12. Qual é o domínio e a imagem de cada uma das funções representadas pelos gráficos?

a)



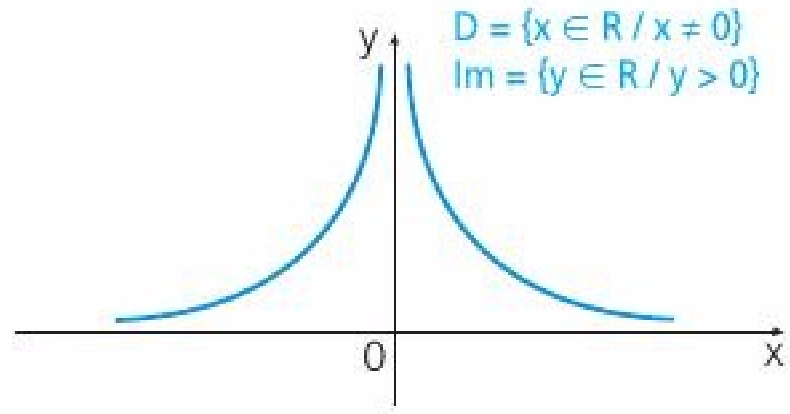
D = $\{x \in R / -7 \leq x \leq 7\}$
Im = $\{y \in R / -4 \leq y \leq 5\}$

b)



D = R
Im = $\{y \in R / y \leq 4\}$

c)



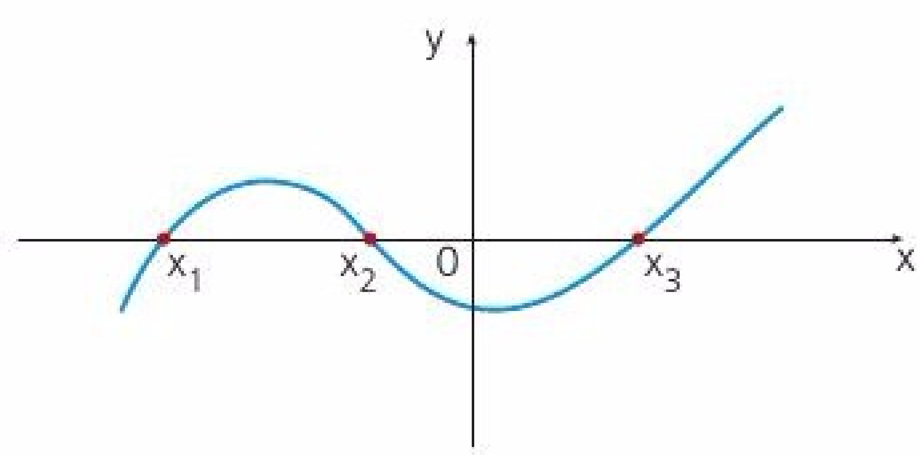
D = $\{x \in R / x \neq 0\}$
Im = $\{y \in R / y > 0\}$

Zeros ou raízes de uma função

Denomina-se zero ou raiz de uma função todo valor de $x \in D$ tal que $f(x) = 0$.

Isso equivale a dizer que os zeros de uma função são os valores de **x** para os quais $y = 0$. Por essa razão, os zeros ou raízes da função são os pontos em que seu gráfico cruza o eixo $\overleftrightarrow{Ox}$.

Suponha, por exemplo, o gráfico de $y = f(x)$ a seguir:



$$\left.\begin{array}{l} f(x_1) = 0 \\ f(x_2) = 0 \\ f(x_3) = 0 \end{array}\right\} \rightarrow x_1,\ x_2 \text{ e } x_3 \text{ são os zeros da função ou as raízes da equação } f(x) = 0.$$

Para calcular os zeros ou raízes, deve-se igualar a função a zero e resolver a equação obtida. Veja outros exemplos de obtenção dos zeros de uma função:

a) $\mathbf{f(x) = 2x + 4}$

$2x + 4 = 0 \rightarrow x = -2$

b) $\mathbf{f(x) = x^2 - 3x + 2}$

$x^2 - 3x + 2 = 0$

Calculamos inicialmente $\Delta = b^2 - 4ac$. Assim, temos:

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1$

Depois, obtemos $x = \dfrac{-(-3) \pm 1}{2}$, ou seja:

$$x = \frac{3 + 1}{2} = 2 \text{ ou } x = \frac{3 - 1}{2} = 1$$

Logo, os zeros da função são 2 e 1, o que equivale a dizer que seu gráfico cruzará o eixo Ox em dois pontos.

c) $\mathbf{f(x) = \sqrt{x + 1} - 4}$

Temos aqui uma equação irracional. Lembre-se de que resolvemos esse tipo de equação elevando-se ao quadrado ambos os membros:

$(\sqrt{x + 1})^2 = 42 \rightarrow x + 1 = 16 \rightarrow x = 15$

É necessário verificar se a solução x = 15 satisfaz a condição de existência do radical. Para tanto, substituímos esse valor na função:

$f(15) = \sqrt{15 + 1} - 4$

$f(15) = \sqrt{16} - 4 = 4 - 4 = 0$

Como está verificada a condição de existência, 15 é o zero da função.

d) Dada a função **f(x) = 2x + k**, vamos determinar o valor de **k** para que – 3 seja o zero da função.

Como – 3 é o zero da função podemos escrever a seguinte equação:

$f(-3) = 0 \rightarrow 2 \cdot (-3) + k = 0 \rightarrow k = 6$

Atividades

13. Determine os zeros das funções de variáveis reais:

a) $f(x) = 2x - 6$ $x = 3$

b) $f(x) = 3x + 12$ $x = -4$

c) $f(x) = x^2 - 4x - 5$ $x_1 = 5$ e $x_2 = -1$

d) $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$ $x_1 = -\frac{1}{2}$ e $x_2 = -1$

14. Obtenha os zeros das funções de variáveis reais:

a) $f(x) = \sqrt{3x + 1} - 5$ $x = 8$

b) $f(x) = \sqrt{2x + 1} - \sqrt{x + 4}$ $x = 3$

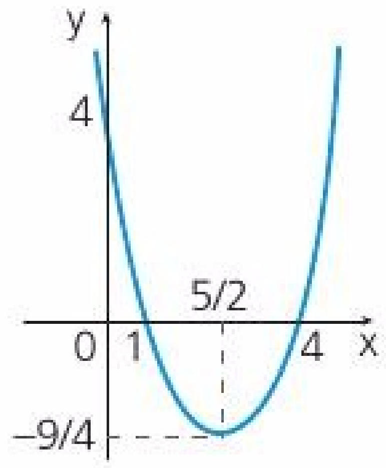
15. Calcule **m** para que o valor indicado de **x** seja o zero da função **f**:

a) $x = 1$ e $f(x) = m^2x - 9 = 0$ $m = \pm 3$

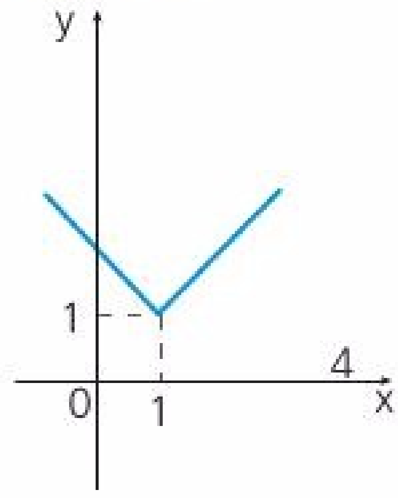
b) $x = 3$ e $f(x) = \dfrac{mx + 3}{x + 1} = 0$ $m = -1$

16. A partir dos gráficos, indique, se existirem, os zeros das funções:

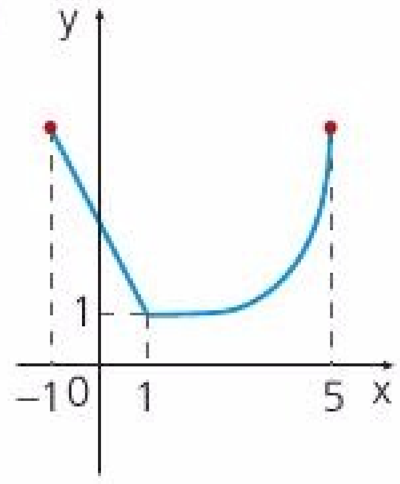
a) $x = 1$ e $x = 4$



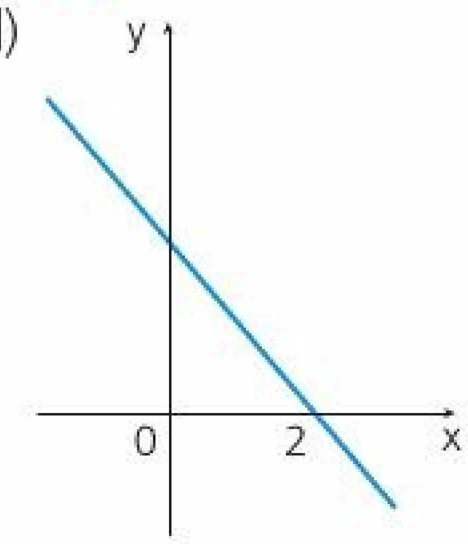
b) não existe



c) não existe



d) $x = 2$

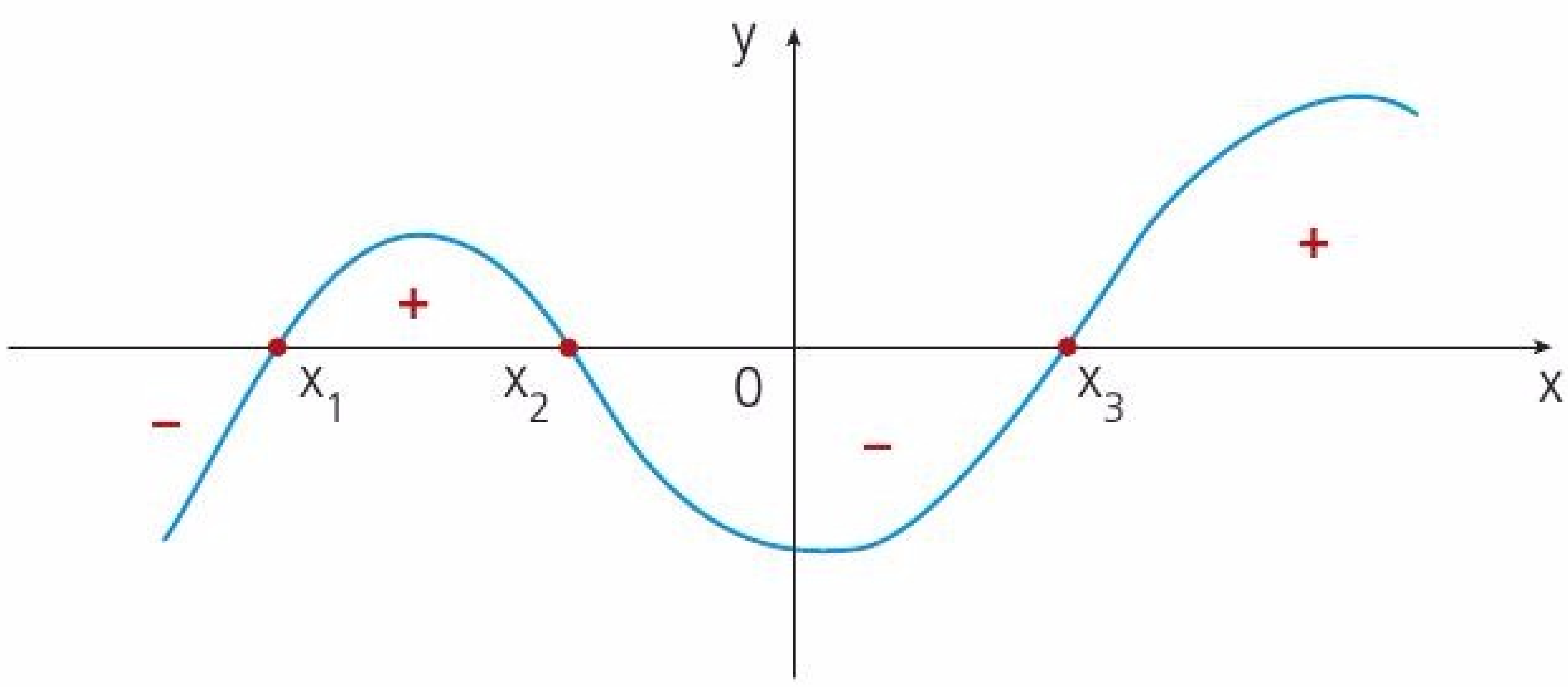


Sinais de uma função

Estudar o sinal de uma função significa determinar para quais valores de **x**, do domínio da função, teremos y = f(x) positivo, negativo ou nulo.

Graficamente, o estudo do sinal é feito localizando-se os pontos que estão acima, abaixo ou no eixo das abscissas, pois, assim, saberemos se y = f(x). Veja o gráfico a seguir:

Professor: Leia o texto com seus alunos e escreva no quadro os principais pontos do texto. Comente que a melhor maneira de analisar o sinal de uma função é por meio do gráfico, pois, ele nos permite uma avaliação mais ampla do comportamento da função. Este entendimento será fundamental para o estudo de inequações.



Para os valores **x** do domínio, menores do que x_1 ou entre x_2 e x_3 a imagem assume valores negativos, pois o gráfico está abaixo do eixo Ox. Assim, podemos escrever:

$$\mathbf{x < x_1 \quad \text{ou} \quad x_2 < x < x_3 \rightarrow y < 0}$$

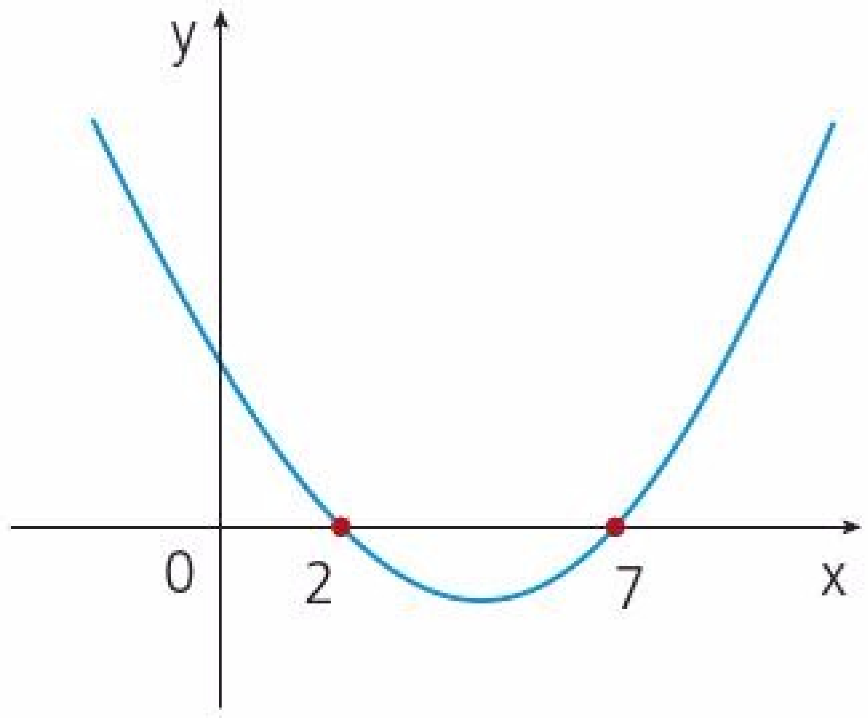
Para os valores **x** do domínio, entre x_1 e x_2 ou maiores do que x_3 a imagem assume valores positivos, pois o gráfico está acima do eixo Ox. Então, escrevemos:

$$\mathbf{x_1 < x < x_2 \quad \text{ou} \quad x > x_3 \rightarrow y > 0}$$

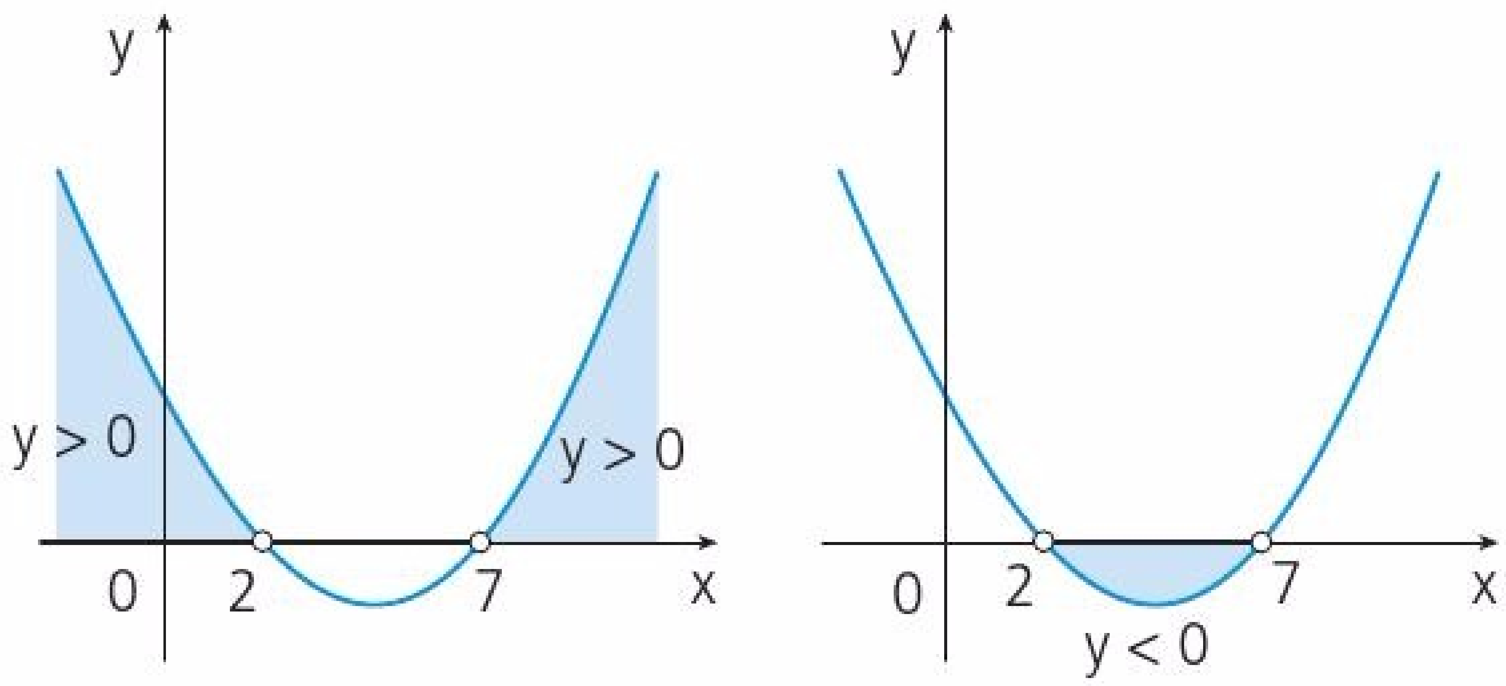
Os valores x_1, x_2 e x_3 do domínio, onde o gráfico "corta" o eixo Ox, são os zeros ou raízes da função.

$$\mathbf{x = x_1 \text{ ou } x = x_2 \text{ ou } x = x_3 \rightarrow y = 0}$$

Observe, por exemplo, o gráfico da função y = f(x) a seguir. Vamos, a partir dele, fazer o estudo do sinal:



Primeiramente notamos que os zeros da função são 2 e 7. Depois localizamos os pontos do gráfico que estão acima ou abaixo do eixo **x**.



Observe que as raízes são 2 e 7 e que, para **x** menor que 2 ou **x** maior que 7, temos **y** acima do eixo das abscissas; e para **x** entre 2 e 7, **y** está abaixo do eixo das abscissas. Podemos, então, escrever:

$$\mathbf{x < 2} \text{ ou } \mathbf{x > 7} \rightarrow \mathbf{y > 0}$$

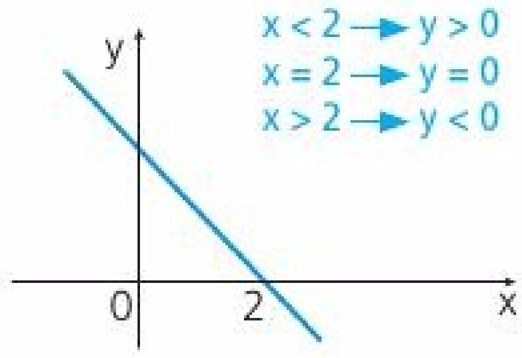
$$\mathbf{x = 2} \text{ ou } \mathbf{x = 7} \rightarrow \mathbf{y = 0}$$

$$\mathbf{2 < x < 7} \rightarrow \mathbf{y < 0}$$

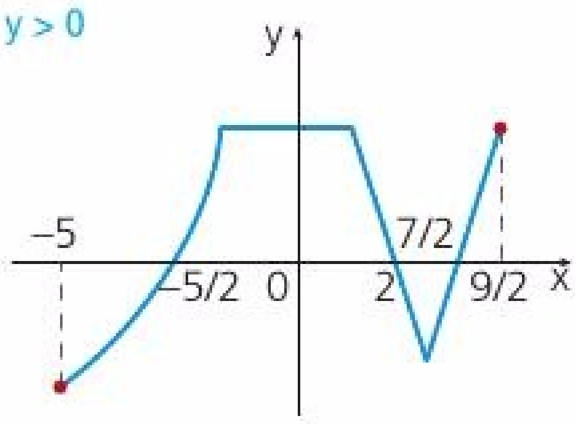
Atividades

17. Faça o estudo do sinal de cada função representada nos gráficos a seguir:

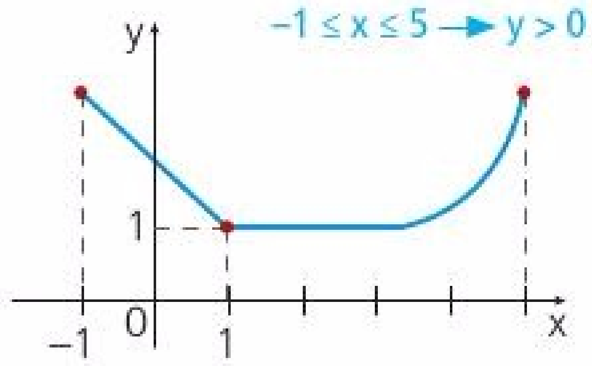
a) $x < 2 \rightarrow y > 0$
$x = 2 \rightarrow y = 0$
$x > 2 \rightarrow y < 0$



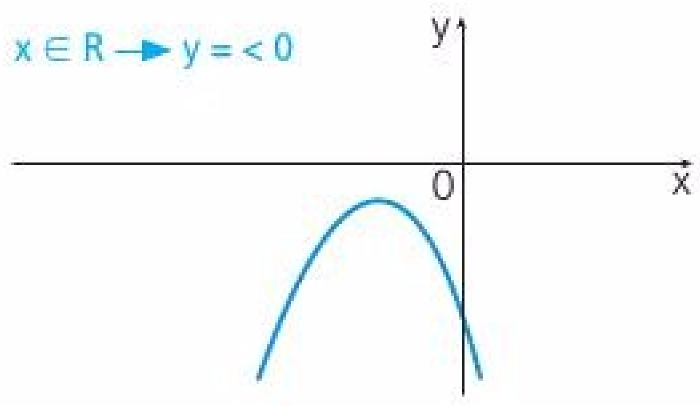
b) $y > 0$



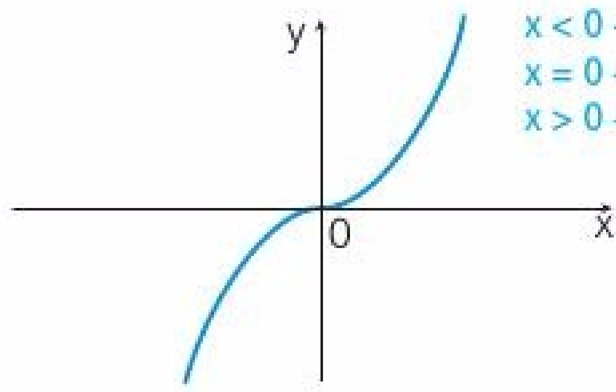
c) $-1 \leq x \leq 5 \rightarrow y > 0$



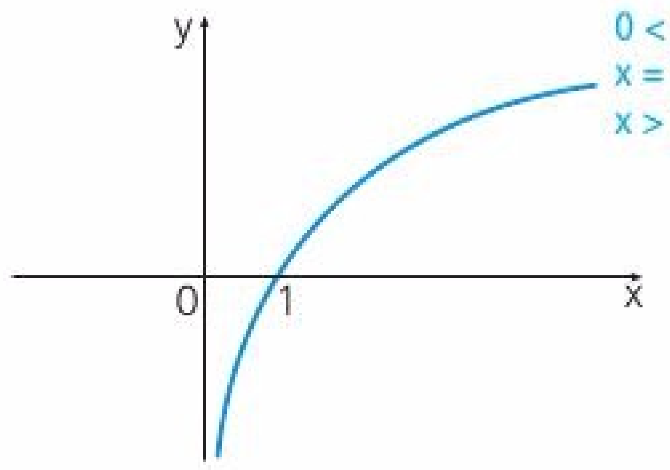
d) $x \in R \rightarrow y = < 0$



e) $x < 0 \rightarrow y < 0$
$x = 0 \rightarrow y = 0$
$x > 0 \rightarrow y > 0$



f) $0 < x < 1 \rightarrow y < 0$
$x = 1 \rightarrow y = 0$
$x > 1 \rightarrow y > 0$

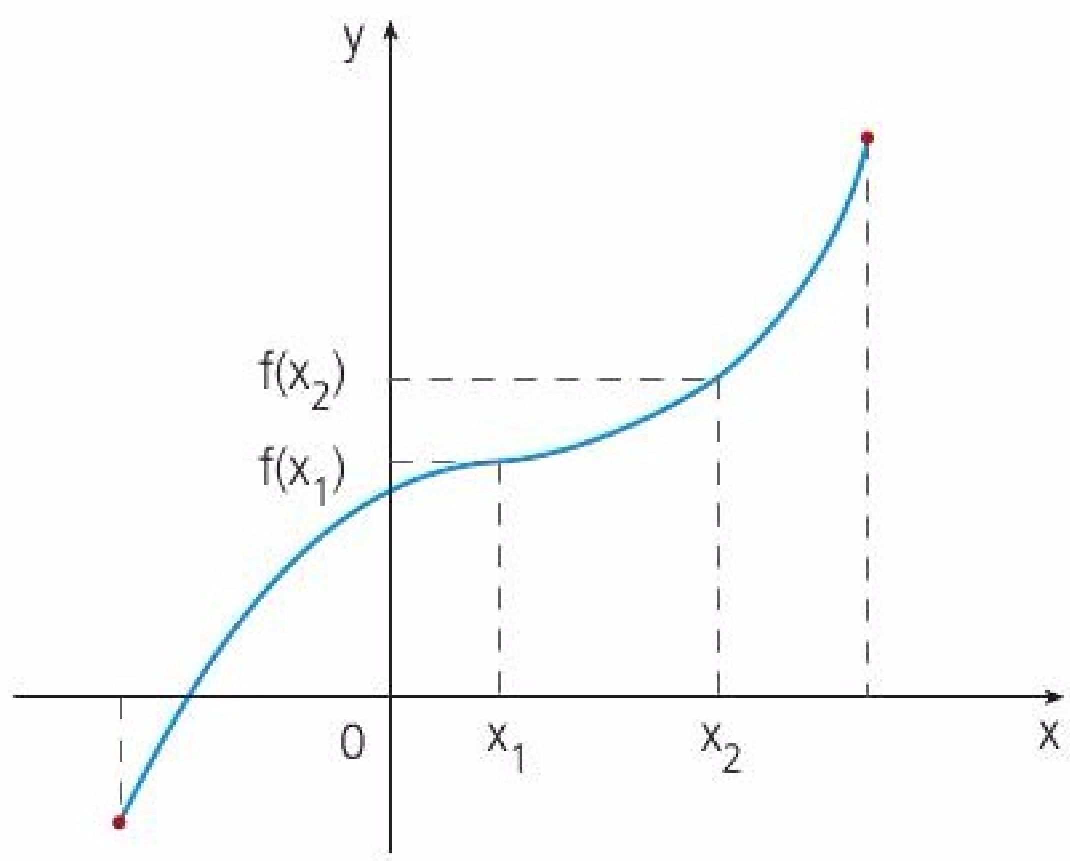


Funções crescentes e funções decrescentes

Uma função $y = f(x)$ é crescente em um intervalo de seu domínio se, para quaisquer x_1 e x_2 desse intervalo, ocorrer:

$$x_2 > x_1 \rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

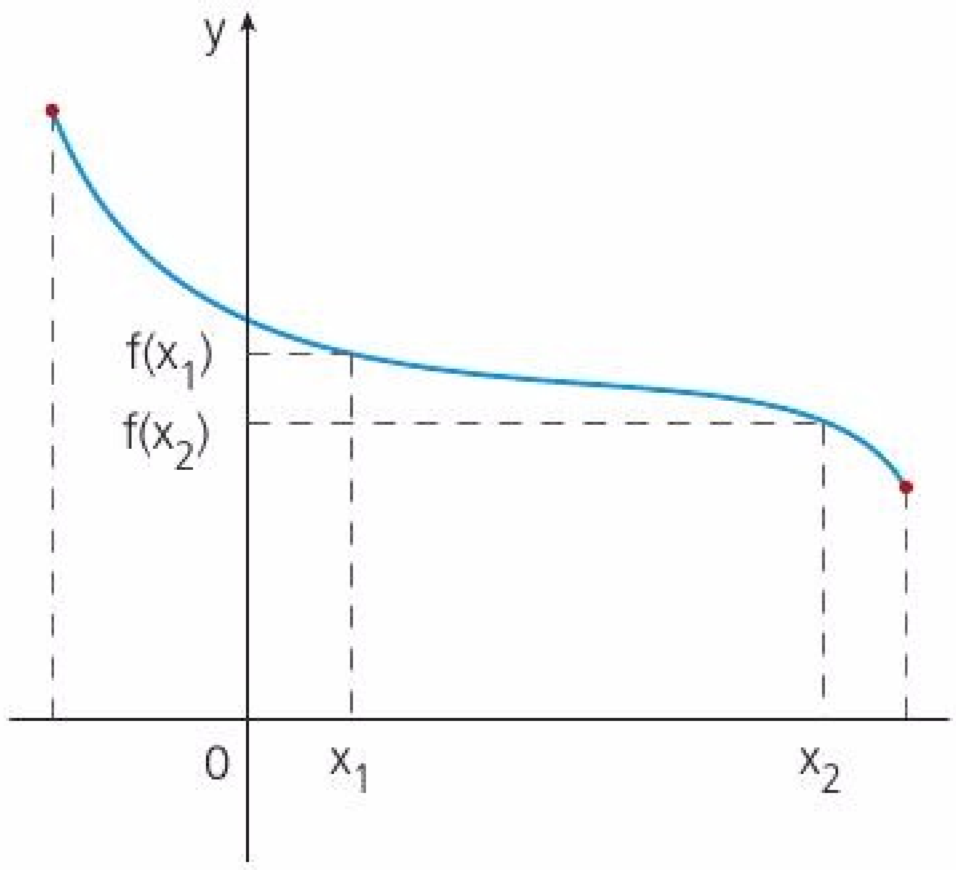
Veja o gráfico de uma função crescente. Note que para $x_2 > x_1$ temos $f(x_2) > f(x_1)$.



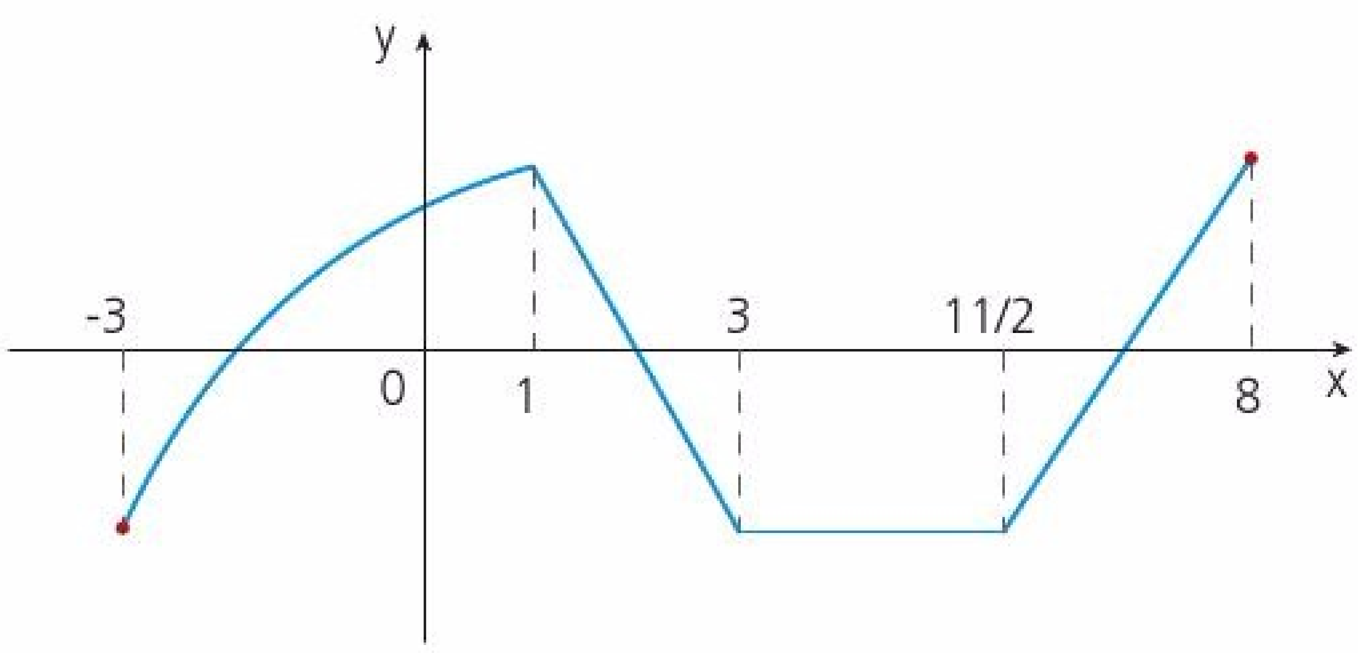
Uma função $y = f(x)$ será decrescente em um intervalo contido no domínio D se, para quaisquer x_1 e x_2 desse intervalo, ocorrer:

$$x_2 > x_1 \rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

Veja o gráfico de uma função decrescente, pois para $x_2 > x_1$ temos $f(x_2) < f(x_1)$.



Uma mesma função pode ser crescente num intervalo do domínio e decrescente em outro intervalo. Pode também ser uma função constante, caso, em um intervalo, não haja nem crescimento nem decrescimento. Veja, por exemplo, a análise dos intervalos de crescimento ou decrescimento da função representada pelo gráfico a seguir.



- f é crescente para $\begin{cases} -3 \leq x \leq 1 \\ \frac{11}{2} \leq x \leq 8 \end{cases}$
- f é decrescente para $1 \leq x \leq 3$
- No intervalo de 3 a $\frac{11}{2}$, a função não cresce nem decresce. Por essa razão, f é constante para $3 \leq x \leq \frac{11}{2}$

Atividades

18. Faça o gráfico das funções e verifique se elas são crescentes, decrescentes ou constantes:

a) $f(x) = 2x - 1$

b) $f(x) = -2x + 3$

Construções no caderno.

19. Faça o gráfico das funções e verifique se elas são crescentes, decrescentes ou constantes:

a) $f(x) = x^2$

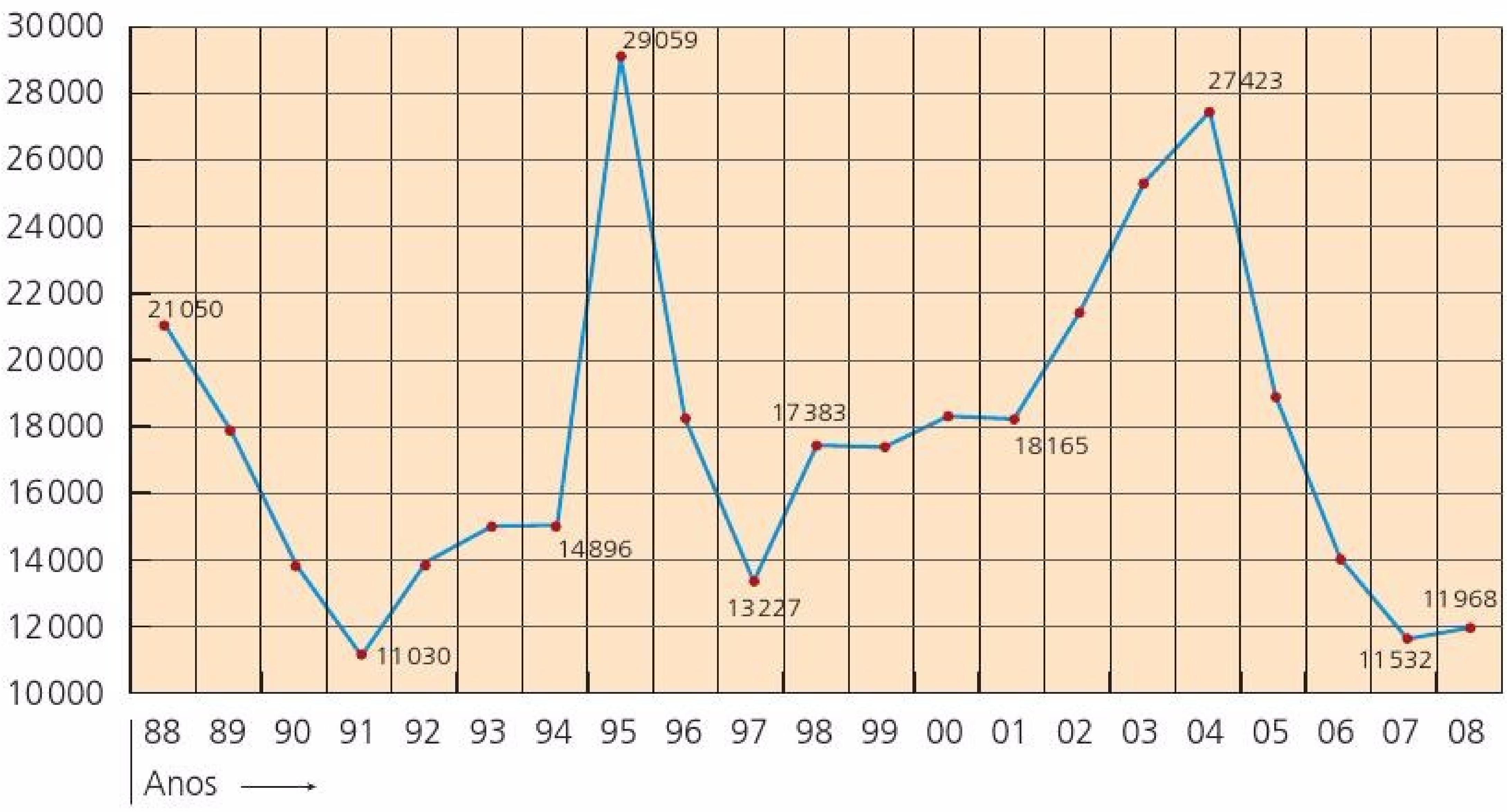
b) $f(x) = 5$

Construções no caderno.

20. O gráfico abaixo representa o desmatamento da Amazônia em função do tempo, desde 1988 até 2008, em km² por ano. Os pontos correspondentes aos anos estão marcados exatamente no centro de cada ano indicado no eixo das abscissas.

Analisar gráfico

Desmatamento da Amazônia ao longo da história (em km²)



Com base na análise do gráfico, responda:

Argumentar

a) Quais são os intervalos de tempo em que o desmatamento é crescente?
91 a 93, 94 a 95, 97 a 2004

b) Quais são os intervalos de tempo em que o desmatamento é decrescente?
88 a 91, 95 a 97, 04 a 07

c) Qual foi a redução, em km² entre os anos de 1995 e 1997? E entre 2004 e 2007?
15832 km² e 15891 km²

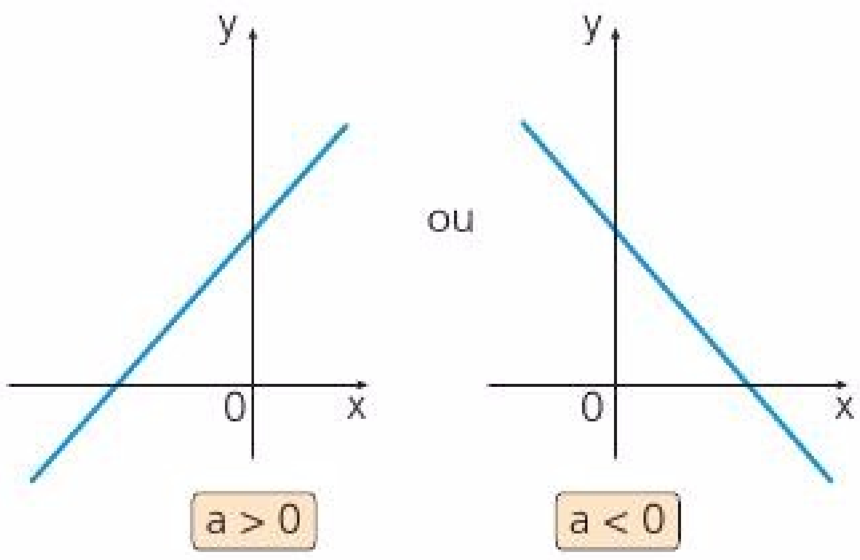
d) Escreva em seu caderno um comentário acerca das possíveis consequências ambientais do desmatamento da Amazônia, baseando-se no que você já ouviu a respeito deste assunto. Em seguida, compare seu comentário com alguns de seus colegas.

Função Afim

Uma função f: R → R chama-se **afim** quando existem constantes a, b $\in$ R tais que f(x) = ax + b para todo x $\in$ R.

f(x) = ax + b (a $\in$ R e b $\in$ R) é a lei de uma função afim

O gráfico da função afim é sempre uma reta não perpendicular ao eixo $\overleftrightarrow{Ox}$.



domínio: D = R
imagem: Im = R

Professor: Proponha situações problema que levem seus alunos a pensarem nas relações que existem entre variáveis, buscarem a regularidade entre elas e daí estabelecer a generalização para a situação. Uma boa forma é criar uma sequencia didática que aborde uma situação que represente esse problema. Explore situação como a que mostra a relação entre o número de horas e o preço pago para parar o carro em um estacionamento, de forma que cobra um valor fixo pela primeira hora e outro pelas adicionais, ou ainda, o custo para abastecer um carro, considerando o preço atualizado da gasolina ou álcool, entre outros.

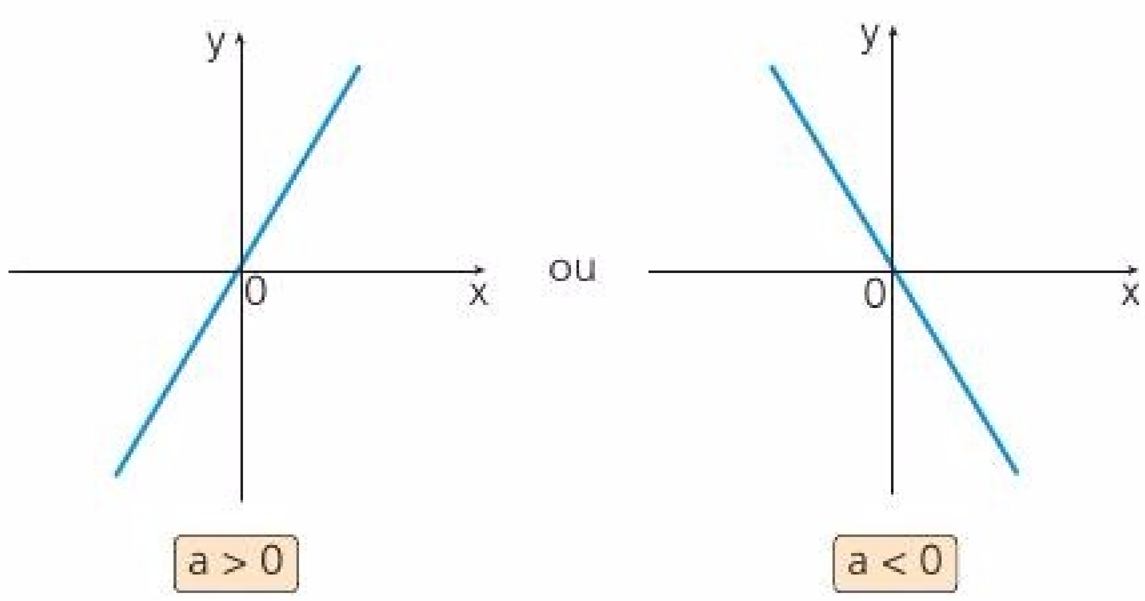
São casos particulares da função afim as funções lineares e constantes. Vamos analisá-las a seguir.

Função linear

Uma função f: R → R chama-se linear quando existe uma constante a $\in$ R tal que f(x) = ax para todo x $\in$ R. Note que a função linear é um caso particular da função afim f(x) = ax + b quando b = 0.

f(x) = ax (a $\in$ R) é a lei da função linear

O gráfico da função linear é uma reta, não perpendicular ao eixo $\overleftrightarrow{Ox}$ e que cruza a origem do plano cartesiano.



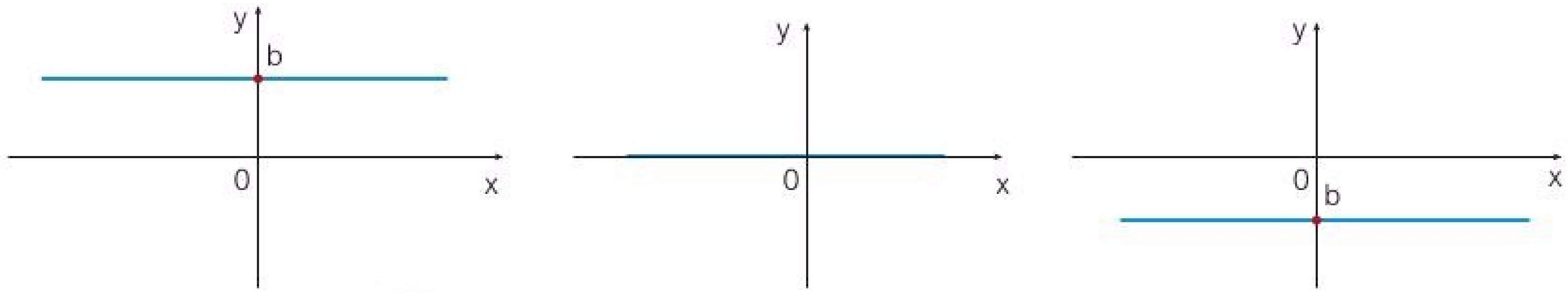
domínio: D = R
imagem: Im = R

Função constante

Uma função $f: R \to R$ chama-se constante quando existe uma constante $b \in R$ tal que $f(x) = b$ para todo $x \in R$. Nesse caso, $a = 0$ na função $f(x) = ax + b$.

$f(x) = b$ ($b \in R$) é a lei da função constante

O gráfico da função constante é uma reta paralela ou coincidente com o eixo das abscissas $\overleftrightarrow{Ox}$ e cruza o eixo $\overleftrightarrow{Oy}$ no ponto de ordenada **b**.



$b > 0$ $b = 0$ $b < 0$

Professor: Comente com seus alunos que na prática nos deparamos com funções constantes sem notarmos e elabore situações problema que mostrem isso. Um exemplo interessante é comparar um restaurante do tipo Rodízio de Carnes, onde os clientes pagam um valor fixo e podem comer à vontade, com outro tipo de estabelecimento como os "Por Quilo", nos quais os clientes pagam em função do peso do prato registrado na balança.

domínio: $D = R$
imagem: $Im = \{b\}$

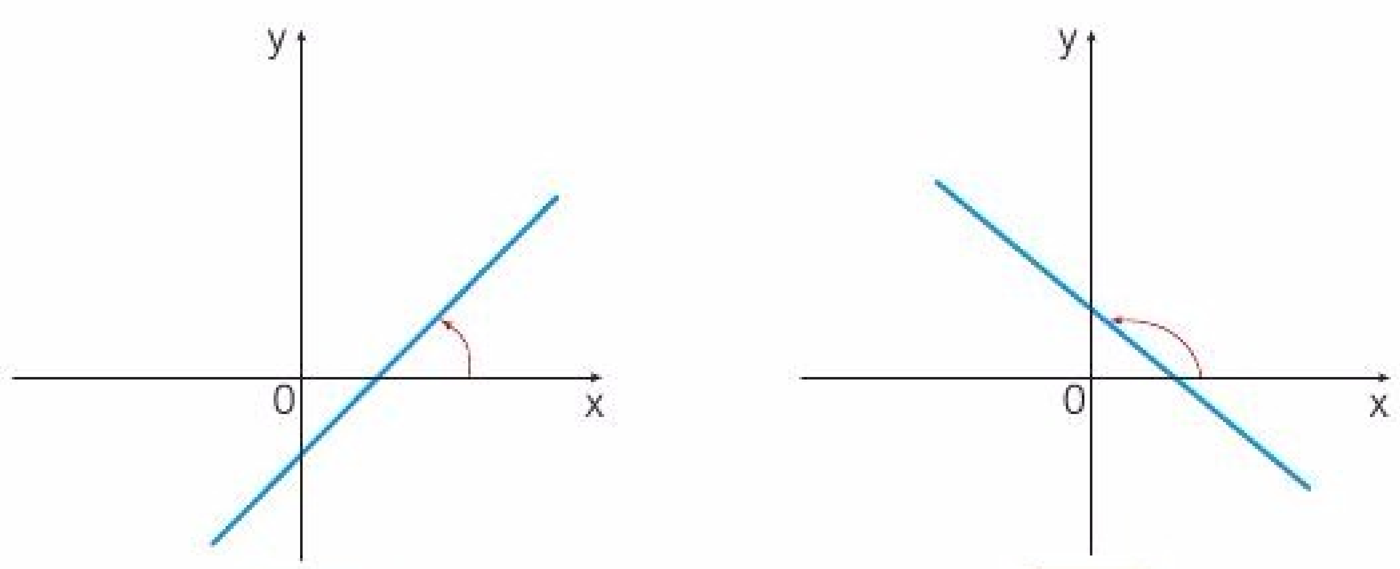
Coeficientes da função afim

Dada a função afim $f(s) = ax + b$, os coeficientes numéricos **a** e **b** da função afim determinam as características do gráfico dessa função.

a) Coeficiente a

O coeficiente **a** chama-se coeficiente de inclinação e irá determinar se a reta é crescente ou decrescente.

Quando **a** é maior do que zero, a função **f** é crescente e quando **a** é menor do que zero a função **f** é decrescente.

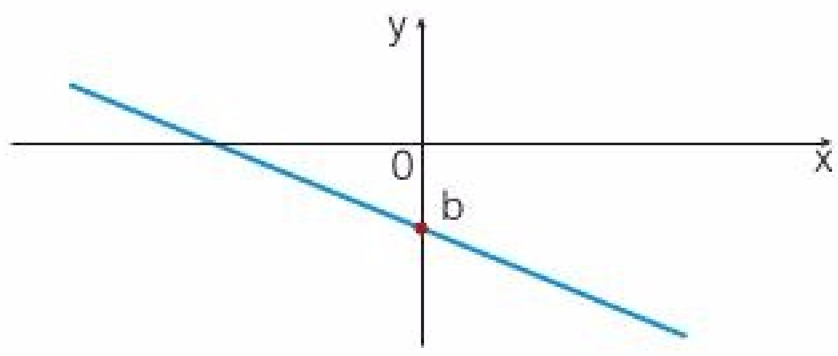


$a < 0$ — **f é crescente**

$a < 0$ — **f é decrescente**

b) Coeficiente b

É a ordenada do ponto em que o gráfico da função f(x) = ax + b cruza o eixo das ordenadas, ou seja, b = f(0).



Observe que na função f(x) = ax + b, quando **x** é zero, temos:

$$f(0) = a \cdot 0 + b \rightarrow f(0) = b$$

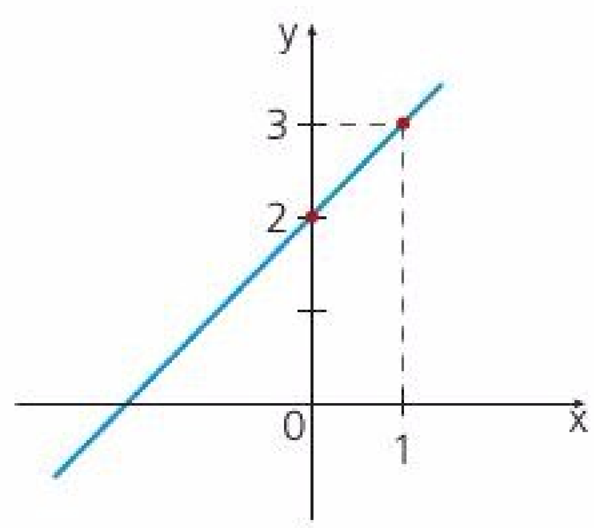
Acompanhe, agora, alguns exemplos de construções de gráficos de funções afim, e observe as características de crescimento e decrescimento de cada uma:

a) **f(x) = x + 2**

A função afim é definida como real, isso indica que o domínio é D = R. Portanto o conjunto imagem também é Im = R.

Como já sabemos que o gráfico da função afim é uma reta, basta obtermos as coordenadas de dois pontos para construirmos o gráfico. Para isso, atribuímos dois valores reais a **x** e calculamos suas imagens **y**.

x	$y = f(x) = x + 2$
0	0 + 2 = 2
1	1 + 2 = 3

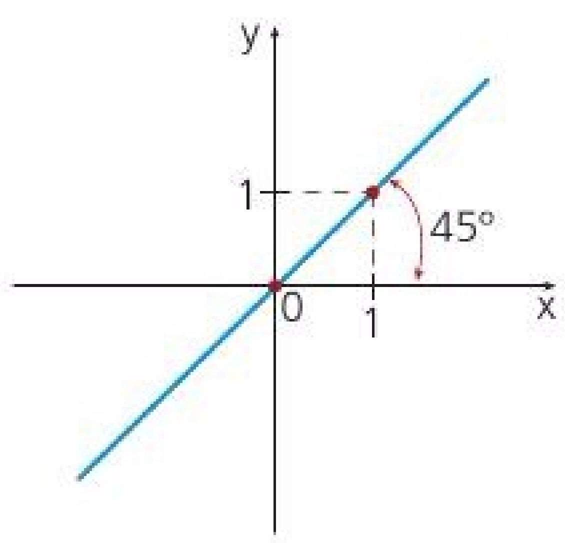


Marcamos os pontos de coordenadas (0, 2) e (1, 3) e traçamos a reta determinada por esses dois pontos.

b) **f(x) = x**

Domínio: D = R; Imagem: Im = R

x	$y = f(x) = x$
0	0
1	1

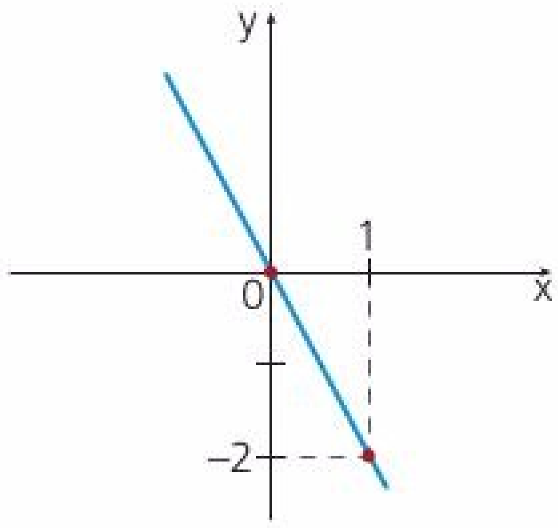


Essa função linear é denominada **função identidade** e seu gráfico é a bissetriz dos quadrantes ímpares.

c) **f(x) = –2x**

Domínio: D = R; Imagem: Im = R

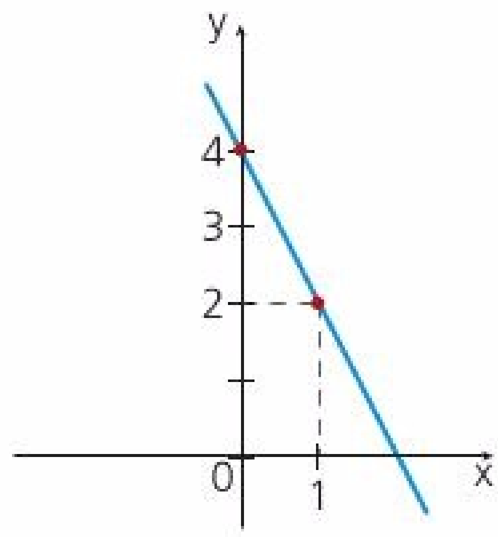
x	y = f(x) = –2*x*
0	– 2 · 0 = 0
1	– 2 · 1 = –2



d) **f(x) = –2x + 4**

Domínio: D = R; Imagem: Im = R

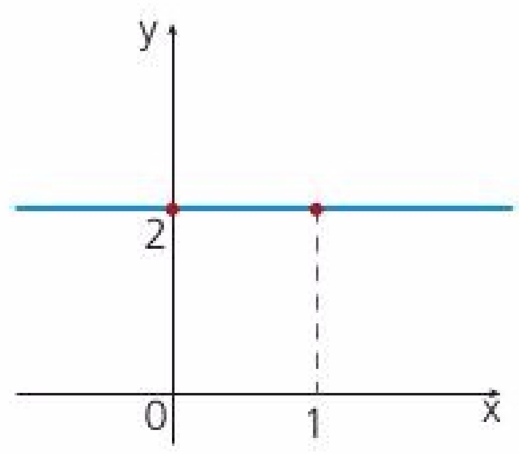
x	y = f(x) = –2*x* + 4
0	–2 · 0 + 4 = 4
1	–2 · 1 + 4 = 2



e) **f(x) = 2**

Domínio: D = R; Imagem: Im = {2}

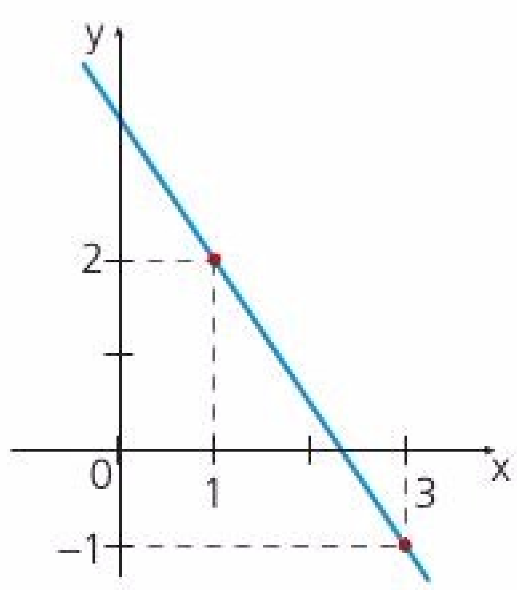
x	y = f(x) = 2
0	2
1	2



Note que o gráfico é uma reta paralela ao eixo das abscissas, pois trata-se de uma função constante.

Observe no exemplo a seguir que podemos também determinar a lei da função afim a partir de seu gráfico.

Considere a função afim, cujo gráfico é o seguinte:



Sabemos que a lei de formação da função é do tipo $y = f(x) = ax + b$. O gráfico passa pelo ponto (1, 2) e pelo ponto (3, –1). Logo, substituindo as coordenadas **x** e **y** na lei, teremos:

Fernanda Youssef

$(1, 2) \rightarrow 2 = a + b$

$(3, -1) \rightarrow -1 = 3a + b$

Obtemos, assim, o sistema de duas equações com as incógnitas **a** e **b**.

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ 3a + b = -1 \end{cases}$$

Para resolver, multiplicamos a primeira equação por –1 e adicionamos à segunda equação:

$$\begin{cases} -a - b = -2 \\ 3a + b = -1 \quad \oplus \end{cases}$$

$$2a \qquad = -3$$

Portanto, $a = -\dfrac{3}{2}$

Substituindo o valor de **a** na primeira equação, encontramos $\mathbf{b} = \dfrac{7}{2}$.

A lei da função será, portanto:

$$\mathbf{y = f(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}}$$

Atividades

21. Construa o gráfico de cada uma das funções reais:

a) $f(x) = 2x + 5$ b) $f(x) = -x + 1$

Construções no caderno.

22. Construa os gráficos das funções reais:

a) $f(x) = -3x$ b) $f(x) = \dfrac{1}{2}x$

Construções no caderno.

23. Esboce o gráfico de cada uma das funções reais:

a) $f(x) = -2{,}5$

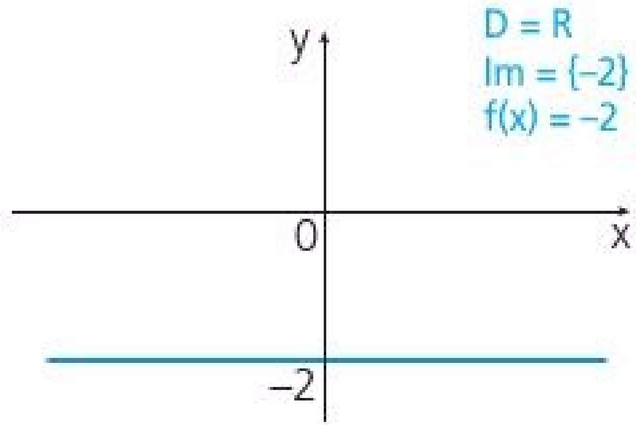
b) $f(x) = \sqrt{2}$

Construções no caderno.

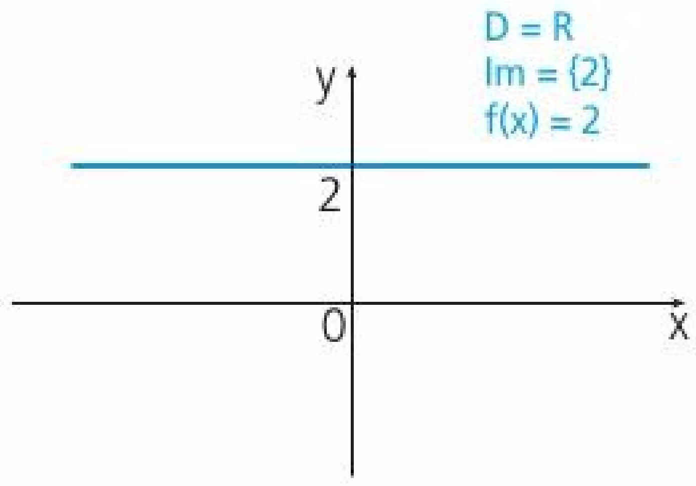
Construir gráfico

24. Indique o domínio, a imagem e a lei da função em cada um dos gráficos:

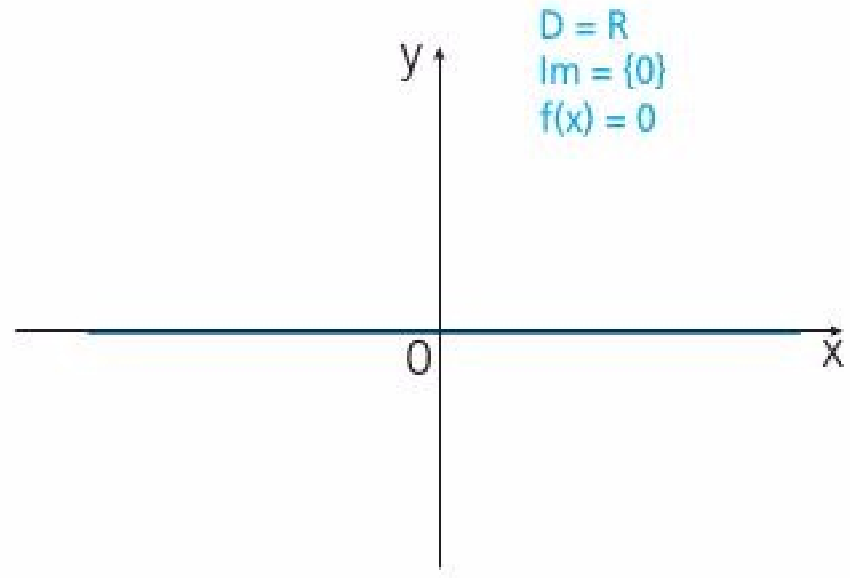
a)



b)

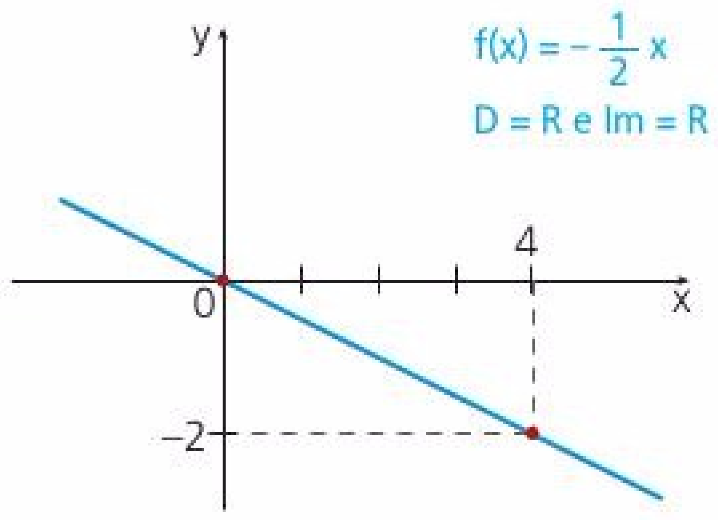


c)

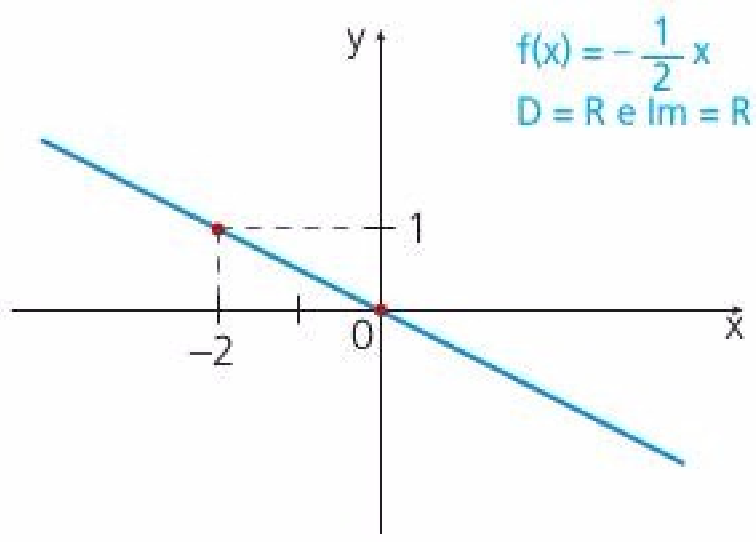


25. Indique o domínio, a imagem e a lei da função em cada um dos gráficos:

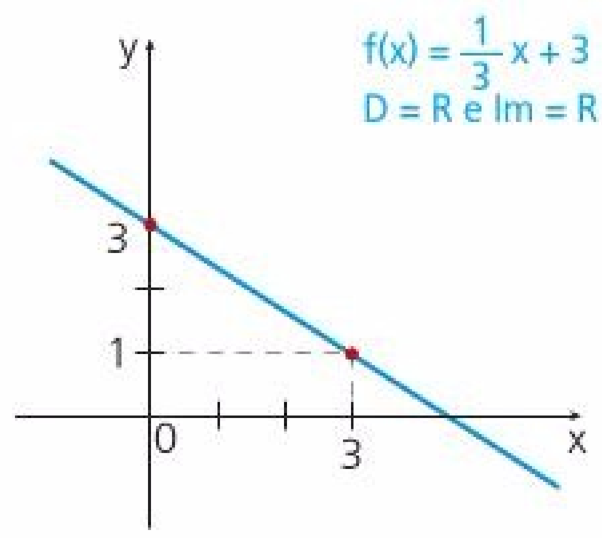
a)



b)



c)



26. Em certa cidade paga-se pelo serviço de táxi, em dia útil, das 6h às 20h, o valor de R$ 4,50 pela bandeirada mais R$ 2,75 por quilômetro rodado. x = km rodado

a) Escreva a lei da função que expressa o preço P a pagar em função do quilômetro rodado **x**. f(x) = 12,75x + 4,50

b) Calcule quantos quilômetros o táxi percorreu se foram pagos R$ 26,50 pelo serviço.
x = 8 km

Conexão

Este texto é interessante para ser trabalhado em uma atividade interdisciplinar. Converse com os professores de História e Artes a respeito dessa ideia.

O imposto de renda

Todos os anos, os cidadãos que têm rendas ou salários são obrigados a entregar a declaração de imposto de renda (IR). Criado no ano de 1922, o Imposto de Renda é cobrado tanto de pessoas físicas como de pessoas jurídicas (empresas). Cada contribuinte deve pagar uma quantia proporcional ao seu patrimônio.

No Brasil, o IR que incide sobre salários, é recolhido todo mês diretamente pela fonte pagadora. Por essa razão é chamado de imposto de renda na fonte. Porém, no início do ano seguinte, os cidadãos, incluindo-se os assalariados, devem entregar uma declaração à Receita Federal, contendo seus gastos e seu patrimônio, para que seja feito o ajuste do imposto.

O imposto de renda retido na fonte, sempre que um trabalhador recebe o seu salário, é calculado conforme as faixas salariais especificadas na tabela a seguir, válida para o ano de 2015:

Tabela do IR para 2015 (a partir de 01/04)		
Salários	**Alíquota (%)**	**Parcela a deduzir**
até R$ 1 903,98	Isento	—
de R$ 1 903,99 até R$ 2 826,65	7,5	R$ 134,08
de R$ 2 826,66 até R$ 3 751,05	15	R$ 335,03
de R$ 3 751,06 até R$ 4 463,81	22,5	R$ 602,96
acima de R$ 4 463,81	27,5	R$ 826,15

Fonte: Diário Oficial da União. Disponível em: <www.doolhojornal.com/news/economia/publica-correcao-tabela-imposto--renda>. Acesso em 22 mar. 2015.

Por exemplo, se uma pessoa tem rendimento em um mês de R$ 3 200,00 estará na faixa de alíquota de 15% e sofrerá o seguinte desconto sobre a renda:

$$15\% \text{ de R\$ } 3\,200{,}00 = 0{,}15 \cdot 3\,200{,}00 = \text{R\$ } 480{,}00$$

Como há uma parcela a deduzir, temos: R$ 480,00 – R$ 335,03 = R$ 144,97

Portanto, o desconto do Imposto sobre a Renda, também chamado de Imposto de Renda retido na fonte será de R$ 144,97.

As faixas de desconto de Imposto de renda podem ser expressas por funções afins, do tipo $y = ax + b$. Compare as funções a seguir com a tabela, chamando-se de **s** o salário e de **i** o imposto a ser descontado:

- Para $s \leq 1\,499{,}15 \rightarrow i = 0$
- Para $1\,499{,}16 \leq s \leq 2\,246{,}75 \rightarrow i = 0{,}075 \cdot s - 134{,}08$
- Para $2\,246{,}76 \leq s \leq 2\,995{,}70 \rightarrow i = 0{,}15 \cdot s - 335{,}03$
- Para $2\,995{,}71 \leq s \leq 3\,743{,}19 \rightarrow i = 0{,}225 \cdot s - 602{,}96$
- Para $s \geq 3\,743{,}20 \rightarrow i = 0{,}275 \cdot s - 826{,}15$

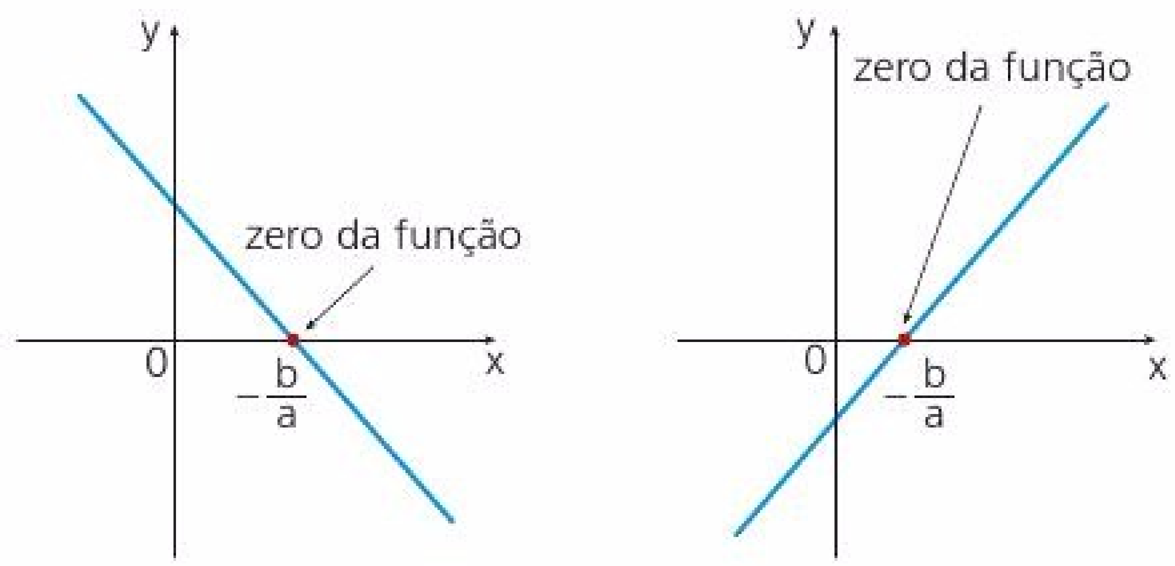
Zero da função afim e estudo de sinais

O zero da função afim é o valor de **x** para o qual $y = f(x) = 0$.

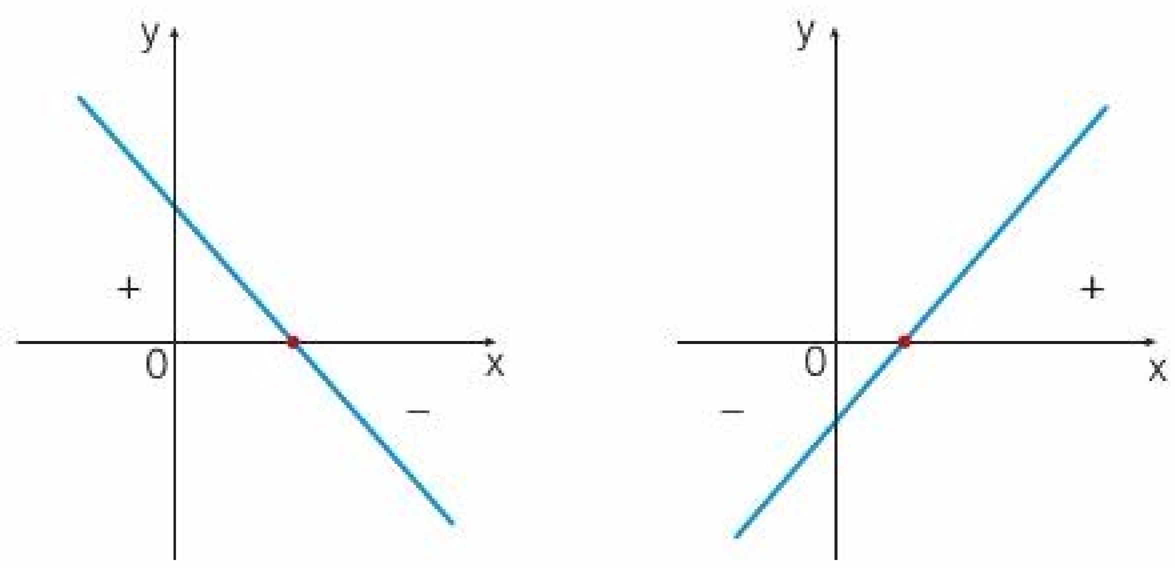
$$y = f(x) = ax + b \rightarrow ax + b = 0$$

$$ax = -b \rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

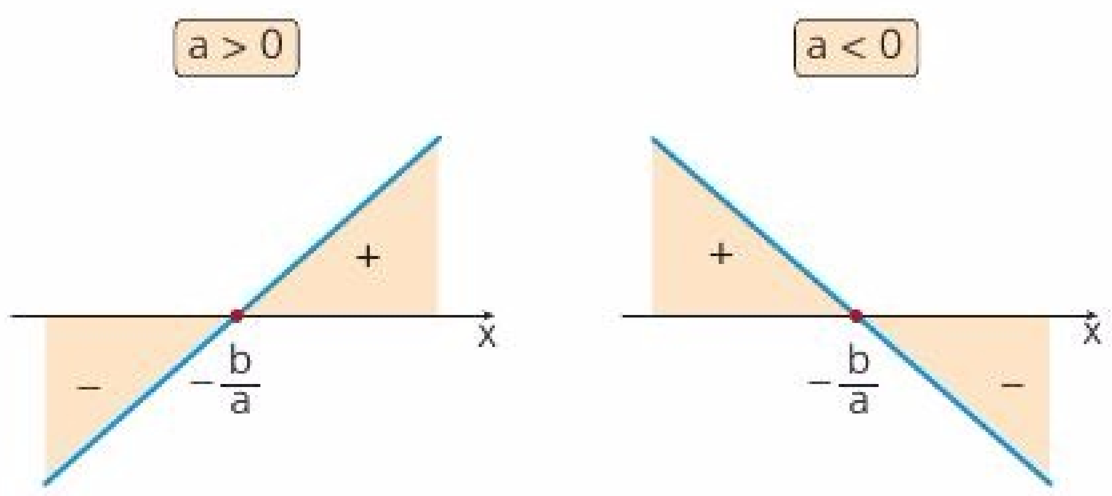
No gráfico da função afim, a raiz ou o zero da função é o valor de **x** no ponto em que a reta cruza o eixo das abscissas ($\overleftrightarrow{Ox}$).



O estudo dos sinais da função afim pode ser realizado diretamente no gráfico.

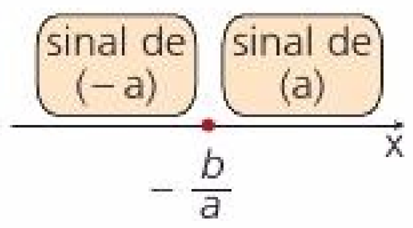


Podemos esquematizar esse estudo considerando apenas o eixo $\overleftrightarrow{Ox}$, a raiz e a variação de sinal da função:



Simplificando, podemos dizer que a função terá sinal contrário ao do coeficiente **a** para valores de x **à esquerda da raiz** e sinal igual ao de **a** para valores de x **à direita da raiz**.

De forma resumida, podemos dizer que:



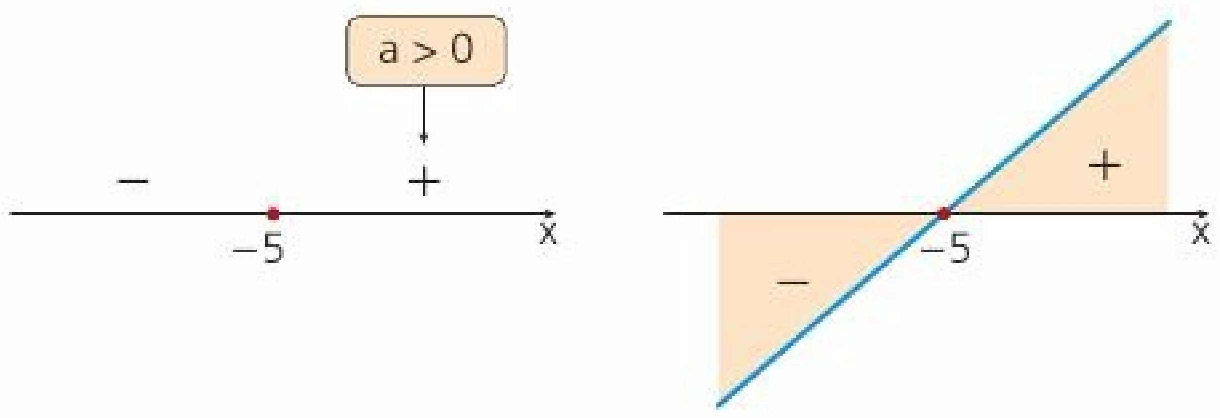
$$\begin{cases} x < -\dfrac{b}{a} \Rightarrow y \text{ tem sinal de } (-a) \\ x = -\dfrac{b}{a} \Rightarrow y = 0 \\ x > -\dfrac{b}{a} \Rightarrow y \text{ tem sinal de a} \end{cases}$$

Observe, por exemplo, o estudo de sinais das funções a seguir:

a) f(x) = 2x + 10

Cálculo da raiz:

$2x + 10 = 0 \rightarrow 2x = -10 \rightarrow x = -5$

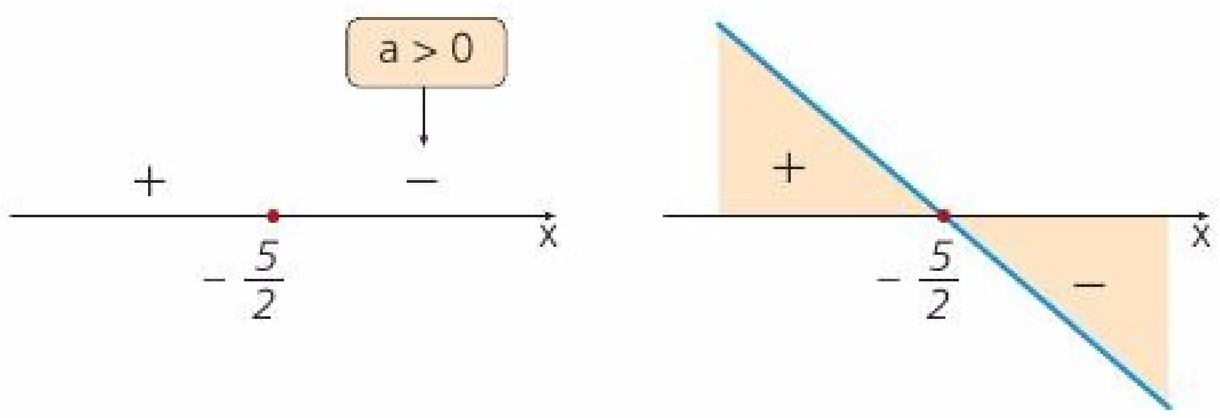


Estudo do sinal: $\begin{cases} x < -5 \rightarrow y < 0 \\ x = -5 \rightarrow y = 0 \\ x > -5 \rightarrow y > 0 \end{cases}$

b) f(x) = −2x − 5

Cálculo da raiz:

$-2x - 5 = 0 \rightarrow -2x = 5 \rightarrow x = -\dfrac{5}{2}$



Estudo do sinal: $\begin{cases} x < -\dfrac{5}{2} \rightarrow y > 0 \\ x = -\dfrac{5}{2} \rightarrow y = 0 \\ x > -\dfrac{5}{2} \rightarrow y < 0 \end{cases}$

Atividades

27. Faça o estudo do sinal das funções:

a) $f(x) = 3x$ $\begin{cases} x < 0 \rightarrow y < 0 \\ x = 0 \rightarrow y = 0 \\ x > 0 \rightarrow y > 0 \end{cases}$

b) $g(x) = -2x - 6$ $\begin{cases} x < 0 \rightarrow y > 0 \\ x = 0 \rightarrow y = 0 \\ x > 0 \rightarrow y < 0 \end{cases}$

c) $f(x) = -\dfrac{1}{1} + 2x$ $\begin{cases} x < 0 \rightarrow y < 0 \\ x = 0 \rightarrow y = 0 \\ x > 0 \rightarrow y > 0 \end{cases}$

28. Dada a função real $f(x) = -3x + 12$

a) Qual é a ordenada do ponto em que o gráfico de **f** cruza o eixo $\overleftrightarrow{Oy}$? $y = 12$

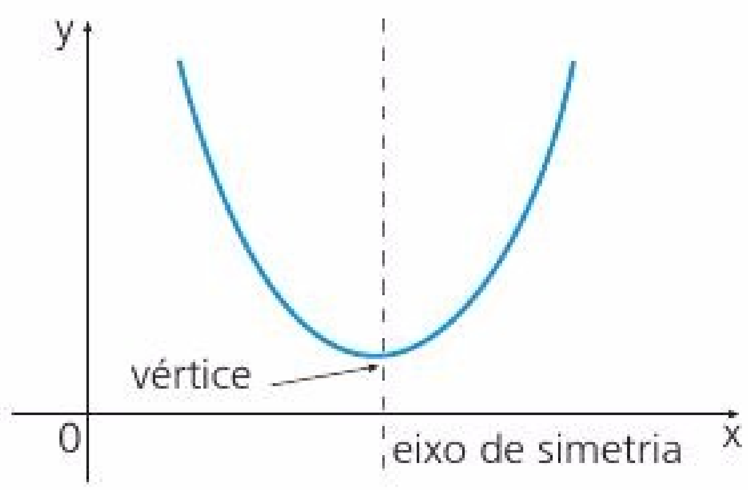
b) Qual é a abscissa do ponto em que o gráfico de **f** cruza o eixo $\overleftrightarrow{Ox}$? $x = 4$

Função Quadrática

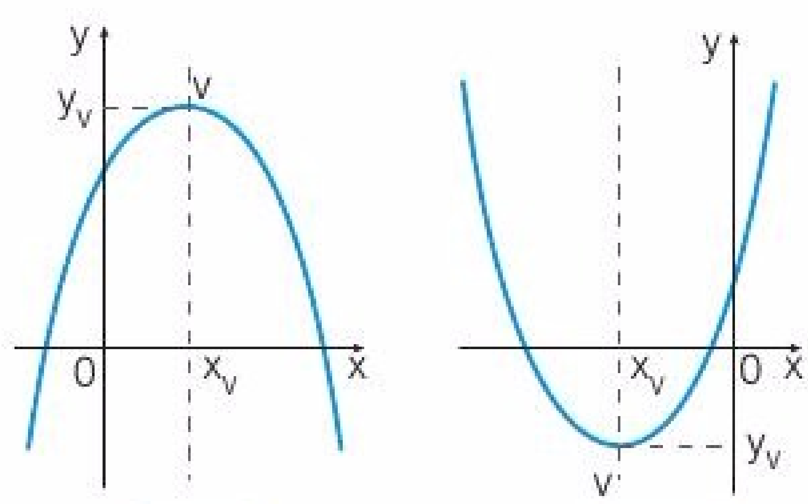
Uma função f: R → R, chama-se quadrática quando existem números reais **a**, **b**, e **c** com $a \neq 0$ tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in R$.

$$f(x) = ax^2 + bx + c \ (a \in R^*, \ b \text{ e } c \in R)$$

O gráfico de uma função quadrática é uma curva chamada **parábola** com eixo de simetria paralelo a $\overleftrightarrow{Oy}$. O ponto de intersecção da parábola com o eixo de simetria denomina-se vértice.



De acordo com a lei da função quadrática, a parábola que a representa pode ter sua concavidade voltada para baixo, se $a < 0$, ou para cima, se $a > 0$.



$a < 0$ concavidade para baixo

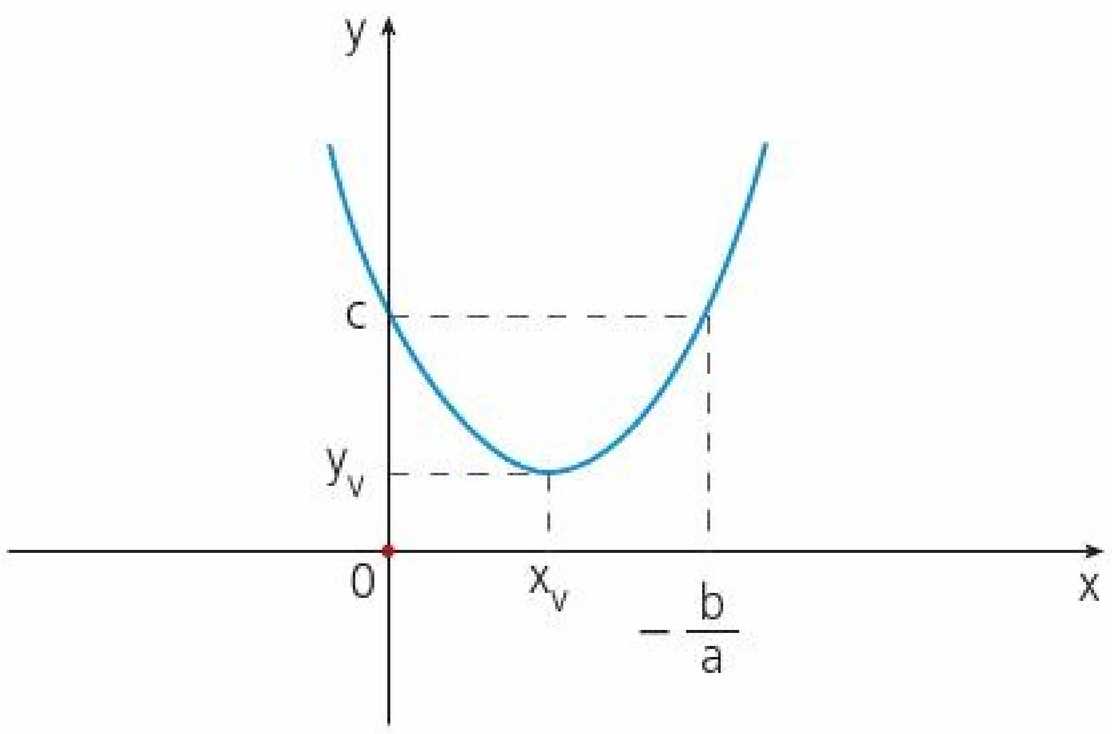
$a > 0$ concavidade para cima

Observe no gráfico que, se $a < 0$, o ponto V é um ponto de **máximo** da função e, se $a > 0$, V é ponto de **mínimo**.

Coordenadas do vértice da parábola

O vértice da parábola de equação $y = ax^2 + bx + c$ é seu ponto de altura máxima (quando $a < 0$) ou mínima (quando $a > 0$).

A parábola cruza o eixo $\overleftrightarrow{Oy}$ no ponto de ordenada **c**. No entanto existem dois pontos de ordenada **c**.



Para encontrá-los, substituímos $y = c$ na lei $y = ax^2 + bx + c$.

Veja:

$$c = ax^2 + bx + c \rightarrow ax^2 + bx = 0$$

Fatorando e resolvendo a equação, temos:

$$x(ax + b) = 0 \rightarrow x = 0 \text{ ou } x = -\frac{b}{a}$$

Devido a simetria da parábola x_V, é a metade de $-\frac{b}{a}$, ou seja, $x_V = -\frac{b}{2a}$.

Substituindo $x_V = -\frac{b}{2a}$ em $y = ax^2 + bx + c$, obtemos a ordenada do vértice y_V:

$$y_V = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) = a \cdot \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + c$$

Assim:

$$y_V = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} =$$

$$= \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}$$

Portanto, as coordenadas do vértice da parábola são:

$$\mathbf{x_V = -\frac{b}{2a} \text{ e } y_V = -\frac{\Delta}{4a}}$$

Vimos que, para construir o gráfico de uma função real, organizamos em uma tabela valores escolhidos para **x** e a partir deles calculamos os valores de **y** correspondentes obtendo o par (x, y).

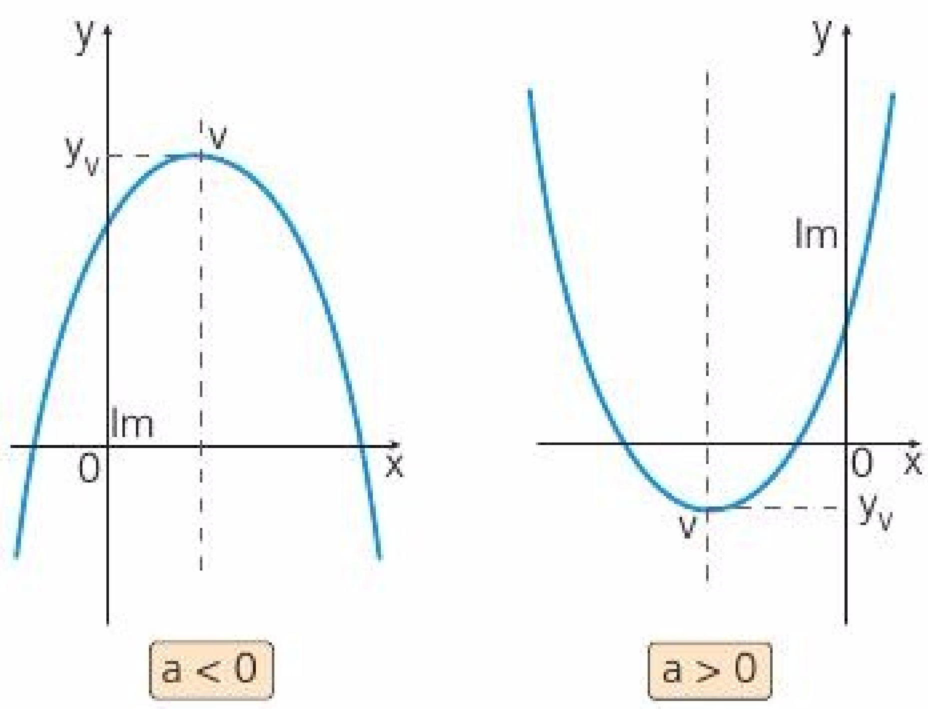
Vamos fazer o mesmo para esboçarmos o gráfico de uma função quadrática escolhendo valores simétricos em relação à abscissa do vértice.

Valores simétricos em relação a x_V

x	y = f(x)
x_1	
x_2	
x_V	y_V
x_3	
x_4	

O conjunto imagem da função quadrática, $f(x) = ax^2 + bx + c$ de domínio real depende da ordenada do vértice $y_V = -\dfrac{\Delta}{4a}$ e da concavidade da parábola.

Lembrando que a concavidade depende do sinal de **a**, temos duas possibilidades:



Assim, o conjunto imagem da função é:

$$\mathbf{Im} = \left\{ \mathbf{y} \in \mathbf{R} \ / \ \mathbf{y} \leq -\frac{\Delta}{\mathbf{4a}} \right\} \ \mathbf{se\ a < 0}$$

$$\mathbf{Im} = \left\{ \mathbf{y} \in \mathbf{R} \ / \ \mathbf{y} \geq -\frac{\Delta}{\mathbf{4a}} \right\} \ \mathbf{se\ a > 0}$$

Acompanhe os exemplos a seguir e verifique a determinação do vértice e a construção do gráfico de algumas funções quadráticas.

a) Vamos esboçar o gráfico da função da função $y = x^2 - 4$.

Nessa função temos a = 1; b = 0 e c = −4.

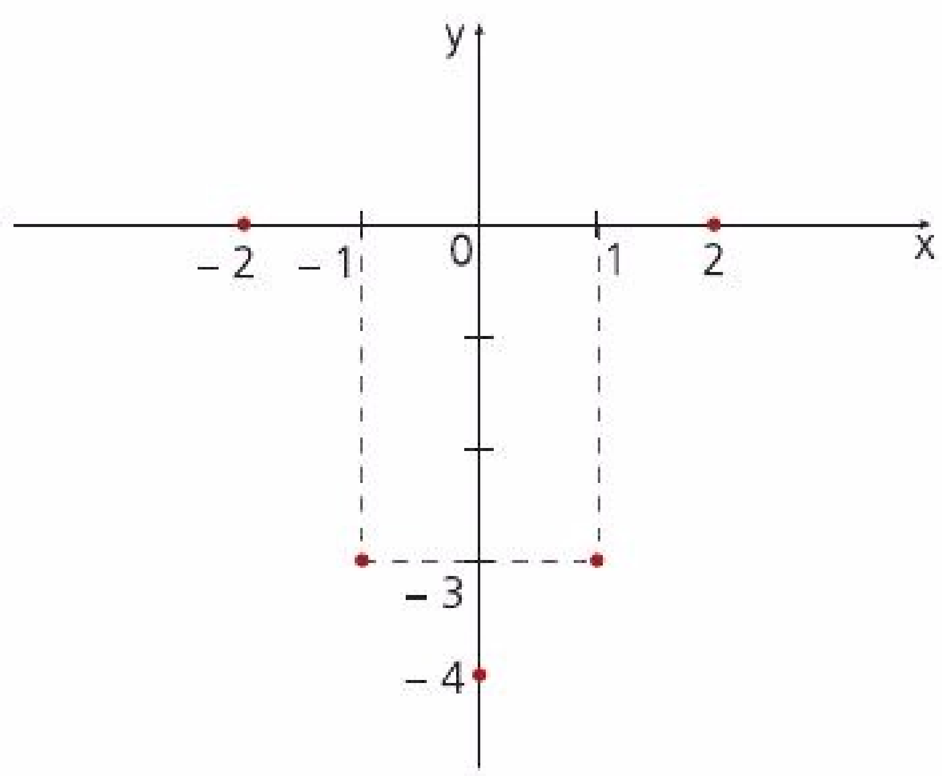
Em primeiro lugar calculamos a abscissa do vértice:

$$x_V = -\frac{b}{2a} \qquad x_V = -\frac{0}{2} = 0$$

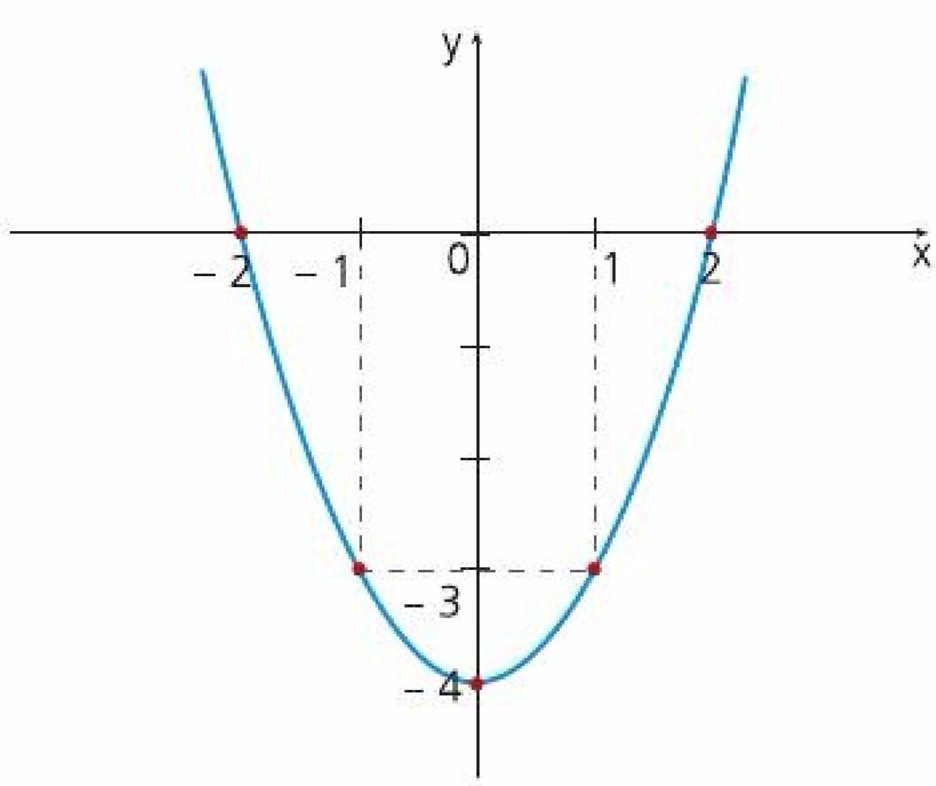
A partir de x_V construímos a tabela calculado f(x) para valores simétricos em relação à abscissa do vértice:

x	$y = f(x) = x^2 - 4$
−2	0
−1	−3
0	−4
1	−3
2	0

Marcamos esses pares no plano cartesiano:



Como o domínio da função é o conjunto dos reais e o gráfico é simétrico em relação ao eixo que cruza o vértice, ligamos os pontos determinados, aproximando a linha de uma parábola.



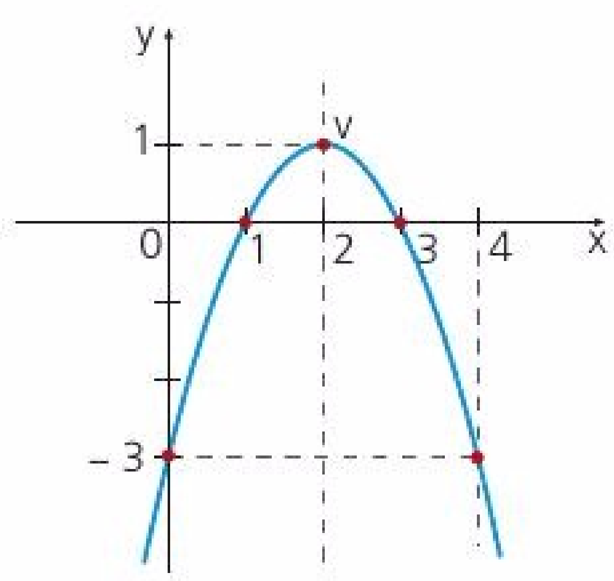
b) Vejamos agora a construção do gráfico de $f(x) = -x^2 + 4x - 3$.

Aqui, temos $a = -1$; $b = 4$ e $c = -3$. Vamos, inicialmente, determinamos x_V:

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{-2} = 2$$

A partir de x_V construímos a tabela e, depois, o gráfico.

x	$y = -x^2 + 4x - 3$
0	–3
1	0
2	1
3	0
4	–3



Note nesse gráfico que, como $a < 0$, a parábola tem a concavidade voltada para baixo.

c) As coordenadas do vértice servem, também, para determinar o conjunto imagem de uma função quadrática. Veja o caso da função de domínio real $f(x) = x^2 - 6x + 8$.

Inicialmente calculamos a ordenada do vértice:

$$y_V = -\frac{\Delta}{4a}$$

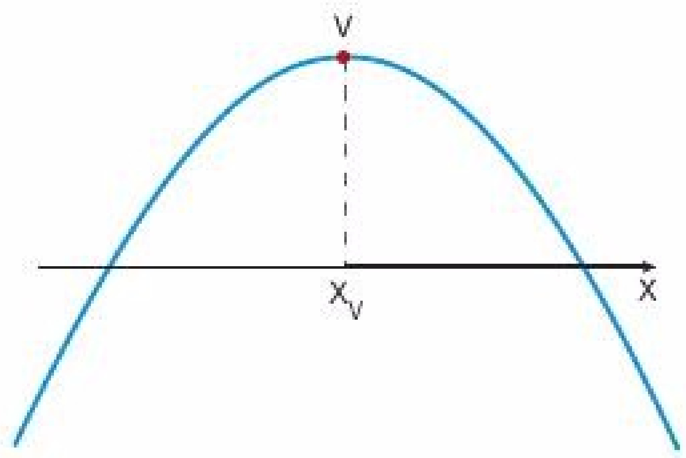
$$y_V = -\frac{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8}{4 \cdot (1)} = -\frac{4}{4} = -1$$

Como $a > 0$, a concavidade está voltada para cima. Portanto o conjunto imagem é:

$$Im = \{y \in R \,/\, y \geq -1\}$$

d) Também para a determinação de intervalos de crescimento e decrescimento utilizamos as coordenadas do vértice. Vamos determinar, por exemplo, para quais valores do domínio a função $f(x) = -x^2 - 6x$ é decrescente.

Como $a = -1 < 0$, o gráfico é uma parábola de concavidade para baixo.



Observe que a função é decrescente para valores de x maiores que a abscissa x_v do vértice.

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{-2} = -3$$

Logo, $S = \{x \in R \,/\, x > -3\}$

Atividades

29. Determine as coordenadas do vértice em cada função e indique se é ponto de máximo ou ponto de mínimo. Lembre-se de que, para isso, você deve verificar se a parábola tem concavidade voltada para cima ou para baixo.

a) $f(x) = x^2$ ponto de mínimo
b) $f(x) = -6x^2 - 12x$ ponto de máximo
c) $f(x) = -20x^2 - 300$ ponto de máximo
d) $f(x) = x^2 - 12x + 10$ ponto de mínimo

! Construir gráficos

30. Esboce o gráfico das funções:

a) $f(x) = x^2$
b) $f(x) = x^2 - 4$
c) $f(x) = -x^2$
d) $f(x) = -x^2 + 1$

Construções no caderno.

31. Determine para quais valores de **p** as funções têm como gráfico uma parábola com concavidade voltada para cima:

a) $f(x) = -(-2p + 6)x^2 + (5 - p)x + 1$ $p > 3$
b) $f(x) = (p + 3)x^2 - 5x + 6$ $p > -3$
c) $f(x) = (4p - 3)x^2 - 6$ $p > \frac{3}{4}$

32. Determine o conjunto imagem de cada uma das funções de domínio real:

a) $f(x) = 3x^2 - 9$ $Im = \{y \in R \,/\, y \geq -9\}$
b) $f(x) = -2x^2 + 10x$ $Im = \{y \in R \,/\, y \leq 12{,}5\}$
c) $f(x) = x^2 - 5x + 10$ $Im = \{y \in R \,/\, y \leq 3{,}75\}$
d) $f(x) = (2x + 3)(3x + 5)$ $Im = \{y \in R \,/\, y \geq -0{,}04\}$

33. Determine para quais valores do domínio a função **f** é decrescente:

a) $f(x) = 3x^2 - 6x + 10$ $\{x \in R \,/\, x < 1\}$
b) $f(x) = -5x^2 + 8x - 12$ $\{x \in R \,/\, x > 0{,}8\}$
c) $f(x) = x^2 - 4$ $\{x \in R \,/\, x < 0\}$
d) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}$ $\{x \in R \,/\, x > 0\}$

34. Determine o ponto que a parábola cruza o eixo $\overleftrightarrow{Oy}$:

a) $f(x) = x^2 - 6x - 3$ $y = -3$
b) $f(x) = -x^2 - 200$ $y = -200$
c) $f(x) = -x^2 - 3x + 12$ $y = 12$
d) $f(x) = 5x^2 - 16x$ $y = 0$

35. Dadas as funções reais $f(x) = x^2 - 16$ e $g(x) = -2x^2 + 4x + 1$, calcule:

a) $f(0)$ $f(0) = -16$
b) $g(0)$ $g(0) = 1$
c) $f(1) + g\left(\frac{1}{2}\right)$ $\frac{-25}{2}$

Zeros da função quadrática e estudo dos sinais

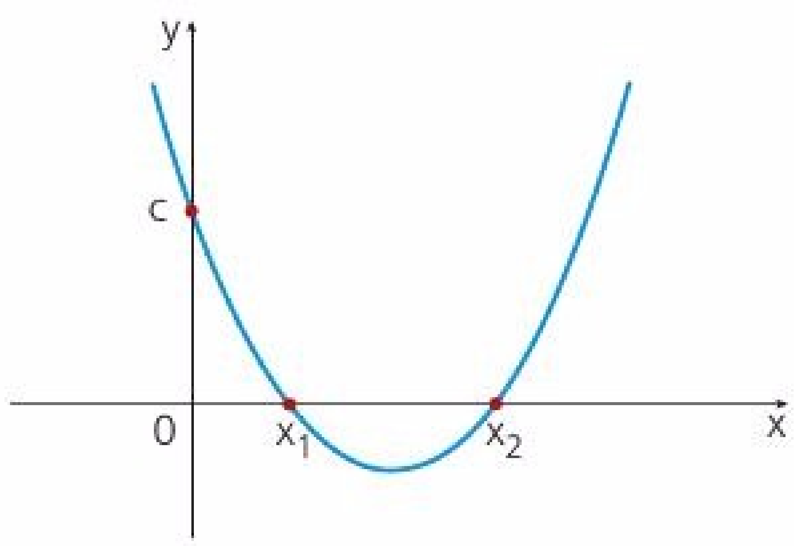
Para determinar os zeros de uma função quadrática, basta fazer $f(x) = 0$ e resolver a equação do segundo grau, utilizando a fórmula de Bhaskara, que estudamos anteriormente. Assim, para $f(x) = a^2 + bx + c$, fazemos $f(x) = 0$ e calculamos:

$$a^2 + bx + c = 0$$

A solução geral é:

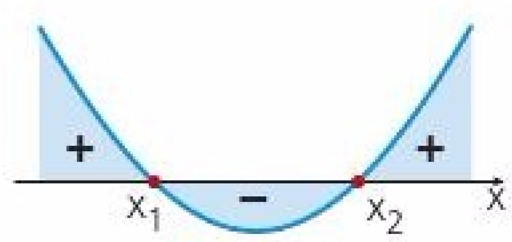
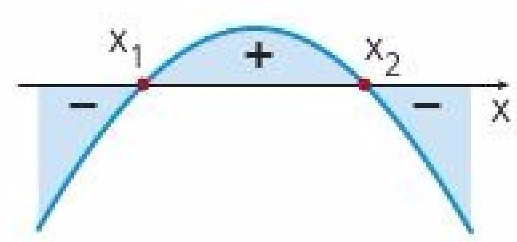
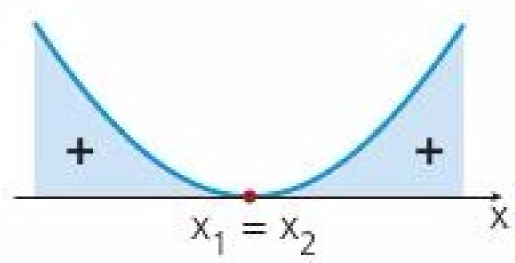
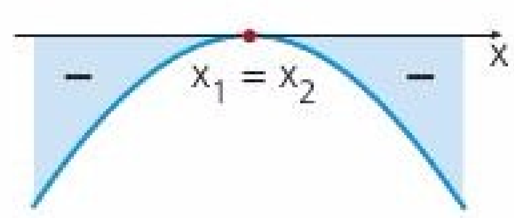
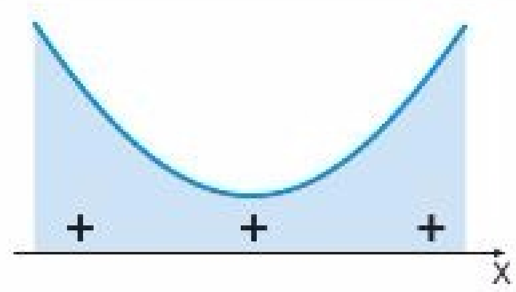
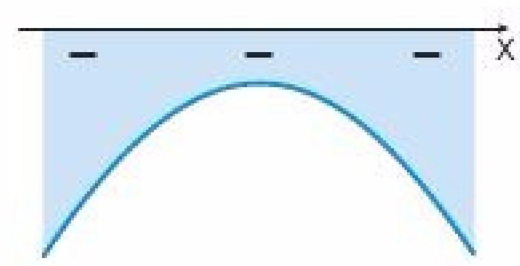
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ em que } \Delta = b^2 - 4ac$$

No gráfico, as raízes indicam os pontos em que a parábola cruza o eixo $\overleftrightarrow{Oy}$.



O ponto (0,c), por sua vez, indica onde a parábola "corta" o eixo Oy.

O estudo dos sinais da função quadrática pode ser realizado combinando-se o sinal do coeficiente **a**, que determina se a concavidade está voltada para cima ou para baixo, com o sinal do Δ, que determina a existência e o número de raízes reais. Temos, então seis possibilidades mostradas no quadro a seguir.

Δ \ a	$a > 0$	$a < 0$
$\Delta > 0$		
$\Delta = 0$		
$\Delta < 0$		

Observe nos exemplos a seguir o cálculo dos zeros (ou raízes) de funções quadráticas, bem com o estudo de seus sinais.

a) Vamos determinar os zeros de $f(x) = x^2 - 7x + 12$

$$a = 1,\ b = -7,\ c = 12$$

Como: $\Delta = b^2 - 4ac$

$$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot (1)\ (12) \rightarrow \Delta = 1$$

$\Delta > 0$, portanto 2 raízes reais diferentes.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{1}}{2}$$

Logo, os zeros de $f(x) = x^2 - 7x + 12$ são $x_1 = 3$ e $x_2 = 4$.

b) Observe, agora, que a função $f(x) = 2x^2 - 5x + 10$ não tem zeros (ou raízes) reais:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot (2)\ (10) = -55$$

$\Delta < 0$, portanto não existem raízes reais, pois $\sqrt{-55} \notin R$

c) Veja agora o estudo dos sinais de algumas funções quadráticas.

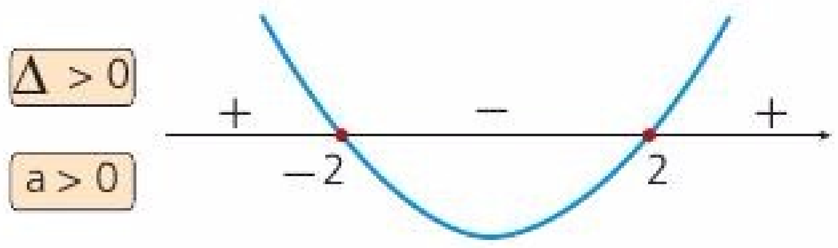
- $f(x) = x^2 - 4$

Vamos inicialmente determinar as raízes.

$$\Delta = 0^2 - 4 \times (1)\ (-4) = 16$$

$$x = \frac{0 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{\pm 4}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Na sequência, fazemos um esboço do gráfico para melhor visualizar o estudo de sinais:



Dessa forma:

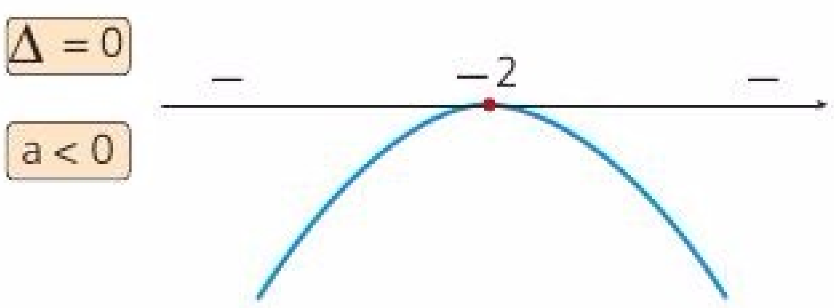
$$x < -2 \text{ ou } x > 2 \rightarrow f(x) > 0$$
$$x = -2 \text{ ou } x = 2 \rightarrow f(x) = 0$$
$$-2 < x < 2 \rightarrow f(x) < 0$$

- $f(x) = -x^2 - 4x - 4$

$D = (-4)^2 - 4 \cdot (-1)\ (-4) \rightarrow D = 0$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{-2} = \frac{4 \pm 0}{-2}$$

$x_1 = x_2 = -2$

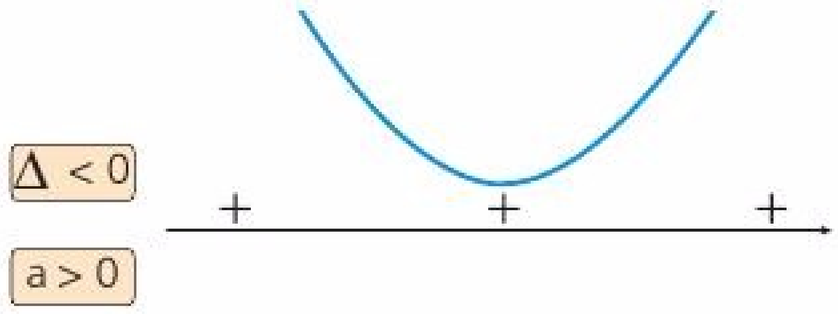


$$x = -2 \rightarrow f(x) = 0$$
$$x \neq -2 \rightarrow f(x) < 0$$

- $f(x) = x^2 - 5x + 10$

  $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot (1)\,(10) = -15$

  $\Delta < 0$, portanto não existem raízes reais.

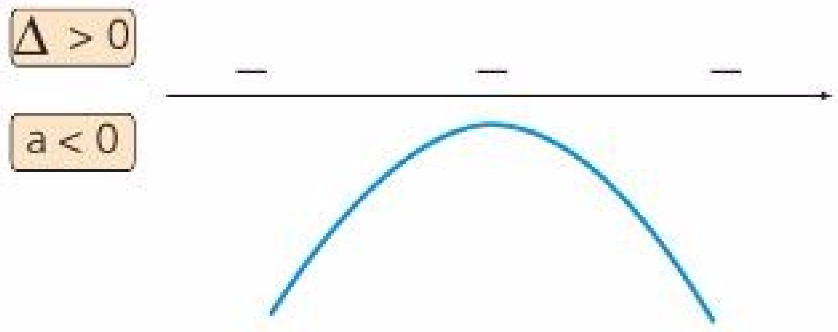


$\forall\, x \in R \rightarrow y > 0$

- $f(x) = -x^2 + x - 6$

  $\Delta = 1^2 - 4 \cdot (-1)\,(-6) = -23$

  $\Delta < 0$, portanto não existem raízes reais.



$\forall\, x \in R \rightarrow y < 0$

Atividades

36. Determine os zeros das funções:

a) $f(x) = 3x^2 - 6x + 3$ $x = +1$

b) $f(x) = 6x^2 - 12x$ $x = 0$ ou $x = 2$

c) $f(x) = 5x^2 - 20$ $x_1 = -2$ ou $x^2 = 2$

d) $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$ não existem zeros da função

e) $f(x) = -x^2 + 1$ $x_1 = -1$ ou $x_2 = 1$

f) $f(x) = x^2 + 16$ não existem zeros da função

37. Considere a função real $f(x) = px^2 - 5x + 6$. Determine **p** para que $x = 3$ seja zero da função. $p = 1$

38. Dada a função real $f(x) = x^2 + 3x - 10$, determine:

a) os pontos em que a curva cruza $\overleftrightarrow{Ox}$; $x_1 = -5$ ou $x = 2$

b) o intervalo do domínio em que a função é negativa. $D = \{x \in R \,/\, -5 < x < 2\}$

39. Determine os valores de **m** para que as funções tenham dois zeros reais e iguais:

a) $f(x) = mx^2 - 5x + 3$ $m = \frac{25}{12}$

b) $f(x) = 2x^2 - 5mx + 3$ $m = \pm\frac{2\sqrt{6}}{5}$

40. Faça o estudo do sinal das funções:

a) $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$

b) $f(x) = -3x^2 + 10x - 9$

c) $f(x) = -x^2 - x + 2$

d) $f(x) = x^2 - 6x + 9$

a) $\begin{cases} 1 < x < \frac{3}{2} \rightarrow y < 0 \\ x = 1 \text{ e } x = \frac{3}{2} \rightarrow y = 0 \\ 1 < x \text{ e } x > \frac{3}{2} \rightarrow y > 0 \end{cases}$

b) $p\,/\,x \in R \rightarrow y < 0$

c) $\begin{cases} -2 < x < 1 \rightarrow y > 0 \\ x = -2 \text{ ou } x = 1 \rightarrow y = 0 \\ x < -2 \text{ ou } x > 1 \rightarrow y < 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x = 3 \rightarrow y = 0 \\ 3 < x < 3 \rightarrow y > 0 \end{cases}$

Para estudar

41. Sabendo que $\{(1, 3), (5, 3)\} \subset P^2$ e $n(P^2) = 9$, represente os pares ordenados do conjunto P^2.

42. Se $A = \{0, 2, 3\}$, $B = \{5, 6\}$ e $C = \{1, 3, 4\}$, determine:

a) $A \cdot B$

b) $B \cdot C$

43. Diga em qual quadrante está localizado cada par ordenado:

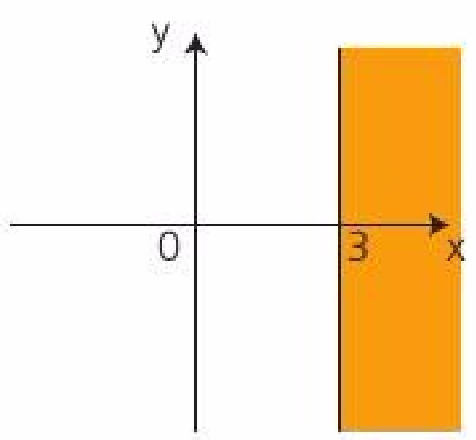
a) P(3, 2)

b) Q(–3, 2)d) T(–3, –2)

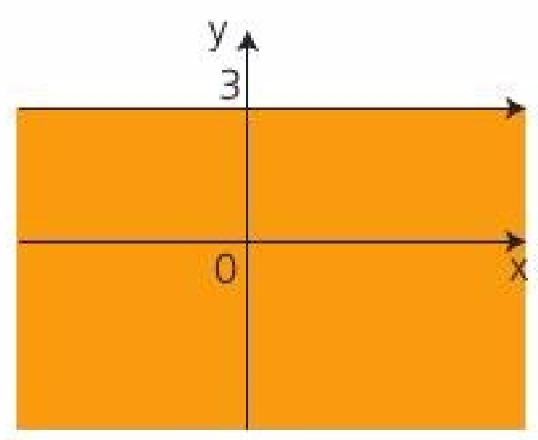
c) S(3, –2)

44. São dados os gráficos de $A \cdot B$. Determine A e B para cada caso.

a)



b)



Construir gráficos

45. Construa o gráfico $A \cdot B$ em cada caso:

a) a = R e B = (2)

b) A = {2} e B = R

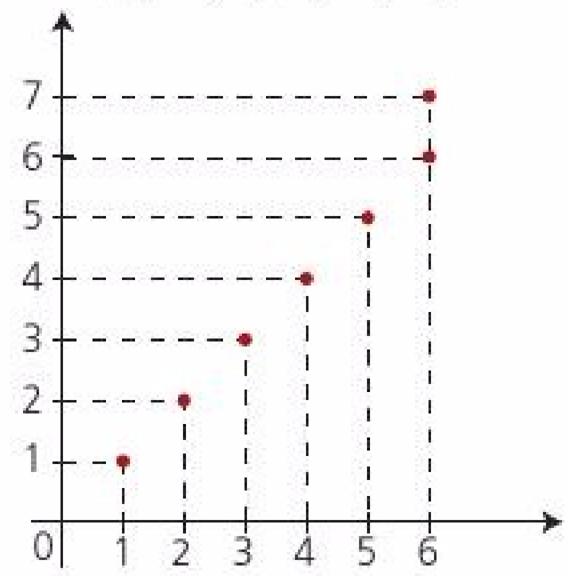
c) A = [–2, 2] e B = R

d) A = R e B = {–2, 2}

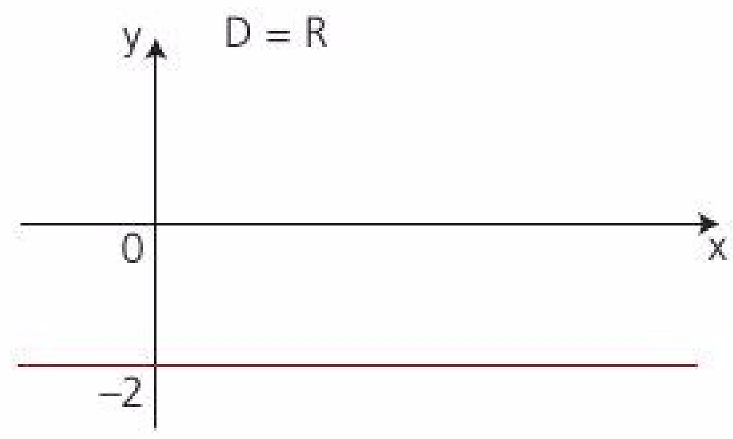
46. Considere os conjuntos $A = \{-3, -2, -1, 0\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e a função **f** de A em B tal que $f(x) = 4$. Dê o domínio e o conjunto imagem.

47. Quais gráficos correspondem à representação de função?

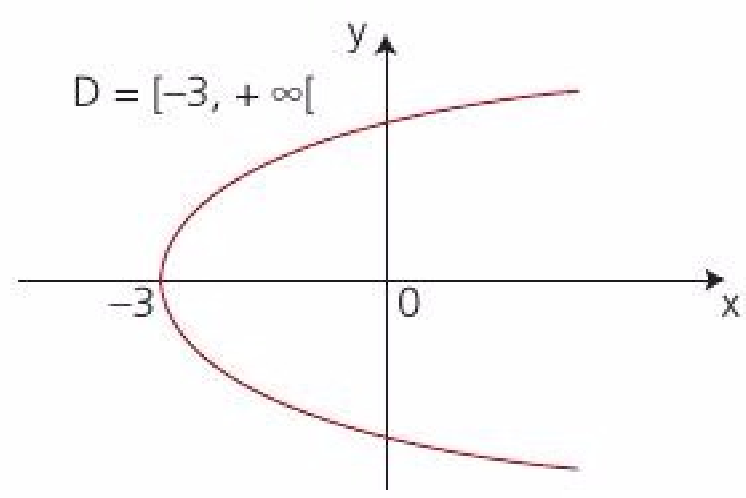
a) D = {1, 2, 3, 4, 5, 6}



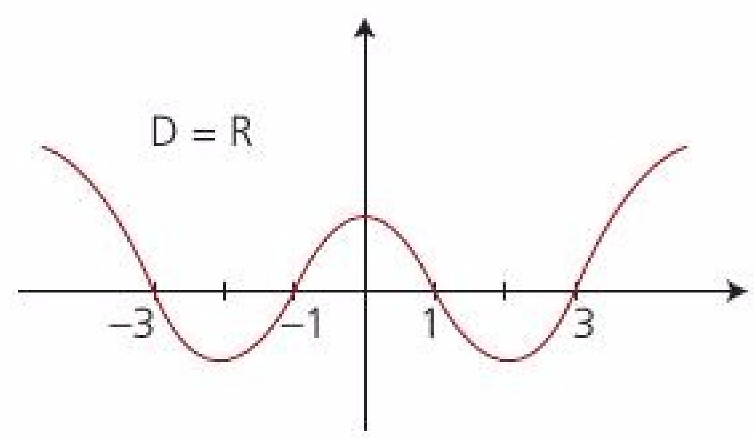
b)



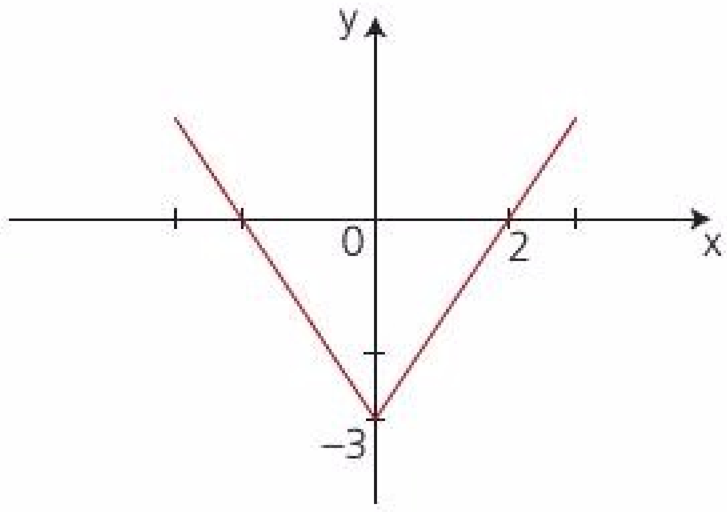
c)



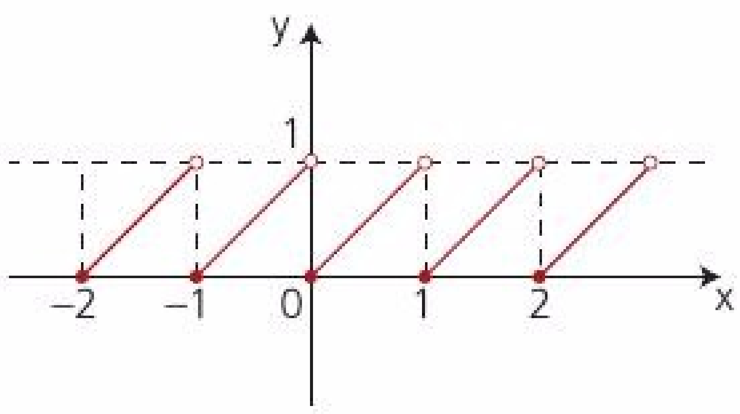
d)



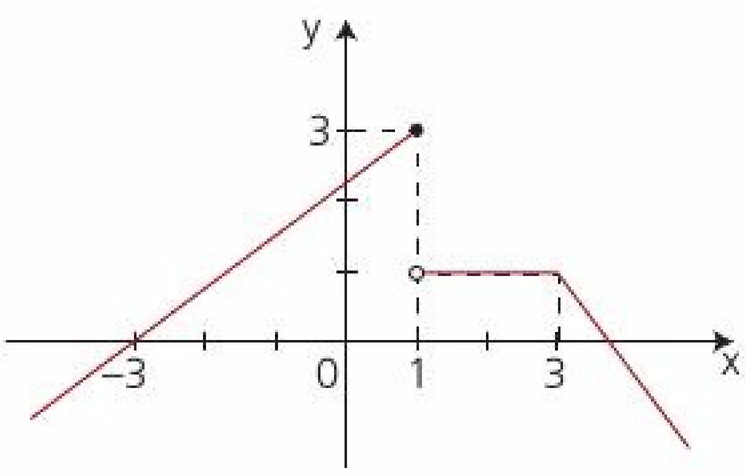
e)



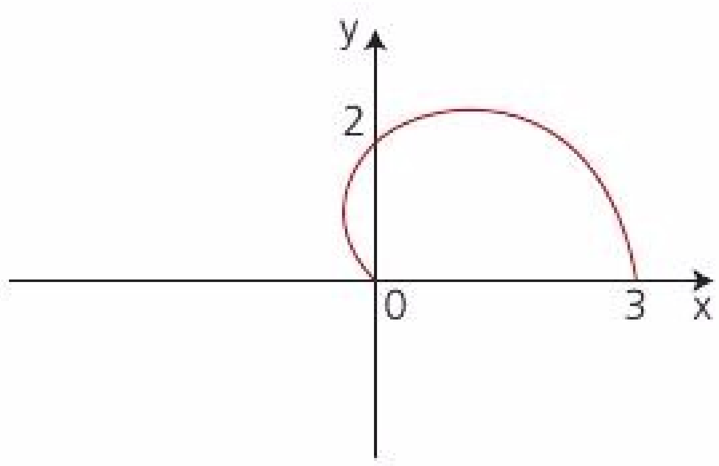
f)



g)



h)



48. Dada a função real $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$, obtenha $f(k + 1)$.

49. Seja $f(x) = \dfrac{2ax - 3}{x - b}$, com $x \neq b$, uma função de variável real. Calcule os valores reais **a** e **b** para que se tenham $f(0) = -1$ e $f(-2) = 1$.

50. A distância percorrida por um carro é dada pela $d(t) = 20t + 10$, em que **d** é a distância em quilômetros e **t** o tempo em horas. Qual a distância percorrida em 4 horas?

51. Analise cada sentença e escreva o domínio da função:

a) $f(x) = \dfrac{3x}{x^2 - 4}$

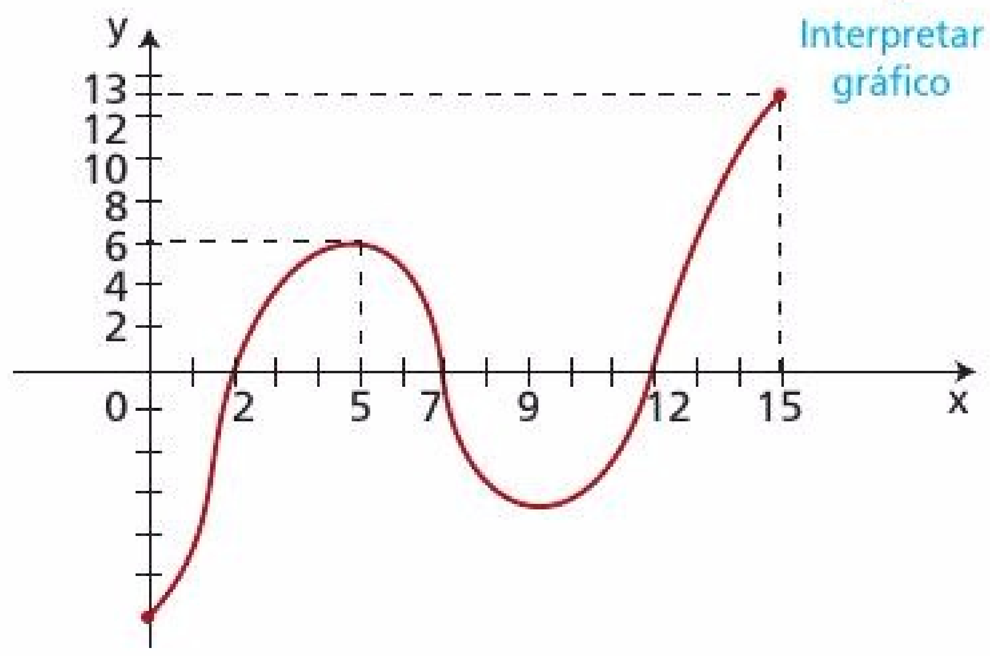
b) $f(x) = \dfrac{3}{x + 4} - \dfrac{5}{x - 2}$

c) $f(x) = \sqrt{4 - x}$

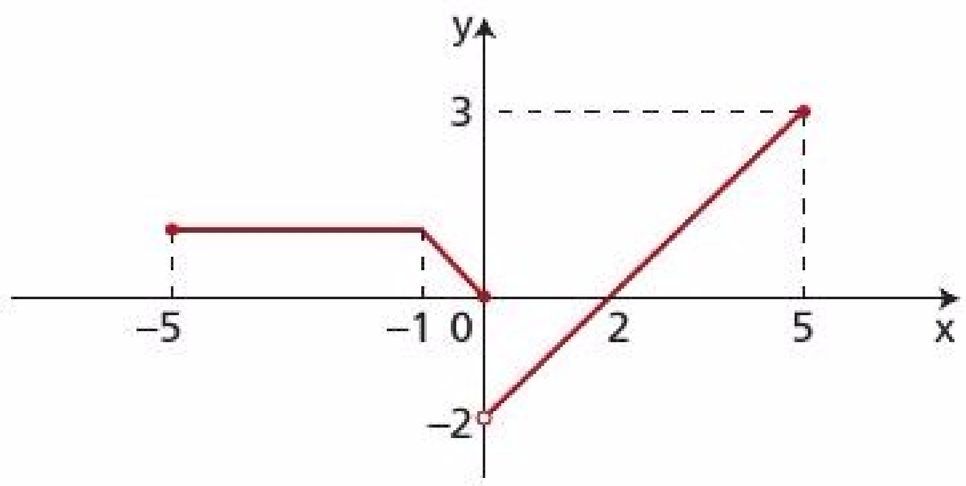
c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x - 8}}{\sqrt{15 - x}}$

52. Dado o gráfico da função **f** abaixo, determine o domínio da função em **R** e os valores de **x** para os quais $f(x) > 0$.

Interpretar gráfico



53. Analise o gráfico de **f** e determine:

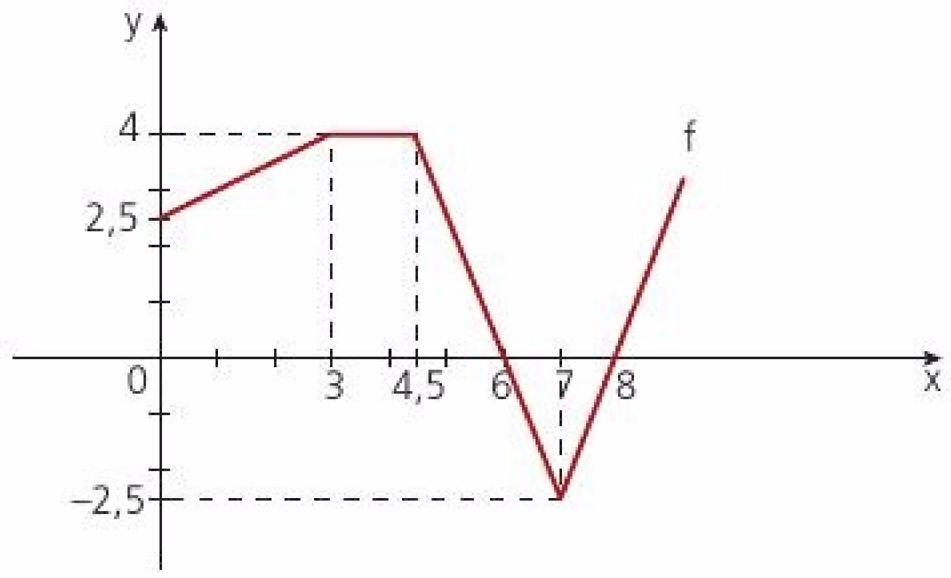


a) domínio
b) imagem
c) raízes
d) $x \in R$ tal que $f(x) < 0$

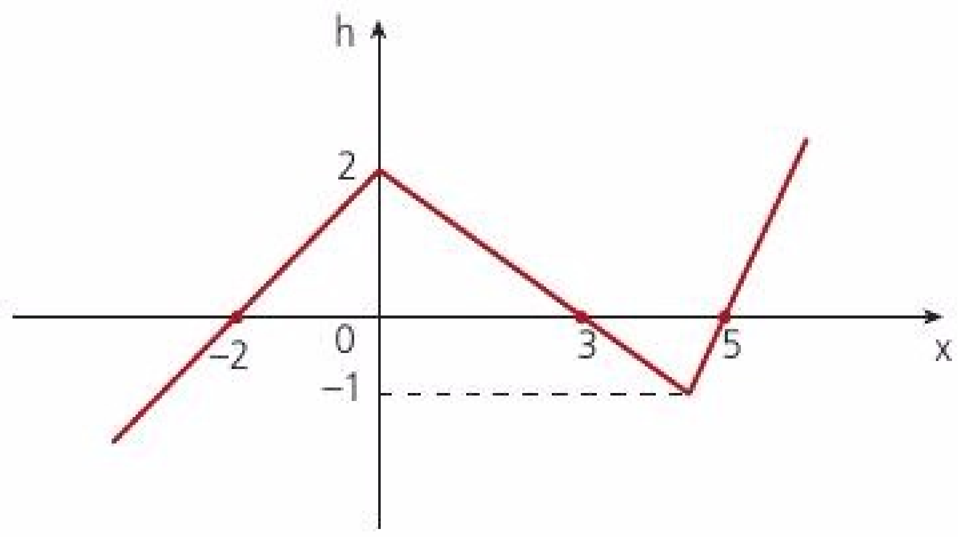
54. Faça o estudo do sinal das funções:

a) $f(x) = 2x + 5$
b) $f(x) = -2x + 8$
c) $f(x) = x^2 - 4$
d) $f(x) = -x^2 + 1$

55. Faça o estudo do sinal da função **f** de domínio R. Interpretar gráfico



56. Observe o gráfico da função real **h** e responda:



a) Quais são os zeros?

b) Quais são os intervalos do domínio em que $h(x) > 0$?

c) Quais são os intervalos do domínio em que $h(x) < 0$?

57. O gráfico abaixo representa a produção de uma usina de açúcar entre 2000 e 2010.

Analisando o gráfico, assinale verdadeiro ou falso:

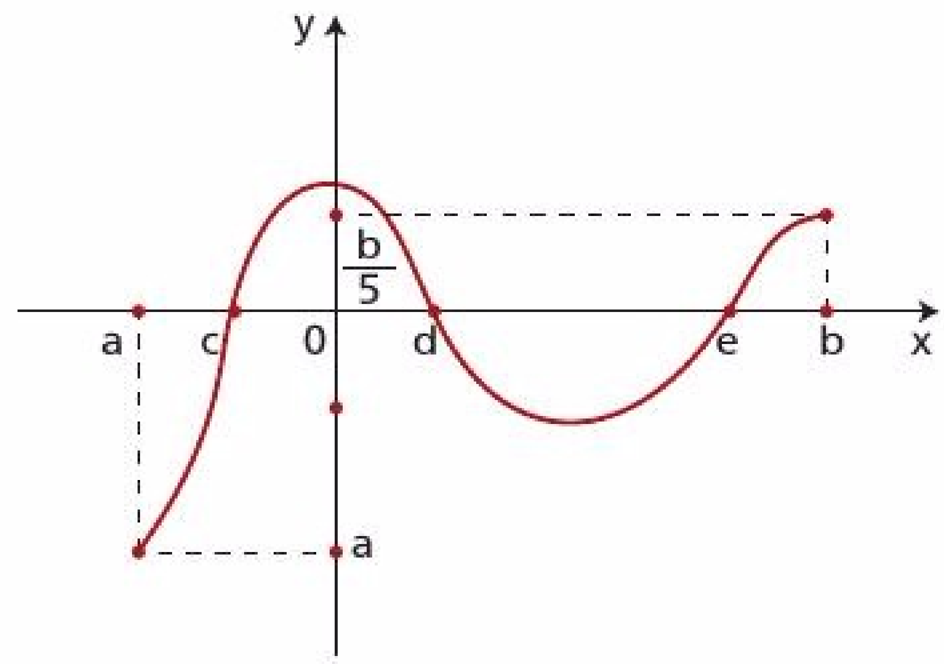
a) O gráfico representa uma função sempre crescente.

b) A maior produção ocorreu em 2008.

c) A produção decresce a partir de 2008.

d) A produção em 2003 foi de 20 milhões de quilos.

58. Considere a função **f**, de [a, b] em R, cujo gráfico se vê a seguir. Assinale verdadeiro ou falso:



a) $f(x) \leq 0$ para todo x no intervalo [d, e].

b) f é crescente no intervalo [0, b].

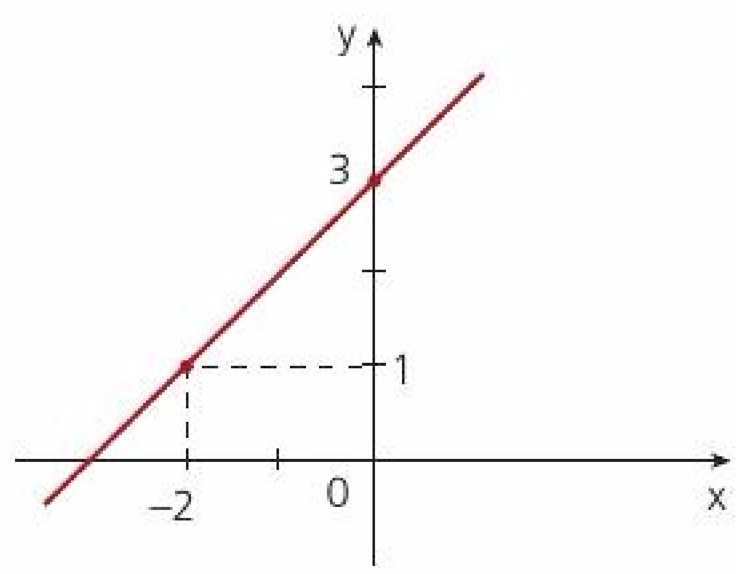
c) $f(e) > f(d)$.

d) f tem apenas duas raízes.

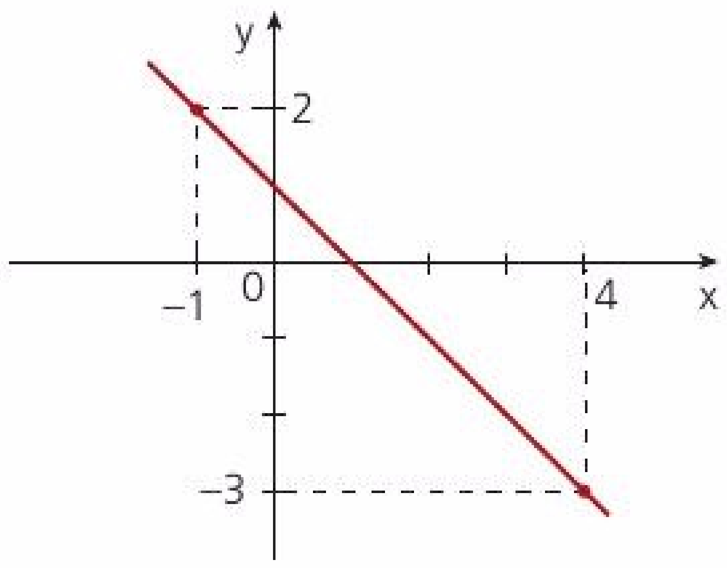
59. Considere a função afim $f(x) = ax + b$. Sendo $f(2) = -3$ e $f(-3) = 7$, calcule $f(-1)$.

60. Obtenha a função correspondente aos gráficos:

a)



b)



61. Qual é o domínio das funções?

a) $f(x) = \sqrt{2x + 6}$

b) $f(x) = \dfrac{2x + 1}{\sqrt{3x - 6}}$

c) $f(x) = \sqrt{4 - x} + \sqrt{2x - 8}$

d) $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{3x - 1}} - \sqrt{5x + 10}$

62. Dada $f(x) = (3m - 6)x^2 + 3m + 2$. Calcule $m \in R$ para que a função tenha como gráfico uma parábola concavidade:

a) para cima;

b) para baixo.

63. Considere as funções $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x^2$ e $h(x) = 3x^2$.

a) Dê as coordenadas do vértice de cada parábola.

b) Dê o conjunto imagem de cada função.

64. Dada a função $f(x) = x^2 + 2x + m$, calcule $m \in R$, para que a função tenha:

a) dois zeros reais e diferentes;

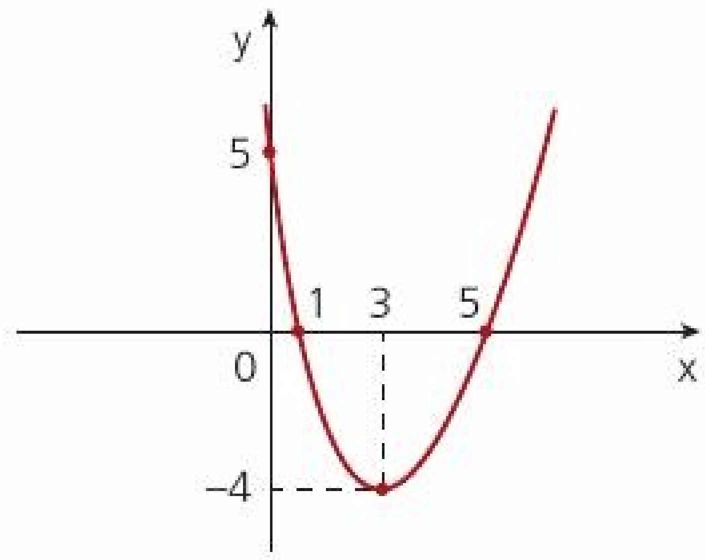
b) dois zeros reais e iguais;

c) não tenha zeros reais.

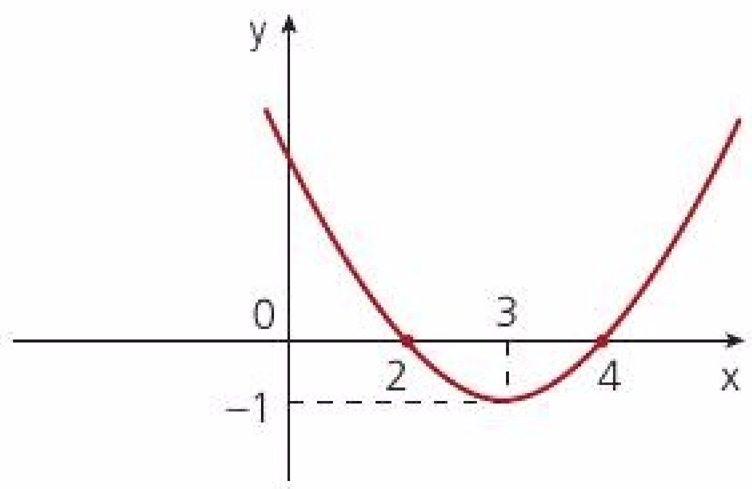
65. Dada $f(x) = x^2 - x$, determine os pontos em que o gráfico da função corta os eixos coordenados.

66. Determine a função correspondente aos gráficos:

a)



b)



67. Obtenha o vértice de cada parábola e indique se é ponto de máximo ou de mínimo.

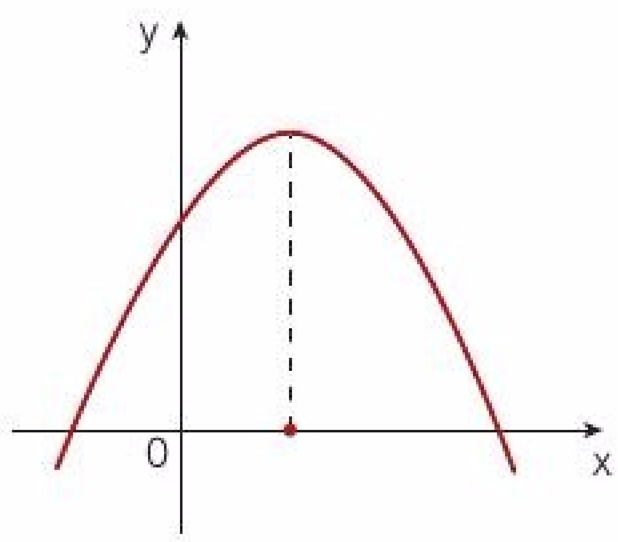
a) $f(x) = x^2 - 5x + 6$

b) $f(x) = 1 - 4x^2$

c) $f(x) = x^2$

d) $f(x) = -4x^2 + 2x - 1$

68. Considerando o gráfico abaixo referente ao trinômio de 2º grau $y = ax^2 + bx + c$, pode-se afirmar que:



a) $a > 0$; $b > 0$; $c < 0$

b) $a > 0$; $b < 0$; $c > 0$

c) $a < 0$; $b < 0$; $c < 0$

d) $a < 0$; $b > 0$; $c < 0$

e) $a < 0$; $b > 0$; $c > 0$

Resolução das atividades

1. $A = \{0, 1, -1\}$, $B = \{-2, 3\}$, $C = \{4\}$

a) $A \cdot B = \{(0, -2), (0, 3), (1, -2), (1, 3), (-1, -2), (-1, 3)\}$

b) $B \cdot A = \{(-2, 0), (-2, 1), (-2, -1), (3, 0), (3, 1), (3, -1)\}$

c) $B^2 = \{(-2, -2), (-2, 3), (3, -2), (3, 3)\}$

d) $C \cdot B = \{(4, -2), (4, 3)\}$

2. $Q \cdot P = 4$

a) $p = q = 3$

$p \cdot q = 9$

b) $p = 2$ e $q = 5$

$p \cdot q = 10$

3. $A = \{2; 4\}$ e $B = \{1; 4\}$

a) $A \cdot B = \{(2, 1), (2, 4); (4, 1), (4, 4)\}$

b) $B \cdot A = \{(1, 2), (1, 4), (4, 2), (4, 4)\}$

c) $A \cdot A = \{(2, 2), (2, 4), (4, 2), (4, 4)\}$

d) $B \cdot B = \{(1, 1), (1, 4), (4, 1), (4, 4)\}$

4. $C = \{c \in R / c \geq 0\}$
$D = \{d \in R / d \leq 3\}$

a) $C \cdot D = \{(0, 3), (0, 2), (0, 1), (0, 0), (1, 3), (1, 2), (1, 1), (1, 0), (2, 3), (2, 2), (2, 1), (2, 0), (3, 3), (3, 2), (3, 1), (3, 0)\}$

b) $D \cdot C = \{(3, 0), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (2, 0), (2, 1), (2, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3)\}$

5. $f : R \rightarrow R$
$f(x) = x^2 - x + 1$

a) $f(0) = 1$

b) $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} + 1 =$

$= \dfrac{1}{4} + \dfrac{2}{4} + \dfrac{4}{4} = \dfrac{7}{4}$

c) $f(\sqrt{2}) = 2 - \sqrt{2} + 1 = 3 - \sqrt{2}$

6. $f : A \rightarrow B$

$A = \{-2, 0, 2\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$f(x) = x^2$

$Im = \{0, 4\}$

7. $A = \{x \in Z / -3 \leq x \leq Z\}$

$B = \{x \in Z / -5 \leq x \leq 5\}$

$f : A \rightarrow B$

a) $y = f(x) = x$

$Im = \{x \in Z / -3 \leq x \leq 2\}$

b) $y = f(x) = 2x + 1$

$Im = \{(-3, -5), (-2, -3), (-1, -1), (0, 1), (1, 3), (2, 5)\}$

8. $f : R \rightarrow R$
$f(x) = 2x - 8$

a) $-2 = 2x - 8$

$6 = 2x$

$x = 3$

$D = 3$

b) $\dfrac{2}{5} = 2x - 8$

$2 = 10x - 40$

$42 = 10x$

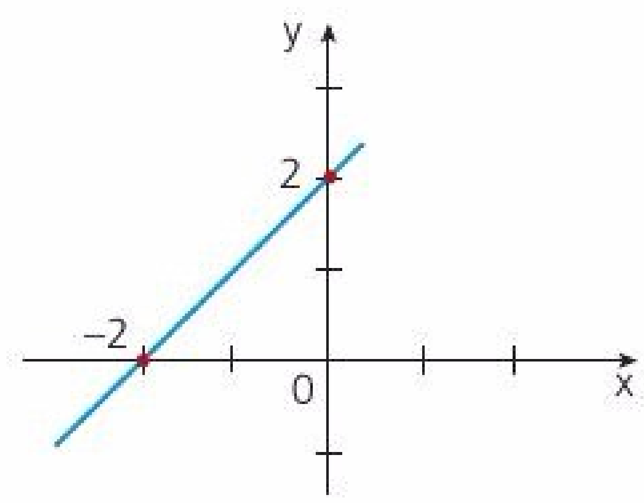
$x = 4{,}2 = \dfrac{21}{5}$

$D = \dfrac{21}{5}$

9. $f : R \rightarrow R$

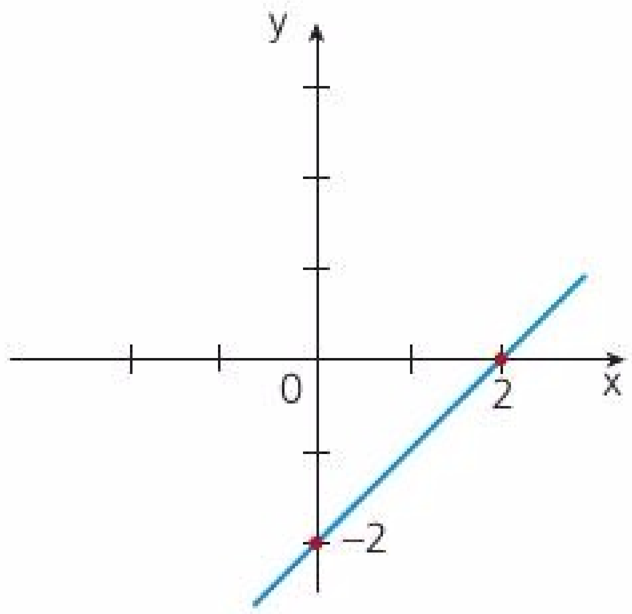
a) $f(x) = x + 2$

x	y
0	2
–2	0



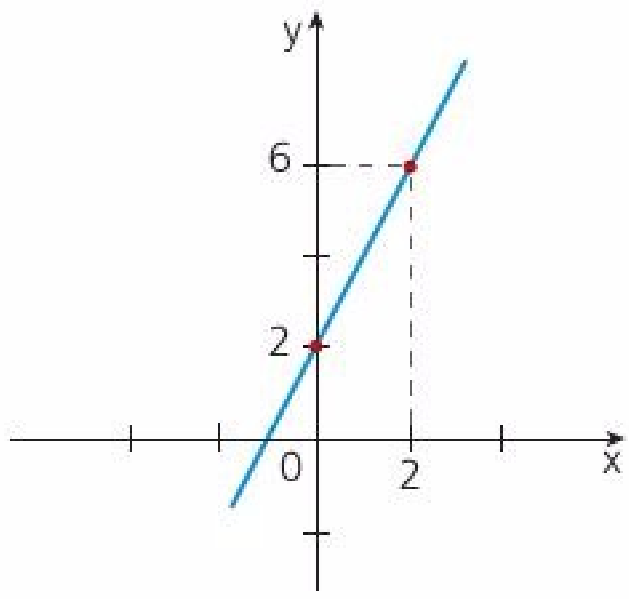
b) $f(x) = x - 2$

x	y
0	–2
2	0



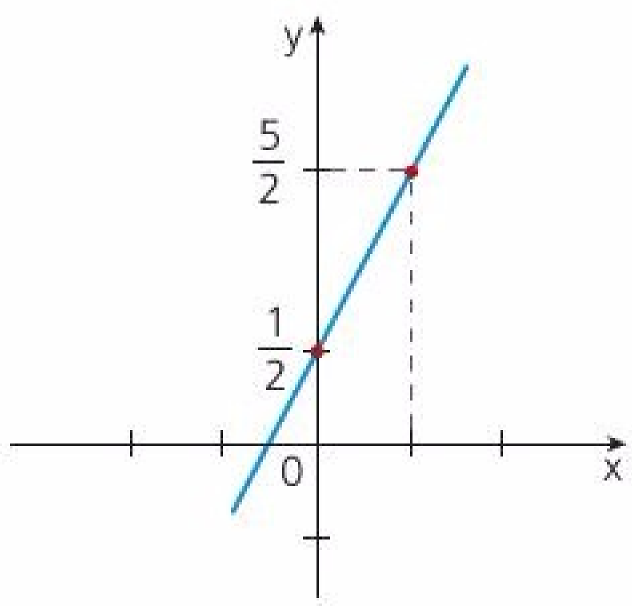
c) $f(x) = 2x + 2$

x	y
0	2
2	6



d) $f(x) = 2x + \frac{1}{2}$

x	y
0	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{5}{2}$



10. $f(x) = -10x^2 + 100x + p$

p = população de peixe

x = mês

a) $2\,011 \rightarrow p = 2\,000$

$x = 4$ (abril)

$f(4) = -10 \cdot 4^2 + 100 \cdot 4 + 2\,000$

$= -160 + 400 + 2\,000$

$f(4) = 2\,240$

$x = 6$ (junho)

$f(6) = -10 \cdot 6^2 + 100 \cdot 6 + 2\,000$

$= -360 + 600 + 2\,000$

$= 2240$

b) $2\,210 = -10x^2 + 100x + 2\,000$

$-10x^2 + 100x - 210 = 0$

$-x^2 + 10x - 21 = 0$

$x_1 = 3$

$x_2 = 7$

meses de março e julho

11. a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$

$Dm = x \in R$

b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

$x \geq 0$

$D = \{x \in R \,/\, x \geq 0\}$

c) $f(x) = \frac{1}{x}$

$x \neq 0$

$D = \{x \in R \,/\, x \neq 0\}$

d) $f(x) = \frac{1}{x - 3}$

$x - 3 \neq 0$

$x \neq 3$

$D = \{x \in R \,/\, x \neq 3\}$

e) $f(x) = \sqrt{2x - 7}$

$2x - 7 \geq 0$

$2x \geq 7$

$x \geq \frac{7}{2}$

$D = \left\{x \in R \,/\, x \geq \frac{7}{2}\right\}$

f) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4 - x}}$

$\sqrt{4 - x} > 0$

$4 - x > 0$

$x < 4$

$D = \{x \in R \,/\, x < 4\}$

12. a) $D = \{x \in R \,/\, -7 \leq x \leq 7\}$

$Im = \{y \in R \,/\, -4 \leq y \leq 5\}$

b) $D = R$

$Im = \{y \in R \,/\, y \leq 4\}$

c) $D = \{x \in R \,/\, -\infty < x < 0 \text{ ou } 0 < x < +\infty\}$

$Im = \{y \in R \,/\, y > 0\}$

13. a) $f(x) = 2x - 6$

$2x - 6 = 0$

$2x = 6$

$x = 3$

b) $f(x) = 3x + 12$

$3x + 12 = 0$

$3x = -12$

$x = -4$

c) $f(x) = x^2 - 4x - 5$

$x^2 - 4x - 5 = 0$

$S = 4$

$P = -5$

$x_1 = 5 \text{ e } x_2 = -1$

d) $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$

$2x^2 + 3x + 1 = 0$

$\Delta = 9 - 4 \cdot 2 \cdot 1$

$\Delta = 1$

$$x = \frac{-3 \pm 1}{4} \begin{cases} x_1 = \frac{-3 + 1}{4} = -\frac{1}{2} \\ x_2 = \frac{-3 - 1}{4} = -1 \end{cases}$$

$x_1 = -\frac{1}{2} \text{ e } x_2 = -1$

14. a) $f(x) = \sqrt{3x + 1} - 5$

$\sqrt{3x + 1} - 5 = 0$

$(\sqrt{3x + 1})^2 = (5)^2$

$3x + 1 = 25$

$3x = 24$

$x = 8$

b) $f(x) = \sqrt{2x + 1} - \sqrt{x + 4}$

$\sqrt{2x + 1} - \sqrt{x + 4} = 0$

$(\sqrt{2x + 1})^2 = (\sqrt{x + 4})^2$

$2x + 1 = x + 4$

$x = 3$

15. a) $x = 1 \text{ e } f(x) = m^2x - 9 = 0$

$m^2 - 9 = 0$

$m = \pm 3$

b) $x = 3 \text{ e } f(x) = \frac{mx + 3}{x + 1} = 0$

$3m + 3 = 0$

$m = -1$

16. a) $x = 1 \text{ e } x = 4$

b) não existe

c) não existe

d) $x = 2$

17. a) $x < 2 \rightarrow y > 0$

$x = 2 \rightarrow y = 0$

$x > 2 \rightarrow y < 0$

b) $x < 5{,}2 \text{ ou } 2 < x < \frac{7}{2} \rightarrow y < 0$

$x = 5{,}2 \text{ ou } x = 2 \text{ ou } x = \frac{7}{2} \rightarrow y = 0$

$5{,}2 < x < 2 \text{ ou } x > \frac{7}{2} \rightarrow y > 0$

c) $-1 \leq x \leq 5 \rightarrow y > 0$

d) $x \in R \rightarrow y = < 0$

e) $x < 0 \rightarrow y < 0$

$x = 0 \rightarrow y = 0$

$x > 0 \rightarrow y > 0$

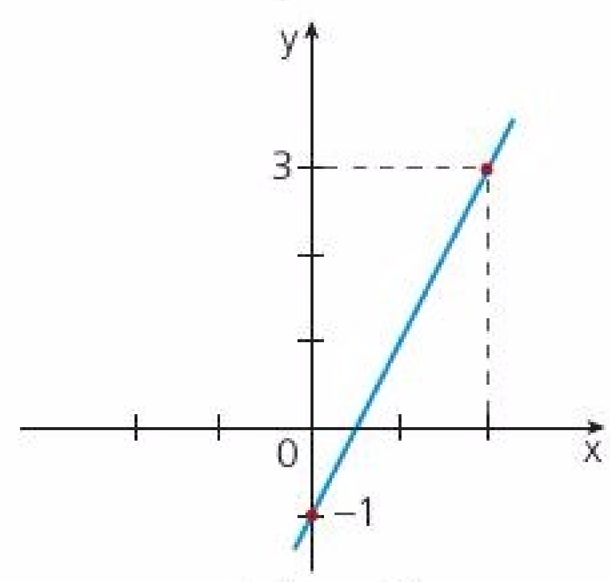
f) $0 < x < 1 \rightarrow y < 0$

$x = 1 \rightarrow y = 0$

$x > 1 \rightarrow y > 0$

18. a) $f(x) = 2x - 1$

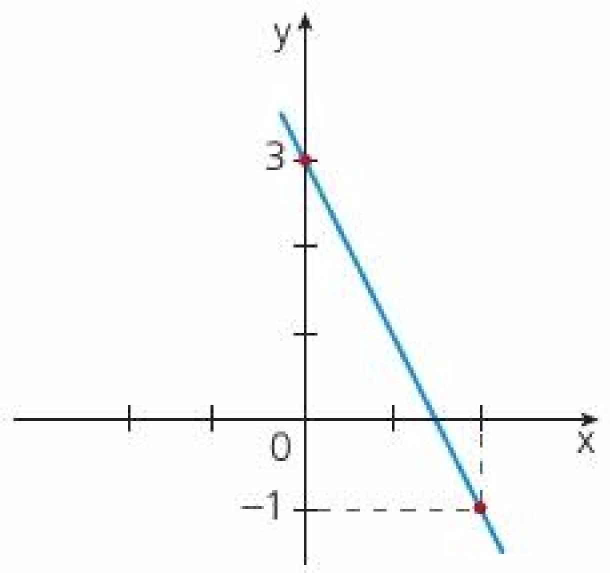
x	y
0	–1
2	3



crescente ($a > 0$)

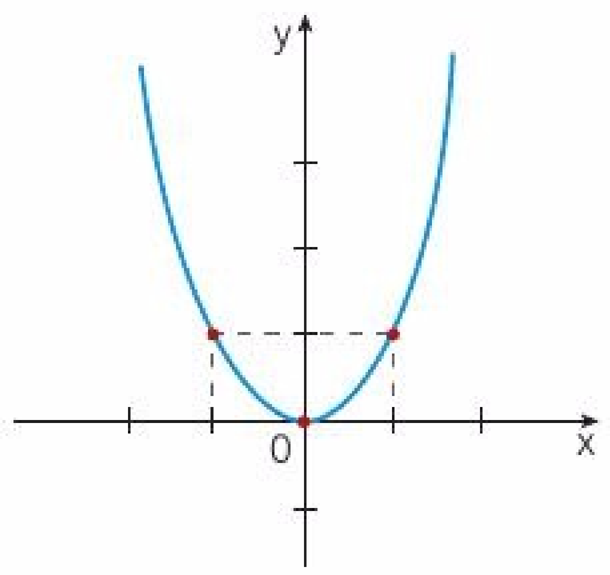
b) $f(x) = -2x + 3$

x	y
0	3
2	–1



decrescente ($a < 0$)

19. a) $f(x) = x^2$



função crescente

b) $f(x) = 5$

constante

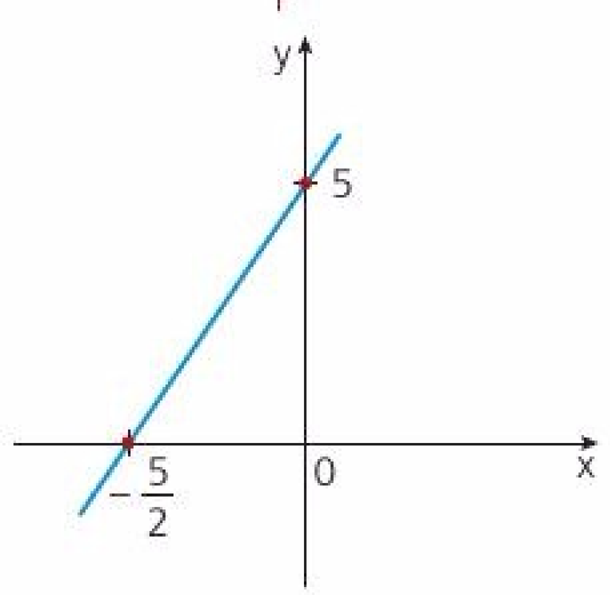
20. a) 91 a 93, 94 a 95, 97 a 2 004

b) 88 a 91, 95 a 97, 04 a 07

c) 15 832 km^2 e 15 891 km^2

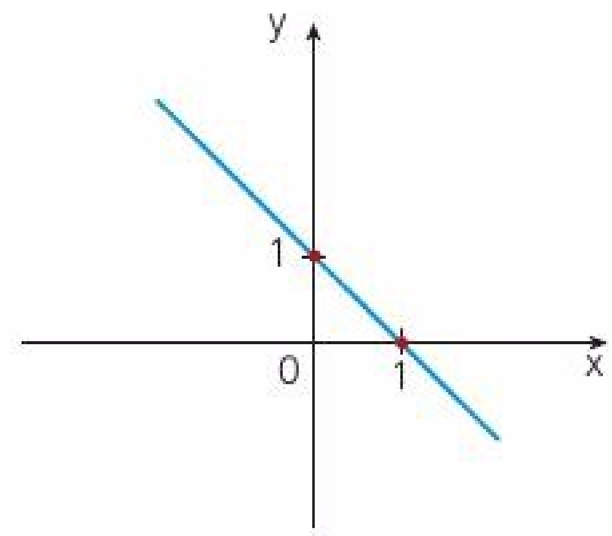
21. a) $f(x) = 2x + 5$

x	y
0	5
$-\frac{5}{2}$	0



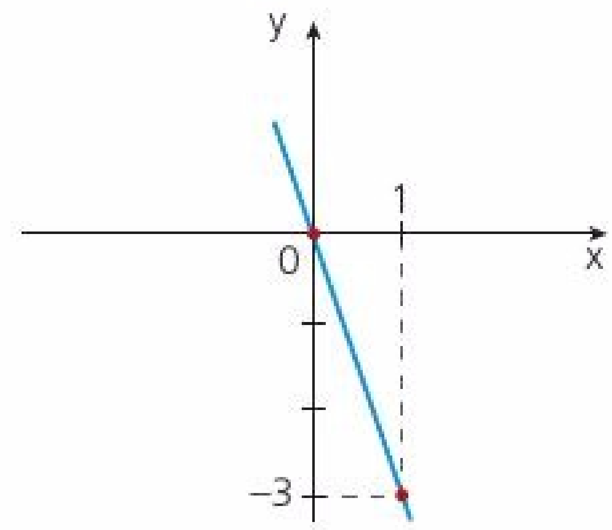
b) $f(x) = -x + 1$

x	y
0	1
1	0



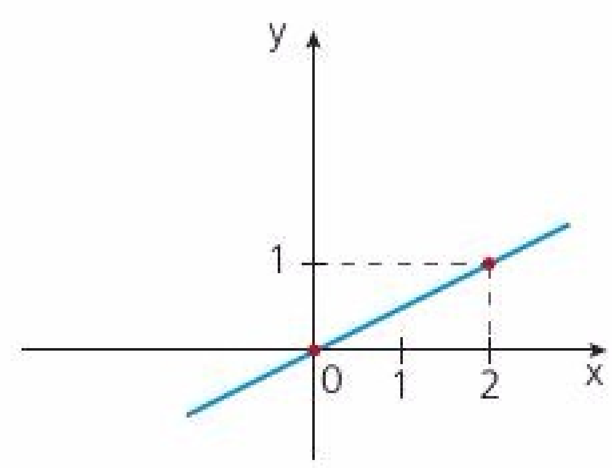
22. a) $f(x) = -3x$

x	y
0	0
1	–3

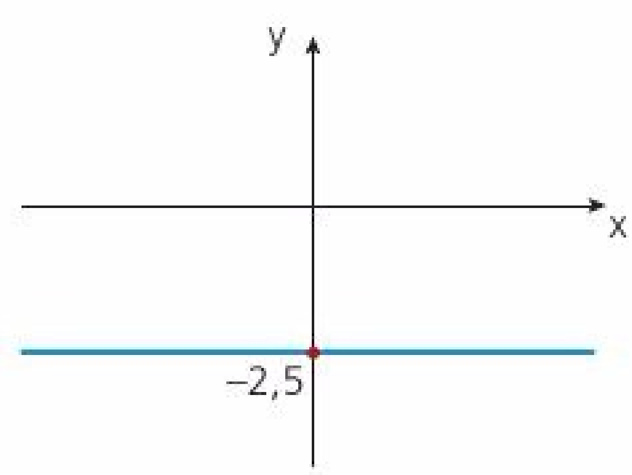


b) $f(x) = \frac{1}{2}x$

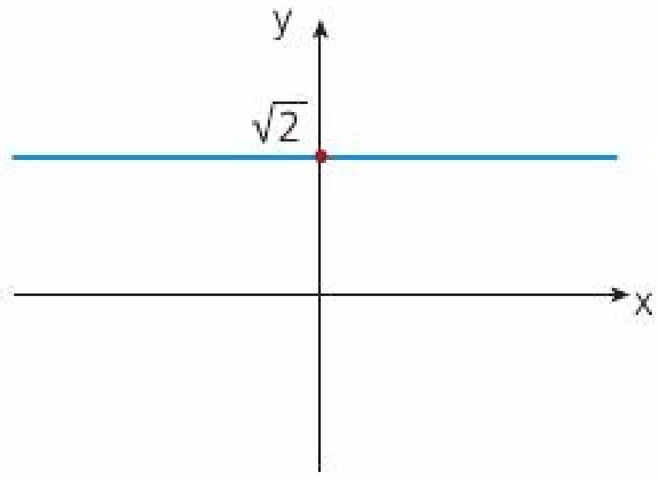
x	y
0	0
2	1



23. a) $f(x) = -2{,}5$



b) $f(x) = \sqrt{2}$



24. a) $f(x) = -2$

b) $f(x) = 0$

c) $f(x) = 0$

25. a) $f(x) = ax + b$

$(0, 0) \rightarrow 0 = b$

$(4, -2) \rightarrow -2 = 4a + b$

$-2 = 4a$

$$a = -\frac{1}{2}$$

$f(x) = -\frac{1}{2}x$

c) $f(x) = ax + b$

$(0, 3) \rightarrow 3 = a0 + b$

$b = 3$

$(3, 1) \rightarrow 1 = 3a$

$$a = \frac{1}{3}$$

$f(x) = \frac{1}{3}x + 3$

26. x = km rodado

a) $f(x) = 1{,}20x + 4{,}20$

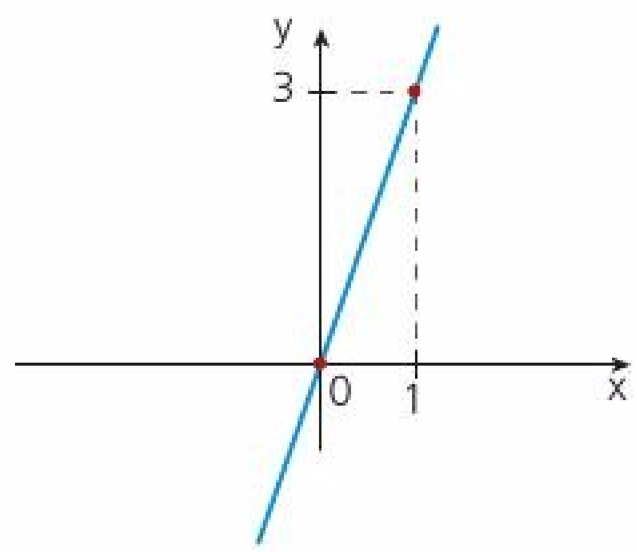
b) $13{,}80 = 1{,}20x + 4{,}20$

$9{,}60 = 1{,}20\,x$

$x = 8$ km

27. a) $f(x) = 3x$

x	y
0	0
1	3



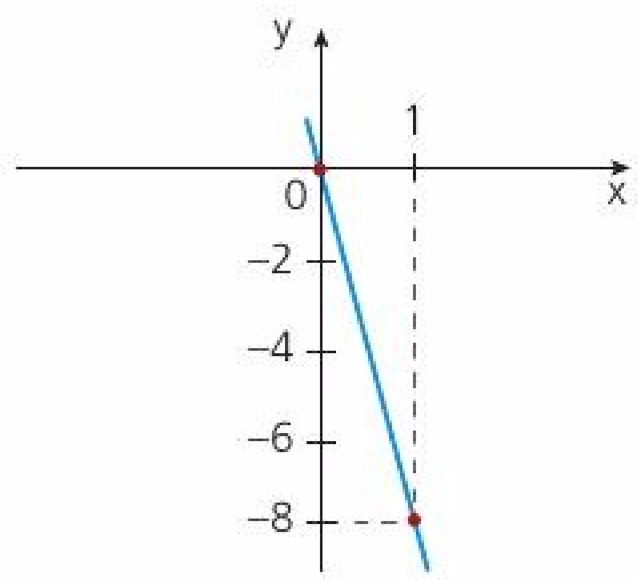
$x < 0 \rightarrow y < 0$

$x = 0 \rightarrow y = 0$

$x > 0 \rightarrow y > 0$

b) $g(x) = -2x - 6$

x	y
0	–6
1	8



$x < 0 \rightarrow y > 0$

$x = 0 \rightarrow y = 0$

$x > 0 \rightarrow y < 0$

c) $f(x) = -1 + 2x$

x	y
0	–1
2	3

$x < 0 \rightarrow y < 0$

$x = 0 \rightarrow y = 0$

$x > 0 \rightarrow y > 0$

28. $f(x) = -3x + 12$

a) $y = 12$

b) $x = 4$

29. a) $f(x) = x^2$

Vértice $X_v = 0$

$Y_v = 0$

$a > 0$ concavidade para cima

Vértice ponto de mínima

b) $f(x) = -6x^2 - 12x$

$a < 0$ concavidade para baixo

$Xv = \frac{-b}{2a} = \frac{12}{-12} = -1$

$Yv = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-144}{-24} = 6$

Vértice ponto de máxima

c) $f(x) = -x^2$

$a < 0$ concavidade para baixo

$Xv = 0$

$Yv = 0$

Vértice ponto de máxima

d) $f(x) = x^2 - 12x + 10$

$\Delta = 144 - 4 \,.\, 10 \,.\, 1$

$\Delta = 104$

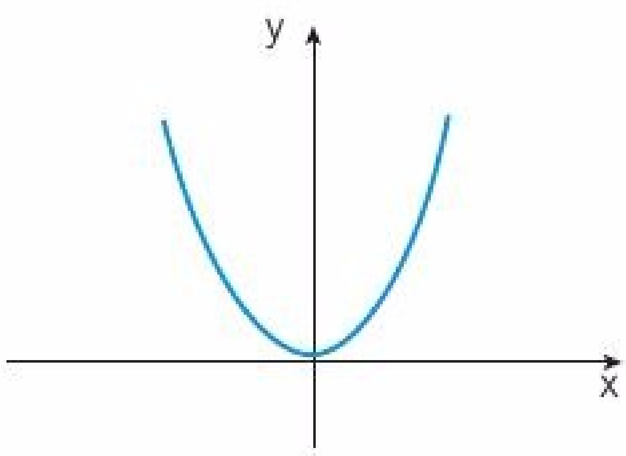
$Xv = \frac{12}{2} = 6$

$Yv = \frac{-104}{4 \cdot 1} = -26$

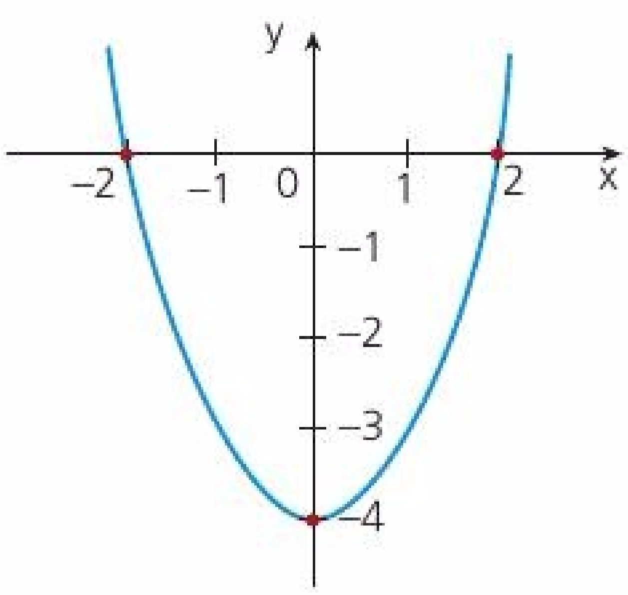
$a > 0$ concavidade para cima

Vértice ponto de mínima

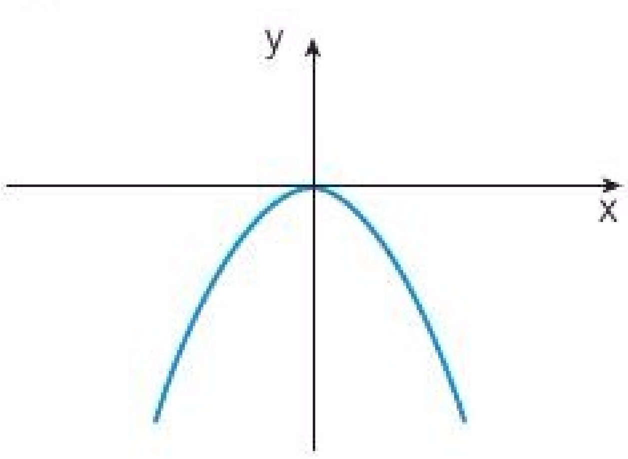
30. a) $f(x) = x^2$



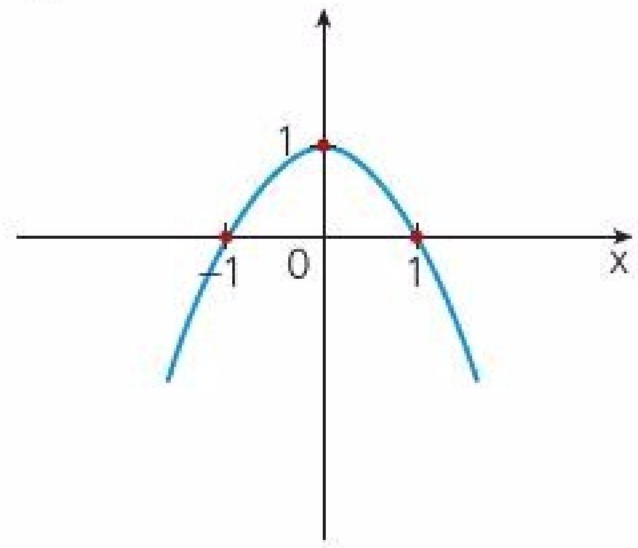
b) $f(x) = x^2 - 4$



c) $f(x) = -x^2$



d) $f(x) = -x^2 + 1$



31. $a > 0$

a) $f(x) = -(-2p + 6)x^2 + (5 - p)x + 1$

$+ 2p - 6 > 0$

$2p > 6$

$p > 3$

b) $f(x) = (p + 3)x^2 - 5x + 6$

$p + 3 > 0$

$p > -3$

c) $f(x) = (4p - 3)x^2 - 6$

$4p - 3 > 0$

$4p > 3$

$p > \frac{3}{4}$

32. a) $f(x) = 3x^2 - 9$

$Yv = -9$

$Im = \{y \in R \,/\, y \geq -9\}$

b) $f(x) = -2x^2 + 10x$

$Yv = 12{,}5$

$Im = \{y \in R \,/\, y \leq 12{,}5\}$

c) $f(x) = x^2 - 5x + 10$

$\Delta = 25 - 4 \cdot 10$

$\Delta = -15$

$Yv = \frac{15}{4} = 3{,}75$

$Im = \{y \in R \,/\, y \leq 3{,}75\}$

d) $f(x) = (2x + 3)\,(3x + 5)$

$f(x) = 6x^2 + 10x + 9x + 15$

$f(x) = 6x^2 + 19x + 15$

$\Delta = 361 - 4 \cdot 6 \cdot 15$

$\Delta = 1$

$Yv = \frac{-1}{4 \cdot 6} = \frac{-1}{24} = -0{,}04$

$Im = \{y \in R \,/\, y \geq -0{,}04\}$

33. f é decrescente

a) $f(x) = 3x^2 - 6x + 10$

$Xv = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{6}{6} = 1$

$p / D = \{x \in R / x < 1\}$

b) $f(x) = -5x^2 + 8x - 12$

$Xv = \dfrac{-8}{-2{,}5} = \dfrac{8}{10} = 0{,}8$

$p / D = \{x \in R / x > 0{,}8\}$

c) $f(x) = x^2 - 4$

$p / D = \{x \in R / x < 0\}$

d) $f(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{3}{4}$

$p / D = \{x \in R / x > 0\}$

34. a) $f(x) = x^2 - 6x - 3$

$y = -3$

b) $f(x) = -x^2 - 200$

$y = -200$

c) $f(x) = -x^2 - 3x + 12$

$y = 12$

d) $f(x) = 5x^2 - 16x$

$y = 0$

35. a) $f(0) = -16$

b) $g(0) = 1$

c) $f(1) + g\left(\dfrac{1}{2}\right) = -15 + \dfrac{5}{2} = \dfrac{-25}{2}$

36. a) $f(x) = 3x^2 - 6x + 3$

$3x^2 - 6x + 3 = 0$

$x^2 - 2x + 1 = 0$

$x = +1$

b) $f(x) = 6x^2 - 12x$

$6x^2 - 12x = 0$

$6x\,(x - 2) = 0$

$x = 0$ ou $x = 2$

c) $f(x) = 5x^2 - 20$

$5x^2 - 20 = 0$

$x^2 = 4$

$x_1 = -2$ ou $x^2 = 2$

d) $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$

$3x^2 - 2x + 5 = 0$

não tem o zero da função

e) $f(x) = -x^2 + 1$

$-x^2 + 1 = 0$

$x_1 = -1$ ou $x_2 = 1$

f) $f(x) = x^2 + 16$

$x^2 + 16 = 0$

não existe zero da função

37. $f(x) = px^2 - 5x + 6 \quad p / x = 3$

$px^2 - 5x + 6 = 0$

$p \cdot 9 - 5 \cdot 3 + 6 = 0$

$9p = 9$

$p = 1$

38. $f(x) = x^2 + 3x - 10$

a) $x_1 = -5$ ou $x = 2$

b) $D = \{x \in R / -5 < x < 2\}$

39. a) $f(x) = mx^2 - 5x + 3$

$\Delta = 0$

$(-5)^2 - 4 \cdot m \cdot 3 = 0$

$25 - 12m = 0$

$12m = 25$

$m = \dfrac{25}{12}$

b) $f(x) = 2x^2 - 5mx + 3$

$(-5m)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 0$

$25m^2 - 24 = 0$

$m^2 = \dfrac{24}{25}$

$m = \pm\dfrac{2\sqrt{6}}{25}$

40. a) $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$

$2x^2 - 5x + 3 = 0$

$\Delta = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 3$

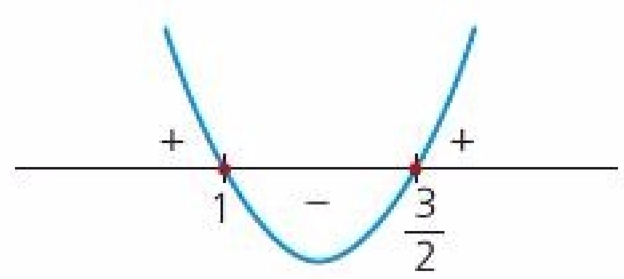
$\Delta = 25 - 24$

$\Delta = 1$

$x = \dfrac{5 \pm 1}{4}$

$x_1 = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$

$x_2 = \dfrac{4}{4} = 1$



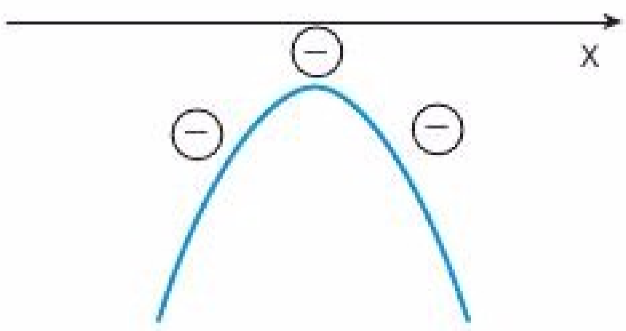
$$\begin{cases} 1 < x < \frac{3}{2} \rightarrow y < 0 \\ x = 1 \text{ e } x = \frac{3}{2} \rightarrow y = 0 \\ 1 < x \text{ e } x > \frac{3}{2} \rightarrow y > 0 \end{cases}$$

b) $f(x) = -3x^2 + 10x - 9$

$\Delta = 100 - 4\,(-3)\,(-9)$

$\Delta = 100 - 108$

$\Delta = -8$



$p\,/\,x \in R \rightarrow y < 0$

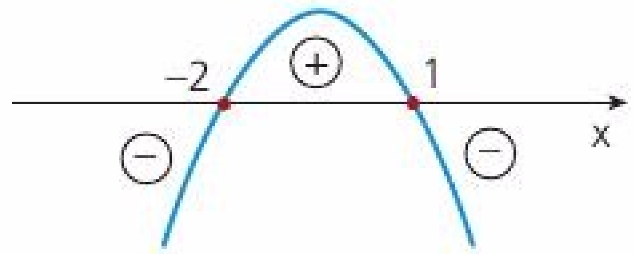
c) $f(x) = -x^2 - x + 2$

$\Delta = 1 - 4\,(-1) - 2$

$\Delta = 1 + 8$

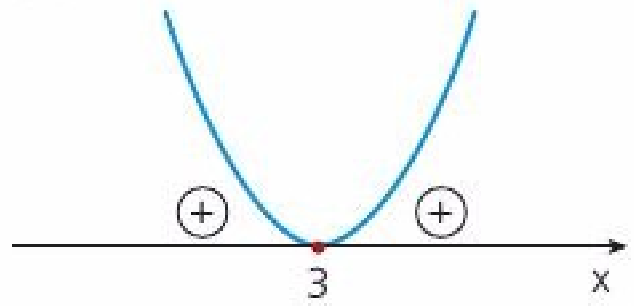
$\Delta = 9$

$$x = \frac{1 \pm 3}{-2} \quad \begin{matrix} x_1 = \frac{4}{-2} = -2 \\ x_2 = \frac{-2}{-2} = 1 \end{matrix}$$



$$\begin{cases} -2 < x < 1 \rightarrow y > 0 \\ x = -2 \text{ ou } x = 1 \rightarrow y = 0 \\ x < -2 \text{ ou } x > 1 \rightarrow y < 0 \end{cases}$$

d) $f(x) = x^2 - 6x + 9$



$$\begin{cases} x = 3 \rightarrow y = 0 \\ 3 < x < 3 \rightarrow y > 0 \end{cases}$$

Respostas da seção Para estudar

41. $P^2 = \{(1; 1), (1; 3), (1; 5), (3; 1), (3; 3), (3; 5), (5; 1), (5; 3), (5; 5)\}$

42. $A \cdot B = \{(0; 5), (0, 6), (2; 5), (2; 6), (3; 5), (3; 6)\}$

$B \cdot C = \{(5; 1), (5; 3), (5, 4), (6; 1), (6; 3), (6; 4)\}$

43. a) 1º quadrante

b) 4º quadrante

c) 2º quadrante

d) 3º quadrante

44. $A = \{x \in R\,/\,x \geq 3\}$

a) $B = R$

b) $A = R$

$B = \{y \in R\,/\,y \leq 3\}$

45. Resposta no caderno.

46. $D = A$

$Im = \{4\}$

47. a) Não.
b) Sim.
c) Não.
d) Sim.
e) Sim.
f) Sim.
g) Sim.
h) Não.

48. $2k^2 - 1$

49. $a = \frac{1}{2}$

50. $d(4) = 20 \cdot 4 + 10$

$d(4) = 90$ km

51. a) $D = \{x \in R / x \neq -2 \text{ e } x \neq 2\}$

b) $D = \{x \in R / x \neq -4 \text{ e } x \neq 2\}$

c) $D = \{x \in R / x \geq 4\}$

d) $D = \{x \in R / 8 \leq x < 15\}$

52. $D = \{x \in R / 0 \leq x \leq 15\}$

$2 < x < 7$ ou $12 < x < 15$

53. a) $\{x \in R / -5 \leq x \leq 5\}$

b) $\{y \in R / -2 < y \leq 3\}$

c) $\{0, 2\}$

d) $\{x \in R / 0 < x < 2\}$

54. a) $f(x) = 0 \rightarrow x = -\frac{5}{2}$

$f(x) < 0 \rightarrow x < -\frac{5}{2}$

$f(x) > 0 \rightarrow x > -\frac{5}{2}$

b) $f(x) = 0 \rightarrow x = 4$

$f(x) < 0 \rightarrow x > 4$

$f(x) > 0 \rightarrow x < 4$

c) $f(x) = 0 \rightarrow x = 4$ ou $x = -4$

$f(x) > 0 \rightarrow x < -4$ ou $x > 4$

$f(x) < 0 \rightarrow -4 < x < 4$

55. $f(x) = 0 \rightarrow x = 6$ ou $x = 8$

$f(x) > 0 \rightarrow 0 < x < 6$ ou $x > 8$

$f(x) < 0 \rightarrow 6 < x < 7$

56. a) $x = -2$; $x = 3$; $x = 5$

b) $-2 < x < 3$; $x > 5$

c) $x < -2$; $3 < x < 5$

57. a) F

b) V

c) V

d) F

58 a) V

b) F

c) F

d) F

59. $f(-1) = 3$

60. a) $y = x + 3$

b) $y = -x + 1$

61. a) $D = \{x \in R/x \geq -3\}$

b) $D = \{x \in R/x > 2\}$

c) $D = \{4\}$

d) $D = \{x \in R/x > \frac{1}{3}\}$

62. a) $m > 2$

b) $m < 2$

63. a) $f(x) \rightarrow v\ (0; 0)$

$g(x) \rightarrow v\ (0; 0)$

b) $Im = \{y \in R/y \geq 0\}$

64. a) $4 - 4m > 0 \rightarrow m < 1$

b) $4 - 4m = 0 \rightarrow m = 1$

c) $4 - 4m < 0 \rightarrow m > 1$

65. $x = 0 \rightarrow f(x) = 0$

66. a) $y = x^2 - 6x + 5$

b) $y = x^2 - 6x + 8$

67. a) $V\left(\frac{5}{2}; -\frac{1}{4}\right)$; V é mínimo.

b) V (0; 1); V é máximo.

c) V (0; 0); V é mínimo.

d) $V\left(\frac{1}{4}; -\frac{3}{4}\right)$; V é máximo.

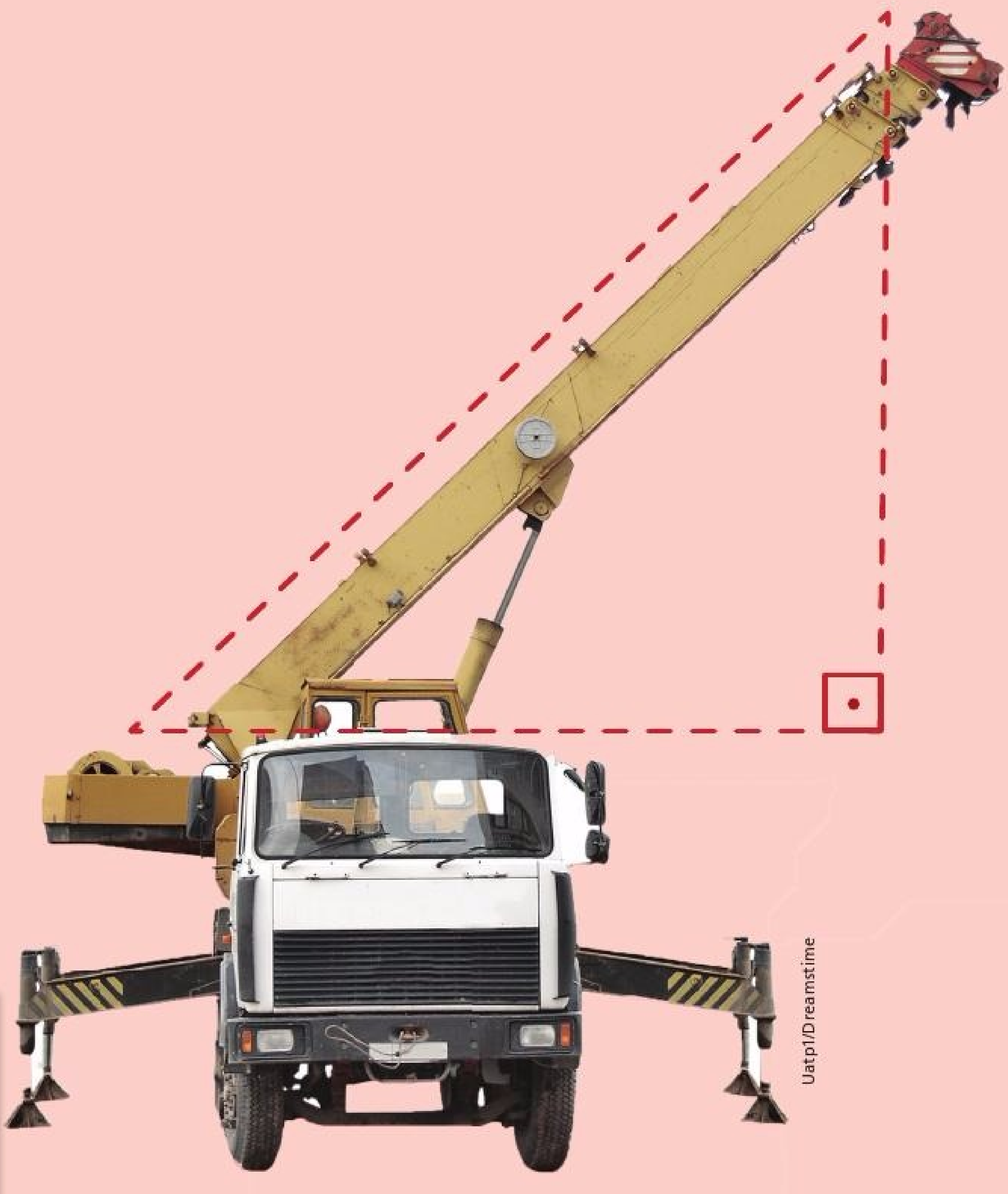
68. (e) $a < 0$ (concavidade para baixo)

$c > 0$ ($y > 0$ para $x = 0$)

capítulo 7

Relações métricas no triângulo retângulo

- Triângulos retângulos
- Relações métricas no triângulo retângulo
- Aplicações dos casos de semelhança

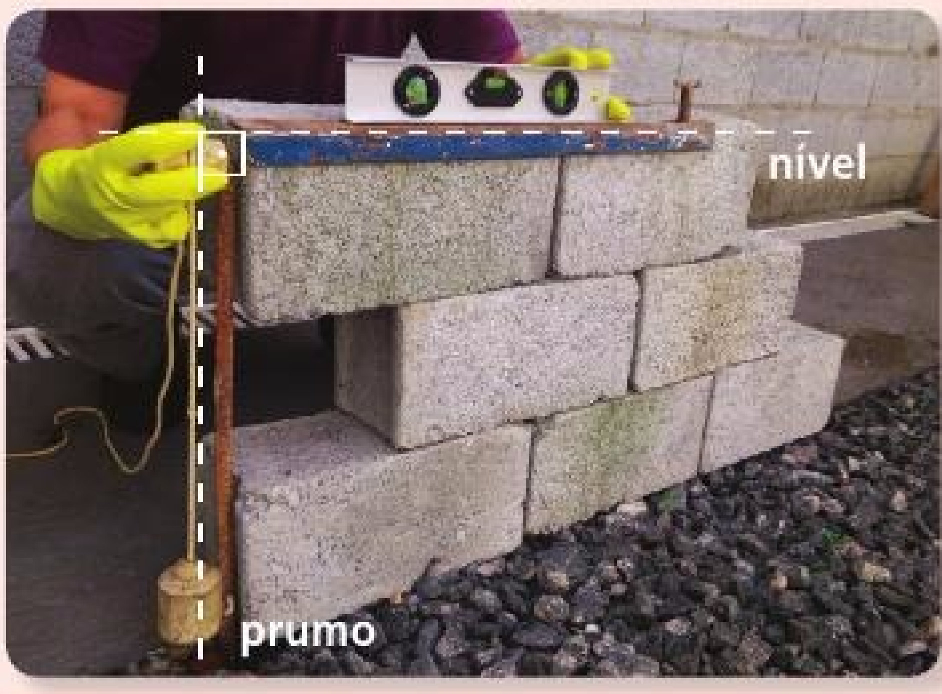


Uatp1/Dreamstime

Caminhão guindaste (São Paulo – SP)

Conversa Inicial

Quando um trabalhador de construção civil vai erguer uma parede numa obra, ele se preocupa fundamentalmente com duas variáveis: o nível e o prumo da parede.



Mariana Berdoldi

O nível que o trabalhador procura é aquele no qual o alinhamento horizontal da parede é paralelo ao piso sobre o qual ela será erguida. Para isso, ele utiliza um aparelho específico chamado simplesmente de "nível". Já o prumo, procura garantir o alinhamento vertical da parede, ou seja, formar um ângulo de 90º com o nível horizontal do piso.

Mariana Berdoldi

Uma parede no prumo e aquela que forma ângulo reto com o nível horizontal do piso.

Como você pode ver, o ângulo de 90º é uma referência para as formas geométricas obtidas, por exemplo, na construção civil. Além disso, ele está presente em estruturas metálicas e de madeira, máquinas de todo tipo e nos produtos industrializados com os quais convivemos em nosso dia a dia. Por essa razão, o estudo dos triângulos retângulos é fundamental para o desenvolvimento de projetos, de cálculos de construção e para a representação as formas naturais.

Já sabemos que o estudo dos triângulos em geral consiste no estabelecimento das relações existentes entre seus ângulos e seus lados. Já vimos também como podemos relacionar dois triângulos, por semelhança ou por congruência, estabelecendo relações entre seus lados.

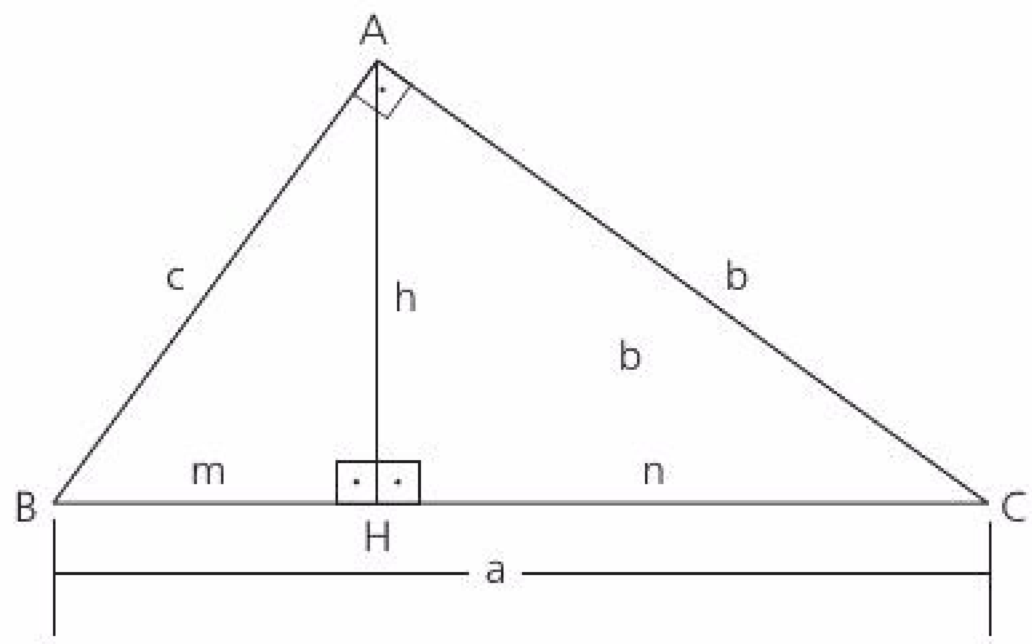
Como podemos estabelecer essas relações para o triângulo retângulo? Vamos estudar agora especificamente o triângulo retângulo, entendê-lo melhor e aplicar suas propriedades em relação a outras figuras planas.

Triângulos retângulos

Já sabemos que todo triângulo que tem um ângulo reto é denominado triângulo retângulo. O estudo dos triângulos retângulos e das relações existentes entre suas medidas e seus ângulos é fundamental para os cálculos geométricos envolvidos em projetos e problemas das mais diversas áreas do conhecimento.

O triângulo ABC da figura é retângulo em A e seus elementos lineares são:

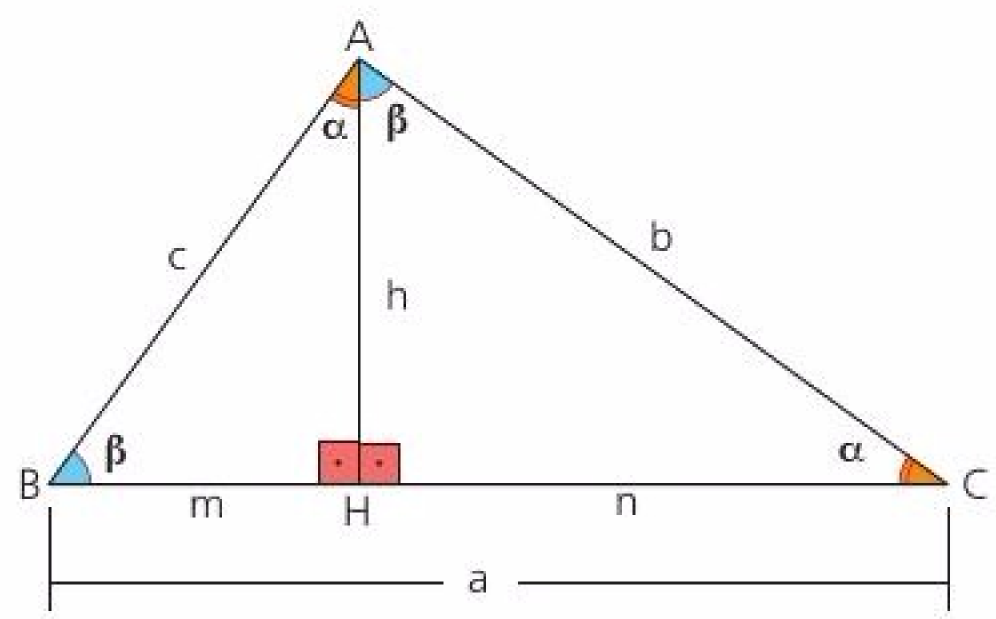
Represente no quadro cada uma das figuras.



a: hipotenusa
b e **c**: catetos
h: altura relativa à hipotenusa
m e **n**: projeções ortogonais dos catetos sobre a hipotenusa

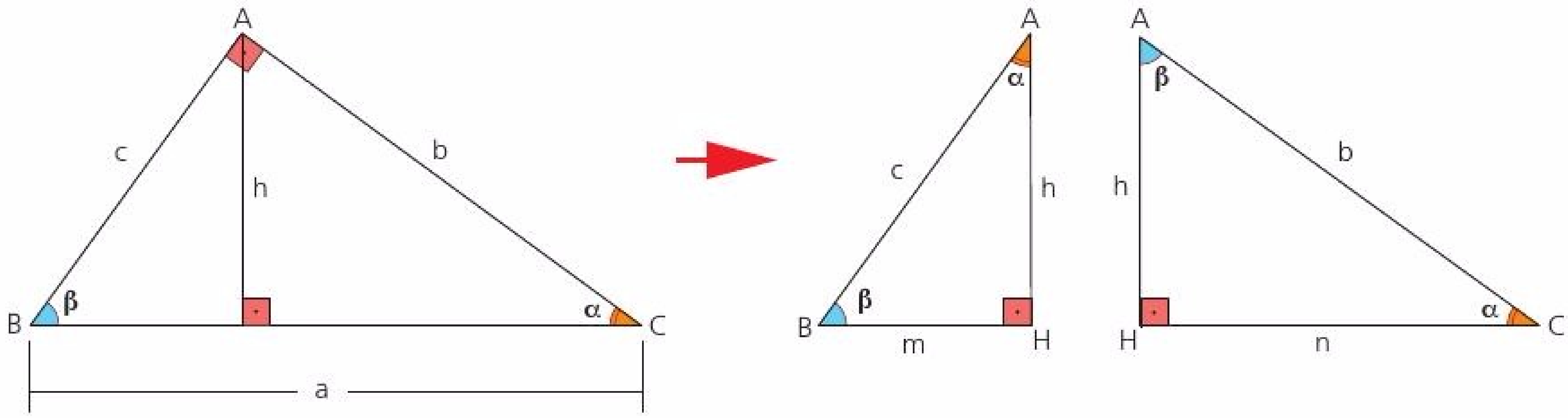
Relações métricas no triângulo retângulo

Chamamos de relações métricas no triângulo retângulo às relações existentes entre os diversos segmentos do triângulo retângulo. Para estabelecer essas relações, vamos analisar os triângulos ABC, ABH e AHC, na figura a seguir:



Os triângulos ABH e AHC, determinados quando traçamos a altura **h** do triângulo ABC, também são retângulos. Observe que os ângulos internos correspondentes desses dois triângulos são congruentes, o que faz com que os triângulos sejam semelhantes. Pela mesma razão, esses dois triângulos são também semelhantes ao triângulo ABC.

Vamos isolar os triângulos para uma melhor visualização das semelhanças e, a partir delas, estabelecer as relações métricas existentes. Confira as posições dos ângulos α, β, e 90° nos triângulos ABC, ABH e AHC. Eles determinam, respectivamente, os catetos e as hipotenusas desses triângulos.



Vamos utilizar o símbolo **(~)** para indicar a semelhança entre duas figuras.

- **Primeira semelhança**: $\Delta ABC \sim \Delta ABH$

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{h} = \frac{c}{m} \rightarrow \begin{cases} \frac{a}{c} = \frac{b}{h} \rightarrow b \cdot c = ah \\ \frac{a}{c} = \frac{c}{m} \rightarrow c^2 = a \cdot m \\ \frac{b}{h} = \frac{c}{m} \rightarrow b \cdot m = c \cdot h \end{cases}$$

- **Segunda semelhança**: $\Delta ABC \sim \Delta AHC$

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{n} = \frac{c}{h} \rightarrow \begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{b}{n} \rightarrow b^2 = a \cdot n \\ \frac{a}{b} = \frac{c}{h} \rightarrow b \cdot c = ah \\ \frac{b}{n} = \frac{c}{h} \rightarrow c \cdot n = b \cdot h \end{cases}$$

A partir das igualdades obtidas nas semelhanças, estabelecemos importantes relações entre os segmentos de um triângulo retângulo. São elas:

a) O quadrado de um cateto é igual ao produto da hipotenusa pela projeção desse cateto sobre a hipotenusa.

$$\mathbf{b^2 = a \cdot n \quad e \quad c^2 = a \cdot m}$$

b) O produto dos catetos é igual ao produto da hipotenusa pela altura relativa à hipotenusa.

$$\mathbf{b \cdot c = a \cdot h}$$

c) O quadrado da altura é igual ao produto das projeções dos catetos sobre a hipotenusa.

$$h^2 = m \cdot n$$

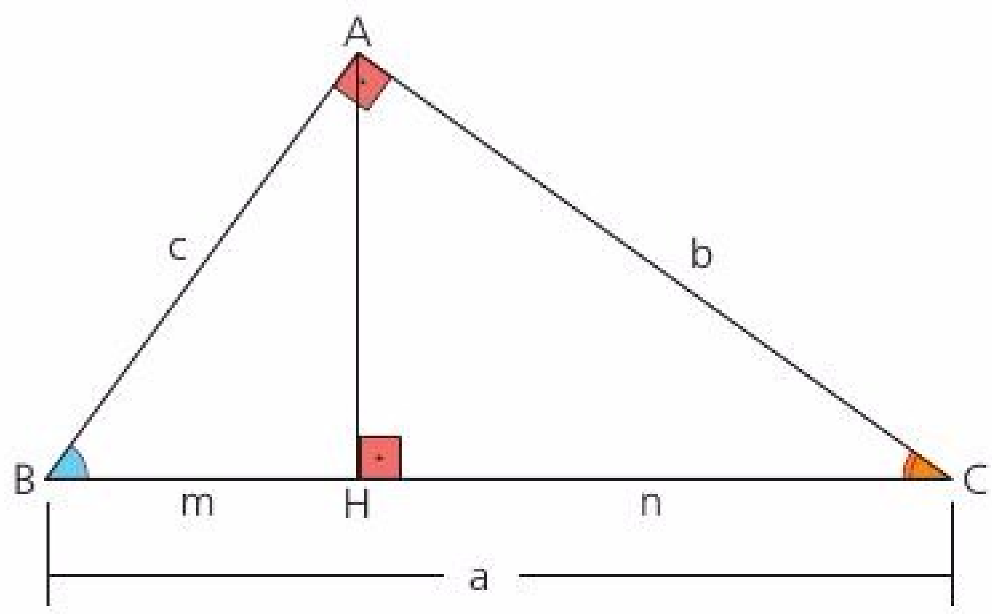
O teorema de Pitágoras

Este teorema relaciona as medidas da hipotenusa e dos catetos num triângulo retângulo e é atribuído a Pitágoras, que o teria enunciado por volta de 500 a.C.

Existem centenas de processos algébricos e geométricos que demonstram o Teorema de Pitágoras, desenvolvidos através dos séculos por diversos geômetras.

Observe duas das mais conhecidas:

- No triângulo retângulo ABC da figura a seguir, **b** e **c** são os catetos e **a** é a hipotenusa, onde a altura determina os segmentos **m** e **n**.



A partir das relações métricas que determinamos para o triângulo retângulo, e considerando **a = m + n**, temos:

$$\left.\begin{array}{l} b^2 = a \cdot n \\ c^2 = a \cdot m \end{array}\right\} b^2 + c^2 = a \cdot n + a \cdot m \rightarrow b^2 + c^2 = a \cdot (m + n) \rightarrow b^2 + c^2 = a^2$$

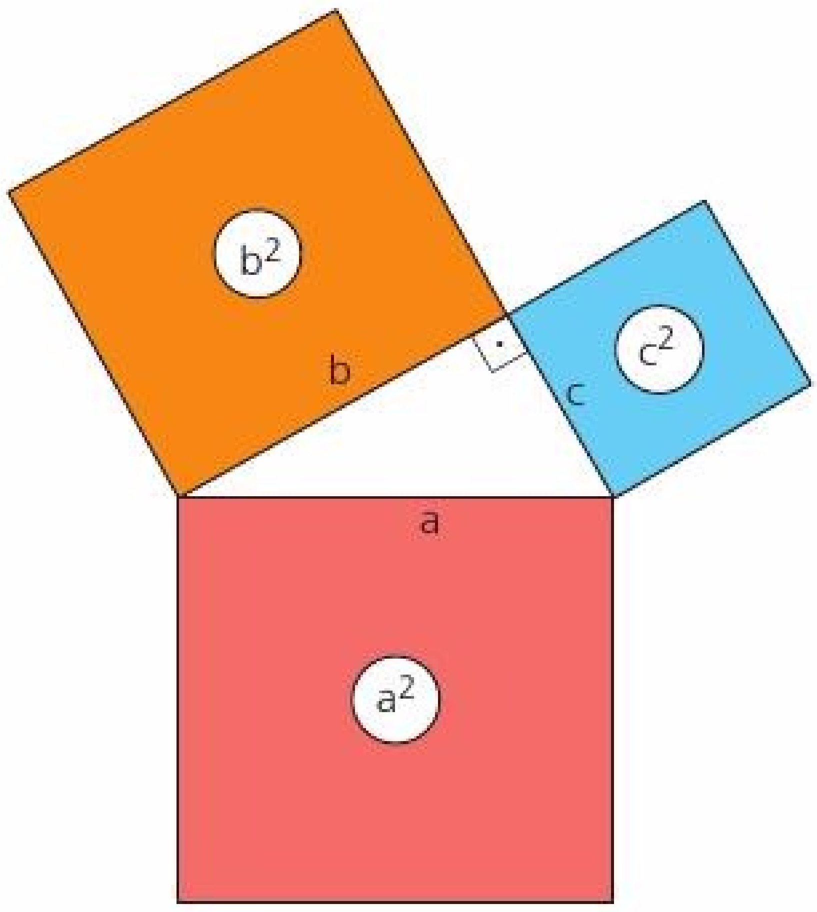
O enunciado do Teorema de Pitágoras fica da seguinte forma:

Num triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

Para o triângulo retângulo ABC, de hipotenusa **a** e catetos **b** e **c**, temos:

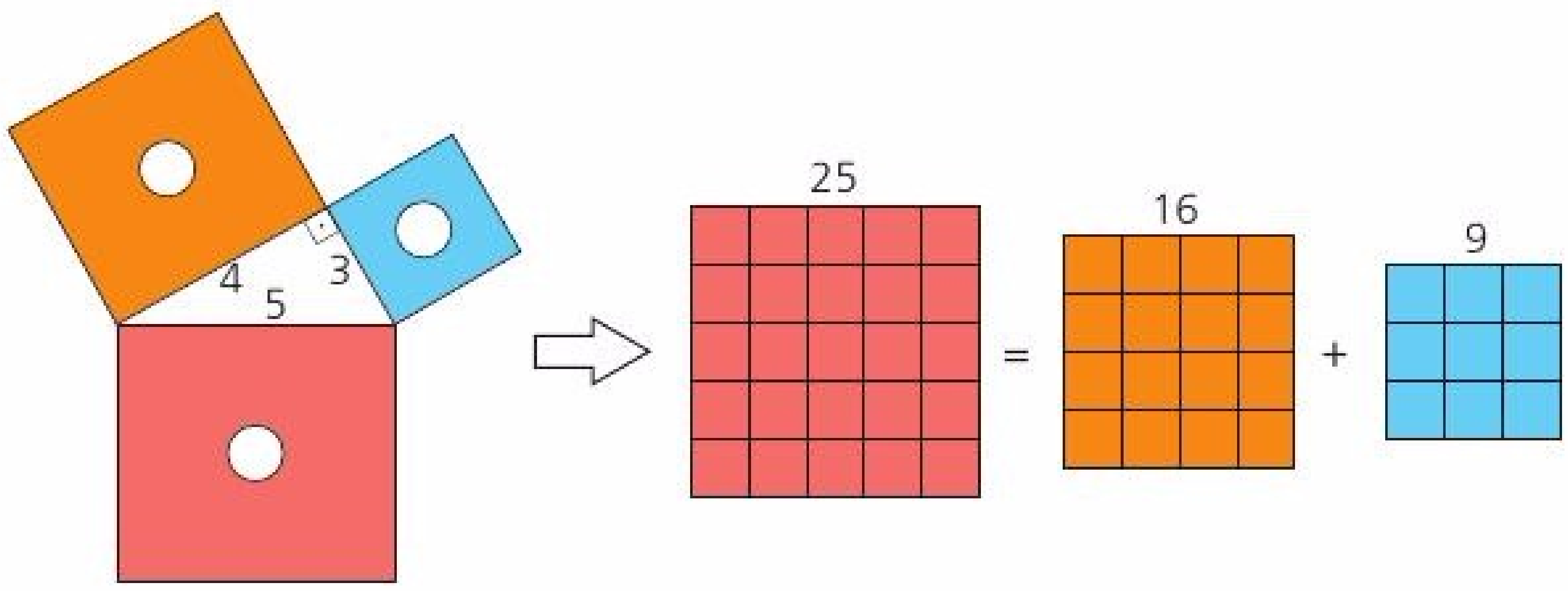
$$a^2 = b^2 + c^2$$

- Observe agora a representação geométrica do Teorema de Pitágoras, que também é uma verificação de sua validade. Para um triângulo retângulo de hipotenusa **a** e catetos **b** e **c**, podemos expressar o teorema através dos quadrados cujos lados sejam iguais à hipotenusa e aos catetos:



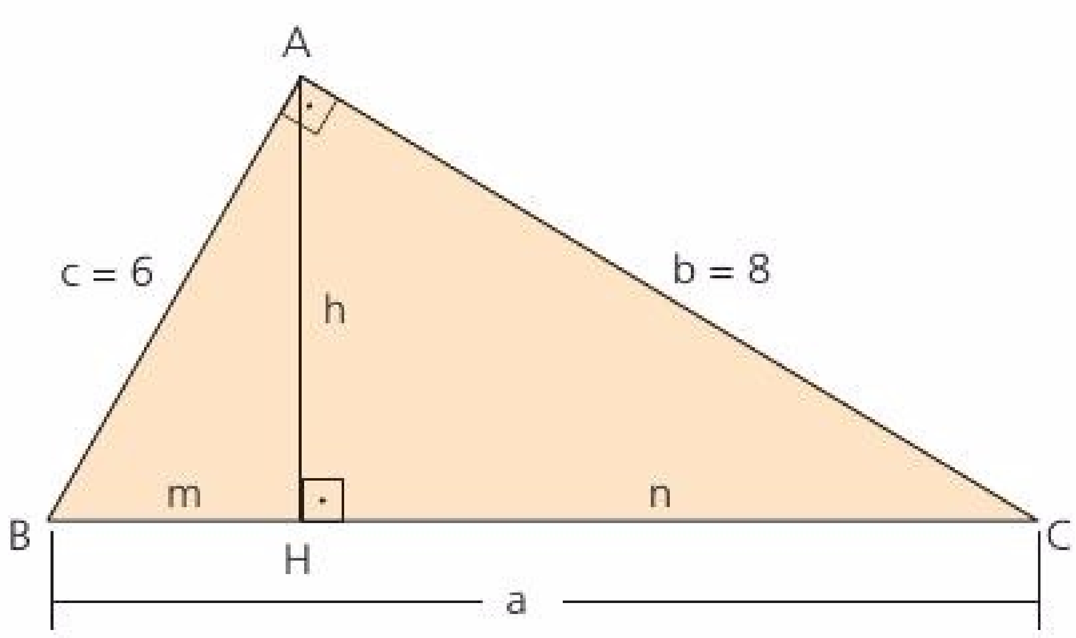
Professor, chamamos os números que formam triângulos retângulos de lados inteiros de "triplas Pitagóricas". Alguns exemplos de triplas pitagóricas são: (3, 4, 5), (5, 12, 13), (7, 24, 25), (8, 15, 17), (9, 40, 41), (11, 60, 61) entre outras.

Veja, por exemplo, o que ocorre com um triângulo retângulo de hipotenusa 5 e catetos 3 e 4. Perceba a equivalência entre as áreas do quadrado de lado 5 e a soma das áreas dos quadrados de lados 4 e 3.



Acompanhe agora alguns exemplos da utilização das relações métricas no triângulo retângulo.

a) No triângulo ABC da figura, vamos calcular **a**, **h**, **m** e **n**:



Começamos pelo Teorema de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow a^2 = 8^2 + 6^2 \rightarrow a = 10$$

Em seguida, utilizamos as relações métricas demonstradas:

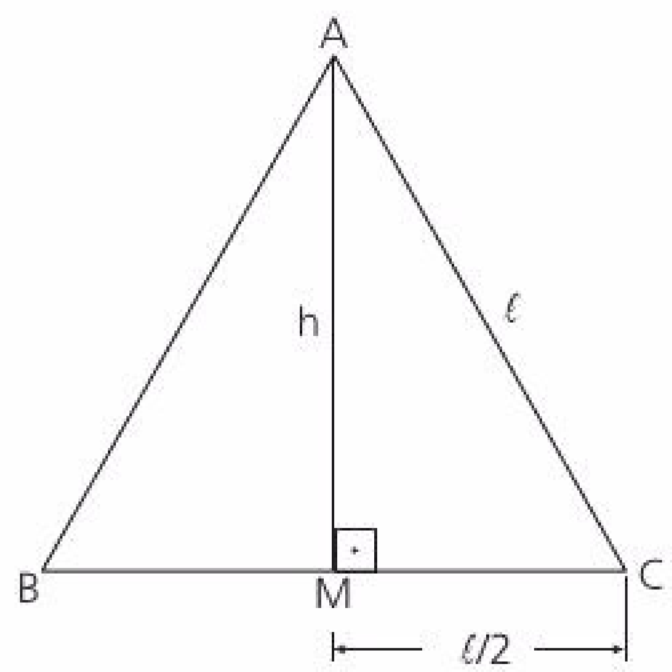
$$c^2 = a \cdot m \rightarrow 6^2 = 10 \cdot m \rightarrow m = 3{,}6$$

$$b^2 = a \cdot n \rightarrow 8^2 = 10 \cdot n \rightarrow n = 6{,}4$$

$$b \cdot c = a \cdot h \rightarrow 8 \cdot 6 = 10 \cdot h \rightarrow h = 4{,}8$$

Professor, faça a demonstração da fórmula da altura do triângulo equilátero no quadro de giz para que os alunos se apropriem e possam usá-la em exercícios.

b) Acompanhe a determinação da altura de um triângulo equilátero de lado ℓ.

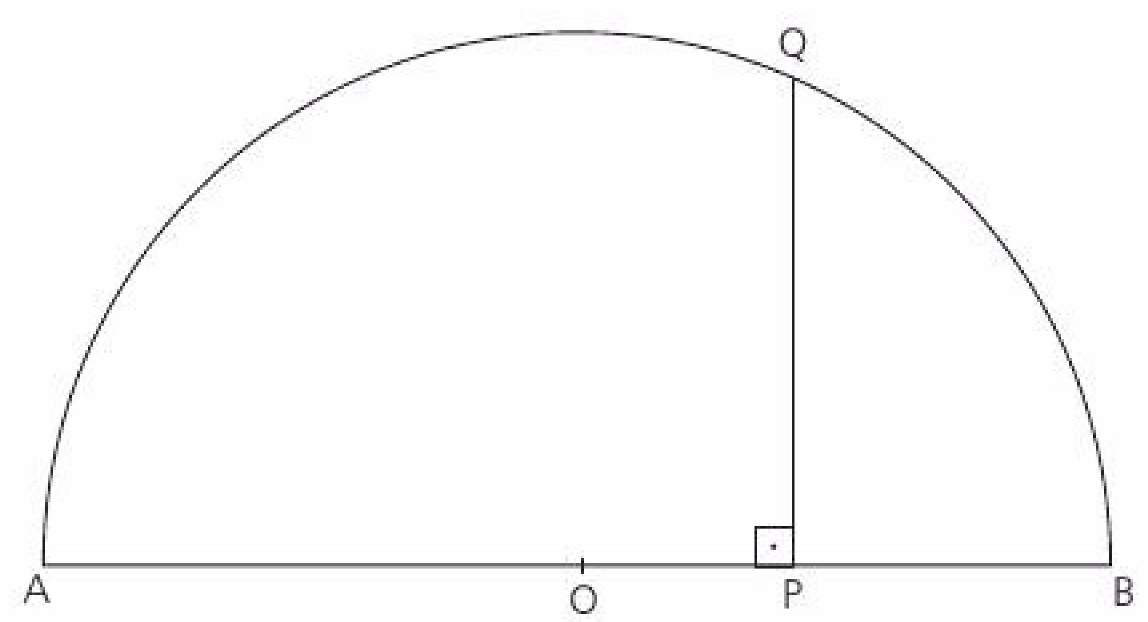


Professor, os alunos podem construir, utilizando materiais adequados como régua, compasso e esquadro, triângulos retângulos de medidas quaisquer e traçar a semicircunferência que tem como diâmetro a hipotenusa do triângulo retângulo.

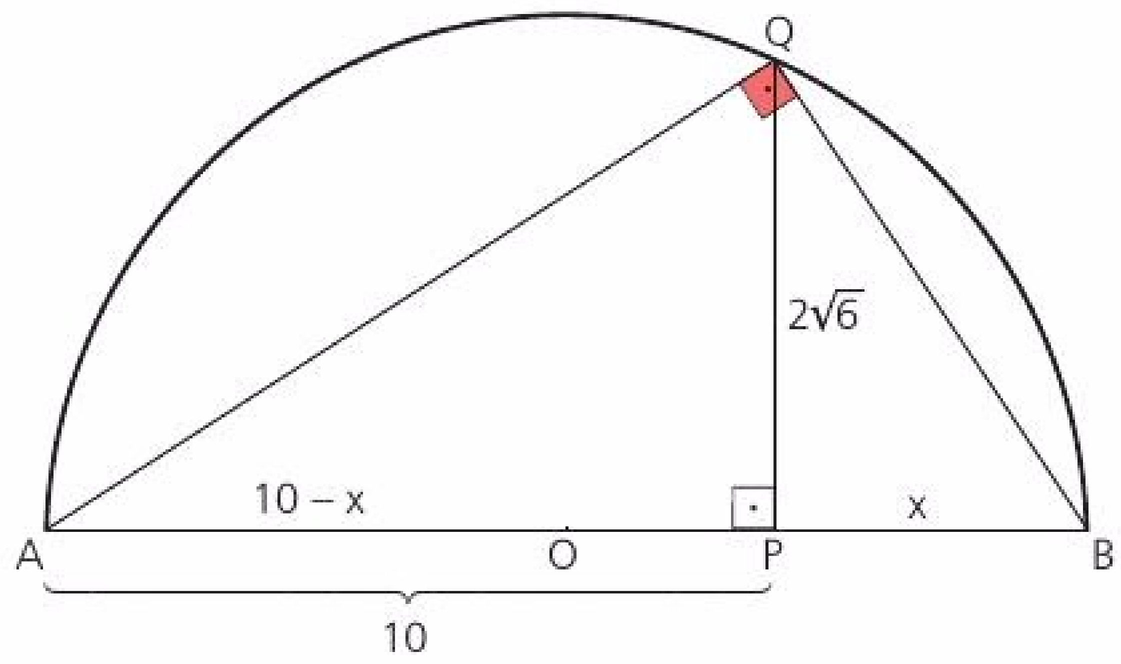
$$\left.\begin{array}{l} \overline{AM} = h \text{ (altura do triângulo ABC)} \\ \overline{MC} = \dfrac{\ell}{2} \\ \text{AMC é triângulo retângulo} \end{array}\right\} \ell^2 = h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2$$

$$\ell^2 = h^2 + \frac{\ell^2}{4} \rightarrow h^2 = \frac{3\ell^2}{4} \rightarrow h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

c) Na figura, $\overline{AB}$ é o diâmetro da semicircunferência e $\overline{PQ} = 2\sqrt{6}$ é perpendicular a este diâmetro. Observe como calculamos as medidas de $\overline{AP}$ e $\overline{PB}$.



Qualquer triângulo cujo maior lado é o diâmetro de uma semicircunferência e que tem um vértice nesta é retângulo.



Os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{PQ}$ são, respectivamente, hipotenusa e altura relativa à hipotenusa do triângulo AQB.

Assim, chamando de **x** e (10 – x) as projeções dos catetos sobre a hipotenusa, e lembrando que $h^2 = mn$, temos:

$$(2\sqrt{6})^2 = x \cdot (10 - x) \rightarrow 24 = 10x - x^2$$

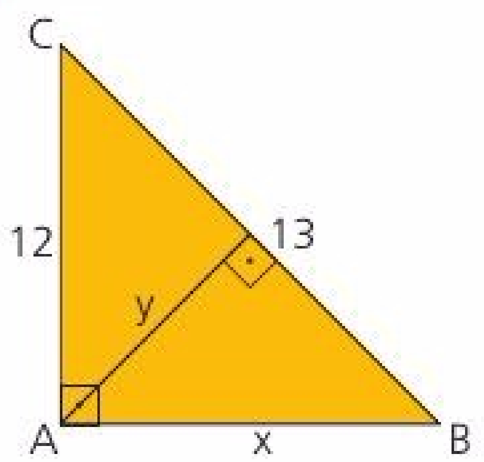
$$x^2 - 10x + 24 = 0 \rightarrow x = 4 \text{ ou } x = 6$$

Logo, $\overline{AP} = 6$ e $\overline{PB} = 4$

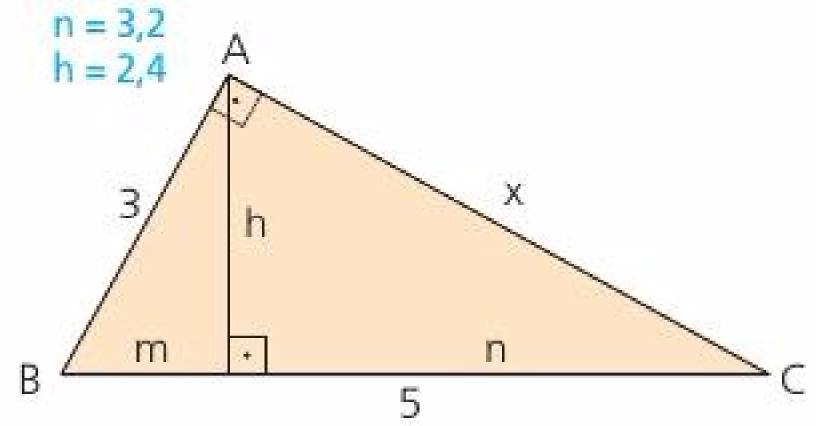
Atividades

1. Determine os valores literais indicados nas figuras:

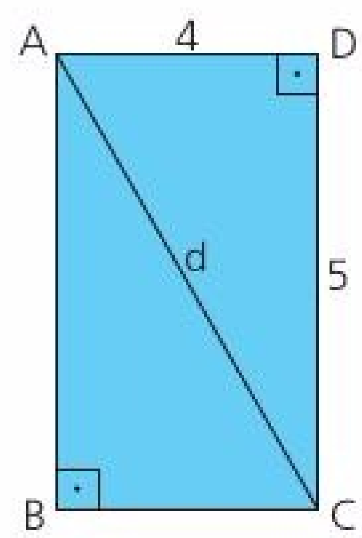
a) $x = 5$
$y = 4,6$



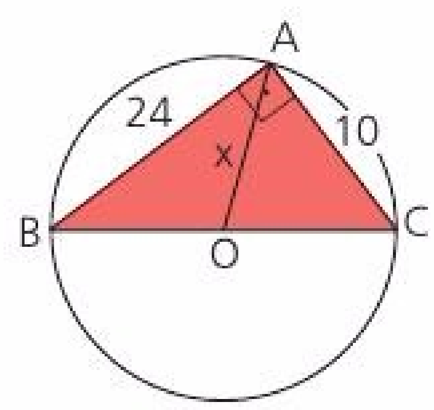
b) $x = 4$
$m = 1,8$
$n = 3,2$
$h = 2,4$



c) $d = 6,4$



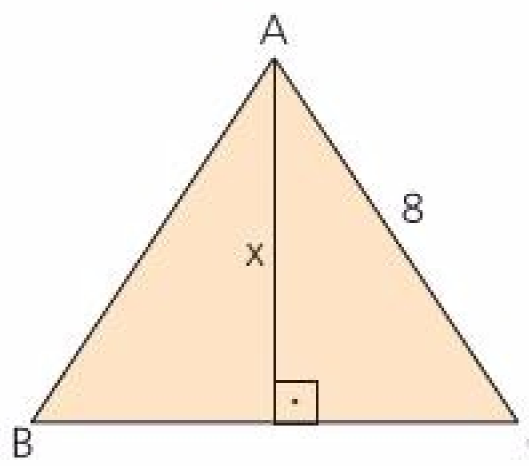
d) 13



O é o centro da circunferência.

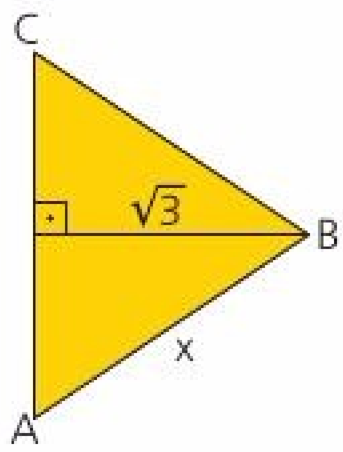
2. Determine o valor de **x** nas figuras:

a) $x = 6{,}9$ Interpretar figuras



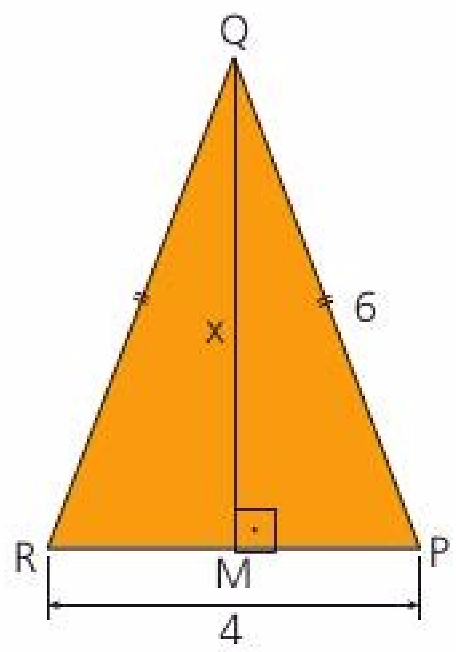
O Δ ABC
é equilátero

b) $x = 2$



O Δ ABC
é equilátero

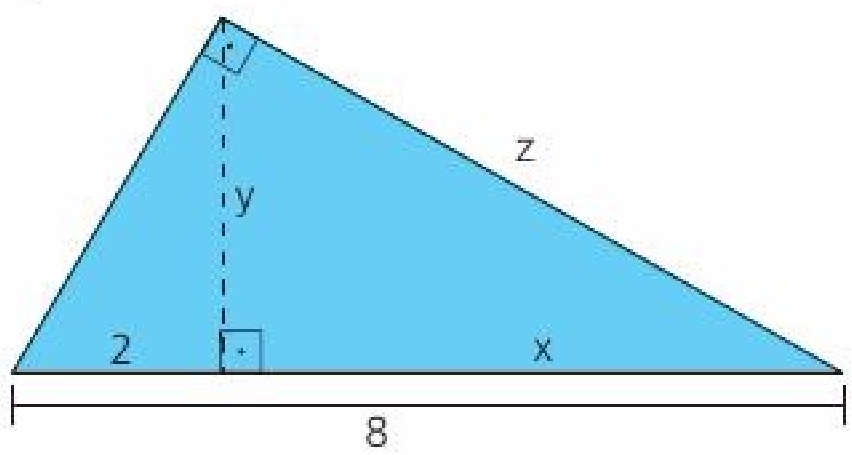
c) $x = 5{,}6$



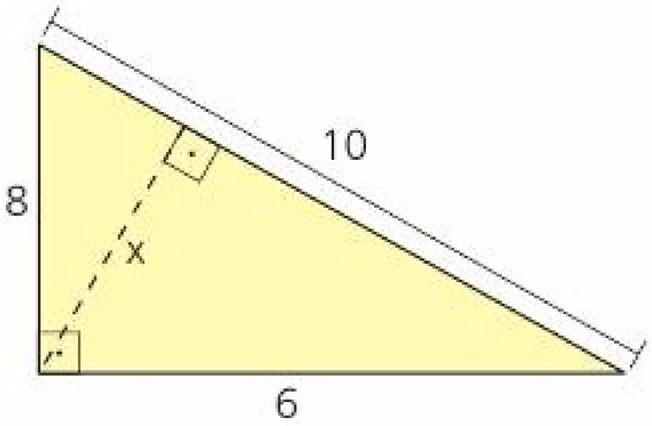
O ΔPQR
é isósceles

3. Determine **x**, **y** e **z** indicados nas figuras:

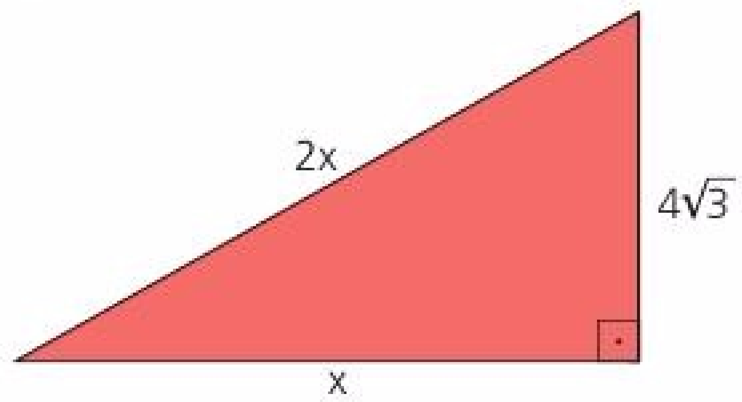
a) $c = 4$ $z = 6{,}9$, $x = 6$, $y = 3{,}4$



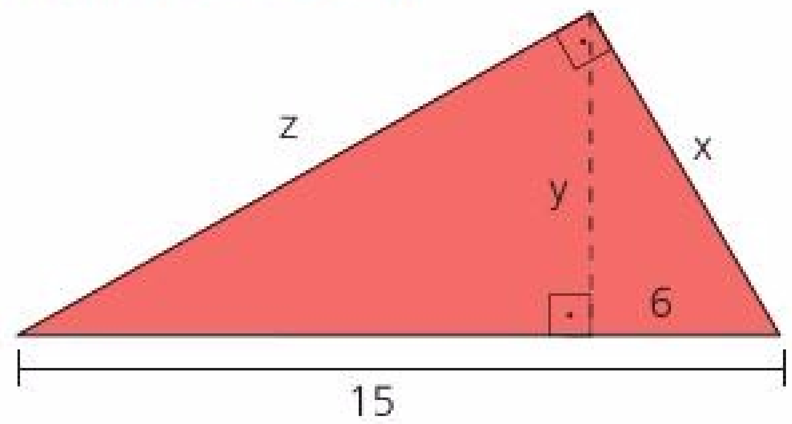
b) $x = 4{,}8$



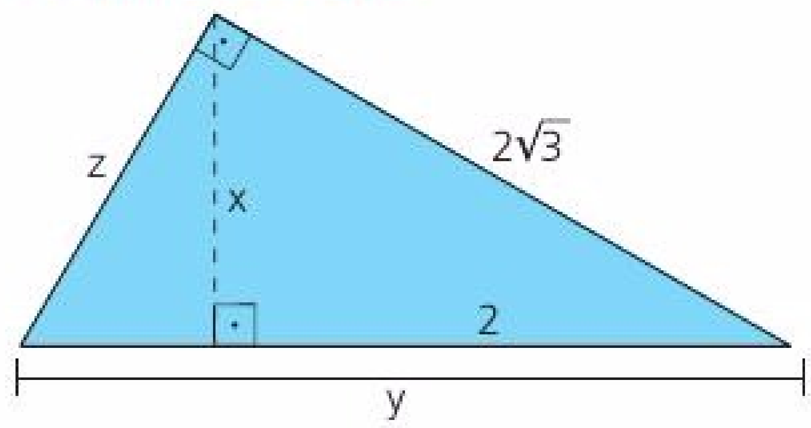
c) $x = 4$



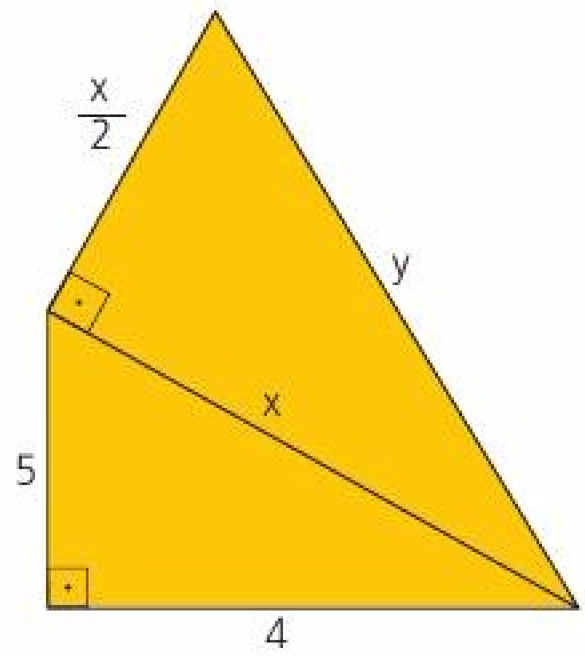
d) $y = 7{,}3$, $x = 9{,}4$, $z = 11{,}6$



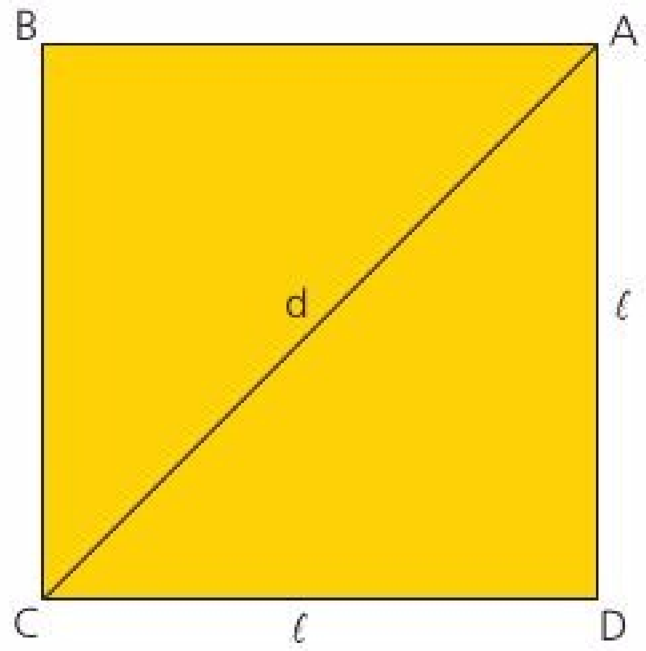
e) $x = 2\sqrt{2}$, $y = 6$ e $z = 2\sqrt{6}$



4. Calcule os valores literais indicados na figura abaixo: $x = 5$, $y = 5{,}6$



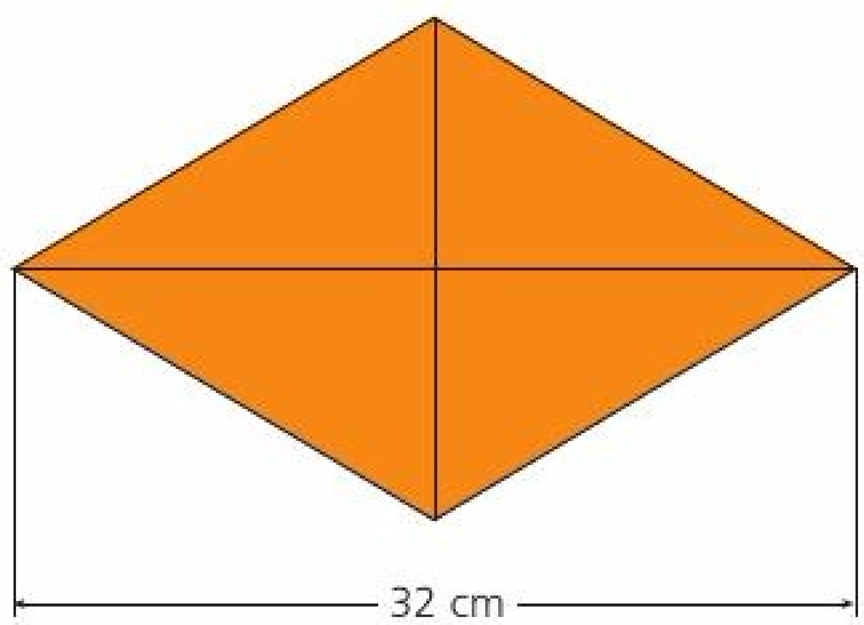
5. Determine a diagonal de um quadrado de lado ℓ. $d = \ell\sqrt{2}$



6. Calcule o lado de um quadrado cuja diagonal mede 2. $\ell = \sqrt{2}$

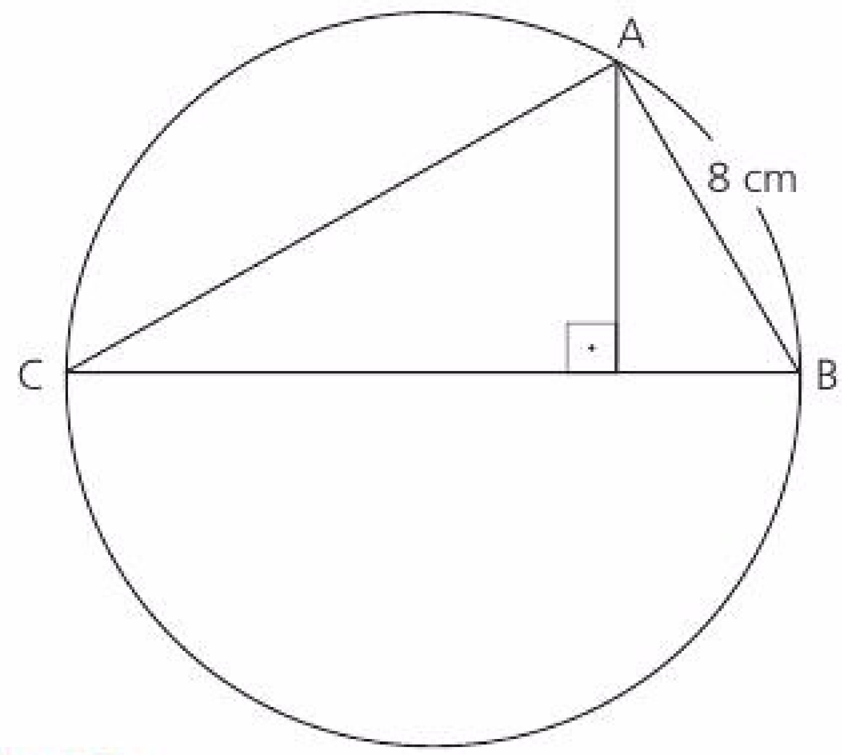
7. Determine a medida da projeção do maior cateto sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos que medem 60 cm e 80 cm. $x = 64$

8. Um losango tem perímetro de 80 cm e uma das diagonais medindo 32 cm. Determine a medida da outra diagonal.
diagonal = 24 cm



9. A soma das medidas da altura e de um dos lados de um triângulo equilátero é igual a **m**. Determine as medidas da altura e lado.
$\ell = m(4 - 2\sqrt{3})$

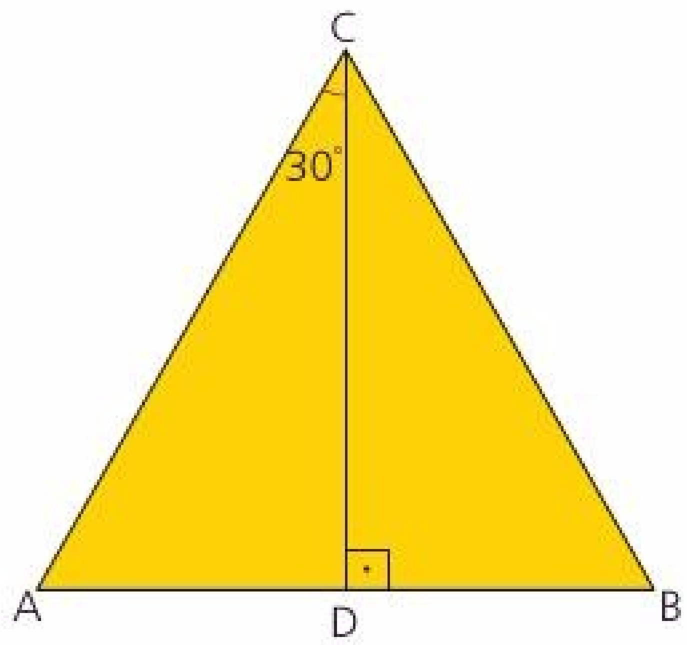
10. Um triângulo retângulo ABC está inscrito numa circunferência de raio 10 cm. Calcule sua altura relativa à hipotenusa, sabendo a corda $\overline{AB}$ mede 8 cm.



h = 7,32

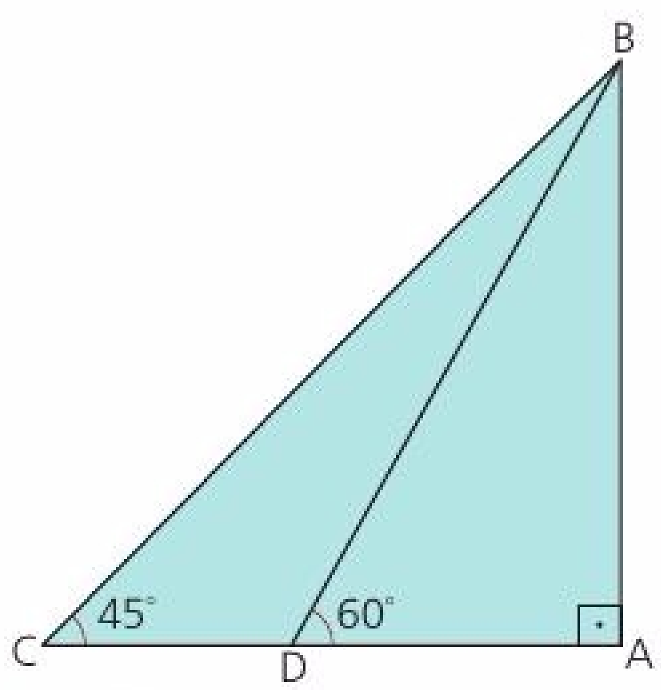
11. Os catetos de um triângulo retângulo medem **a** e $\mathbf{\frac{a}{2}}$. Calcule a medida da hipotenusa. $\frac{a \cdot \sqrt{5}}{2}$

12. No triângulo ABC, $\overline{AB} = \overline{AC} = 6$ cm. Determine $\overline{CD}$.



$h = 3\sqrt{3}$

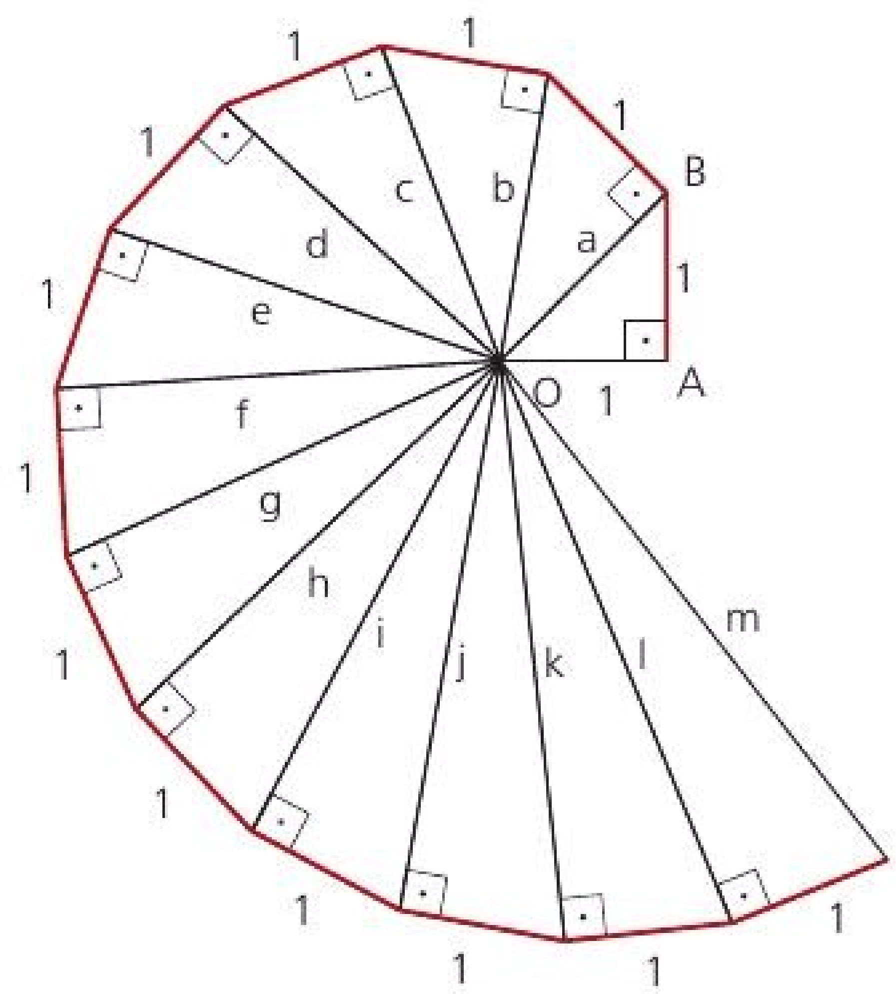
13. No triângulo retângulo ABC, $\overline{AB} = 6$ cm. Obtenha $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$.



$CD = 6 - 2\sqrt{3}$

14. Os ângulos da base de um triângulo isósceles medem 45º e um dos seus lados iguais mede 4 cm. Determine a altura relativa à base.
$x = 2\sqrt{2}$

15. A espiral da figura é obtida a partir do triângulo retângulo isósceles ABO cujos catetos medem 1. Os demais triângulos também são retângulos e têm um cateto de medida 1 e vértice em O. Determine as hipotenusas dos triângulos que compõem a espiral e verifique por que razão esta figura é chamada de "espiral de raízes quadradas". $\ell = \sqrt{13}$, $m = \sqrt{14}$



Triângulos retângulos semelhantes

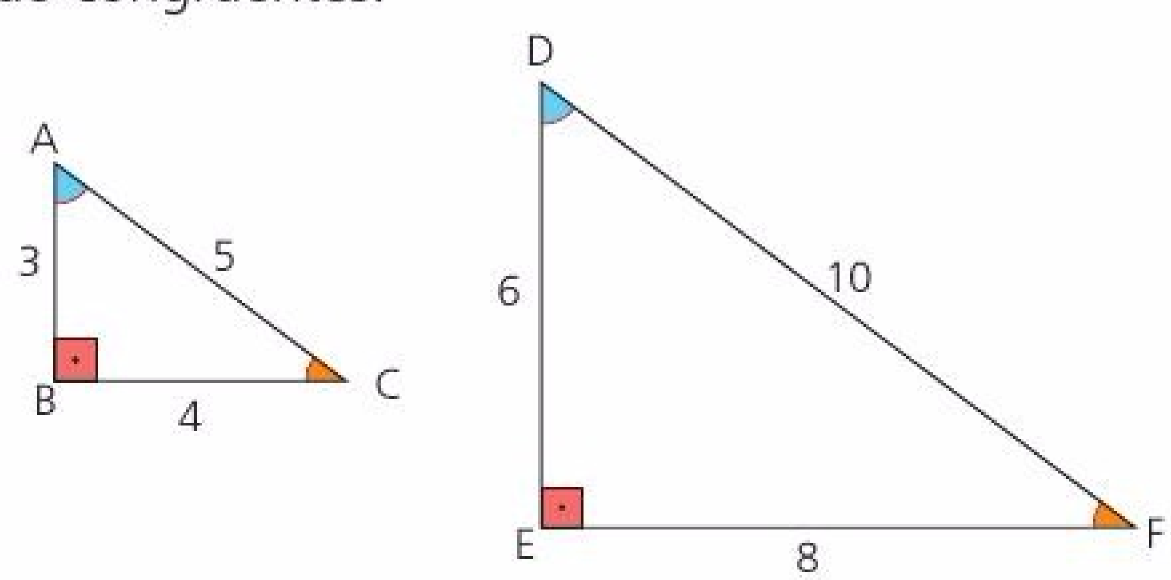
Diversas situações geométricas em que aparecem triângulos retângulos podem ser analisadas com base nos casos que estudamos de semelhança de triângulos. Para isso, é bom relembrar os casos de semelhança:

1º caso

LLL (lado-lado-lado): dois triângulos que têm lados correspondentes proporcionais são semelhantes e têm, portanto, ângulos internos correspondentes congruentes.

Considere, como exemplo deste caso de semelhança, os triângulos retângulos ABC e DEF:

Como $\frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} \rightarrow \hat{A} = \hat{D}$, $\hat{B} = \hat{E}$, $\hat{C} = \hat{F}$. Assim, os ângulos internos correspondentes dos dois triângulos serão congruentes.



2º Caso

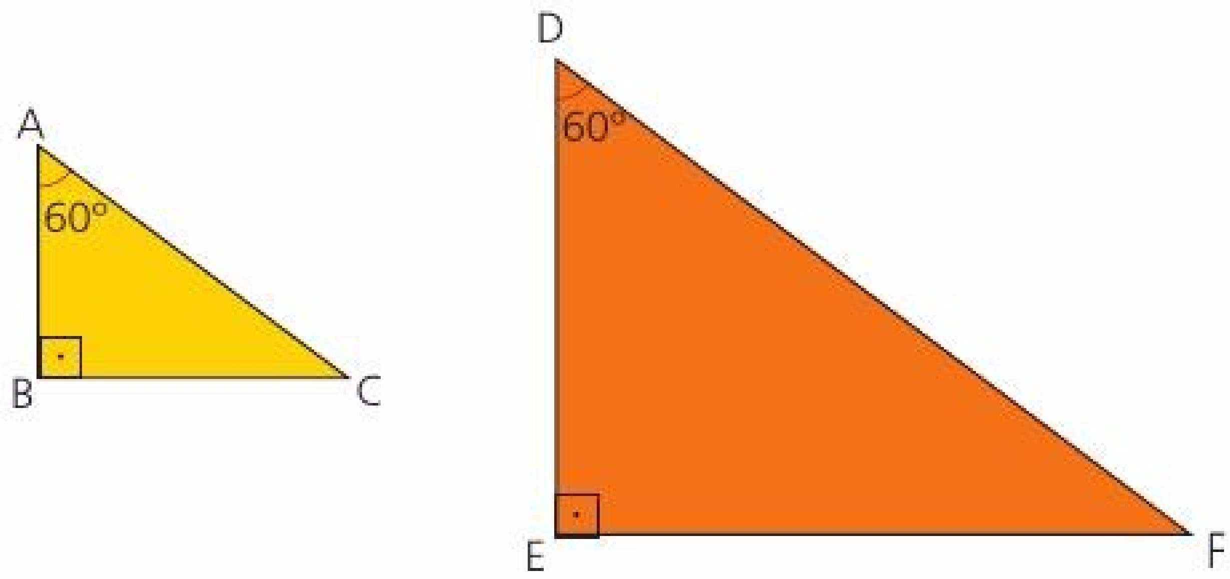
AA (ângulo – ângulo): se dois triângulos têm dois pares de ângulos correspondentes congruentes, terão os três ângulos correspondentes congruentes.

Como vimos, se isto ocorrer, eles terão lados correspondentes proporcionais. É importante lembrar que bastam dois ângulos congruentes para que dois triângulos sejam semelhantes. E que, no caso de dois triângulos retângulos, basta que os dois triângulos tenham mais um ângulo congruente para serem semelhantes.

Observe, como exemplo, os triângulos ABC e DEF:

Note que $\hat{A} = \hat{D} = 60°$ e $\hat{B} = \hat{D} = 90°$.

Assim, $\hat{C} = \hat{F} = 180° - 60° - 90° = 30°$



Neste caso, como temos dois ângulos correspondentes congruentes, os triângulos são semelhantes e:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$$

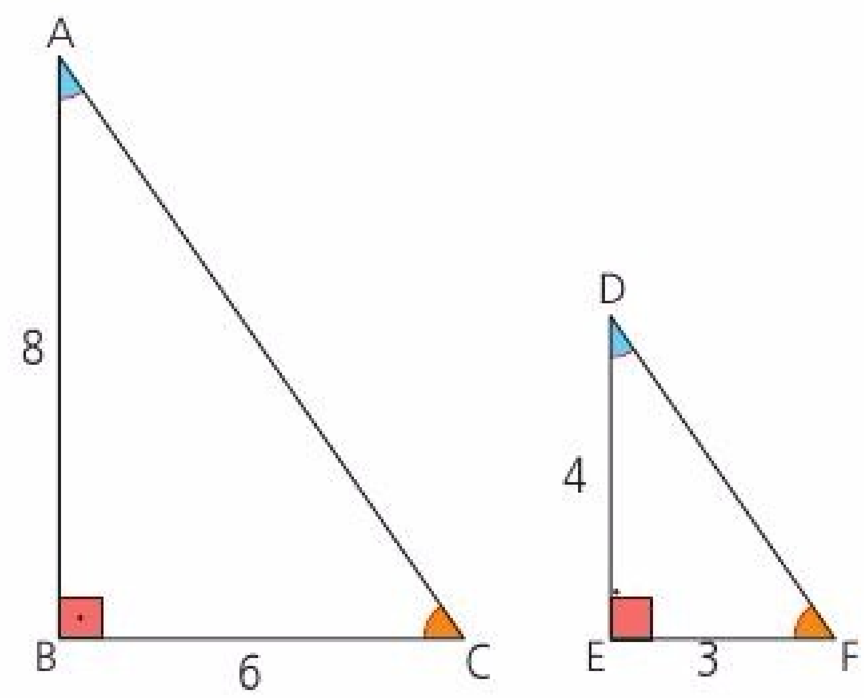
3º Caso

Este caso de semelhança de dois triângulos ocorre quando eles têm dois lados proporcionais e os ângulos definidos por esses lados nos dois triângulos congruentes.

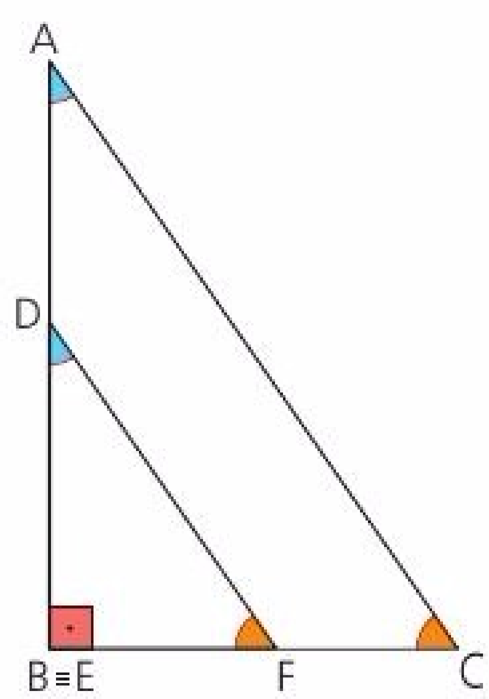
Por essa razão, este caso é denominado **LAL (lado – ângulo – lado).**

Vamos analisar este caso a partir dos triângulos ABC e DEF:

Como $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{DE}$ e $\overline{EF}$ são proporcionais nessa ordem, pois $\frac{8}{4} = \frac{6}{3}$, e $\hat{B} = \hat{E} = 90°$, os triângulos ABC e DEF são semelhantes.



Se fizermos uma translação do triângulo DEF, fazendo o vértice E coincidir com o vértice B do triângulo ABC, verificamos que $\hat{A} = \hat{D}$ e $\hat{C} = \hat{F}$, pois $\overline{DF} \,//\, \overline{AC}$. Assim, se os pares de ângulos correspondentes nos dois triângulos são congruentes, os dois triângulos são semelhantes.



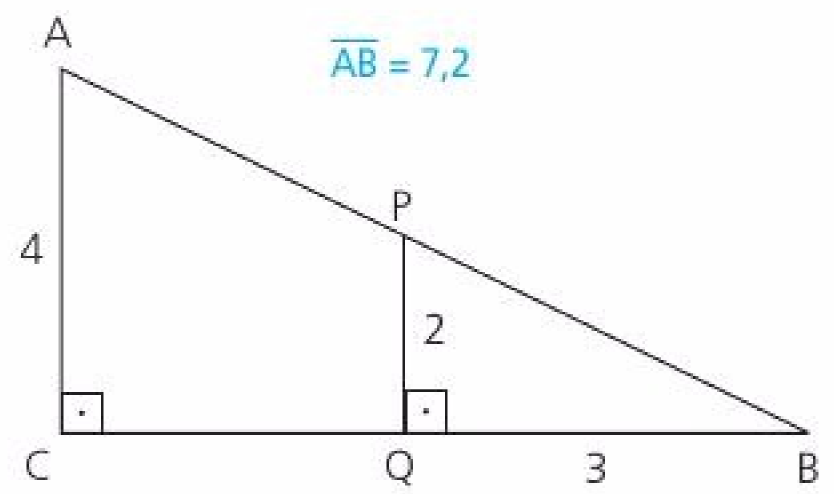
Para procurar saber se dois triângulos retângulos são semelhantes, tome sempre por referência o ângulo reto. A partir dele, procure mais um par de ângulos correspondentes congruentes.

Encontrando a semelhança, estabeleça as relações para os lados correspondentes.

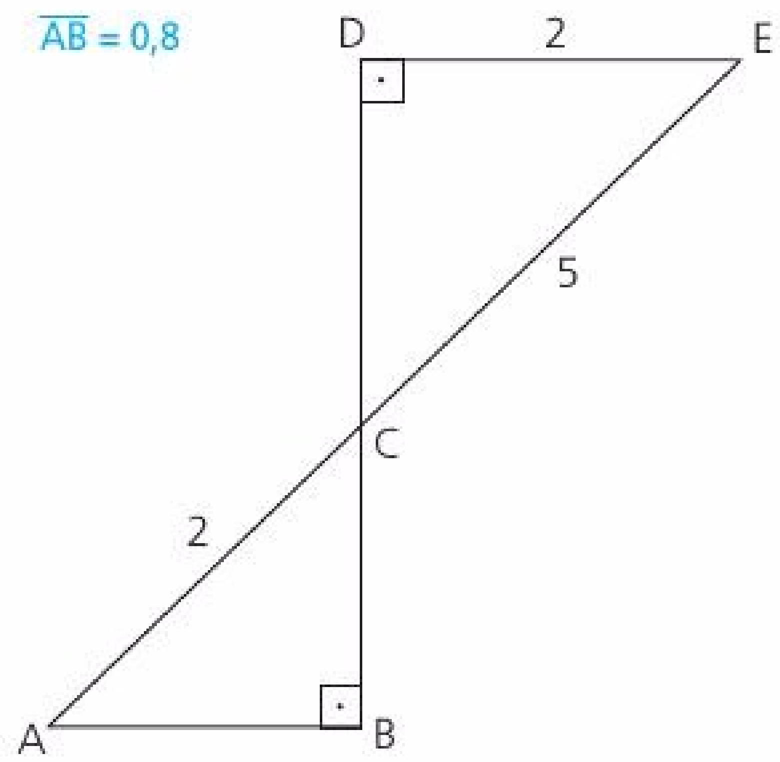
Atividades

16. Determine a medida de $\overline{AB}$ em cada caso a seguir.

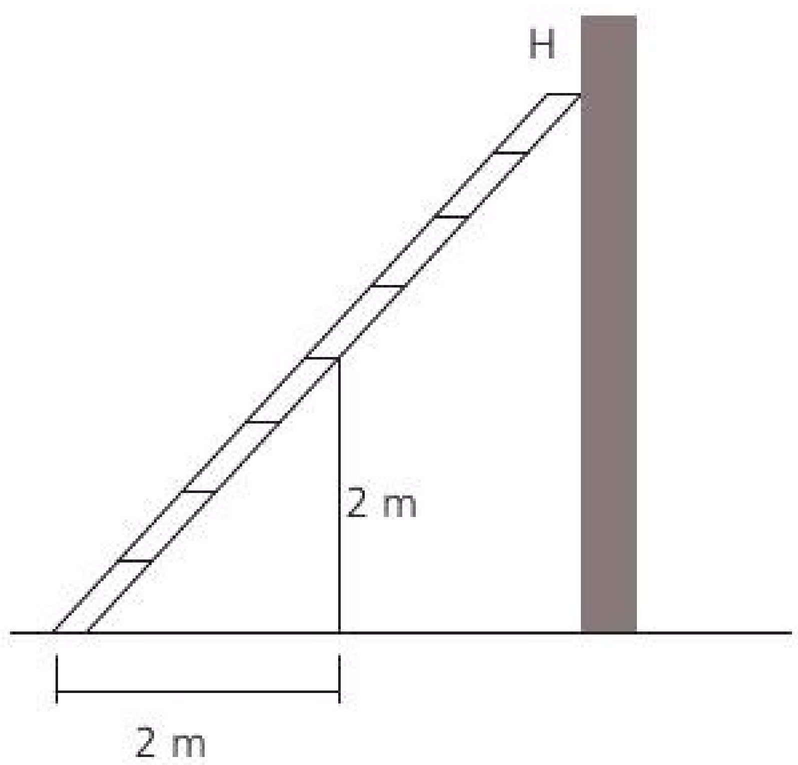
a) $\overline{AB} = 7,2$



b) $\overline{AB} = 0,8$



17. Uma escada de oito degraus está encostada num muro no ponto H, situado a uma altura de 4 m do solo, de tal forma que o quarto degrau encontra-se a 2 m do pé da escada e a 2 metros do solo.

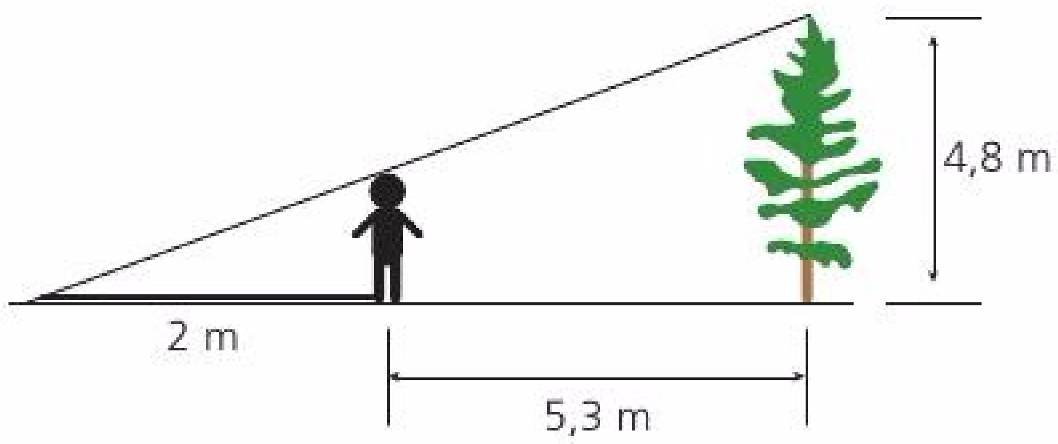


Determine:

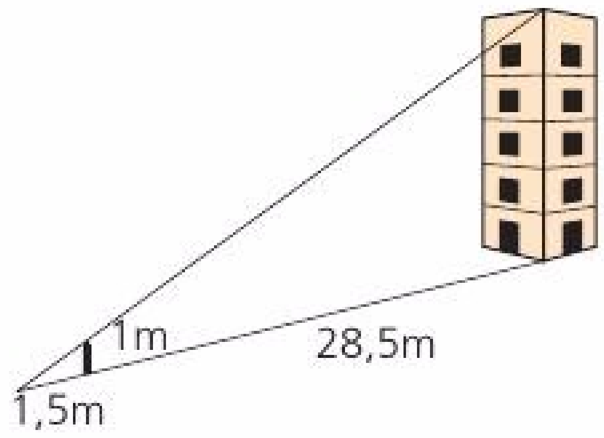
a) a que distância do pé do muro está o pé da escada; 4 m

b) o comprimento aproximado da escada. 5,6 m

18. Determine a altura de uma criança, distante 5,3 m de uma árvore de 4,8 m de altura, sabendo que a sombra da pessoa mede 2 m.
h = 1,32 m

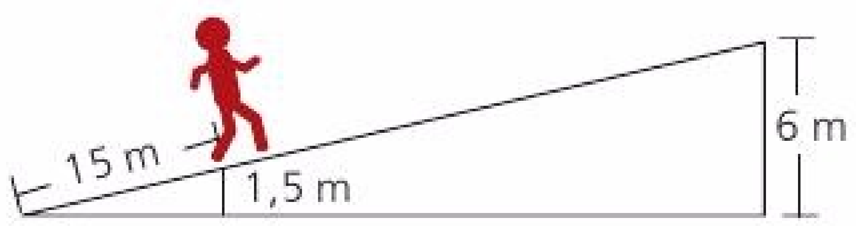


19. Determine a altura de um prédio, sabendo que seu topo é visto sob o mesmo ângulo em que se observa uma estaca de 1 m de altura, que está a 1,5 m do ponto de observação e a 28,5m do prédio. H = 19 m



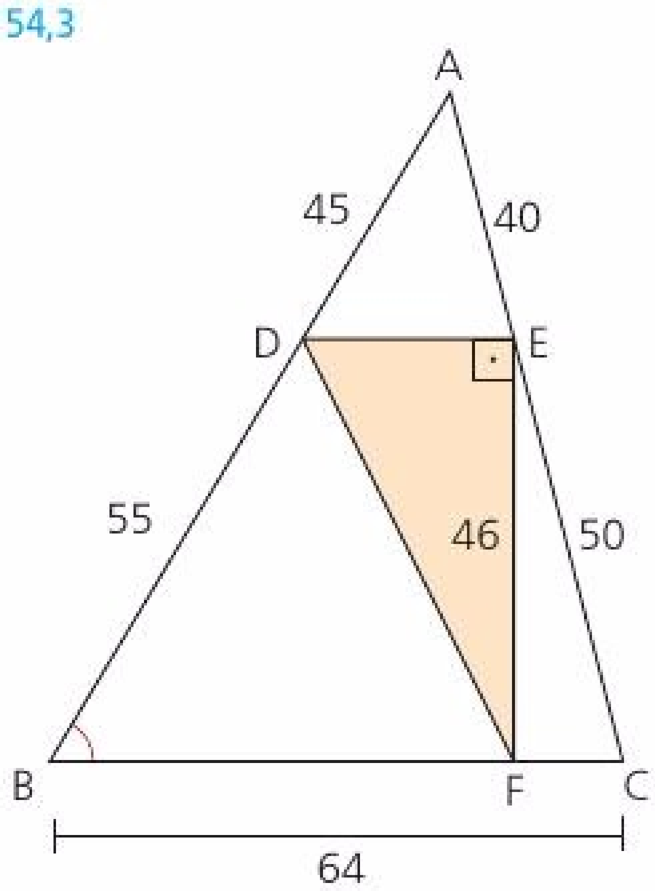
Interpretar figura

20. Sobre uma rampa de inclinação constante, que tem 6 m altura na sua parte mais alta, uma pessoa notou que, após caminhar 15 m, estava a 1,5 m de altura em relação ao solo, conforme mostra a figura. Nessas condições, a distância que essa pessoa ainda terá de caminhar para chegar ao ponto mais alto dessa rampa é igual a:

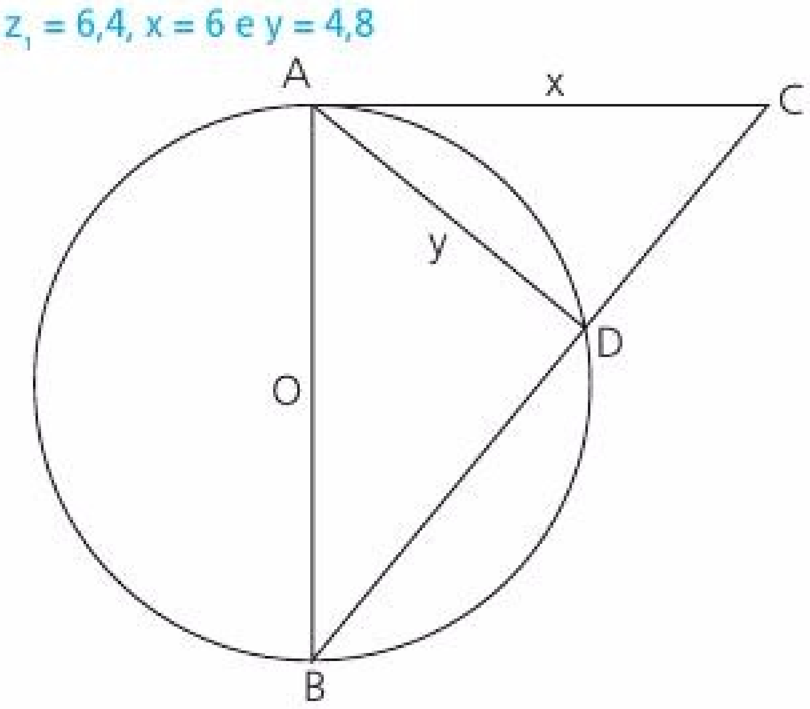


a) 30 m
b) 35 m
c) 38 m
d) 40 m
x e) 45 m

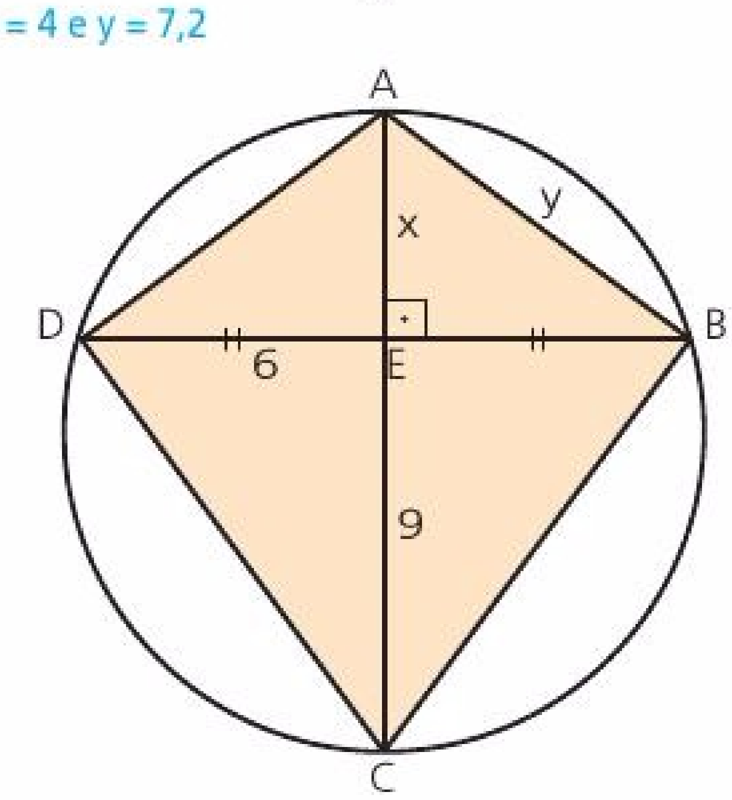
21. Calcule a medida da hipotenusa do triângulo DEF, sabendo que $\overline{DE} /\!/ \overline{BC}$.
$\overline{DF} = 54,3$



22. Determine os valores de **x, y** e **z** na figura, sabendo que o raio da circunferência de centro O mede 4 cm e que $\overline{CD}$ é igual 3,6 cm.
$z_1 = 6,4$, $x = 6$ e $y = 4,8$

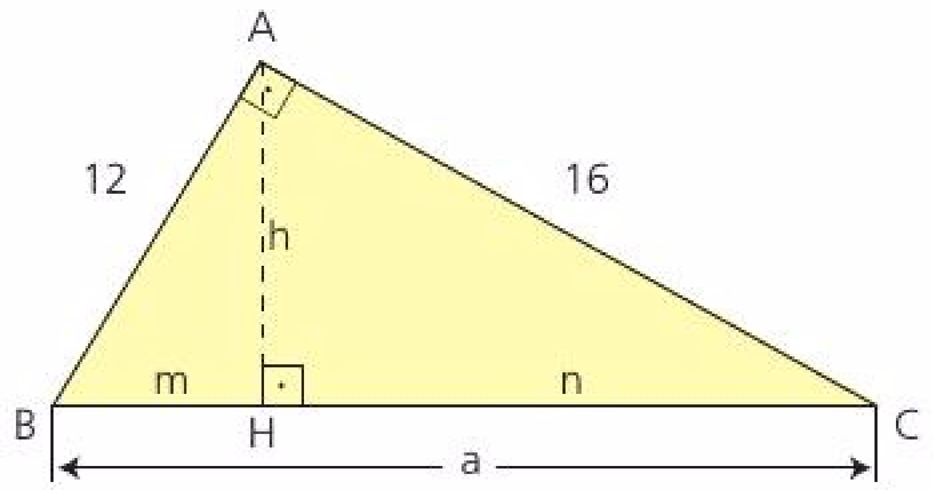


23. A diagonal maior do quadrilátero ABCD é perpendicular à menor em seu ponto médio E. Determine o comprimento da diagonal maior e o perímetro do quadrilátero, a partir do cálculo de **x** e **y**.
$x = 4$ e $y = 7,2$

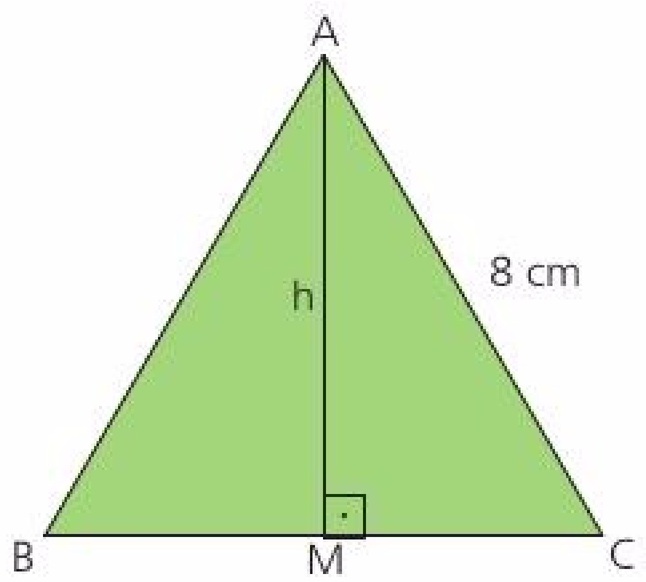


Para estudar

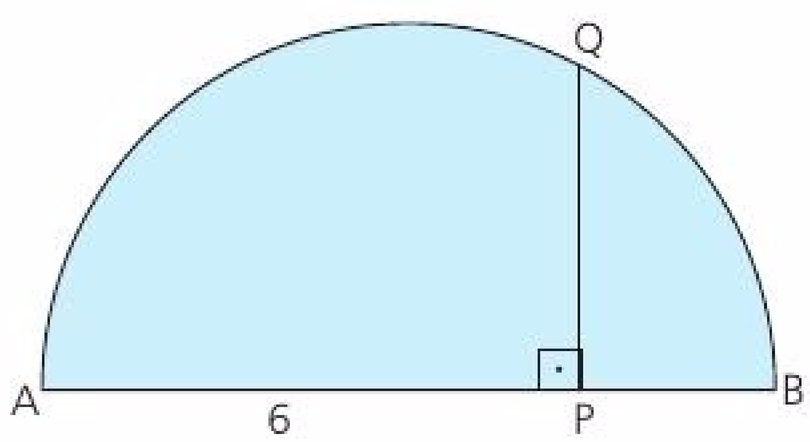
24. No triângulo ABC da figura, calcule a hipotenusa e a altura.



25. Determine a altura de um triângulo equilátero de lado 8 cm:



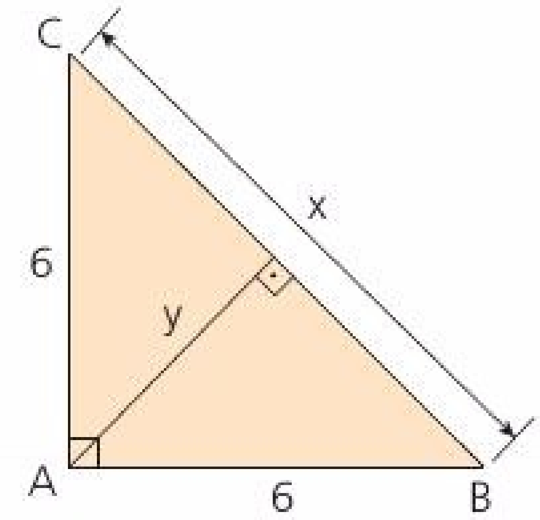
26. Na figura, $\overline{AB}$ é o diâmetro da semicircunferência e $\overline{PQ} = 2\sqrt{6}$ é perpendicular a este diâmetro. Determine a medida do diâmetro $\overline{AB}$.



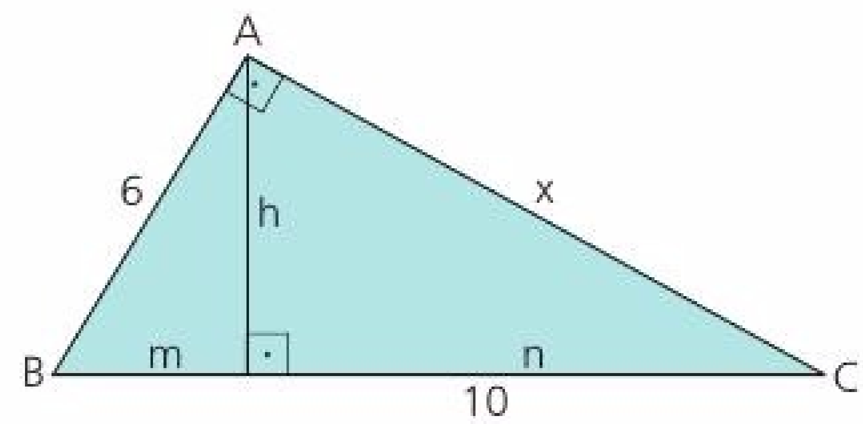
27. Determine a medida da projeção do maior cateto sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos que medem 60 cm e 80 cm.

28. Determine os valores literais indicados nas figuras:

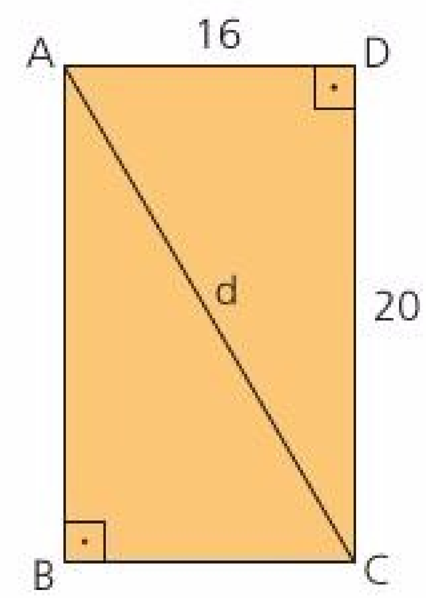
a)



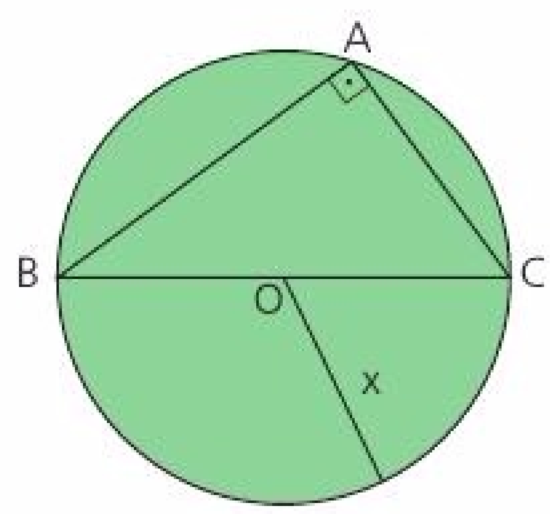
b)



c)



d)

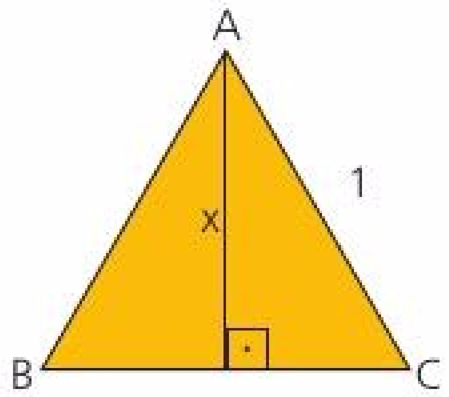


O é o centro da circunferência.

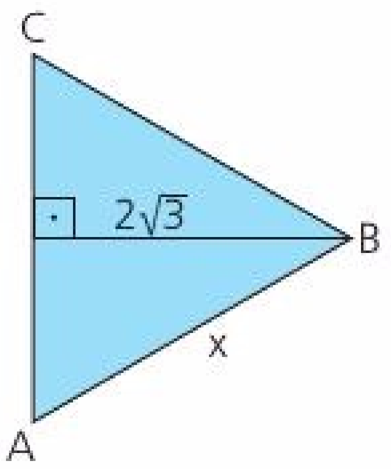
$\overline{AC} = 10$ e $\overline{AB} = 24$.

29. Determine **x** nas figuras:

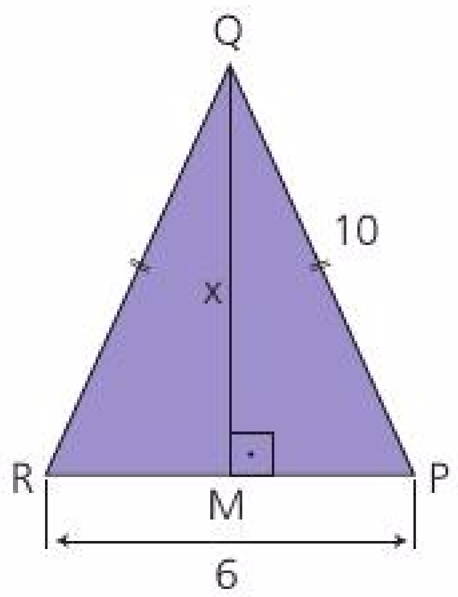
a)



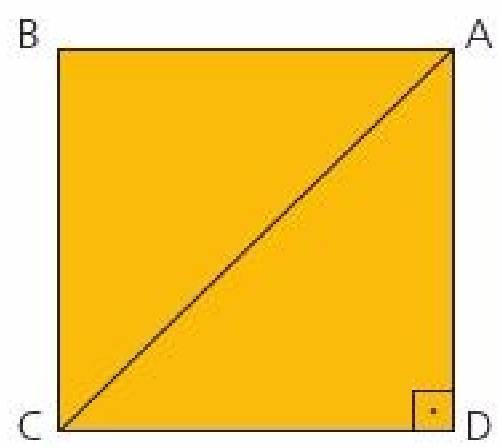
b)



c)

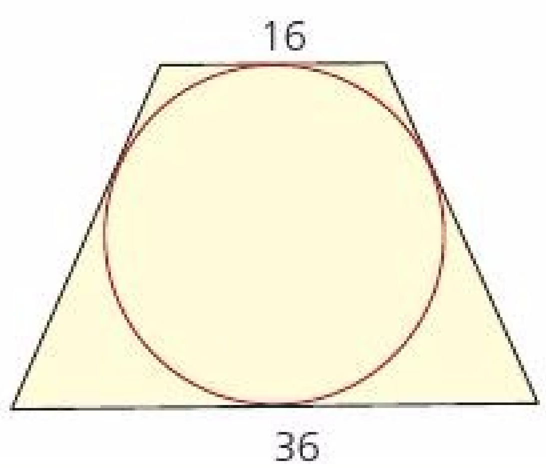


30. Determine a diagonal de um quadrado de lado $2\sqrt{2}$.

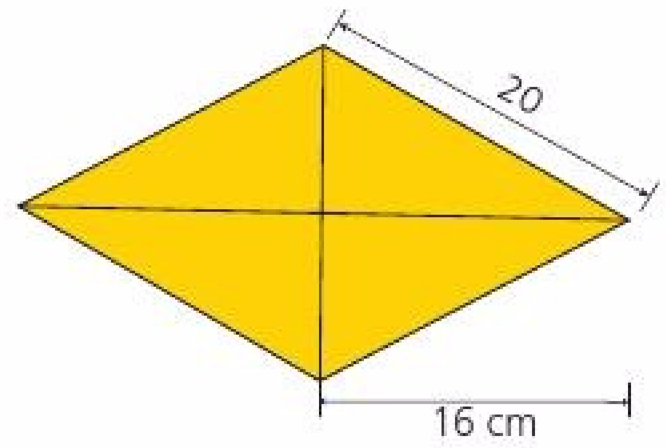


31. Calcule o lado de um quadrado cuja diagonal mede $2\sqrt{\frac{2}{3}}$.

32. Determine o raio de uma circunferência inscrita em um trapézio isósceles de bases 16 e 36.



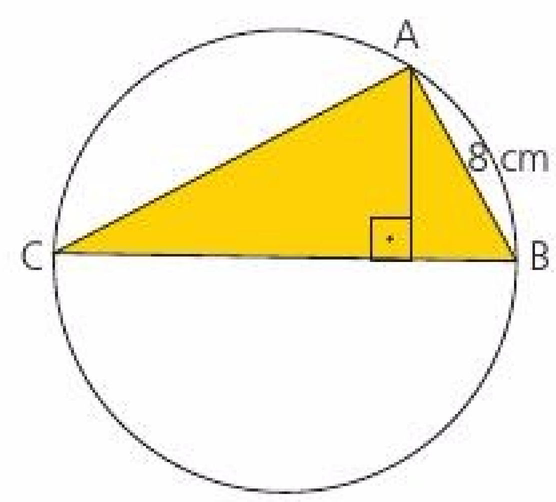
33. Um losango tem perímetro de 80 cm e uma das diagonais medindo 32 cm. Determine a medida da outra diagonal.



34. A soma das medidas da altura e de um dos lados de um triângulo equilátero é 4m. Determine as medidas da altura e do outro lado.

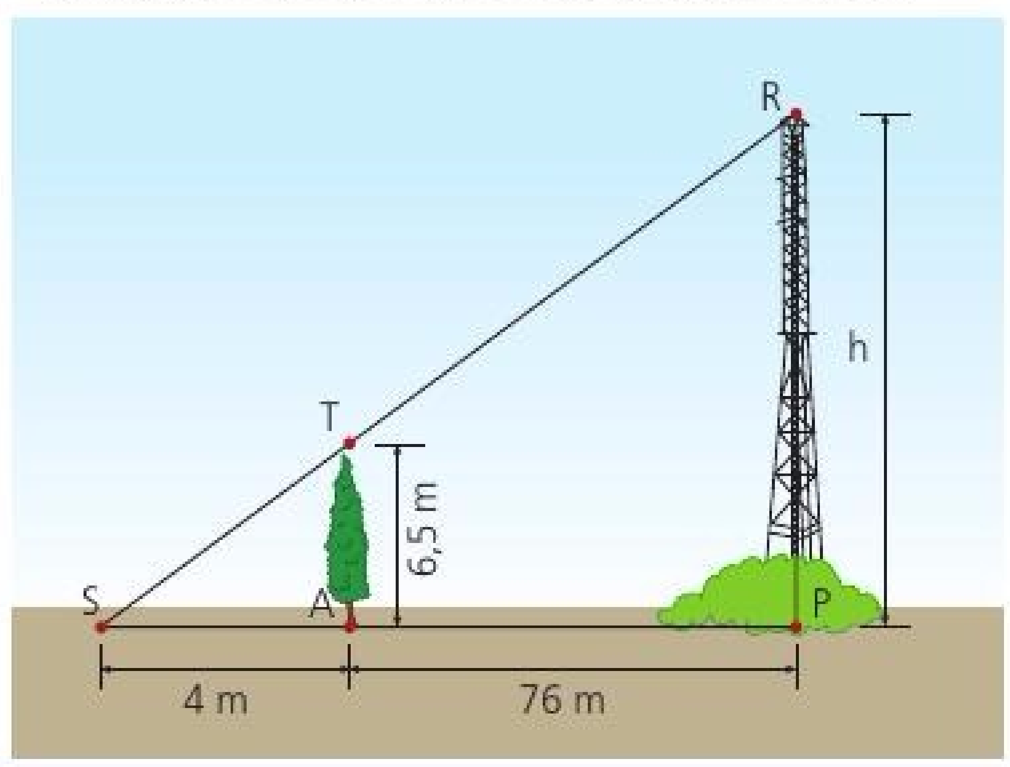
35. Um triângulo retângulo ABC está inscrito numa circunferência de raio 10 cm. Calcule sua altura relativa à hipotenusa, sabendo que uma das cordas ($\overline{AB}$), determinada pela inscrição, mede 8 cm.

Interpretar figuras



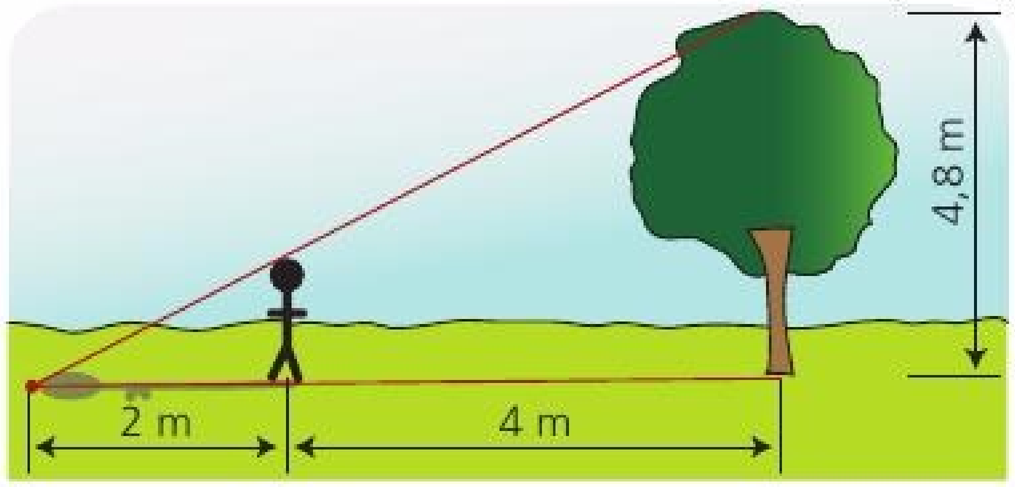
36. Calcule a altura da torre da figura, sabendo que a altura de uma árvore, distante 76 m do pé da torre, é de 6,5 m e que sua sombra projetada no solo tem 4,0 m. Considere que os raios solares que incidem na torre e na árvore são paralelos.

A figura é apenas um esquema ilustrativo.

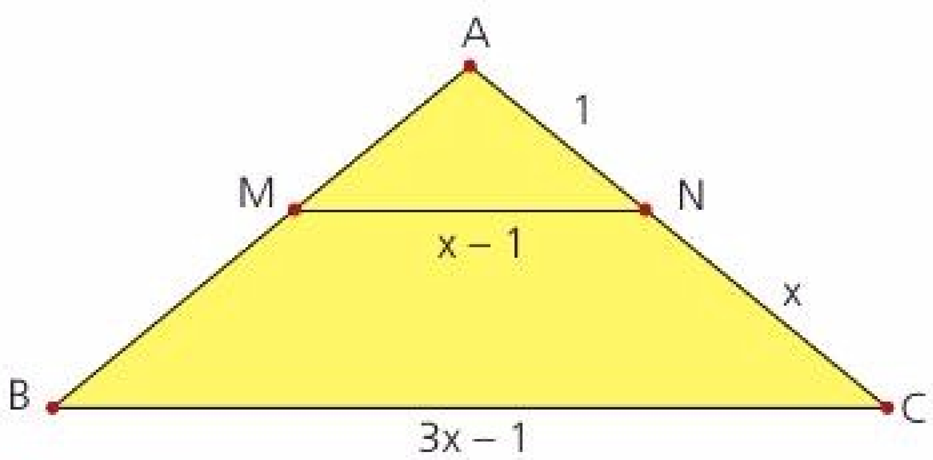


37. Determine a altura de uma pessoa cuja sombra mede 2 m, distante 4 m de uma árvore de 4,8 m de altura.

A figura é apenas um esquema ilustrativo.

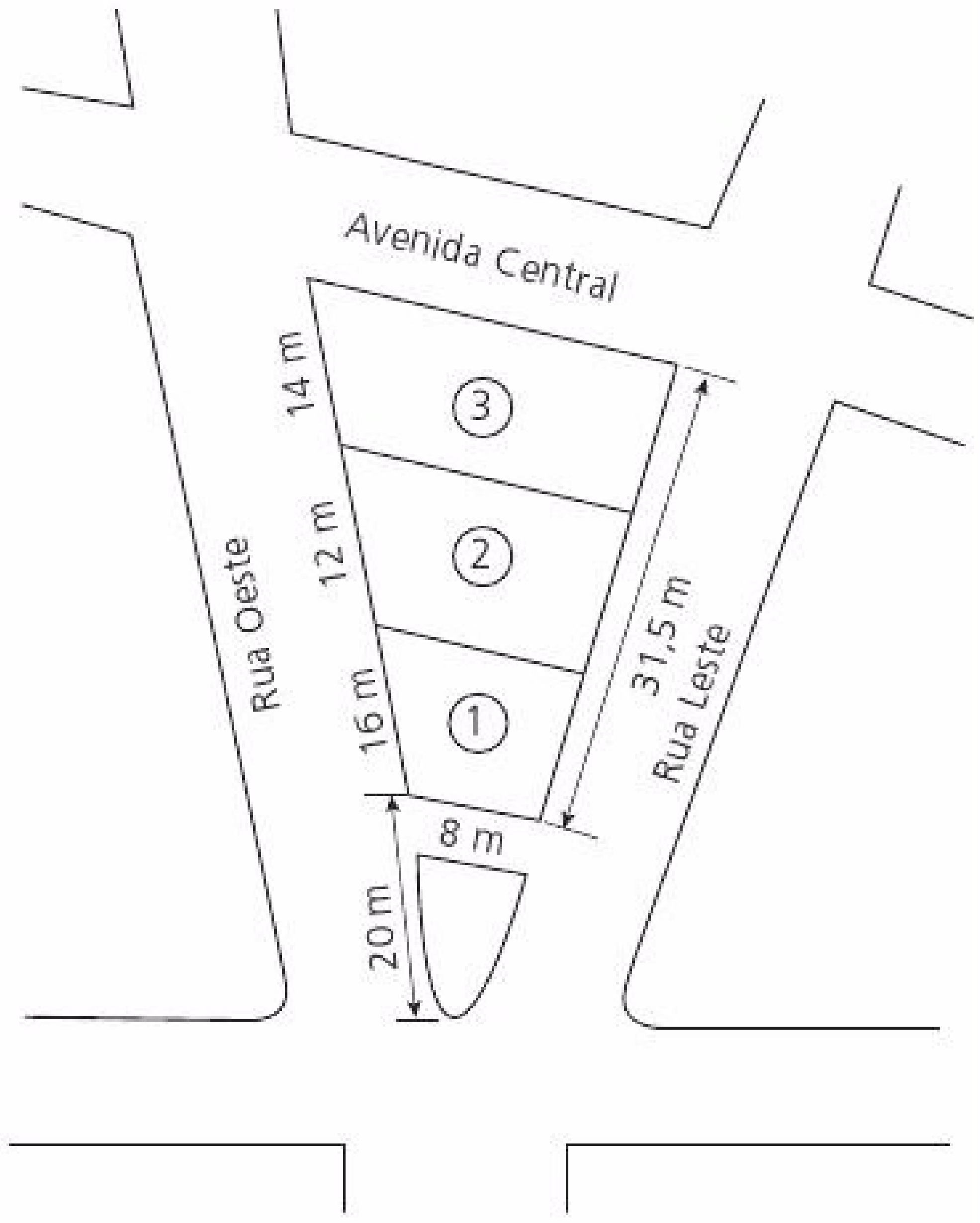


38. Determine o perímetro do triângulo isósceles ABC da figura, sabendo que $\overline{MN}$ é paralelo à base.

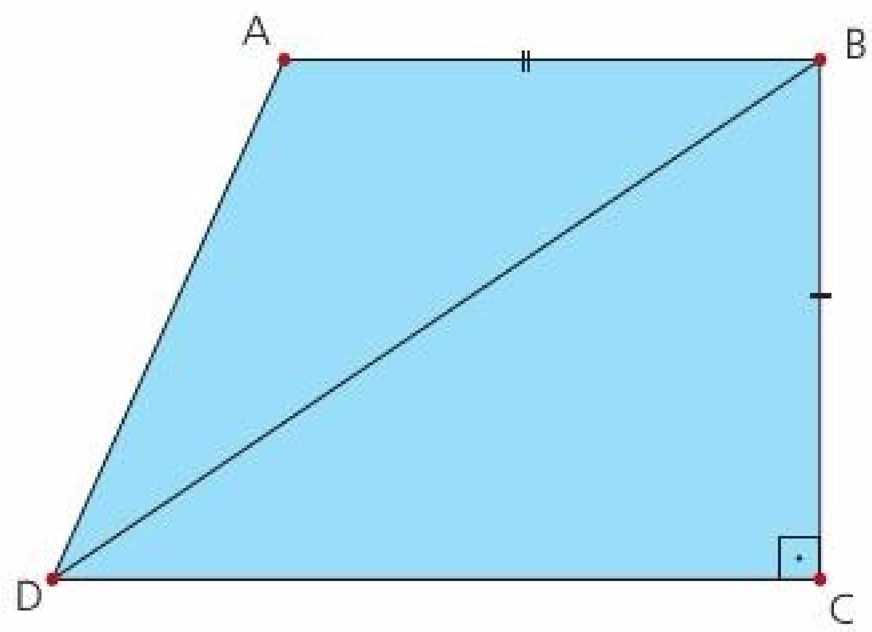


Interpretar figura

39. Os lotes 1, 2 e 3 localizam-se entre as ruas Leste e Oeste e têm as frentes para esta rua medindo 16 m, 12 m e 14 m, respectivamente. Sabe-se também que o lote 1 tem, no entroncamento das duas ruas, uma frente de 8 m. Determine as três frentes para a rua Leste e a frente do lote 3 para a Avenida Central.

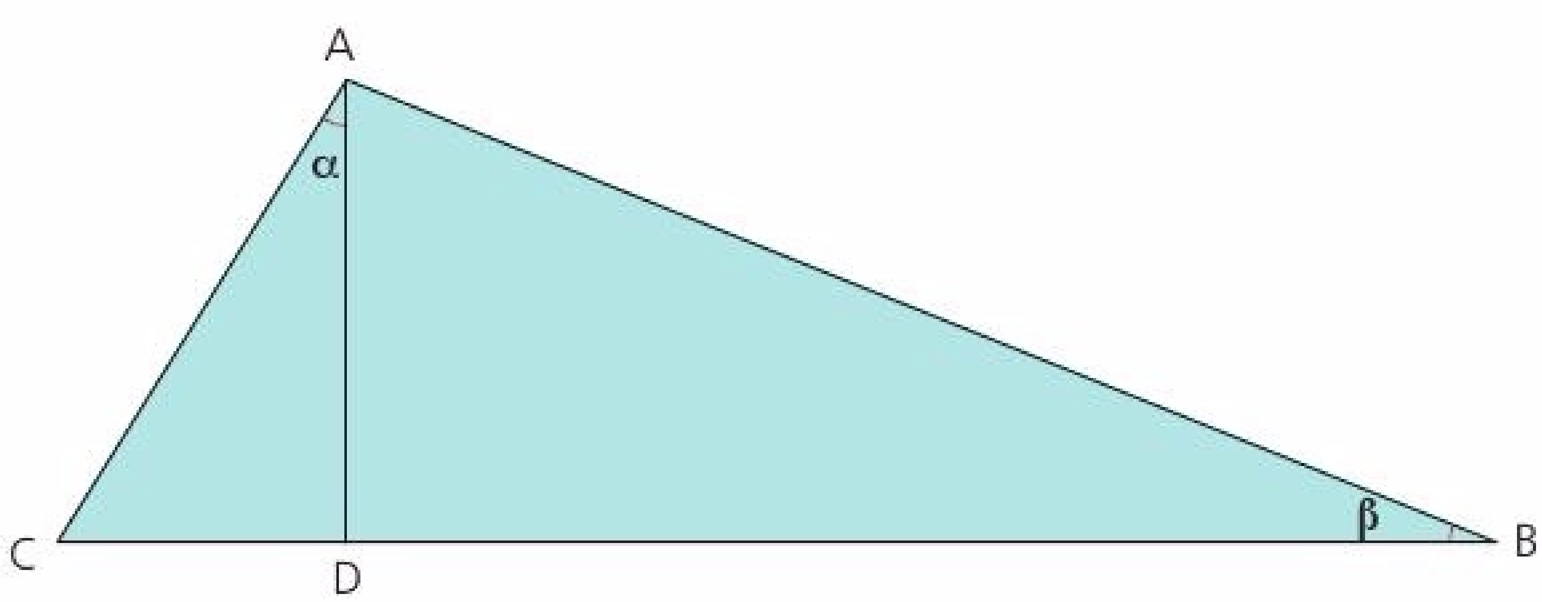


40. Considere o trapézio retângulo ABCD, de altura 3 m.



Calcule a área do trapézio sabendo que a diagonal $\overline{DB}$ mede 5 m.

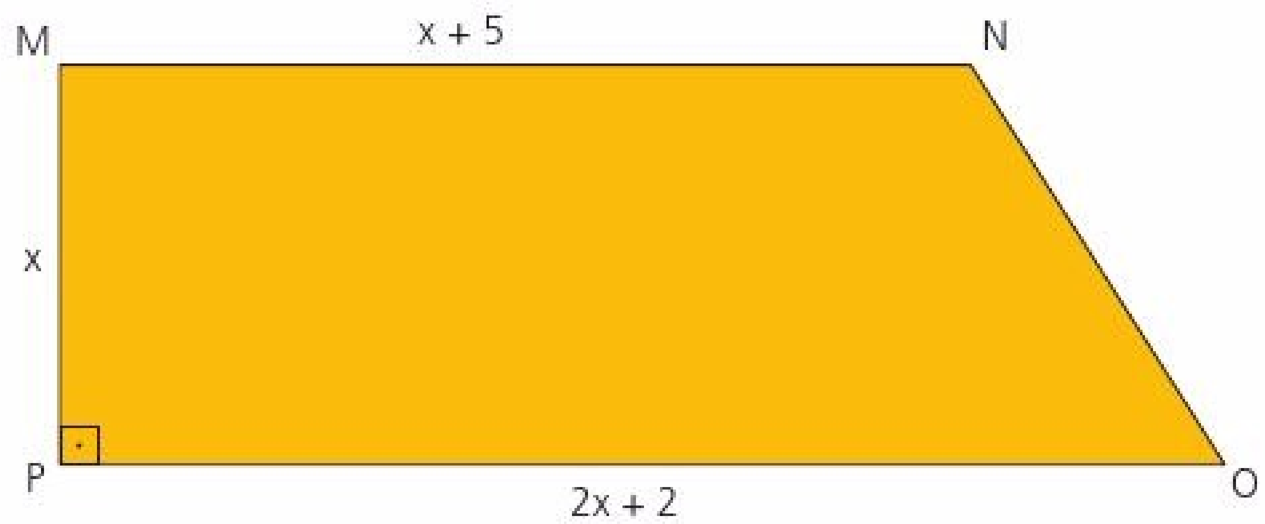
41. Na figura I, $\alpha = \beta$, $\overline{AC} = 10$, $\overline{BD} = 21$ e $\overline{DC} = x$.



(figura I)

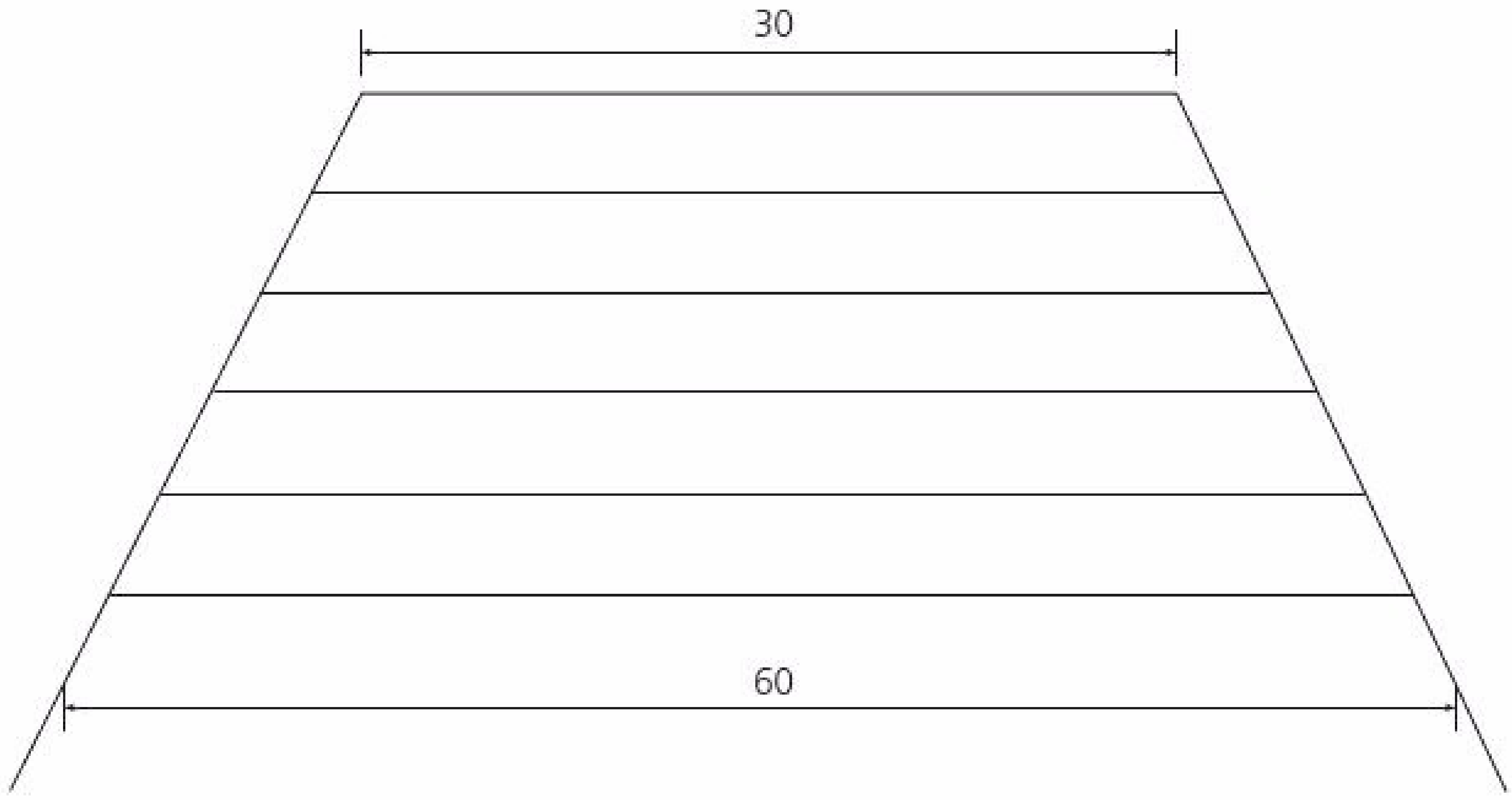
Na figura II, $\overline{MN} // \overline{OP}$.

(figura II)



Qual é a área da figura II?

42. Um marceneiro deseja construir uma escada trapezoidal com 5 degraus, de forma que o mais baixo e o mais alto tenham largura respectivamente iguais a 60 cm e a 30 cm, conforme as figuras:



Os degraus serão obtidos cortando-se uma peça linear de madeira. Calcule seu comprimento.

43. Um triângulo equilátero foi dividido em quatro outros triângulos congruentes entre si e, cujos vértices são os pontos médios do triângulo de origem. Outros triângulos foram obtidos a partir dos pontos médios dos quatro triângulos congruentes.

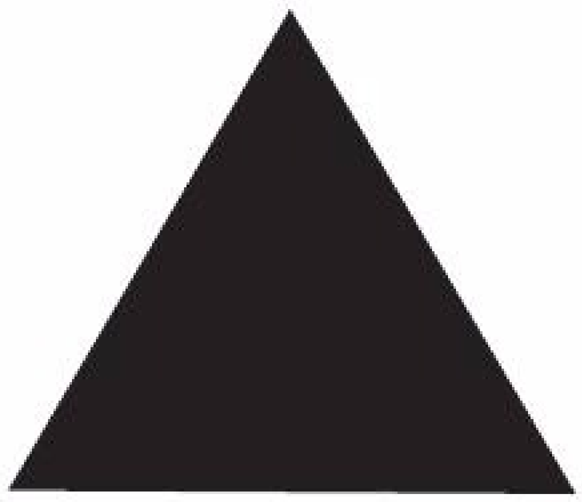


Figura 1

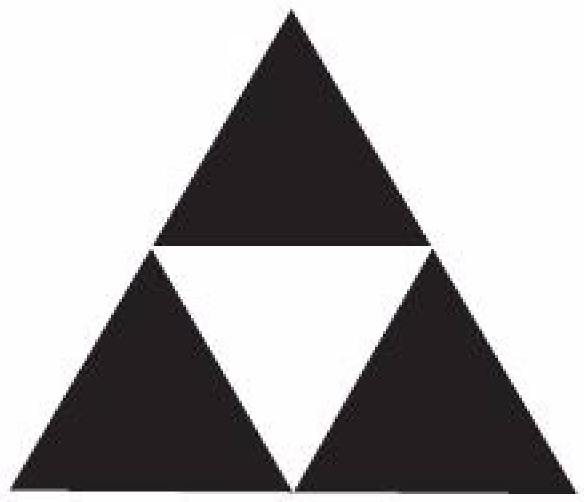


Figura 2

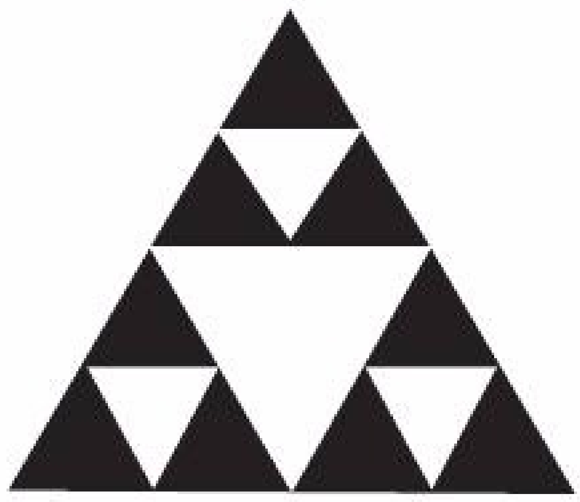


Figura 3

Dado que a medida do lado do menor triângulo da figura 3 é 2 cm, responda:

a) Quais são as medidas dos lados do triângulo da figura 1?

b) Qual é a medida da altura de cada um dos quatro triângulos congruentes da figura 2?

c) Qual é a medida da altura do maior triângulo da figura 3?

Resolução das atividades

1. a) $13^2 = 12^2 + x^2$
$169 = 144 + x^2$
$x^2 = 25$
$x = 5$
$A = \dfrac{5 \cdot 12}{2} = 30$
$\dfrac{13 \cdot y}{2} = 30$
$y = \dfrac{60}{13} \rightarrow y = 4,6$

b) $5^2 = 3^2 + x^2$
$25 = 9 + x^2$
$x^2 = 16$
$x = 4$
$3^2 = 5 \cdot m$
$9 = 5m$
$m = 1,8$
$4^2 = 5 \cdot n$
$16 = 5n$
$n = 3,2$
$3 \cdot 4 = 5 \cdot h$
$12 = 5h$
$h = 2,4$

c) $d^2 = 5^2 + 4^2$
$d^2 = 25 + 16$
$d^2 = 41$
$d = 6,4$

d) $d^2 = 24^2 + 10^2$
$d^2 = 576 + 100$
$d^2 = 676$
$d = 26$
$x = \dfrac{d}{2} = 13$

e) 0° C

2. a) $8^2 = 4^2 + x^2$
$64 = 16 + x^2$
$x^2 = 48$
$x = 6,9$

b) $x^2 = \left(\dfrac{x}{2}\right)^2 + (\sqrt{3})^2$
$4x^2 = x^2 + 3 \cdot 4$
$3x^2 = 3 \cdot 4$
$x = 2$

c) $6^2 = 2^2 + x^2$
$36 = 4 + x^2$
$x^2 = 32$
$x = 5,6$

3. a) $c^2 = 8 \cdot 2$
$c^2 = 16$
$c = 4$
$8^2 = 4^2 + z^2$
$64 = 16 + z^2$
$z^2 = 48$
$z = 6,9$
$6,9^2 = x \cdot 8$
$48 = x \cdot 8$
$x = 6$
$y^2 = 2 \cdot 6$
$y = 3,4$

b) $8 \cdot 6 = x \cdot 10$
$48 = x \cdot 10$
$x = 4,8$

c) $(2x)^2 = x^2 + (4\sqrt{3})^2$
$4x^2 = x^2 + 48$
$3x^2 = 48$
$x^2 = 16$
$x = 4$

d) $y^2 = 6 \cdot 9$
$y^2 = 54$
$y = 7,3$
$x^2 = 6 \cdot 15$
$x^2 = 90$
$x = 9,4$
$z^2 = 9 \cdot 15$
$z^2 = 135$
$z = 11,6$

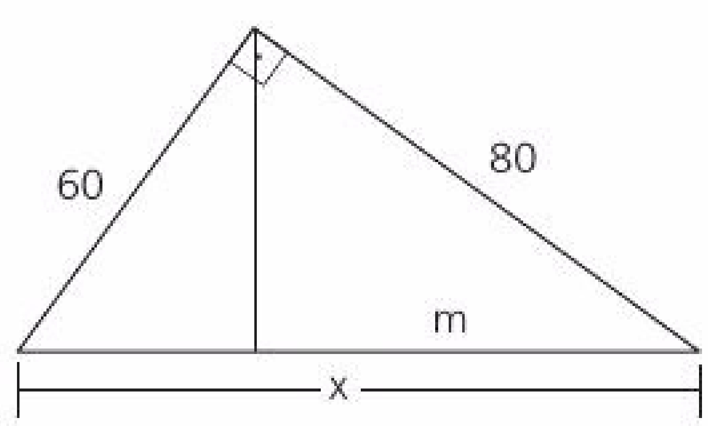
e) $x = 2\sqrt{2}$, $y = 6$ e $z = 2\sqrt{6}$

4. $x^2 = 4^2 + 3^2$
$x^2 = 25$
$x = 5$
$y^2 = 5^2 + 5^2$
$y^2 = 50$
$y = 7,1$

5. $d^2 = \ell^2 + \ell^2$
$d^2 = 2\ell^2$
$d = \ell\sqrt{2}$

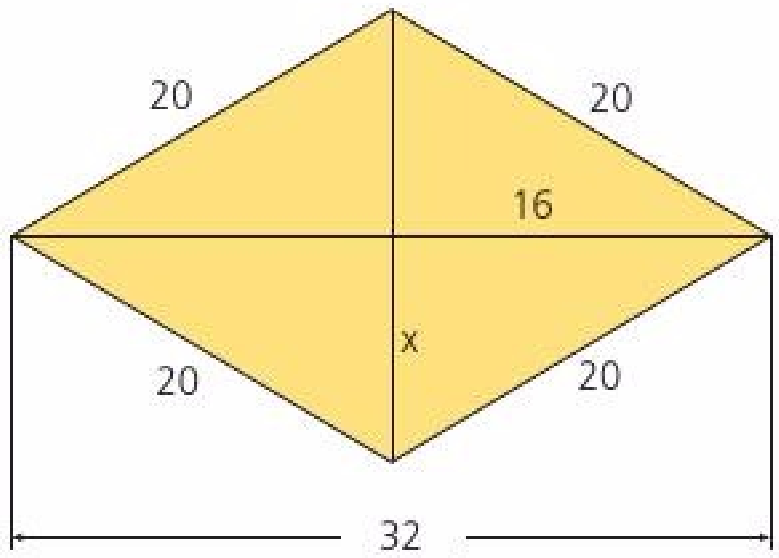
6. $\ell = \sqrt{2}$

7.



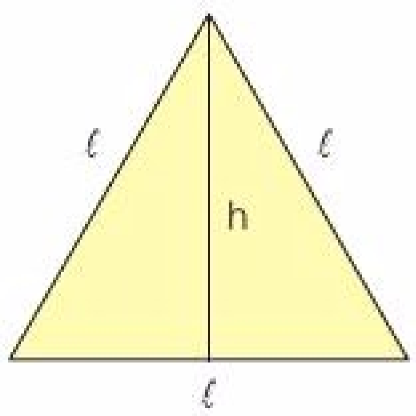
$x^2 = 60^2 + 80^2$
$x^2 = 10\,000$
$x = 100$
$80^2 = m \cdot 100$
$6\,400 = m \cdot 100$
$x = 64$

8.



$20^2 = 16^2 + x^2$
$400 = 256 + x^2$
$x^2 = 144$
$x = 12$
diagonal = 24 cm

9.



$h + \ell = m$

$h^2 = \ell^2 - \dfrac{\ell^2}{4}$

$h^2 = \dfrac{4\ell^2 - \ell^2}{4} = \dfrac{3\ell^2}{4}$

$h = \dfrac{\ell}{2}\sqrt{3}$

$\ell = m - h$

$h = (m - h)\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$h = m\dfrac{\sqrt{3}}{2} - h\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$h + h\dfrac{\sqrt{3}}{2} = m\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$h = \left(\dfrac{2 + \sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{m\sqrt{3}}{2}$

$h = \dfrac{\dfrac{m\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{2 + \sqrt{3}}{2}} = \dfrac{m\sqrt{3}}{(2 + \sqrt{3})} \cdot \dfrac{(2 - \sqrt{3})}{(2 - \sqrt{3})}$

$h = m(2\sqrt{3} - 3)$

$\ell = m - h$

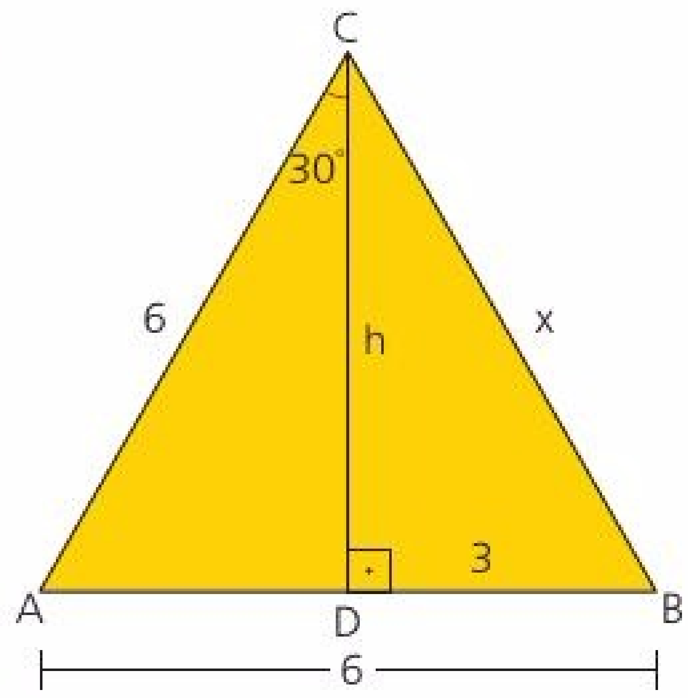
$\ell = m - m(2\sqrt{3} - 3)$

$\ell = m(4 - 2\sqrt{3})$

10. $r = 10$ cm
$d = 20$ cm
$20^2 = 8^2 + AC^2$
$400 = 64 + AC^2$
$AC = 18{,}3$
$8 \cdot 18{,}3 = h \cdot 20$
$h = 7{,}32$

11. $\dfrac{a \cdot \sqrt{5}}{2}$

12.



$x = 6$

$36 = 9 + h^2$

$h = 3\sqrt{3}$

13. $tg\ 60° = \dfrac{AB}{AD} \rightarrow \sqrt{3} = \dfrac{6}{AD}$

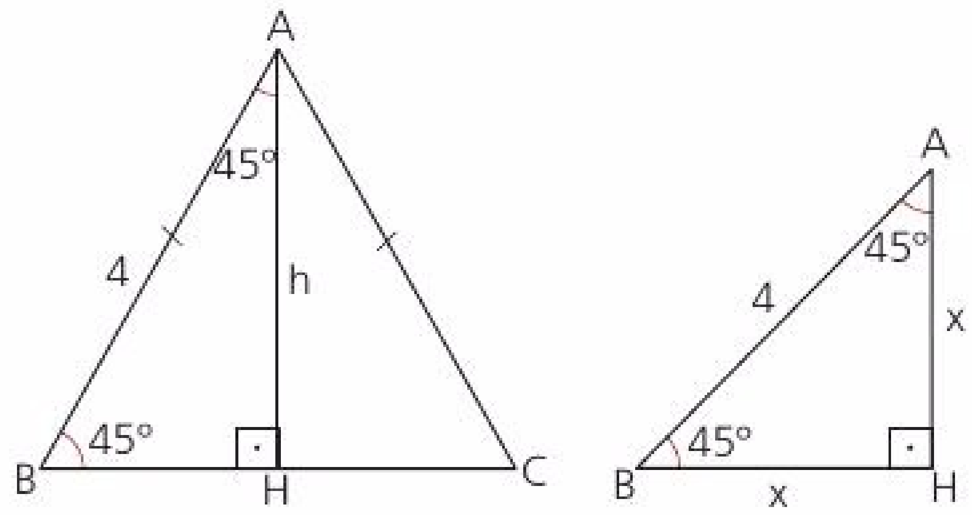
$AD = \dfrac{6}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$

$sen\ 45° = \dfrac{AB}{BC} \rightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{6}{BC}$

$BC = \dfrac{12}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}$

$CD = 6 - 2\sqrt{3}$

14.



$4^2 = x^2 + x^2$

$16 = 2x^2$

$x^2 = 8$

$x = 2\sqrt{2}$

15. $a^2 = 1^2 + 1^2$
$a = \sqrt{2}$
$b = \sqrt{3}$
$c = \sqrt{4} = 2$
.
.
.
$\ell = \sqrt{13}$
$m = \sqrt{14}$

16. a) $\frac{{}^{2}\cancel{4}}{{}_{1}\cancel{2}} = \frac{BC}{3}$

$BC = 6$

$AB^2 = 4^2 + 6^2$

$AB^2 = 16 + 36$

$AB^2 = 52$

$AB = 2\sqrt{13} = 7{,}2$

b) $\frac{2}{5} = \frac{AB}{2}$

$AB = 0{,}8$

17. a) 4 m

b) 4 m

c) 5,6 m

18. $\text{tg}\ \alpha = \frac{4{,}8}{7{,}3} = 0{,}6575$

$\text{tg}\ \alpha = \frac{h}{2} = 0{,}6575$

$h = 1{,}32$ m

19. $\text{tg}\ \alpha = \frac{1}{1{,}5} = 0{,}666$

$\text{tg}\ \alpha = \frac{H}{28{,}5} = 0{,}666$

$H = 19$ m

20. $\text{sen}\ \alpha = \frac{1{,}5}{15} = 0{,}1$

$\text{sen}\ \alpha = \frac{6}{L} = 0{,}1$

$L = 60$ m

Faltam ainda 45 m resposta: e

21. $\frac{DE}{64} = \frac{45}{100}$

$DE = 28{,}8$

$DF^2 = 28{,}8^2 + 46^2$

$DF^2 = 829{,}44 + 211{,}6$

$DF = \sqrt{2\,945{,}44}$

$DF = 54{,}3$

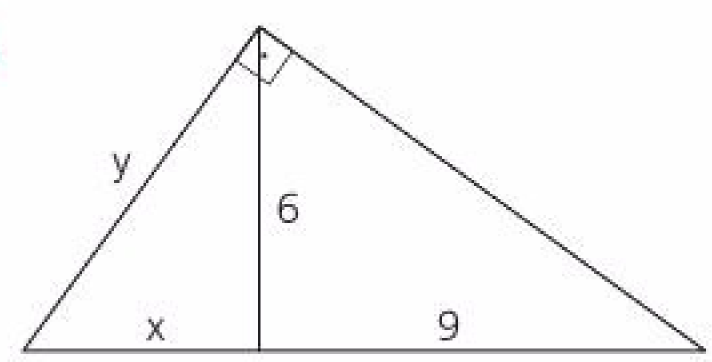
22. $8^2 = z \cdot (3{,}6 + z)$
$64 = 3{,}6z + z^2$
$z^2 = 3{,}6z - 64 = 0$

$z = \frac{-3{,}6 \pm 16{,}4}{2}$

$z_1 = \frac{-3{,}6 + 16{,}4}{2} = 6{,}4$

$10^2 = 8^2 + x^2$
$100 = 64 + x^2$
$x = 6$
$y^2 = 3{,}6 \cdot 6{,}4$
$y = 4{,}8$

23.



$6^2 = 9 \cdot x$
$36 = 9x$
$x = 4$
$y^2 = 4^2 + 6^2$
$y^2 = 52$
$y = 7{,}2$

Respostas da seção Para estudar

24. $a = 20$

$h = 9{,}6$

25. $h = 4\sqrt{3}$ cm

26. $AB = 10$

27. $n = 64$ cm

28. a) $x = 8{,}48$ cm

$y = 4{,}24$ cm

b) $x = 8$

$n = \frac{32}{5}$

$h = \frac{24}{5}$

$m = \frac{18}{5}$

c) $d = 25{,}6$

d) $\overline{BC} \cong 26{,}0$

$x \cong 13$

29. a) $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $x = 4$

c) $x = \sqrt{91}$

30. $d = 4$

31. $\ell = \frac{2}{3}$

32. $r = 12$

33. $d = 24$

34. $\ell = 2\sqrt{3} - 2$

35. $h = 4\sqrt{3}$ cm

36. $h = 123{,}5$ m

37. $h = 1{,}6$ m

38. O perímetro será 19.

39. lote 1 = 12 m

lote 2 = 9 m

lote 3 = 10,5 (leste) e 24,8 (central)

40. $A = 10{,}5\ m^2$

41. Área = $38\ u^2$

42. 180 cm

43 a) 8 cm b) $2\sqrt{3}$ cm c) $4\sqrt{3}$ cm

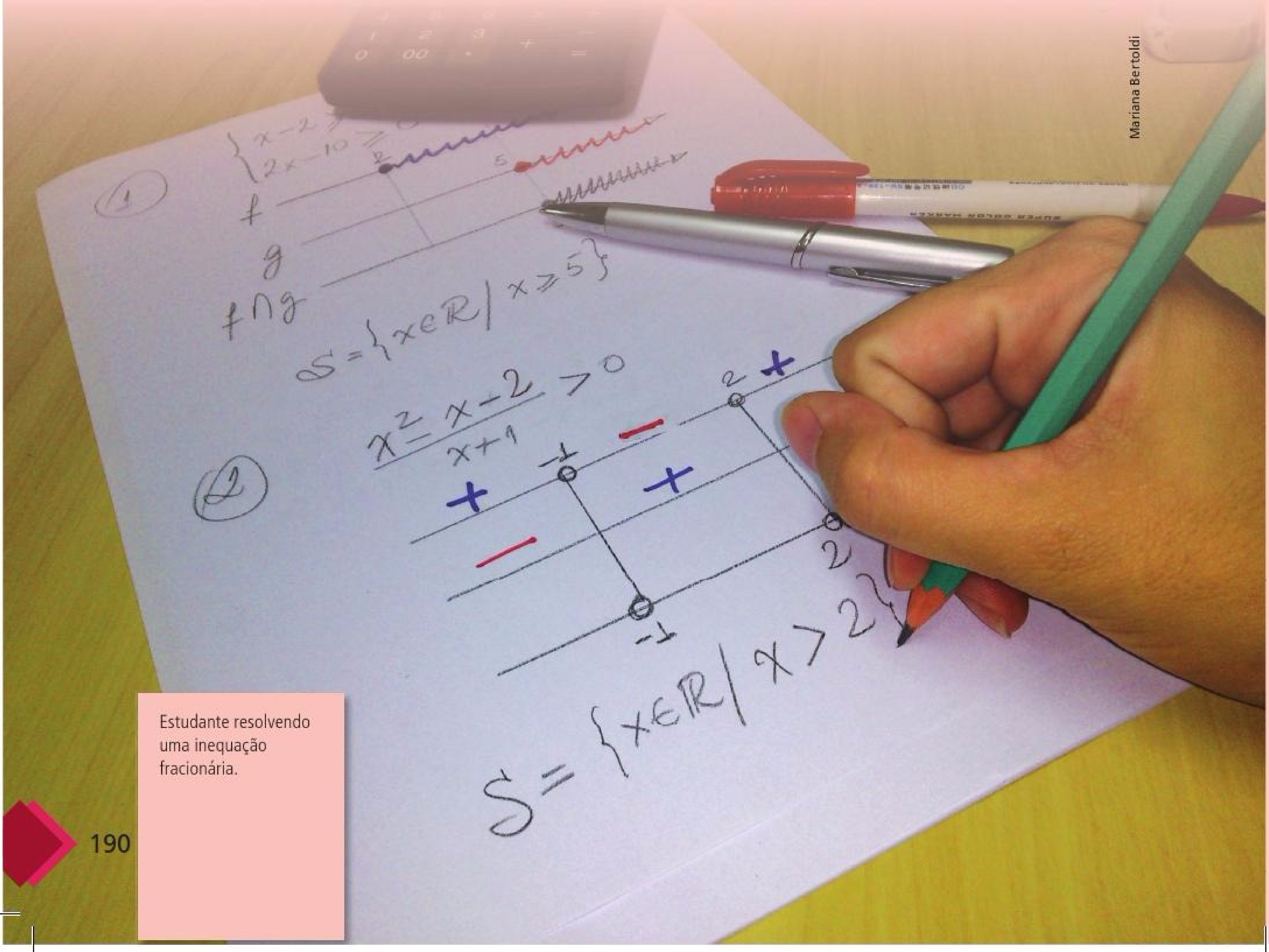
Steve Allen/Science Photo Library/Latinstock

Observatório astronômico de Jantar Mantar, em Jaipur, Índia, construído entre 1727 e 1733. Tem altura de aproximadamente 30 metros e uma inclinação de 27°. Fazia previsões e observações de eclipses e servia também como um preciso relógio de sol.

capítulo 8

Inequações

- Estudo de sinais de uma função
- Inequação produto e inequação quociente
- Inequações de 2º grau



Mariana Bertoldi

Estudante resolvendo uma inequação fracionária.

Conversa Inicial

Resolver uma inequação é praticamente a mesma coisa que resolver uma equação. Afinal, o que significa **inequação**?

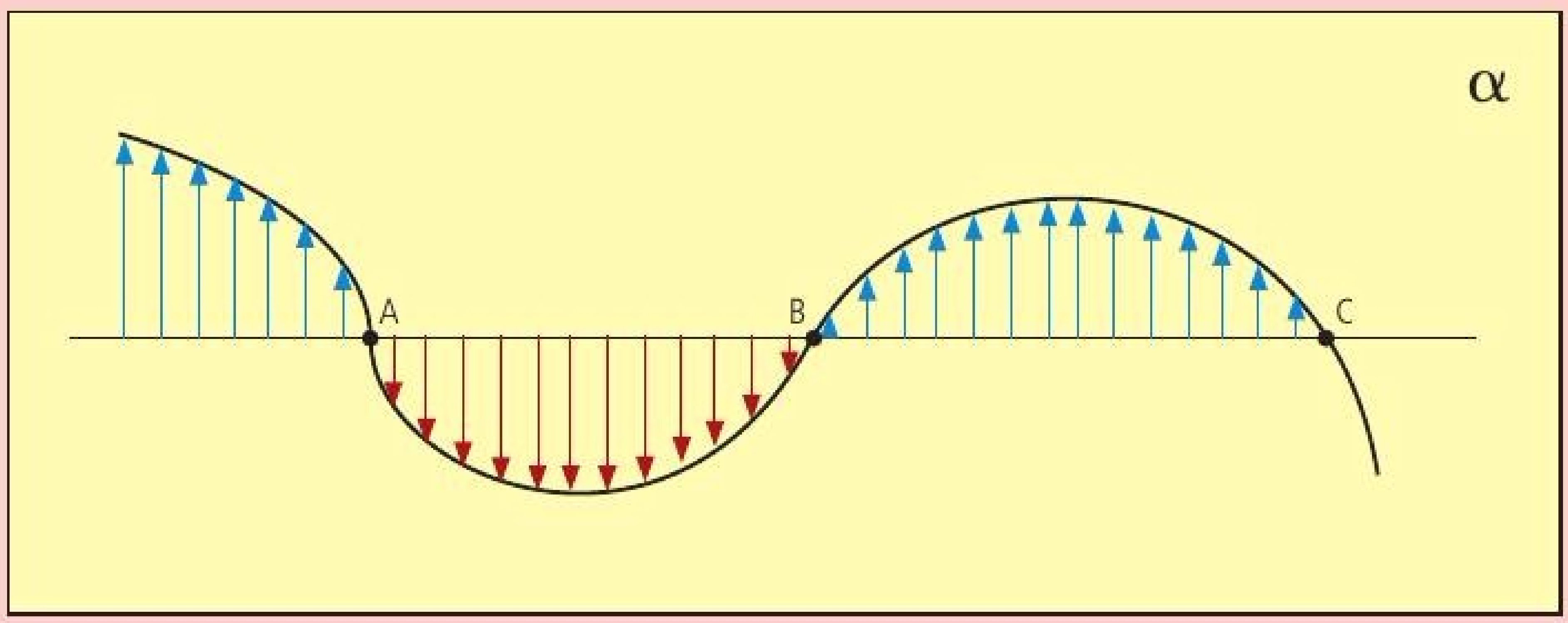
Muita gente acredita que inequação é o contrário de equação. É evidente que isso não é tão simples assim, mas existe algo de verdadeiro nisso. Você já teve oportunidade de perceber que quando sabemos o contrário de alguma coisa sabemos exatamente tudo sobre ela. É por isso que o processo de resolução de inequações é muito semelhante ao de equações que você já aprendeu.

Equação → **Igualdade**

Inequação → **Desigualdade**

Estudamos em nosso curso as variações de sinais de funções. Entre as diversas aplicações interessantes para o estudo de sinais, destacam-se no estudo da Álgebra os processos de resolução de inequações, pois estas desigualdades podem ser analisadas a partir da análise das variações de sinal de funções.

Para analisar sinais de uma função, devemos ter em mente que, ao cruzar uma reta que divide um plano α em dois semiplanos, ela pode mudar de sinal. Para isso, basta convencionar que um semiplano é positivo e o outro é negativo. Ao analisar o gráfico de **f**, podemos perceber que, independentemente de valores, antes do ponto A, a função é positiva, entre A e B é negativa, entre B e C é positiva e, depois de C, volta a ser negativa.



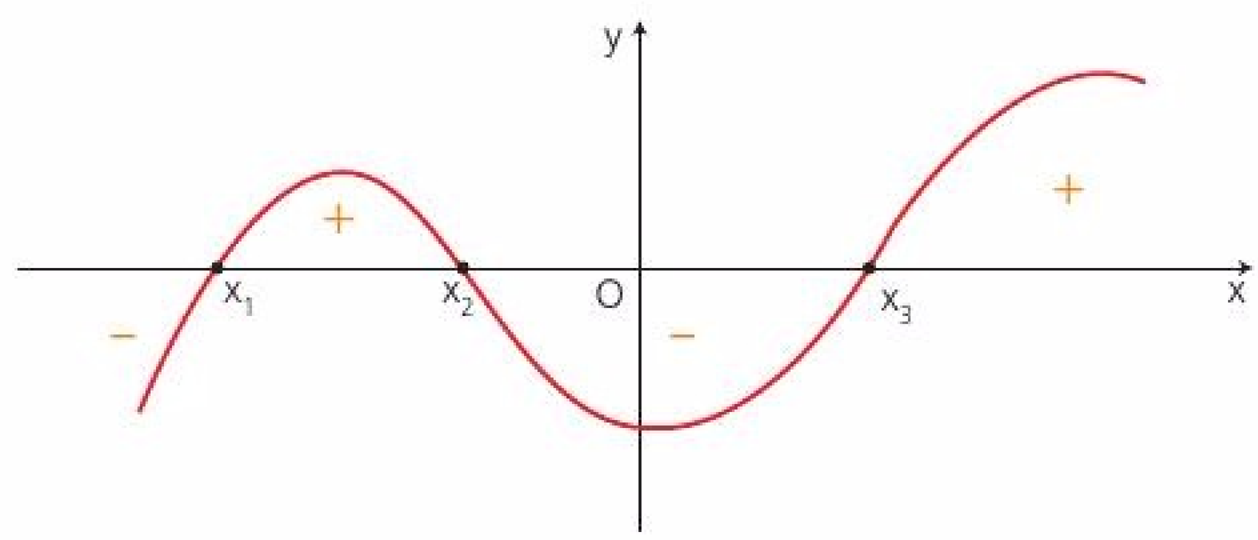
Veja como equação e inequação são parentes próximas: em A, B e C, temos **f = 0** (uma igualdade) e, fora deles, **f > 0 ou f < 0** (desigualdades).

Estudo de sinais de uma função

Antes de iniciarmos o estudo de inequações, vamos recordar rapidamente os principais conceitos que envolvem o estudo de sinais de uma função f(x).

Estudar o sinal de uma função significa determinar para quais valores de **x**, do domínio função, teremos y = f(x) positivo, negativo ou nulo.

Já vimos que, graficamente, o estudo do sinal consiste em localizar os pontos que estão acima, abaixo ou no eixo das abscissas. Veja o gráfico a seguir:



Para os valores **x** do domínio, menores do que $\mathbf{x_1}$ ou entre $\mathbf{x_2}$ e $\mathbf{x_3}$ a imagem assume valores negativos, pois o gráfico está abaixo do eixo Ox. Assim, podemos escrever:

$$x < x_1 \quad \text{ou} \quad x_2 < x < x_3 \rightarrow y < 0$$

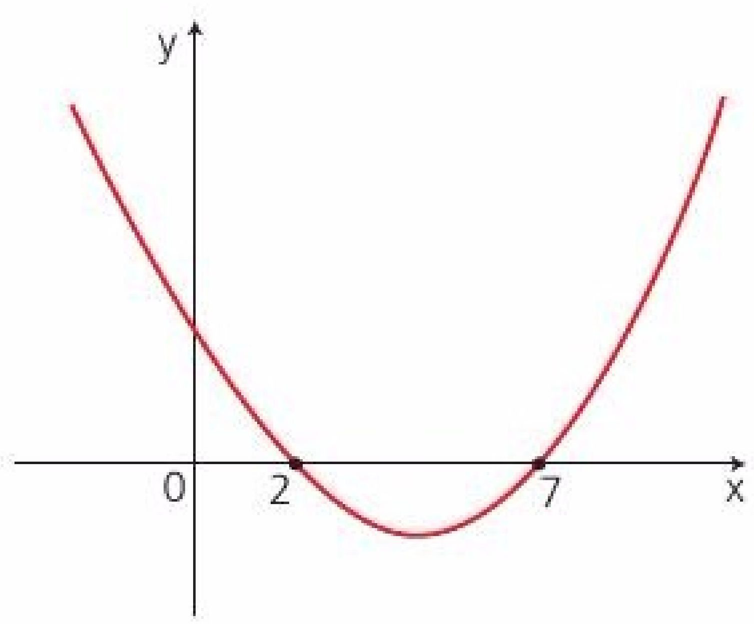
Para os valores **x** do domínio, entre $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$ ou maiores que $\mathbf{x_3}$ a imagem assume valores positivos, pois o gráfico está acima do eixo Ox. Então, escrevemos:

$$x_1 < x < x_2 \quad \text{ou} \quad x > x_3 \rightarrow y > 0$$

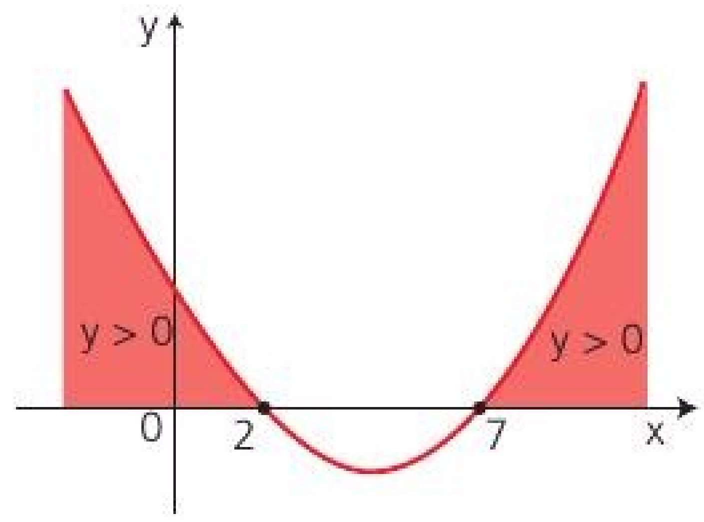
Os valores $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$ e $\mathbf{x_3}$ do domínio, onde o gráfico "corta" o eixo Ox, são os zeros ou raízes da função.

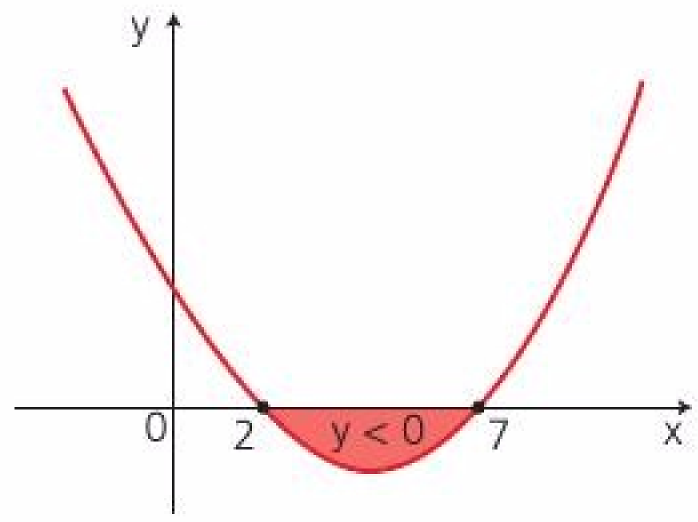
$$x = x_1 \text{ ou } x = x_2 \text{ ou } x = x_3 \rightarrow y = 0$$

Observe, por exemplo, o gráfico de uma função do segundo grau a seguir.



Primeiramente notamos que os zeros da função são 2 e 7, depois localizamos os pontos do gráfico que estão acima ou abaixo do eixo **x**.





Observe que as raízes são 2 e 7 e que, para **x** menor que 2 ou **x** maior que 7, temos **y** acima do eixo das abscissas e para **x** entre 2 e 7, **y** está abaixo do eixo das abscissas.

Podemos, então, escrever:

$$x < 2 \text{ ou } x > 7 \rightarrow y > 0$$

$$x = 2 \text{ ou } x = 7 \rightarrow y = 0$$

$$2 < x < 7 \rightarrow y < 0$$

Atividades

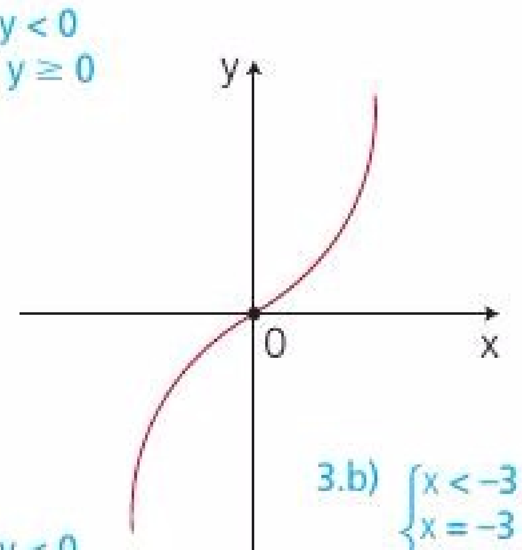
1. a) $\begin{cases} x < -5 \rightarrow y < 0 \\ x = -5 \rightarrow y = 0 \\ x > -5 \rightarrow y > 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x < -2{,}5 \rightarrow y > 0 \\ x = -2{,}5 \rightarrow y = 0 \\ x > -2{,}5 \rightarrow y < 0 \end{cases}$

1. Faça o estudo do sinal das seguintes funções de domínio real e represente geometricamente este estudo.

a) $f(x) = 2x + 10$ b) $f(x) = -2x - 5$

2. Analise o gráfico a seguir e represente o estudo do sinal da função nele representada:

$x < 0 \rightarrow y < 0$
$y \geq 0 \rightarrow y \geq 0$



3.a)
$x < 0 \rightarrow y < 0$
$y \geq 0 \rightarrow y \geq 0$

3.b) $\begin{cases} x < -3 \rightarrow y > 0 \\ x = -3 \rightarrow y = 0 \\ x > -3 \rightarrow y < 0 \end{cases}$

3. Faça o estudo do sinal das funções:

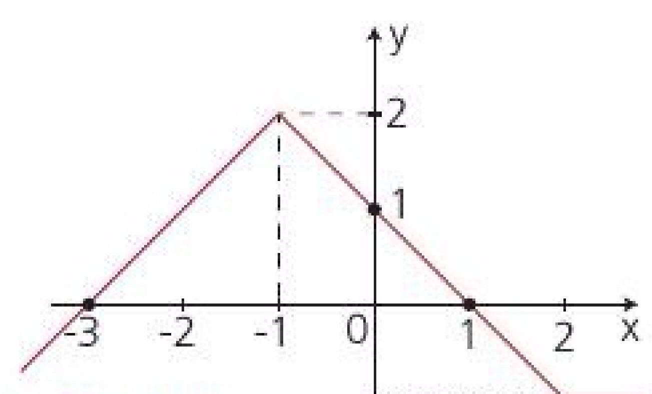
a) $f(x) = 3x$ c) $f(x) = -\dfrac{1}{2} + 2x$

b) $g(x) = -2x - 6$

c) $\begin{cases} x < \frac{1}{4} \rightarrow y < 0 \\ x = \frac{1}{4} \rightarrow y = 0 \\ x > \frac{1}{4} \rightarrow y > 0 \end{cases}$

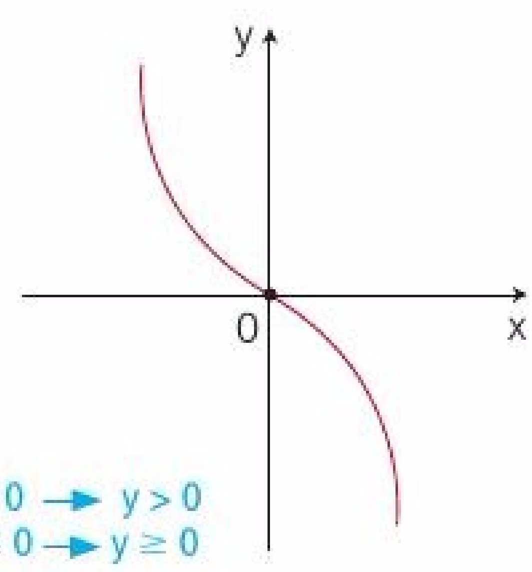
4. Faça o estudo do sinal das funções representadas nos gráficos:

a)



$x < -3 \rightarrow y < 0$
$-3 \leq x \leq 1 \rightarrow y \geq 0$
$x > 1 \rightarrow y < 0$

b)



$x < 0 \rightarrow y > 0$
$x \leq 0 \rightarrow y \geq 0$

5. Faça o estudo do sinal das funções e represente-os na reta numérica:

a) $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$

b) $f(x) = -3x^2 + 10x - 9$

c) $f(x) = -x^2 - x + 2$

d) $f(x) = x^2 - 6x + 9$

5. a) $x < 1$ ou $x > \frac{3}{2} \rightarrow y > 0$
$x = 1$ ou $x = \frac{3}{2} \rightarrow y = 0$
$x > 1$ ou $x < \frac{3}{2} \rightarrow y > 0$

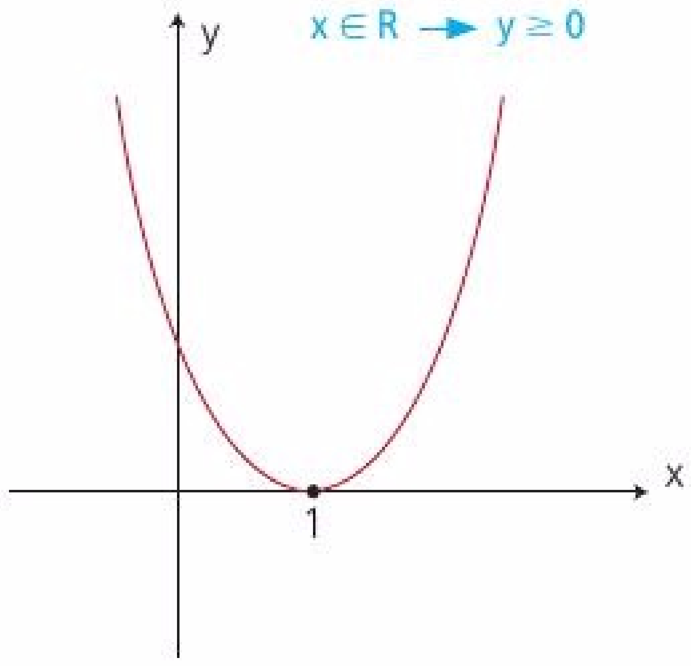
b) $y < 0$, $\forall x$ real

c) $x < -2$ ou $x > 1 \rightarrow y < 0$
$x = -2$ ou $x = 1 \rightarrow y = 0$
$x > -2$ ou $x < 1 \rightarrow y > 0$

d) $x \neq -3 \rightarrow y > 0$
$x = -3 \rightarrow y = 0$

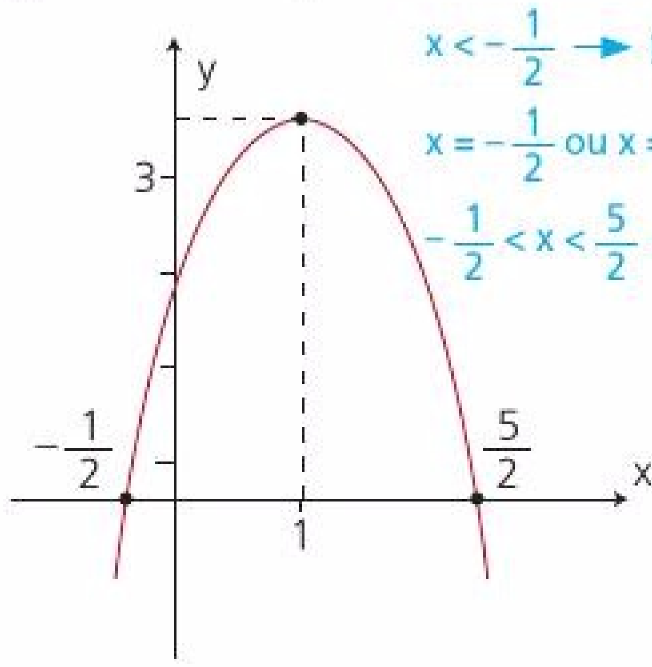
6. Faça o estudo do sinal das funções representadas nos gráficos a seguir:

a)



$x \in R \rightarrow y \geq 0$

b)



$x < -\frac{1}{2} \rightarrow y < 0$
$x = -\frac{1}{2}$ ou $x = \frac{5}{2} \rightarrow y = 0$
$-\frac{1}{2} < x < \frac{5}{2} \rightarrow y > 0$

Inequação produto e inequação quociente

As inequações dispostas em forma de produto ou de quociente de funções, são chamadas, respectivamente, de **inequações produto** e **inequações quociente**. O quadro mostra os formatos possíveis para esse tipo de inequação.

$f(x) \cdot g(x) > 0$	$f(x) \cdot g(x) < 0$	$f(x) \cdot g(x) \geq 0$	$f(x) \cdot g(x) \leq 0$
$\frac{f(x)}{g(x)} > 0$	$\frac{f(x)}{g(x)} < 0$	$\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$	$\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$

Estas equações são resolvidas por meio do estudo da variação do sinal de cada função que é fator do produto ou numerador e denominador do quociente.

Veja alguns exemplos:

- Vamos determinar a solução da inequação produto $(6 - 2x)(x - 1)^3 \geq 0$
  Sendo $f(x) = 6 - 2x$ e $g(x) = x - 1$, inicialmente obtemos as raízes de cada uma das equações:

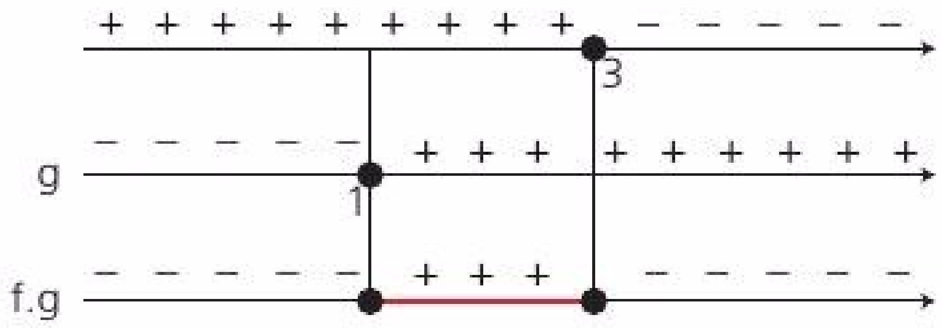
$$f \rightarrow 6 - 2x = 0 \rightarrow x = 3$$

$$g \rightarrow x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$$

– Constrói-se um quadro com três eixos: um para cada função e um para o conjunto solução.

– Faz-se o estudo do sinal de **f** e **g**.

– Efetua-se o produto dos sinais em cada intervalo e faz-se a representação no eixo de **f** · **g**.



A solução é o intervalo [1, 3], pois torna o produto positivo ou nulo.

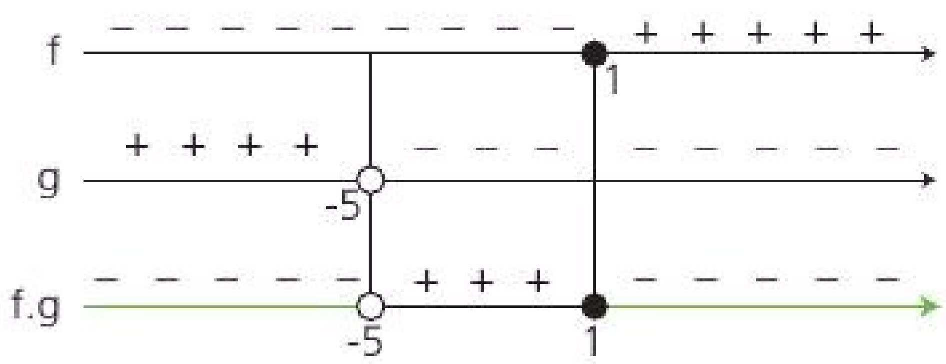
$$S = \{x \in R \,/\, 1 \leq x \leq 3\}$$

- Veja agora a resolução da inequação quociente $\dfrac{x - 1}{-2x - 10} \leq 0$.

Sendo $f(x) = x - 1$ e $g(x) = -2x - 10$, vamos obter as raízes de cada uma das equações:

$x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$

$-2x - 10 = 0 \rightarrow x = -5$



Professor: se achar conveniente, agora é um bom momento para usar algum recurso de software de gráfico, eventualmente à disposição no laboratório de informática, se a escola tiver um. Independentemente disso, o importante é enfatizar processos nos quais se identifique em quais intervalos a função é positiva ou negativa, a partir da análise de seu gráfico.

Observe que na solução não incluímos o valor –5, pois anula o denominador da fração.

Logo, $S = \{x \in R \,/\, x < -5 \text{ ou } x \geq 1\}$.

Atividades

Respostas das atividades 8 e 9 na página seguinte.

7. Determine o conjunto solução das inequações produto:

a) $(x + 2)(x - 2) > 0$ $S = \{x \in R \,/\, x < -2 \text{ ou } x > 2\}$

b) $(2x - 5)(4 - x) < 0$ $S = x \in R \,/\, x < \frac{5}{2} \text{ ou } x > 4$

c) $(-x + 5)(x + 3) \geq 0$ $S = \{x \in R \,/\, -3 \leq x \leq 5\}$

d) $(2 - x)(x + 3)(2x - 10) \leq 0$ $S = \{x \in R \,/\, -3 \leq x \leq 2 \text{ 0u } x \geq 5\}$

8. Resolva as inequações quociente:

a) $\dfrac{2x + 4}{x - 3} > 0$ $S = \{x \in R \,/\, x < -2 \text{ ou } x > 3\}$

b) $\dfrac{-x + 1}{x + 3} \leq 0$ $S = \{x \in R \,/\, x < -3 \text{ ou } x \geq 1\}$

c) $\dfrac{-2x + 4}{-6 - 2x} \geq 0$ $S = \{x \in R \,/\, x < -3 \text{ ou } x \geq 2\}$

d) $\dfrac{-x}{-3x + 5} > 0$ $S = x \in R \,/\, x < 0 \text{ ou } x > \frac{5}{3}\}$

9. Resolva as inequações produto:

a) $(x - 1)(x + 5) \geq 0$ $S = \{x \in R \,/\, x \leq 5 \text{ ou } x \geq 1\}$

b) $(2x - 3)(x + 2) \cdot x < 0$ $S = \{x \in R \,/\, x < -2 \text{ ou } 0 < x \geq \frac{3}{2}\}$

c) $(x + 1)(-x + 4)(-2x + 5) \leq 0$ $S = \{x \in R \,/\, x \leq -1 \text{ ou } 2{,}5 \leq x \leq 4\}$

d) $(-x + 8)(-2x + 6)(-4 + 3x) > 0$ $S = \{x \in R \,/\, -\frac{4}{3} < x < 3 \text{ ou } x > 8\}$

Inequações de 2º grau

Chama-se inequação de 2º grau a toda desigualdade que pode ser escrita na forma geral:

$$\mathbf{ax^2 + bx + c > 0} \text{ ou } \mathbf{ax^2 + bx + c \geq 0}$$

ou

$$\mathbf{ax^2 + bx + c < 0} \text{ ou } \mathbf{ax^2 + bx + c \leq 0, \text{com } a \neq 0}$$

A solução de uma inequação de 2º grau pode ser obtida aplicando-se o estudo do sinal da função quadrática por meio dos seguintes passos:

– coloca-se a inequação na forma geral;
– representa-se graficamente o estudo do sinal de f;
– escolhe-se o intervalo que satisfaz a inequação;
– dá-se o conjunto solução.

Professor: Acreditamos que após o estudo do conceito das inequações com as funções do primeiro grau, seus alunos irão entender melhor o processo para as funções de segundo grau. Explore exemplos no quadro e construa o estudo do sinal mostrando cada etapa de sua construção.

Acompanhe os exemplos de resolução de inequações do segundo grau:

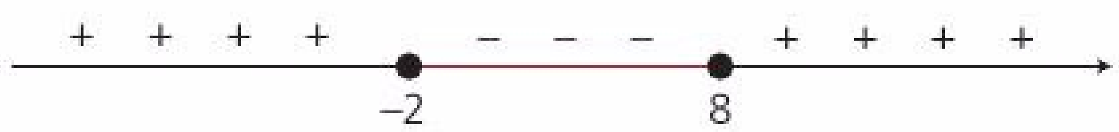
a) $x^2 - 6x - 16 \leq 0$

Cálculo das raízes:

$$\Delta = 36 + 64 = 100$$

$$x = \frac{6 \pm 10}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 8 \end{cases}$$

Representação gráfica:



$S = \{x \in R \,/\, -2 \leq x \leq 8\}$

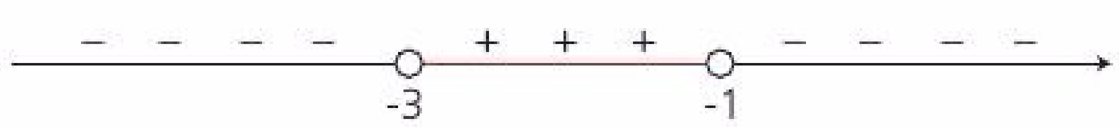
b) $-x^2 - 4x - 3 < 0$

Cálculo das raízes:

$$\Delta = 16 - 12 = 4$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{-2} = \frac{4 \pm 2}{-2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

Representação gráfica:



$S = \{x \in R \,/\, x < -3 \text{ ou } x > -1\}$

c) Vamos encontrar o conjunto solução, da inequação produto. Para isso, procedemos da mesma forma que fizemos para inequações produto envolvendo funções do primeiro grau:

$$(x^2 - 2x)\,(x^2 - 4x + 3) \leq 0$$

$$\underbrace{(x^2 - 2x)}_{f}\,\underbrace{(x^2 - 4x + 3)}_{g} \leq 0$$

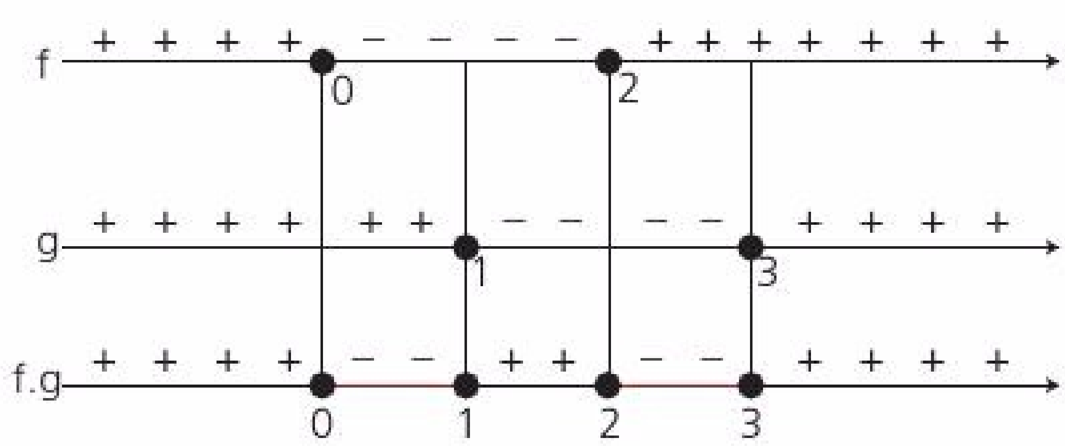
Raízes da função f:

$$\Delta = 4 \rightarrow x = \frac{2 \pm 2}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Raízes da função g:

$$\Delta = 4 \rightarrow x = \frac{4 \pm 2}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

Estudo do sinal:



13.

$S = \{x \in R \,/\, 0 \leq x \leq 1 \text{ ou } 2 \leq x \leq 3\}$

Atividades

10. a) $S = \{x \in R \,/\, 1 \leq x \leq 4\}$ b) $S = \{x \in R \,/\, \forall x \text{ real}\}$

10. Resolva as inequações em R:

a) $x^2 - 5x + 4 \leq 0$ c) $8x^2 - 14x + 6 < 0$

b) $2x^2 - 4x + 5 > 0$ c) $S = x \in R \,/\, 1 < x < \frac{3}{4}$

11. Dê o conjunto solução em R das seguintes inequações produto:

a) $(x^2 - 2x)\,(x^2 - 4x + 3) \leq 0$
$S = \{x \in R \,/\, 0 \leq x \leq 1 \text{ ou } 2 \leq x \leq 3\}$

b) $(-2x + 4)\,(x^2 - 9x + 18) > 0$
$S = \{x \in R \,/\, x < 2 \text{ ou } 3 < x < 6\}$

c) $(x^2 + x - 6)\,(-x^2 - 2x + 3) \geq 0$
$S = \{x \in R \,/\, -3 \leq x \leq 1 \text{ ou } 2 \leq x \leq 3\}$

d) $(2x^2 - 9x - 5)\,(-x^2 + 2x - 2) > 0$
$S = \{x \in R \,/\, -\frac{1}{2} < x\ 5\}$

12. Resolva as inequações:

a) $\dfrac{x^2 - 6x - 12}{x^2 - 16} \leq 0$ b) $\dfrac{x^2 - 6x - 7}{x^2 + 5x - 6} > 0$

$S = \{x \in R \,/\, -4 < x \leq -2 \text{ ou } 4 < x \leq 6\}$ $S = \{x \in R \,/\, x < -6 \text{ ou } -1 < x < 1 \text{ ou } x > 7\}$

13. Determine o domínio da função:

$$y = \sqrt{\frac{x^2 - 6x}{x^2 - 3x + 2}}.$$

$S = \{x \in R \,/\, x \leq 0 \text{ ou } 1 < x < 2 \text{ ou } x \geq 6$

14. Determine **k**, para que a função:

$f(x) = x^2 - kx + 1$

tenha duas raízes reais diferentes.

$S = \{k > \pm 2\}$

15. Determine **k**, para que a função:

$$f(x) = 2x^2 - kx + 8$$

não tenha raízes reais.

$S = \{k \in R \,/\, k < \pm 8\}$

16. Calcule o valor de **m** para que a função $f(x) = 2\,x^2 - (m + 1)x + 2$ seja sempre positiva.

$S = \{m \in R \,/\, -5 < m < 3\}$

Para estudar

17. Faça o estudo do sinal das seguintes funções de domínio real e represente geometricamente este estudo.

a) $f(x) = 3x - 12$

b) $f(x) = -3x - 1$

18. Faça o estudo do sinal das funções:

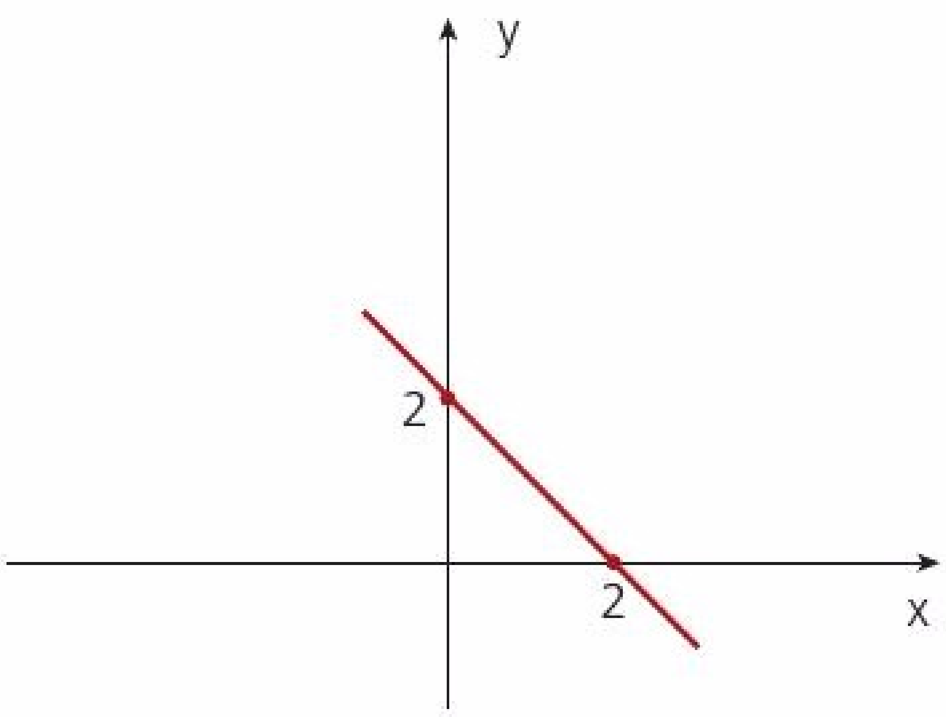
a) $f(x) = -5x$

b) $g(x) = -2x + 6$

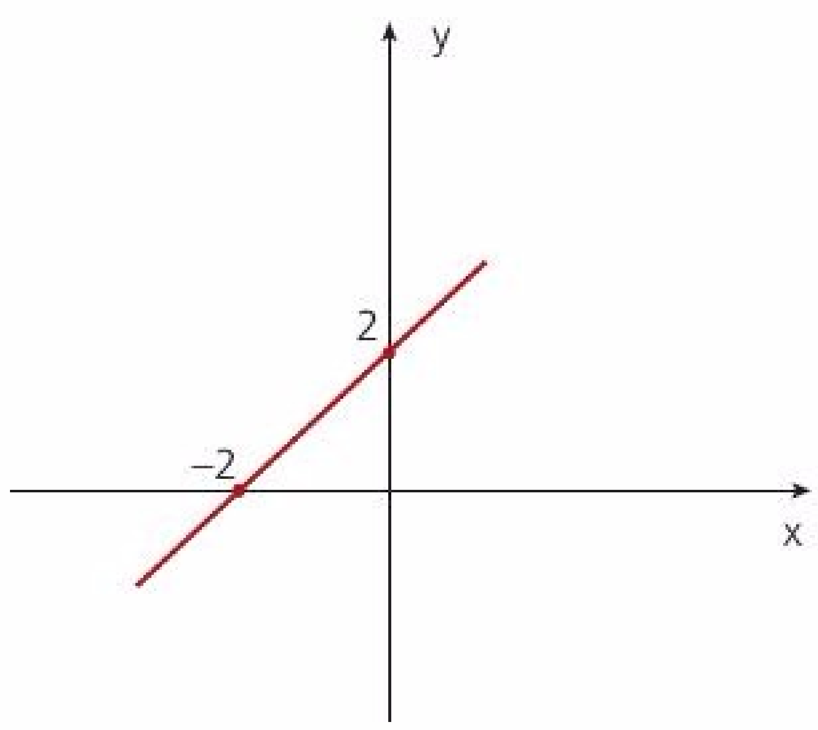
c) $f(x) = -\frac{1}{2} + 2x$

19. Faça o estudo de sinais das funções representadas pelos gráficos a seguir:

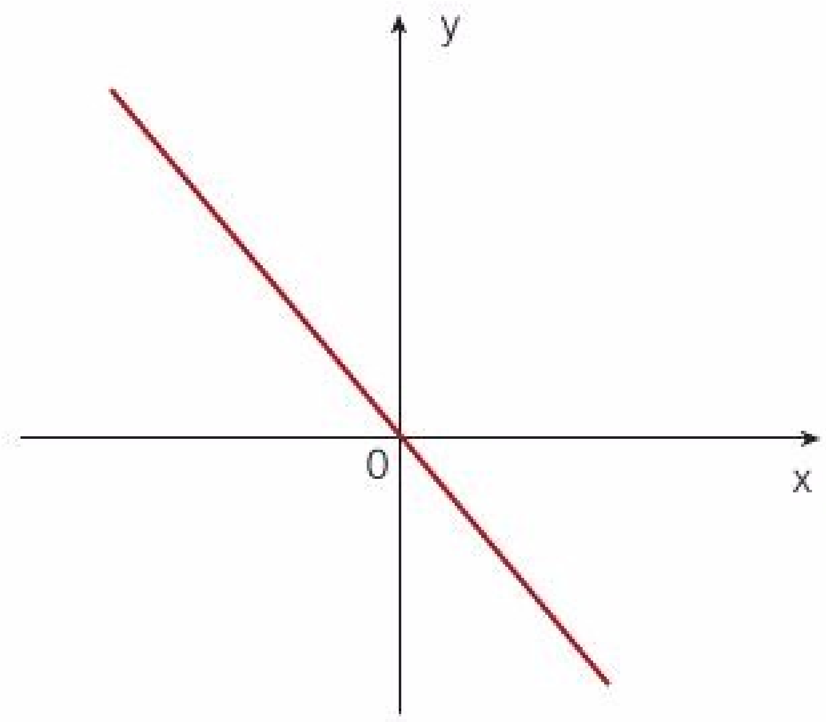
a)



b)



c)



20. Faça o estudo do sinal das funções e represente-os na reta numérica:

a) $f(x) = x^2 - 5x + 6$

b) $f(x) = -2x^2 + x + 1$

c) $f(x) = -x^2 - x + 1$

21. Resolva as inequações produto:

a) $(x - 2)(x + 3) \leq 0$

b) $2x \cdot (2x - 6) \cdot (x + 1) < 0$

22. Resolva as inequações em R:

a) $4x^2 - 5x + 1 \leq 0$

b) $2x^2 + 4x + 5 > 0$

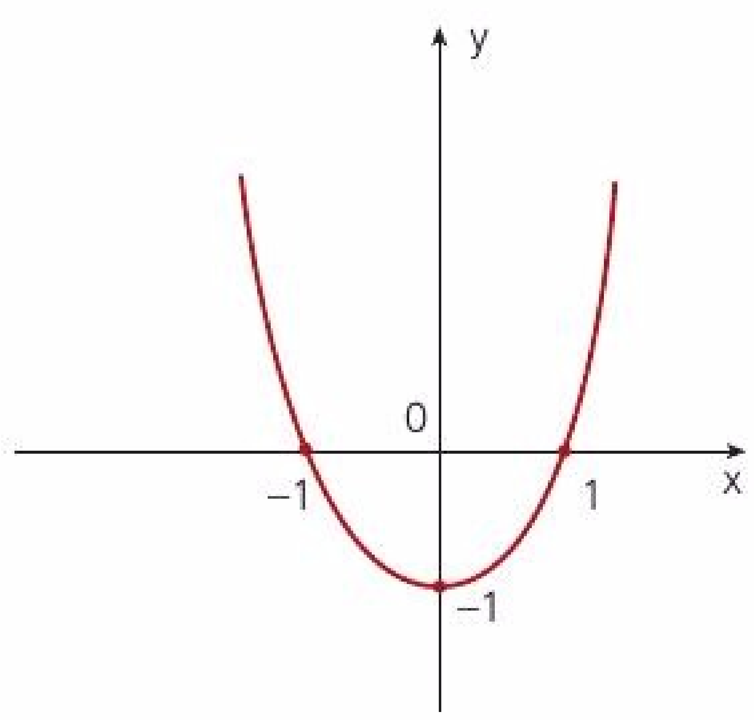
23. Dê o conjunto solução em R das seguintes inequações produto:

a) $(x^2 - 2x)\,(x^2 - 5x + 4) \leq 0$

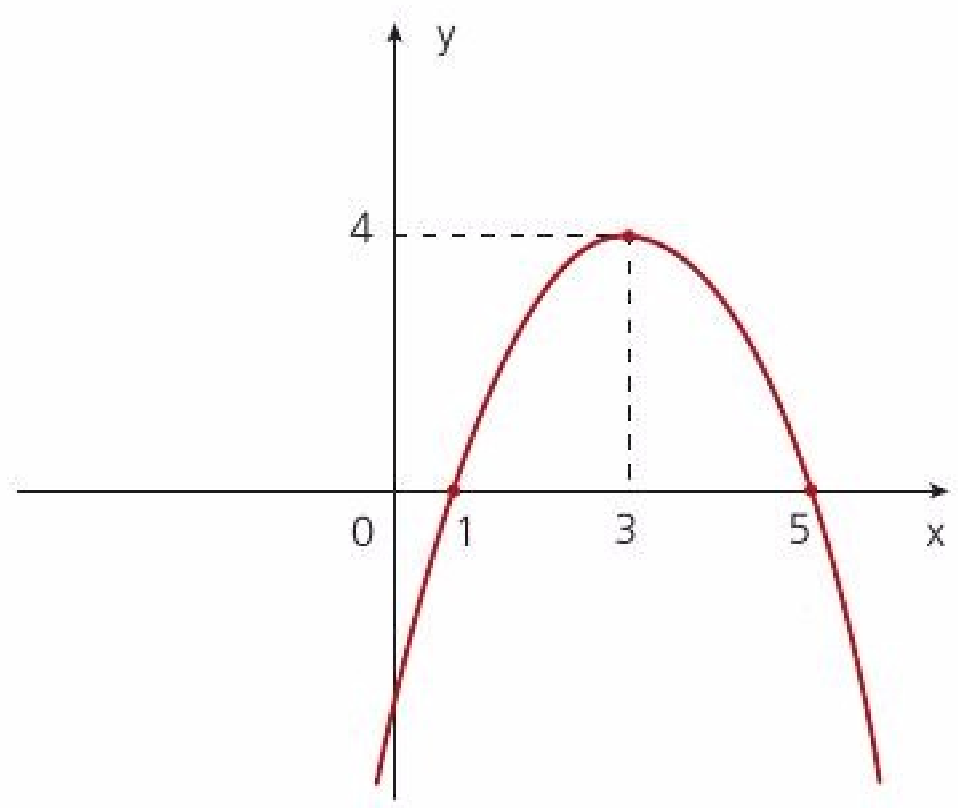
b) $(-2x + 4)\,(-x^2 + 9x + 18) > 0$

24. Faça o estudo do sinal das funções representadas nos gráficos a seguir:

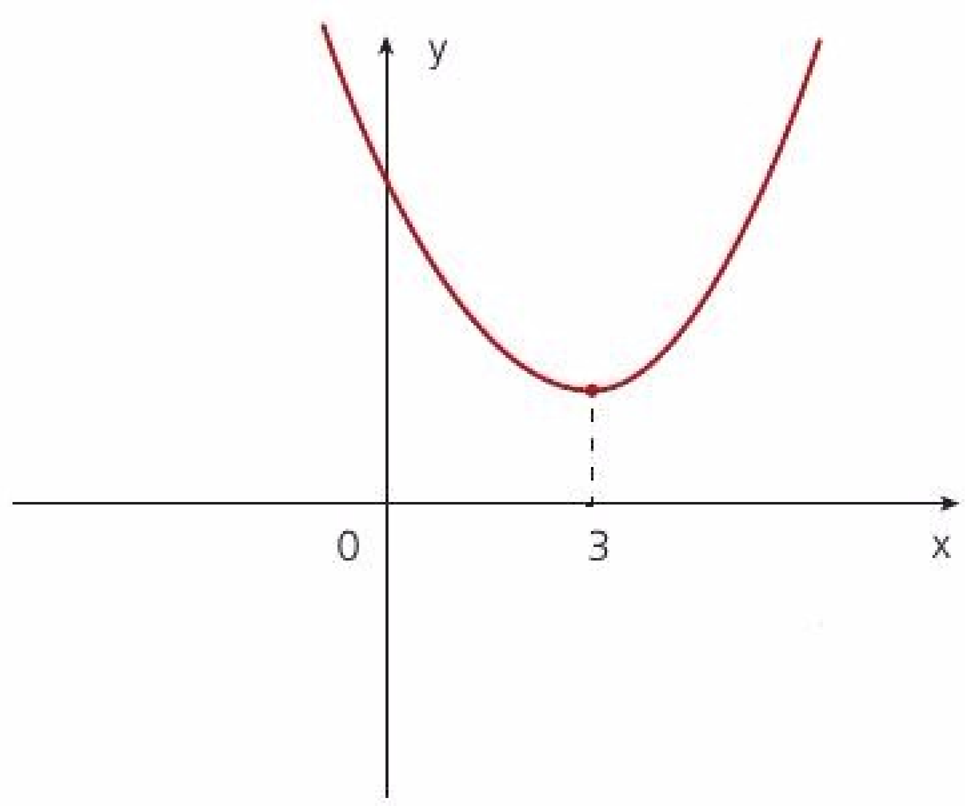
a) Interpretar gráficos



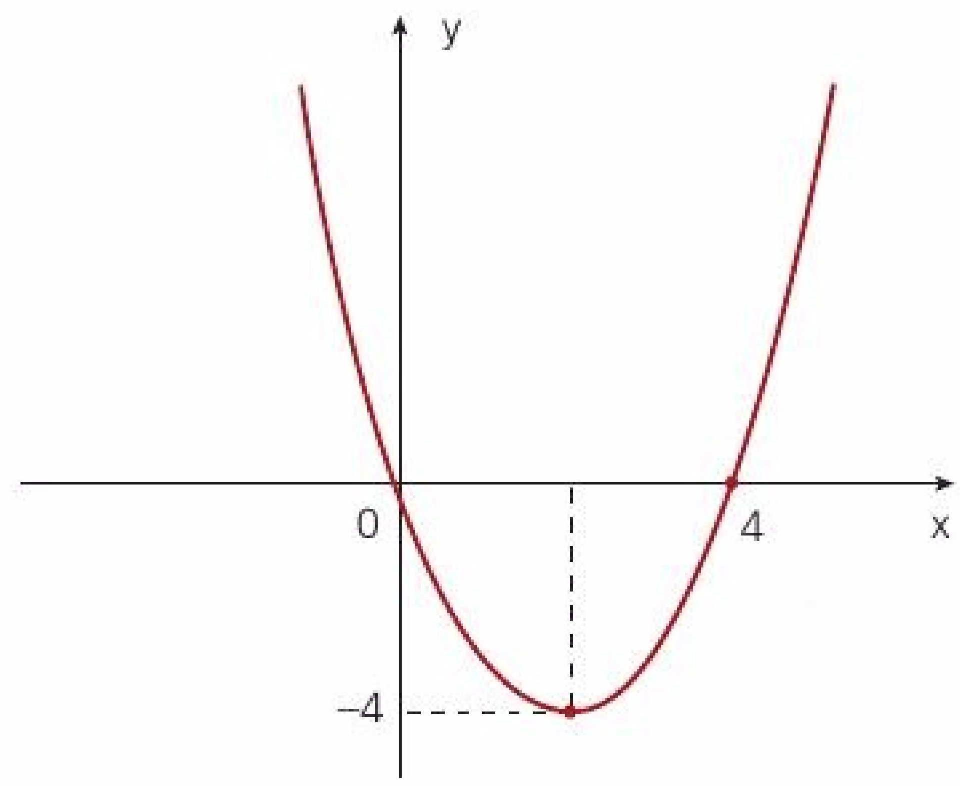
b)



c)



d)



25. Determine o conjunto solução das inequações produto:

a) $(x + 1)(x - 1) > 0$

b) $(2x - 1)(3 - x) < 0$

c) $(-x + 2)(x + 3) \geq 0$

d) $(5 - x)(x + 1)(2x - 10) \leq 0$

26. Resolva as inequações quociente:

a) $\dfrac{2x + 2}{x - 1} > 0$

b) $\dfrac{-x - 1}{x + 1} \leq 0$

c) $\dfrac{-2x + 6}{-4 - 2x} \geq 0$

27. Resolva as inequações:

a) $\dfrac{x^2 - 4x - 12}{x^2 - 9} \leq 0$

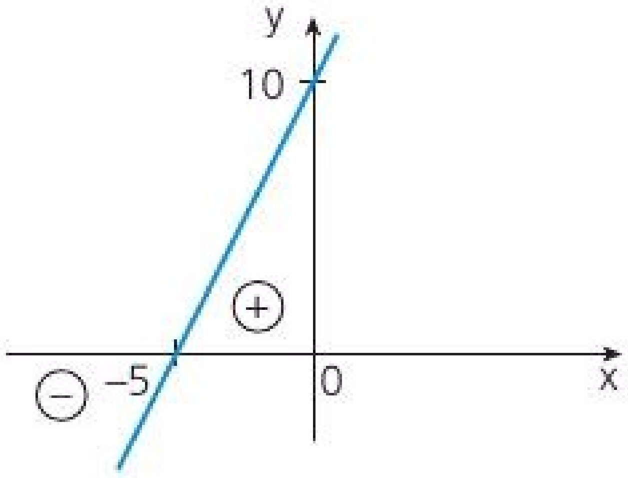
b) $\dfrac{x^2 - 6x - 7}{x^2 + 5x - 6} > 0$

28. Determine o domínio da função:

$$y = \sqrt{\frac{x^2 - x}{x^2 - 4x + 1}}.$$

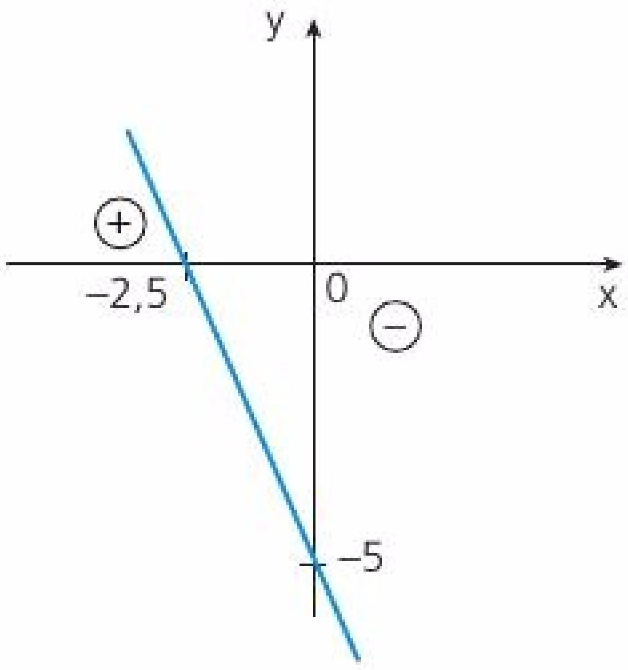
Resolução das atividades

1. a) $f(x) = 2x + 10$



$$\begin{cases} x < -5 \rightarrow y < 0 \\ x = -5 \rightarrow y = 0 \\ x > -5 \rightarrow y > 0 \end{cases}$$

b) $f(x) = -2x - 5$

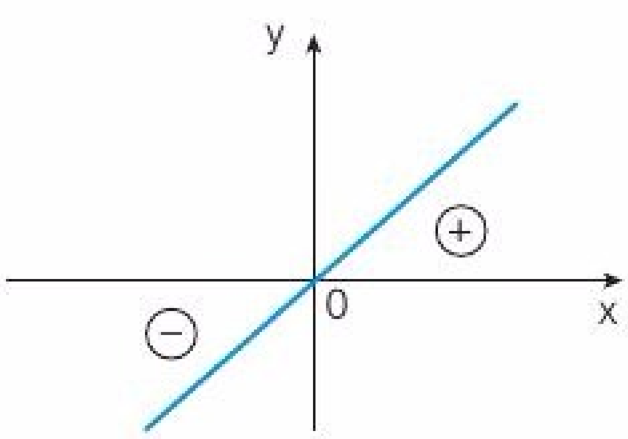


$$\begin{cases} x < -2{,}5 \rightarrow y > 0 \\ x = -2{,}5 \rightarrow y = 0 \\ x > -2{,}5 \rightarrow y < 0 \end{cases}$$

2. $x < 0 \rightarrow y < 0$

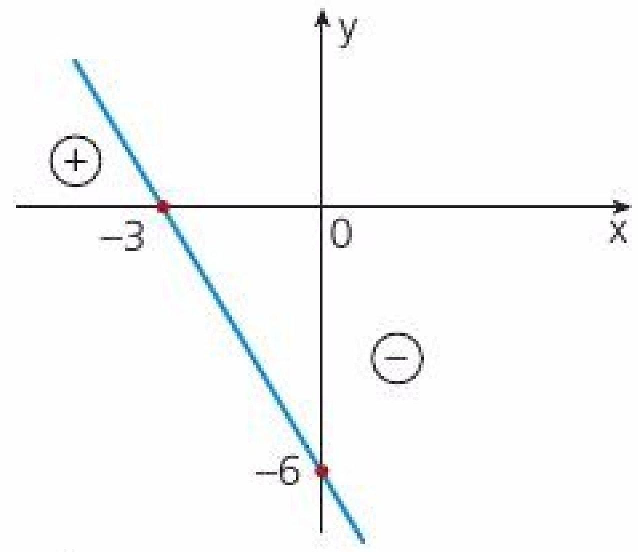
$y \geq 0 \rightarrow y \geq 0$

3. a) $f(x) = 3x$



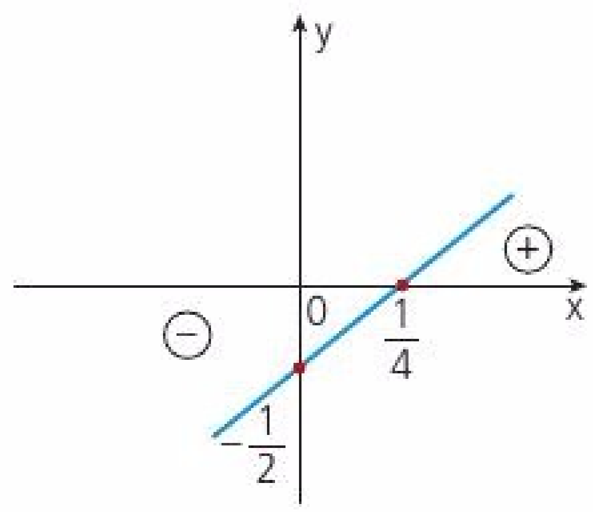
$$\begin{cases} x < 0 \rightarrow y < 0 \\ x = 0 \rightarrow y = 0 \\ x > 0 \rightarrow y > 0 \end{cases}$$

b) $g(x) = -2x - 6$



$$\begin{cases} x < -3 \rightarrow y > 0 \\ x = -3 \rightarrow y = 0 \\ x > -3 \rightarrow y < 0 \end{cases}$$

c) $f(x) = -\dfrac{1}{2} + 2x$



$$\begin{cases} x < \dfrac{1}{4} \rightarrow y < 0 \\ x = \dfrac{1}{4} \rightarrow y = 0 \\ x > \dfrac{1}{4} \rightarrow y > 0 \end{cases}$$

4. a) $x < 3 \rightarrow y < 0$

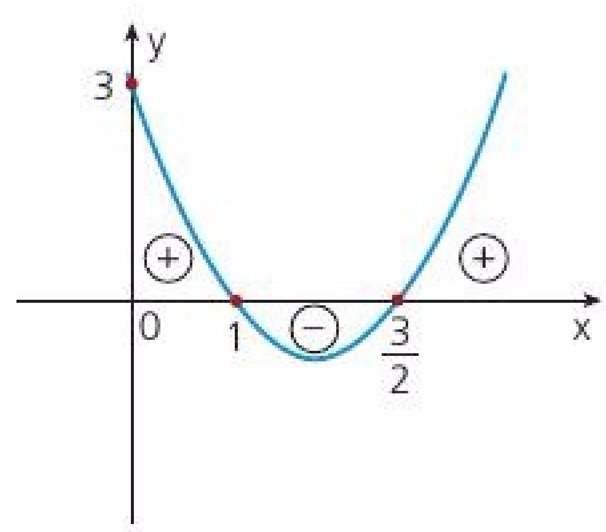
$-3 \leq x \leq 1 \rightarrow y \geq 0$

$x > 1 \rightarrow y < 0$

b) $x < 0 \rightarrow y > 0$

$x \leq 0 \rightarrow y \geq 0$

5. a) $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$

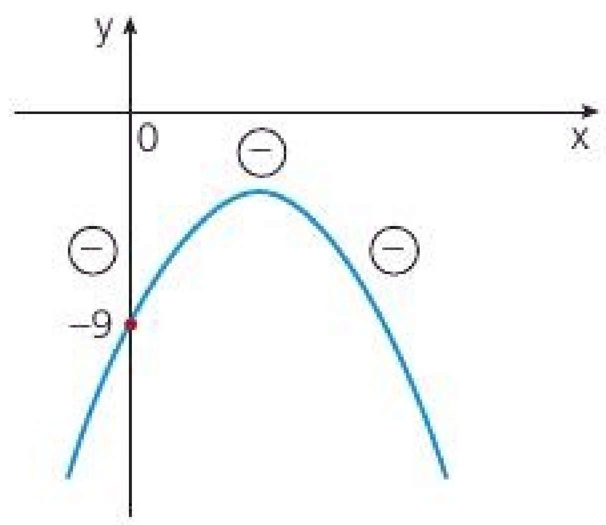


$x < 1$ ou $x > \frac{3}{2} \rightarrow y > 0$

$x = 1$ ou $x = \frac{3}{2} \rightarrow y = 0$

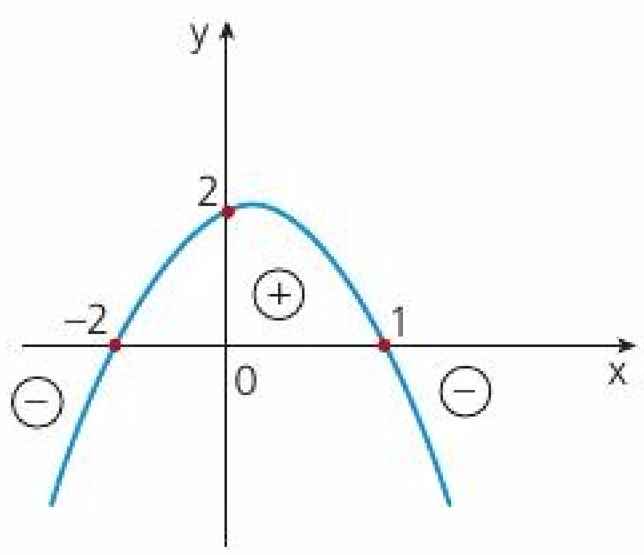
$x > 1$ ou $x < \frac{3}{2} \rightarrow y < 0$

b) $f(x) = -3x^2 + 10x - 9$



$y < 0, \forall x$ real

c) $f(x) = -x^2 - x + 2$

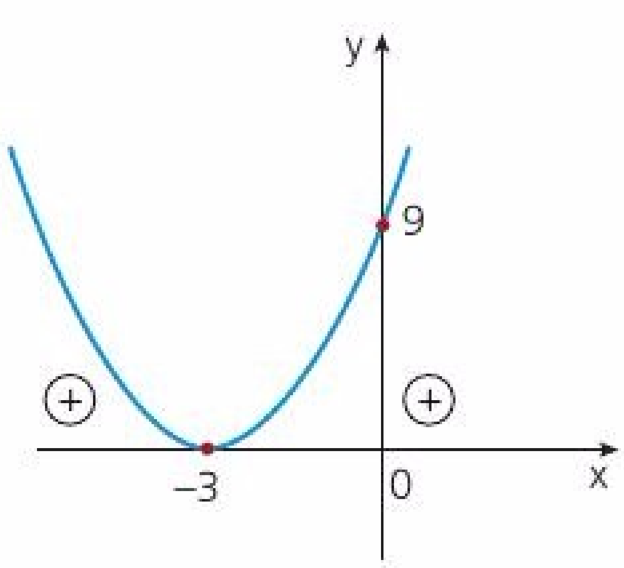


$x < -2$ ou $x > 1 \rightarrow y < 0$

$x = -2$ ou $x = 1 \rightarrow y = 0$

$x > -2$ ou $x < 1 \rightarrow y > 0$

d) $f(x) = x^2 - 6x + 9$



$x \neq -3 \rightarrow y > 0$

$x = -3 \rightarrow y = 0$

6. a) $x \in R \rightarrow y \geq 0$

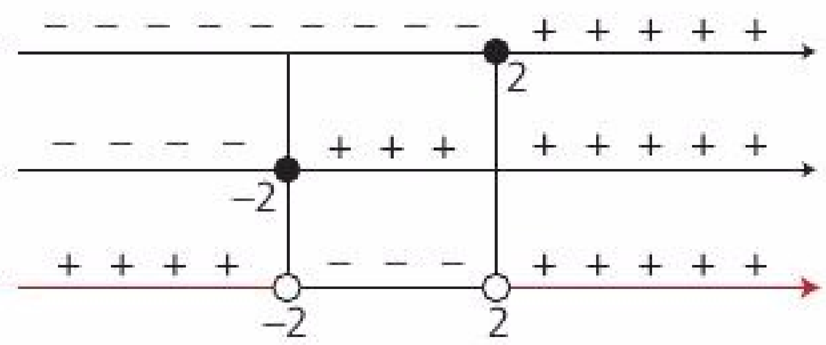
b) $x < -\frac{1}{2} \rightarrow y < 0$

$x = -\frac{1}{2}$ ou $x = \frac{5}{2} \rightarrow y = 0$

$-\frac{1}{2} < x < \frac{5}{2} \rightarrow y > 0$

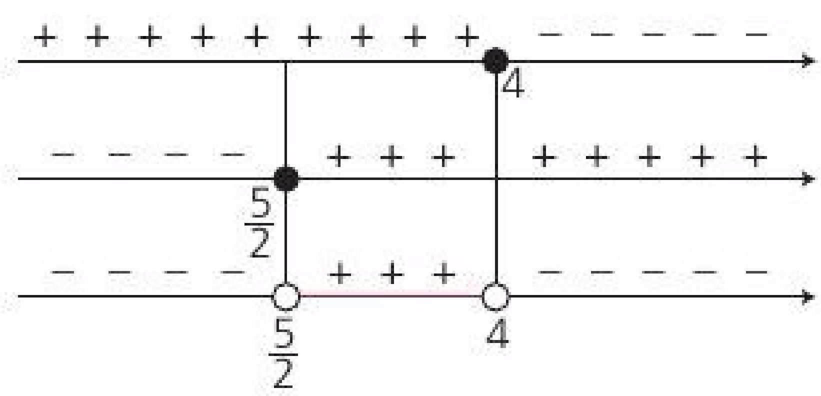
7. a) $(x + 2)(x - 2) > 0$ p/ $x < -2$ ou $x > 2$

$S = \{x \in R \ / \ x < -2 \text{ ou } x > 2\}$



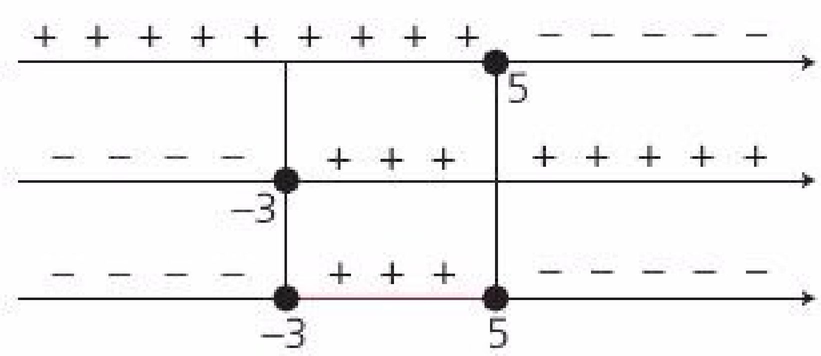
b) $(2x - 5)(4 - x) <$ p/ $x < \frac{5}{2}$ ou $x > 4$

$S = \left\{x \in R \ / \ x < \frac{5}{2} \text{ ou } x > 4\right\}$



c) $(-x + 5)(x + 3) \geq 0$ p/ $-3 \leq x \leq 5$

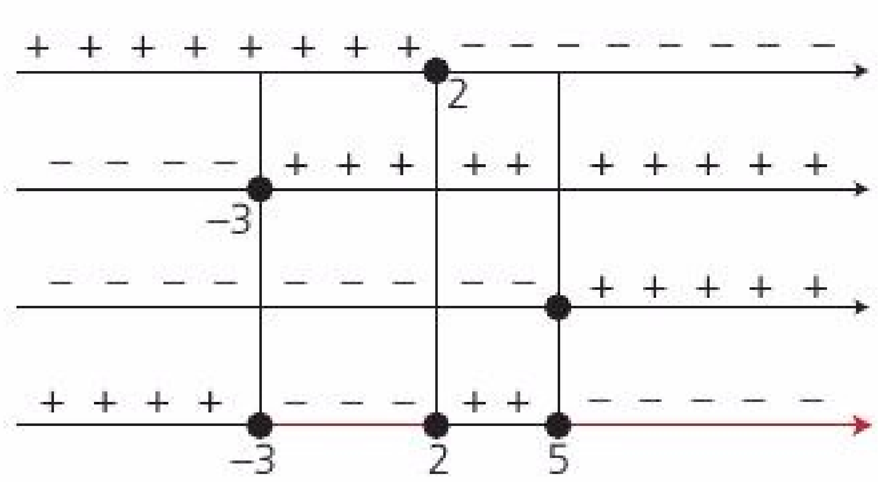
$S = \{x \in R \ / \ -3 \leq x \leq 5\}$



d) $(2 - x)(x + 3)(2x - 10) \leq 0$ p/

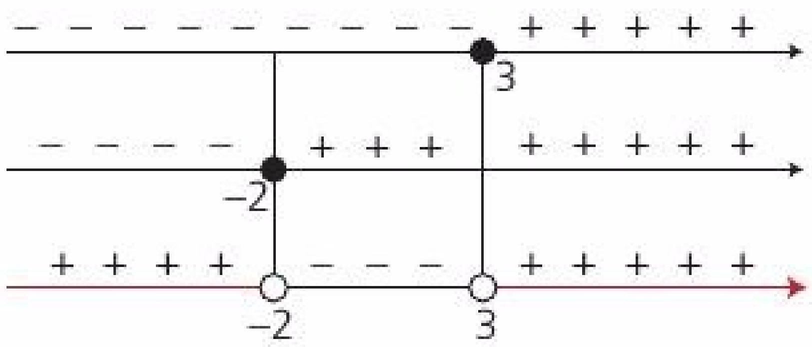
$x \geq 5$ ou $-3 \leq x \leq 2$

$S = \{x \in R \ / \ -3 \leq x \leq 2 \text{ 0u } x \geq 5\}$



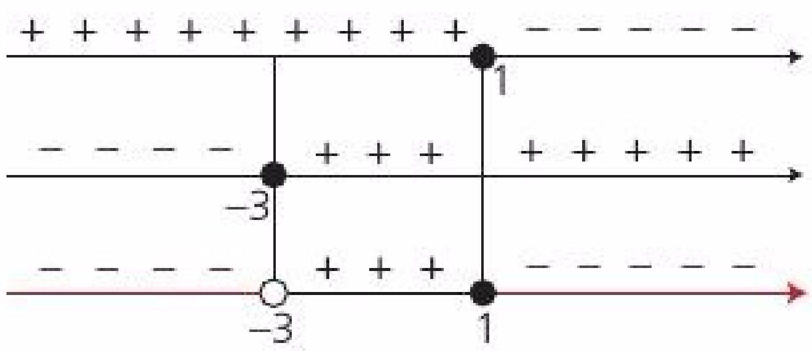
8. a) $\dfrac{2x + 4}{x - 3} > 0$ p/ $x < -2$ ou $x > 3$

$S = \{x \in \mathbb{R} \; / \; x < -2 \text{ ou } x > 3\}$



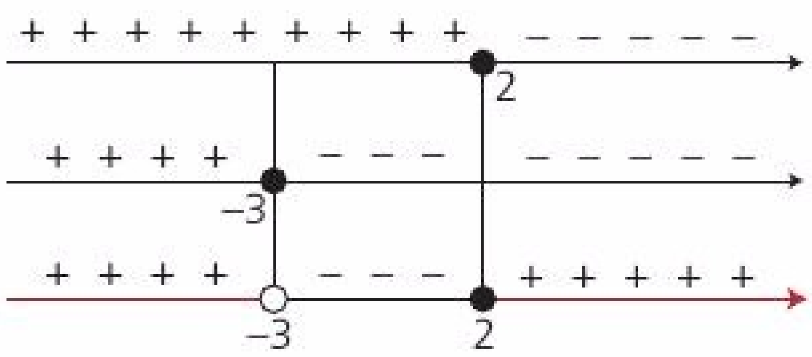
b) $\dfrac{-x + 1}{x - 3} \leq 0$ p/ $x < -3$ ou $x \geq 1$

$S = \{x \in \mathbb{R} \; / \; x < -3 \text{ ou } x \geq 1\}$



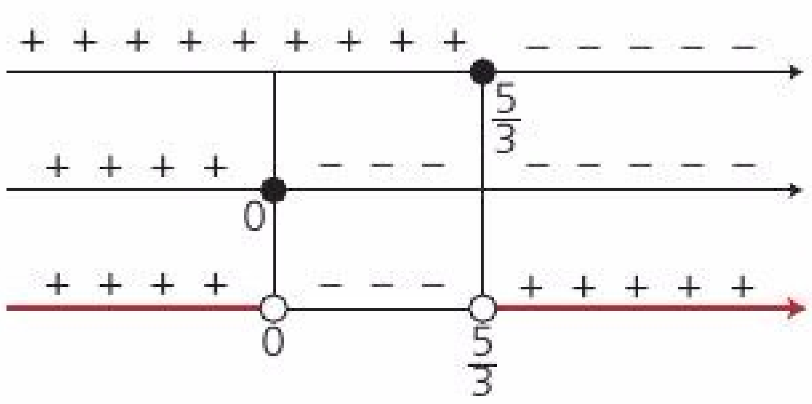
c) $\dfrac{-2x + 4}{-6 - 2x} \geq 0$ p/ $x < -3$ ou $x \geq 2$

$S = \{x \in \mathbb{R} \; / \; x < -3 \text{ ou } x \geq 2\}$



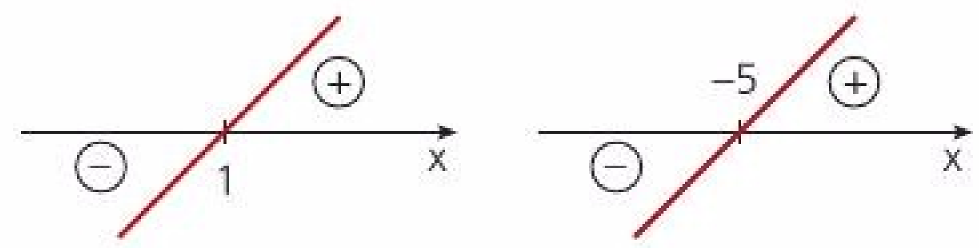
d) $\dfrac{-x}{-3x + 5} > 0$ p/ $x < 0$ ou $x > \dfrac{5}{3}$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \; / \; x < 0 \text{ ou } x > \dfrac{5}{3}\right\}$



9. a) $(x - 1)(x + 5) \geq 0$

f(x) g(x)



	–5		1	
f(x)	–	–		+
g(x)	–	+		+
f(x) · g(x)	+	–		+

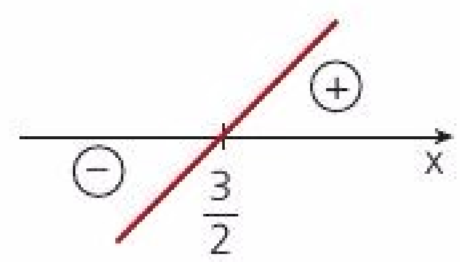
$(x - 1)(x + 5) \geq 0$ p/ $x \leq -5$ ou $x \geq 1$

$S = \{x \in \mathbb{R} \; / \; x \leq 5 \text{ ou } x \geq 1\}$

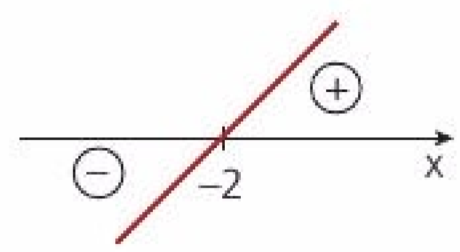
b) $(2x - 3)(x + 2) \cdot x \geq 0$

f(x) g(x) h(x)

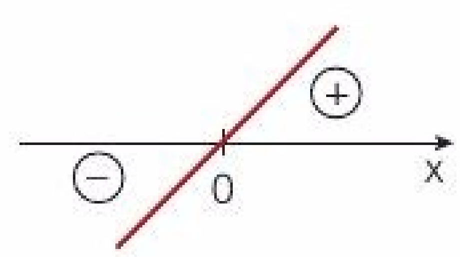
$f(x) = 2x - 3$



$g(x) = x + 2$



$h(x) = x$



	–2	0	$\frac{3}{2}$	
f(x)	–	–	–	+
g(x)	–	+	+	+
h(x)	–	–	+	+
f(x) · g(x) · h(x)	–	+	–	+

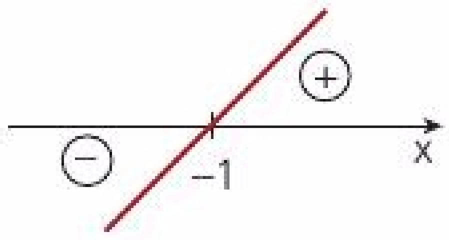
$(2x - 3)(x + 2)\, x < 0$ p/ $x < -2$ ou $0 < x < \dfrac{3}{2}$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \; / \; x < -2 \text{ ou } 0 < x \geq \dfrac{3}{2}\right\}$

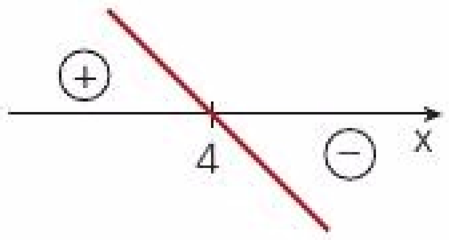
c) $(x + 1)(-x + 4)(-2x + 5) \leq 0$

f(x) g(x) h(x)

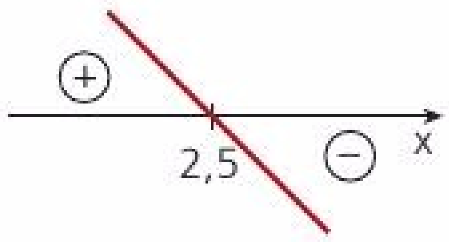
$f(x) = x + 1$



$g(x) = -x + 4$



$h(x) = -2x + 5$



		−1		2,5		4	
f(x)	−		+		+		+
g(x)	+		+		+		−
h(x)	+		+		−		−
f(x) · g(x) · h(x)	−		+		−		+

$(x + 1)(-x + 4)(-2x + 5) \leq 0$ p/

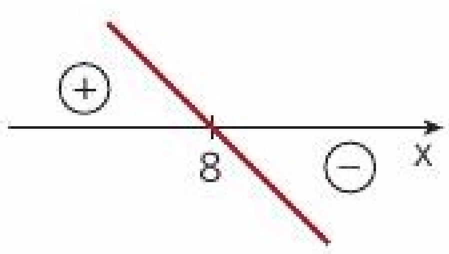
$x \leq -1$ ou $2,5 \leq x \leq 4$

$S = \{x \in R \,/\, x \leq -1 \text{ ou } 2,5 \leq x \leq 4\}$

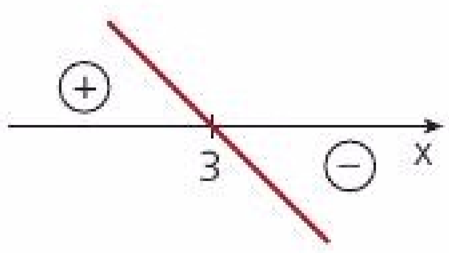
d) $(-x + 8)(-2x + 6)(-4 + 3x) > 0$

f(x) g(x) h(x)

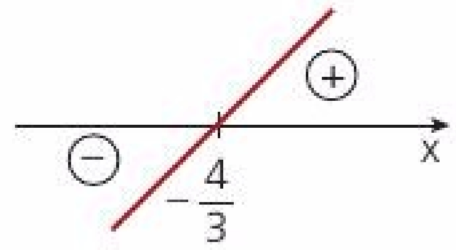
$f(x) = -x + 8$



$g(x) = -2x + 6$



$h(x) = -4 + 3x$



		$-\frac{4}{3}$		3		8	
f(x)	+		+		+		−
g(x)	+		+		−		−
h(x)	−		+		+		+
f(x) · g(x) · h(x)	−		+		−		+

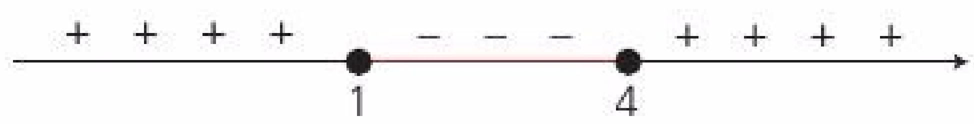
$(-x + 8)(-2x + 6)(-4 + 3) > 0$ p/

$-\frac{4}{3} < x < 3$ ou $x > 8$

$S = \{x \in R \,/ -\frac{4}{3} < x < 3 \text{ ou } x > 8\}$

10. a) $x^2 - 5x + 4 \leq 0$ p/ $1 \leq x \leq 4$

$S = \{x \in R \,/\, 1 \leq x \leq 4\}$



b) $2x^2 - 4x + 5 > 0$ p/ $\forall x$ real

$S = \{x \in R \,/\, \forall x \text{ real}\}$

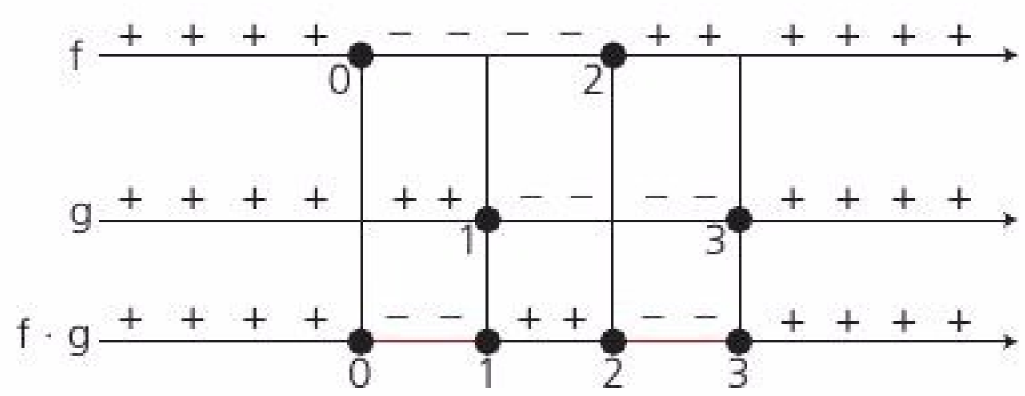
c) $8x^2 - 14x + 6 < 0$ p/ $1 < x < \frac{3}{4}$

$S = \left\{x \in R \,/\, 1 < x < \frac{3}{4}\right\}$

11. a) $(x^2 - 2x)(x^2 - 4x + 3) \leq 0$ p/

$0 \leq x \leq 1$ ou $2 \leq x \leq 3$

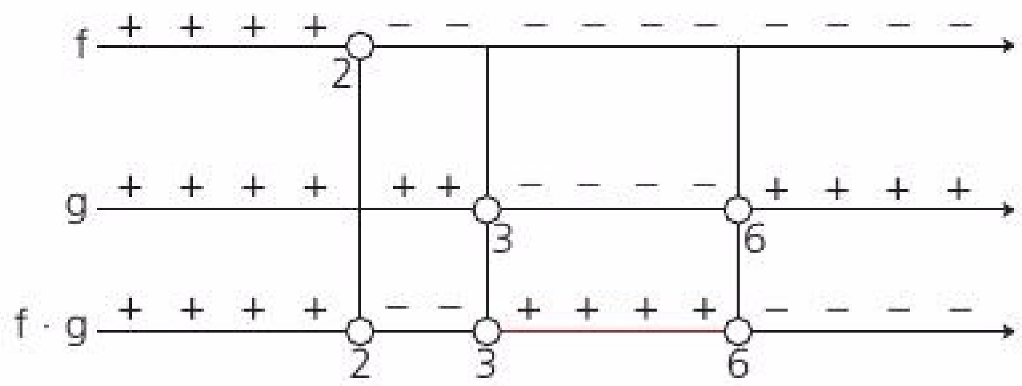
$S = \{x \in R \,/\, 0 \leq x \leq 1 \text{ ou } 2 \leq x \leq 3\}$



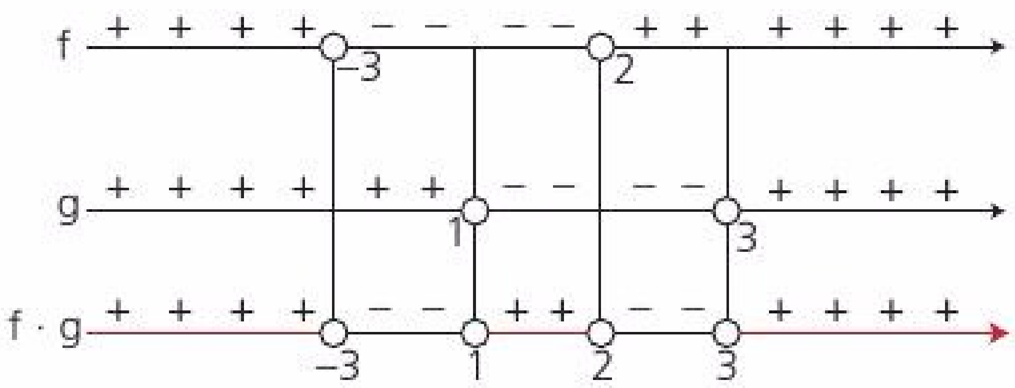
b) $(-2x + 4)(x^2 - 9x + 18) > 0$ p/

$x < 2$ ou $3 < x < 6$

$S = \{x \in R \,/\, x < 2 \text{ ou } 3 < x < 6\}$

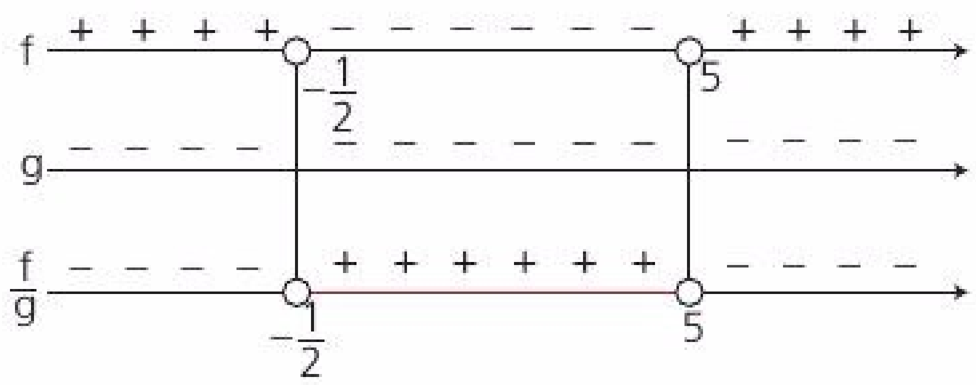


c) $(x^2 + x + 6)(-x^2 - 2x + 3) > 0$ p/
$-3 \leq x \leq 1$ ou $2 \leq x \leq 3$
$S = \{x \in R \,/\, -3 \leq x \leq 1 \text{ ou } 2 \leq x \leq 3\}$



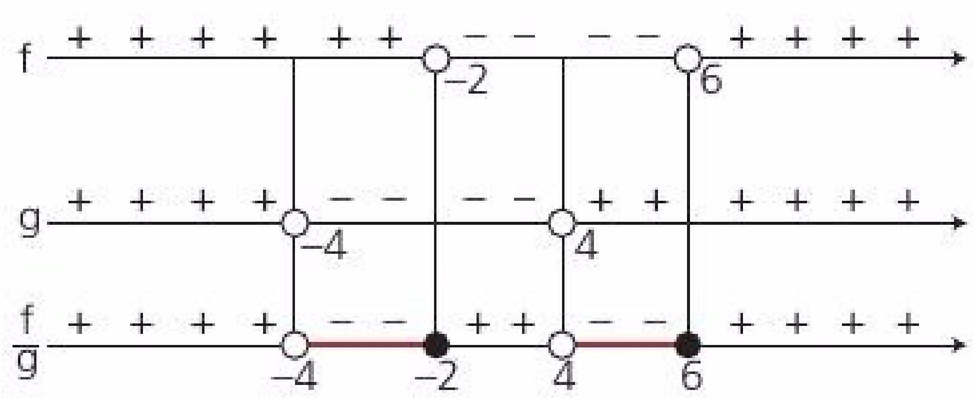
d) $(2x^2 - 9x - 5)(-x^2 + 2x - 2) > 0$

$$S = \left\{x \in R \,/\, -\frac{1}{2} < x \;\; 5\right\}$$



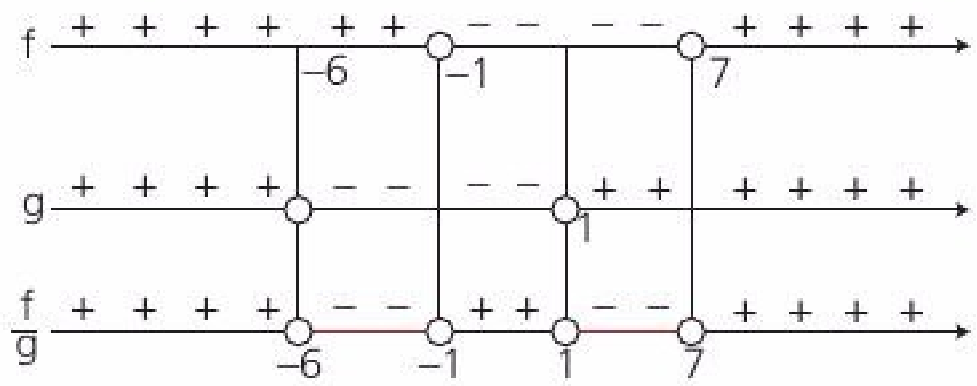
12. a) $\dfrac{x^2 - 6x - 12}{x^2 - 16} \leq 0$

$S = \{x \in R \,/\, -4 < x \leq -2 \text{ ou } 4 < x \leq 6\}$



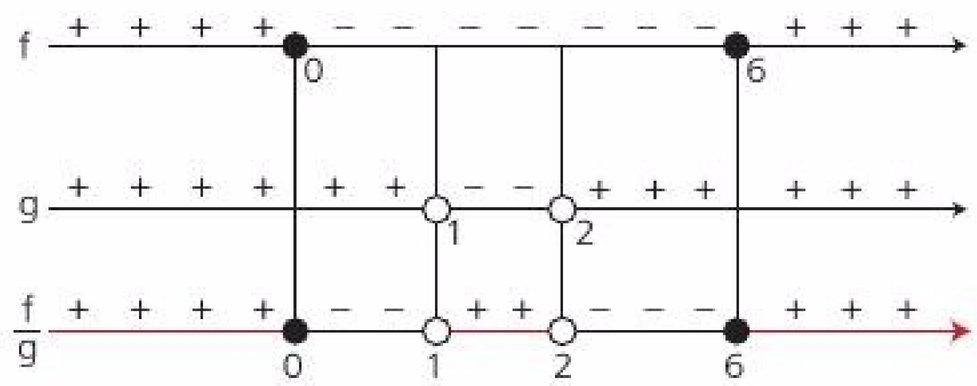
b) $\dfrac{x^2 - 6x - 7}{x^2 + 5x - 6} > 0$

$S = \{x \in R \,/\, x < -6 \text{ ou } -1 < x < 1 \text{ ou } x > 7\}$



13. $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - 6x}{x^2 - 3x + 2}} \geq 0$

$S = \{x \in R \,/\, x \leq 0 \text{ ou } 1 < x < 2 \text{ ou } x \geq 6\}$



14. $f(x) = x^2 - kx + 1 \quad \Delta > 0$

$k^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 > 0$

$k > \pm 2$

$S = \{k > \pm 2\}$

15. $f(x) = 2x^2 - kx + 8 \quad \Delta < 0$

$k^2 - 4 \cdot 2 \cdot 8 < 0$

$k^2 < 64$

$k < \pm 8$

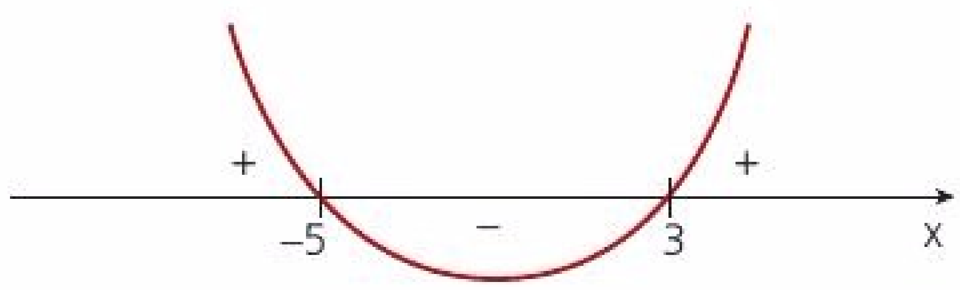
$S = \{k \in R \,/\, k < \pm 8\}$

16. $f(x) = 2x^2 - (m + 1) + 2 \quad \Delta < 0$

$(m + 1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 < 0$

$m^2 + 2m + 1 - 16 < 0$

$m^2 + 2m - 15 < 0$



Respostas da seção Para estudar

17. a) $f(x) = 0 \rightarrow x = 4$

$f(x) < 0 \rightarrow x < 4$

$f(x) > 0 \rightarrow x > 0$

b) $f(x) = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{3}$

$f(x) < 0 \rightarrow x > -\frac{1}{3}$

$f(x) > 0 \rightarrow x < -\frac{1}{3}$

18. a) $f(x) = 0 \rightarrow x = 0$

$f(x) < 0 \rightarrow x > 0$

$f(x) > 0 \rightarrow x < 0$

b) $g(x) = 0 \rightarrow x = 3$

$g(x) < 0 \rightarrow x > 3$

$g(x) > 0 \rightarrow x < 3$

c) $f(x) = 0 \rightarrow x = \frac{1}{4}$

$f(x) < 0 \rightarrow x > \frac{1}{4}$

$f(x) > 0 \rightarrow x < \frac{1}{4}$

19. a) $x = 2 \rightarrow f(x) = 0$

$x > 2 \rightarrow f(x) < 0$

$x < 2 \rightarrow f(x) > 0$

b) $x = -2 \rightarrow f(x) = 0$

$x < -2 \rightarrow f(x) < 0$

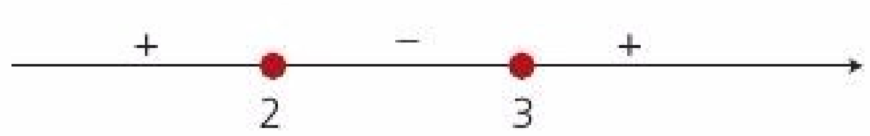
$x > -2 \rightarrow f(x) > 0$

c) $x = 0 \rightarrow f(x) = 0$

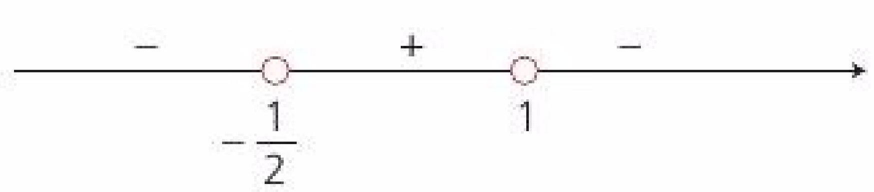
$x > 0 \rightarrow f(x) < 0$

$x < 0 \rightarrow f(x) > 0$

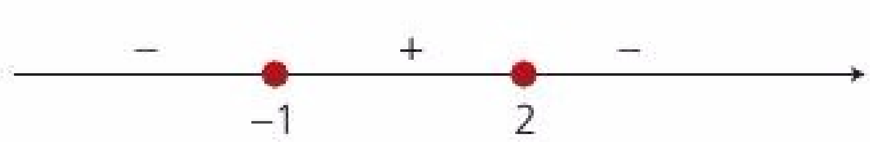
20. a)



b)



c)

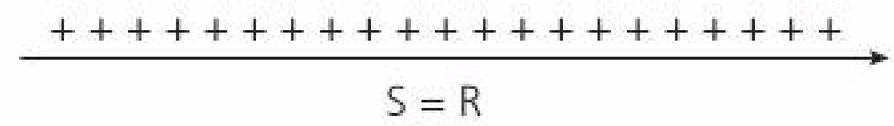


21. a) $S = \{x \in R \,/\, x \leq -3 \text{ ou } x \geq 2\}$

b) $S = \{x \in R \,/\, -1 < x < 0 \text{ ou } x > 3\}$

22. a)

b)



23. a) $S = \{x \in R \,/\, 0 \leq x \leq 1 \text{ ou } 2 \leq x \leq -4\}$

b) $S = \{x \in R \,/\, 2 < x < 3 \text{ ou } x > 6\}$

24. a) $x = 1$ ou $x = -1 \rightarrow y = 0$

$-1 < x < 1 \rightarrow y < 0$

$x < -1 \rightarrow y > 0$

$x > 1 \rightarrow y > 0$

b) $x = 1$ ou $x = 5 \rightarrow y = 0$

$1 < x < 5 \rightarrow y > 0$

$x < 1 \rightarrow y < 0$

$x > 1 \rightarrow y > 0$

c) $y > 0$ para qualquer $x \in R$

d) $x = 0$ ou $x = 4 \rightarrow y = 0$

$0 < x < 4 \rightarrow y < 0$

$x < 0 \rightarrow y > 0$

$x > 4 \rightarrow y > 0$

25. a) $S = \{x \in R \,/\, x < -1 \text{ ou } x > 1\}$

b) $S = \{x \in R \,/\, x < \frac{1}{2} \text{ ou } x > 3\}$

c) $S = \{x \in R \,/\, -3 \leq x \leq 2\}$

d) $S = \{x \in R \,/\, -1 \leq x \leq 5\}$

26. a) $S = \{x \in R \,/\, x < -1 \text{ ou } x > 1\}$

b) $S = \{x \in R \,/\, x \neq -1\}$

27. a) $S = \{x \in R \,/\, x < -3 \text{ ou } 2 \leq x < 3 \text{ ou } x \geq 6\}$

b) $S = \{x \in R \,/\, x < -6 \text{ ou } -1 < x < 1 \text{ ou } x > 7\}$

28. $D = \{x \in R \,/\, x \leq 0 \text{ ou } x > 1\}$

capítulo 9

Razões trigonométricas

- Razões trigonométricas no triângulo retângulo
- Relação fundamental

Joseph Sohm/AGE Fotostock/Grupo Keystone

Telescópio refletor com tratamento digital de imagens. UCLA, San Diego, EUA, 2010.

Conversa Inicial

O estudo da Trigonometria tem suas origens entre os babilônios e os antigos egípcios, da mesma forma que boa parte dos conceitos matemáticos que conhecemos nos dias de hoje, tendo recebido extraordinário impulso entre os gregos e árabes.

O conhecimento das relações angulares e lineares em um triângulo retângulo surgiu do estudo da Astronomia.

Se a Ciência moderna tivesse que eleger uma madrinha, ela seria, sem dúvida, a Astronomia, pois ela sempre inspirou grandes conquistas matemáticas que, por sua vez, inspiraram o desenvolvimento científico. Entre essas grandes conquistas, destaca-se a Trigonometria.

NASA

O sistema solar

Professor, a palavra trigonometria significa medida das partes de um triângulo.

Com o conhecimento trigonométrico, as grandes navegações tornaram-se possíveis, e Colombo chegou à América. Atualmente, é também com esse conhecimento que importantes obras são realizadas em diversos campos, como na própria Astronomia, na Geografia, Arquitetura, Engenharia e Medicina.

Gabriel Blaj/Dreamstime

Luneta de uso doméstico

Kadmy/Dreamstime

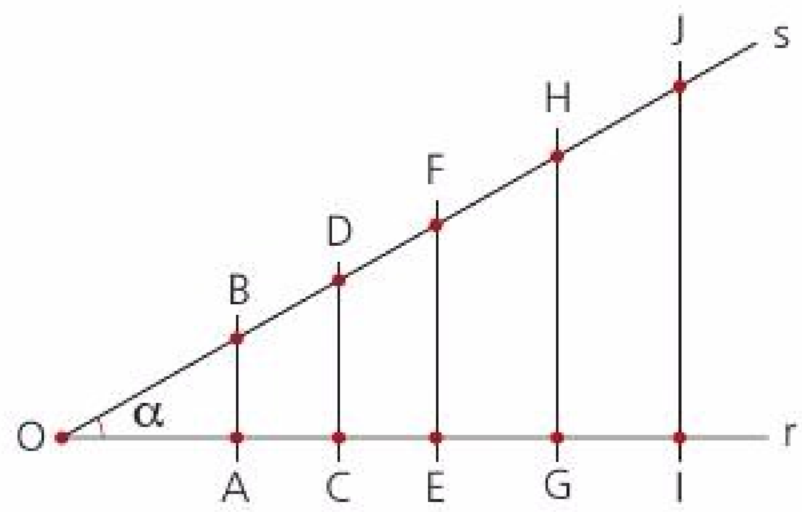
O teodolito, aparelho usado para medidas angulares.

Vamos abordar algumas propriedades dos triângulos retângulos e o teorema de Tales porque serão utilizadas na introdução do estudo da Trigonometria.

Já estudamos as relações métricas no triângulo retângulo. Esse estudo mostrou que existem relações entre os lados desse triângulo que estão diretamente vinculadas ao fato de um de seus ângulos medir 90°. Será que existem também relações entre os lados de um triângulo retângulo que dependem dos outros ângulos agudos desse triângulo? Vamos estudar um pouco mais o triângulo retângulo e entender essas relações.

Razões trigonométricas no triângulo retângulo

Considere duas retas concorrentes **r** e **s**, que formam entre si um **ângulo agudo α**. Traçando-se retas perpendiculares a **r**, que interceptam **r** e **s** nos pontos indicados, obtemos triângulos retângulos, como mostra a figura:



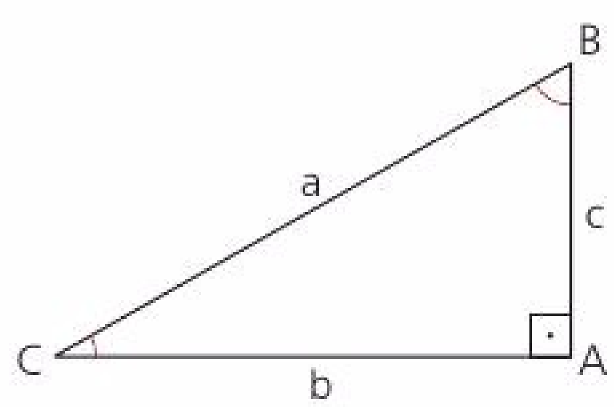
Com base no teorema de Tales, podemos dizer que os triângulos retângulos formados são semelhantes e estabelecer as seguintes relações (ou razões) entre as medidas de seus lados:

$\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \dfrac{\overline{OC}}{\overline{OD}} = \ldots = \dfrac{\overline{OI}}{\overline{OJ}} = k_2 \rightarrow$ Relação entre o cateto adjacente a α e a hipotenusa.

$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \dfrac{\overline{CD}}{\overline{OC}} = \ldots = \dfrac{\overline{IJ}}{\overline{OI}} = k_3 \rightarrow$ Relação entre o cateto oposto a α e o cateto adjacente.

$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \dfrac{\overline{CD}}{\overline{OD}} = \ldots = \dfrac{\overline{IJ}}{\overline{OJ}} = k_1 \rightarrow$ Relação entre o cateto oposto a α e a hipotenusa.

As razões $\mathbf{k_1}$, $\mathbf{k_2}$, e $\mathbf{k_3}$ são chamadas de razões trigonométricas do **ângulo α** e recebem, respectivamente os nomes de **seno**, **cosseno** e **tangente do ângulo α**. Assim, se ABC é um triângulo retângulo qualquer, com hipotenusa **a** e catetos **b** e **c**, temos:



- **seno do ângulo agudo**: razão entre o cateto oposto ao ângulo e a hipotenusa do triângulo.

$$\mathbf{sen}\ \hat{C} = \frac{c}{a} \quad \text{e} \quad \mathbf{sen}\ \hat{B} = \frac{b}{a}$$

- **cosseno do ângulo agudo**: razão entre o cateto adjacente ao ângulo e a hipotenusa do triângulo.

$$\cos \hat{C} = \frac{b}{a} \quad \text{e} \quad \cos \hat{B} = \frac{c}{a}$$

- **tangente do ângulo agudo**: razão entre o cateto oposto ao ângulo e o cateto adjacente.

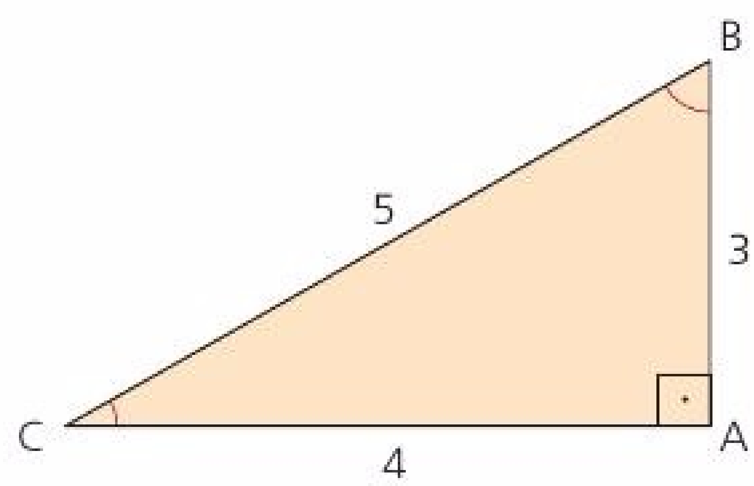
$$\text{tg}\ \hat{C} = \frac{c}{b} \quad \text{e} \quad \text{tg}\ \hat{B} = \frac{b}{c}$$

Temos, então:

$$\textbf{sen}\ \hat{C} = \cos \hat{B},\ \text{sen}\ \hat{B} = \cos \hat{C} \text{ e } \text{tg}\ \hat{C} = \frac{1}{\text{tg}\ \hat{B}},\ \text{sempre } \hat{B} + \hat{C} = 90^\circ.$$

Observe nos exemplos a seguir o cálculo de valores trigonométricos em triângulos retângulos.

a) Vamos obter os valores de seno, cosseno e tangente para os ângulos $\hat{C}$ e $\hat{B}$ no triângulo retângulo da figura e verificar que seno e cosseno têm valores entre 0 e 1.



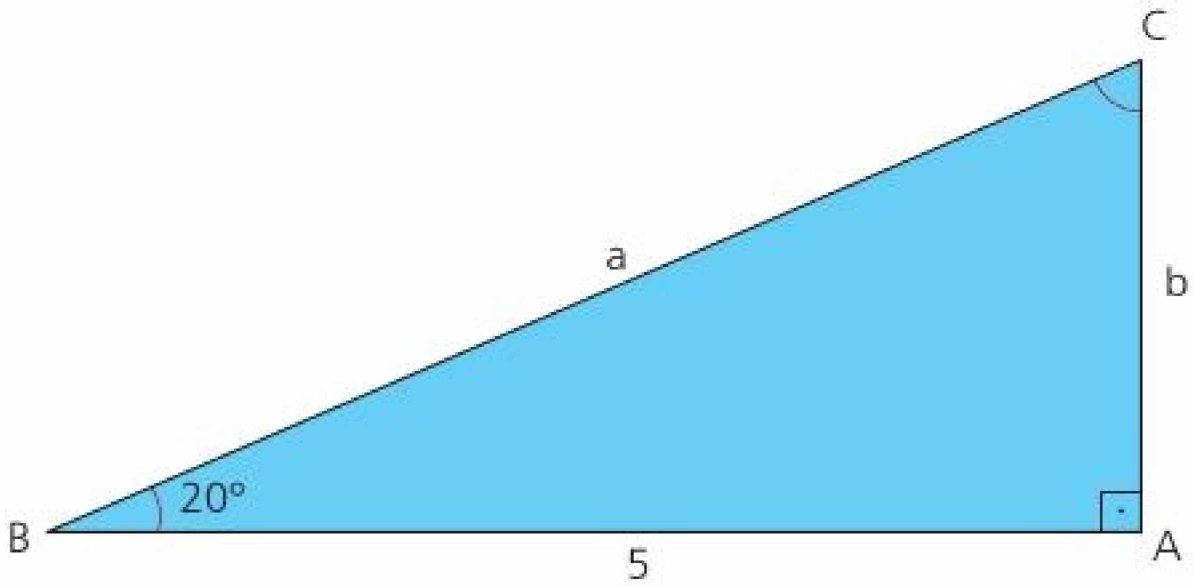
$$\text{sen}\ \hat{C} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{3}{5} = 0{,}6 \qquad \text{sen}\ \hat{B} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

$$\cos \hat{C} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{4}{5} = 0{,}8 \qquad \cos \hat{B} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

$$\text{tg}\ \hat{C} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{3}{4} = 0{,}75 \qquad \text{tg}\ \hat{B} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{4}{3} = 1{,}33...$$

Como qualquer cateto é sempre menor que a hipotenusa, o seno e o cosseno de um ângulo agudo α do triângulo retângulo terão sempre valores tais que **$0 < \text{sen}\ \alpha < 1$** e **$0 < \cos \alpha < 1$**.

b) Veja agora como podemos determinar as medidas lineares do cateto **b** e da hipotenusa **a** do triângulo ABC da figura, conhecendo-se um ângulo agudo do triângulo.



Dados: cos 20° = 0,9397 e tg 20° = 0,3640.

$$\cos 20° = \frac{5}{a} \rightarrow a = \frac{5}{\cos 20°} = \frac{5}{0,9397} \rightarrow a = 5,3208$$

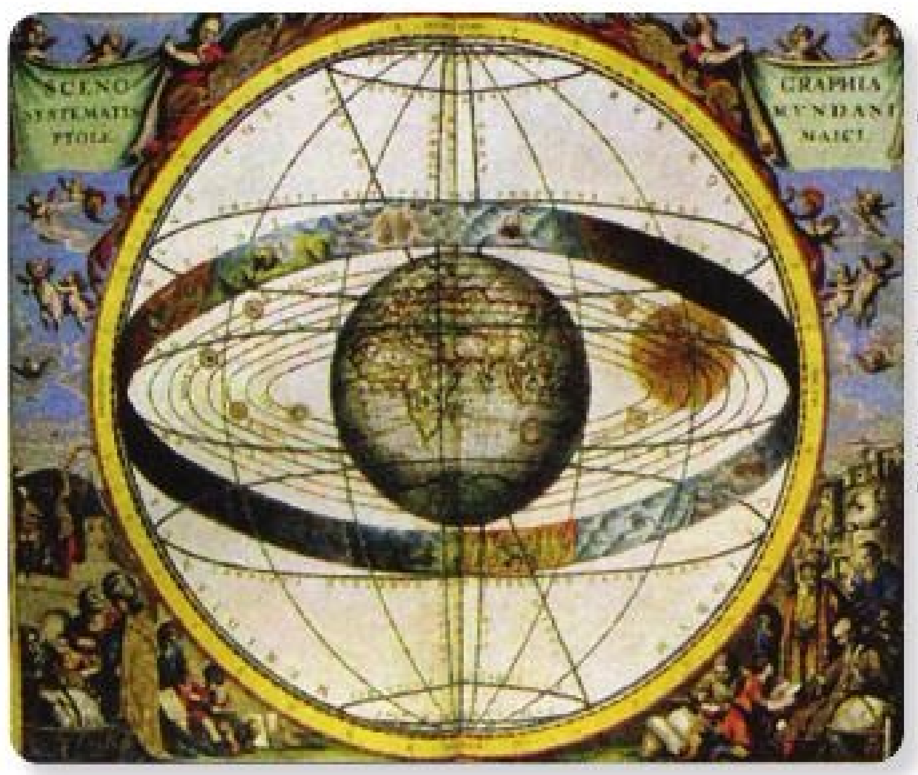
$$\text{tg } 20° = \frac{b}{5} \rightarrow b = 5 \cdot \text{tg } 20° = 5 \cdot 0,3640 \rightarrow b = 1,82$$

Professor, se achar oportuno, sugira pesquisas sobre alguns matemáticos e suas contribuições para a humanidade.

Quando, quem e onde

Os primeiros trabalhos elementares envolvendo conceitos trigonométricos foram desenvolvidos pelos babilônios e antigos egípcios, que realizavam estudos e cálculos relativos a fenômenos astronômicos e geográficos, como a determinação de eclipses, fases da Lua, distâncias inacessíveis e rotas de navegação.

Deve-se também aos babilônios a divisão da circunferência, ainda hoje em uso, em graus, minutos e segundos.


Bibilioteca Nacional, Paris, França

Modelo Geocêntrico do Universo.

Encontramos também entre os gregos importantes trabalhos ligados à Astronomia em que aparecem diversos conceitos trigonométrico, entre eles os criados por Hiparco de Nicéia (190 a. C.-120 a. C.), considerado por muitos como o criador das bases da trigonometria atual e que foram extremamente importantes para as grandes navegações na Antiguidade e nos séculos seguintes.

Posteriormente, Cláudio Ptolomeu (85-165 da era cristã) ampliou o trabalho de Hiparco com sua obra "*Sintaxe matemática*", na qual apresenta um tratado completo sobre a Trigonometria. Deve-se a Ptolomeu a criação do modelo Geocêntrico do Universo, com a Terra no centro e as estrelas planetas orbitando em torno dela.

Ângulos notáveis

Vamos determinar os valores de seno, cosseno e tangente para os ângulos de 30°, 45° e 60° considerados notáveis, pois aparecem em diversas situações de nosso cotidiano. Para isso, vamos recorrer a algumas figuras planas em que esses ângulos comparecem.

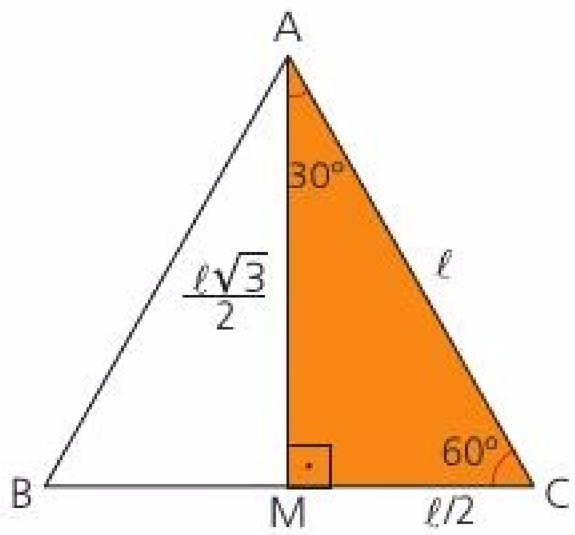
Considere inicialmente um triângulo equilátero de lado ℓ e a altura $\overline{AM}$. O triângulo retângulo AMC tem ângulos agudos iguais a 30° e 60°.

O triângulo AMC é retângulo. Logo podemos aplicar o teorema de Pitágoras e calcular sua altura:

$$\ell^2 = \overline{AM}^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2$$

$$\overline{AM}^2 = \ell^2 - \frac{\ell^2}{4} \rightarrow \overline{AM}^2 = \frac{3\ell^2}{4}$$

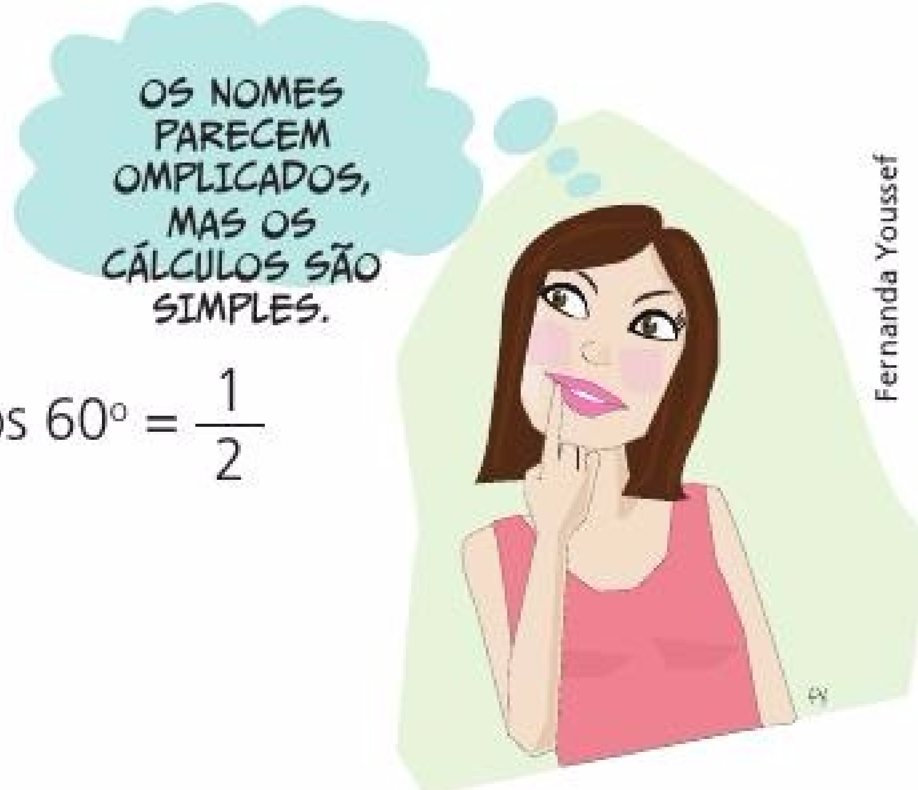
$$\overline{AM} = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$



Aplicando as razões trigonométricas no triângulo AMC, temos:

$$\text{sen } 30° = \frac{\frac{\ell}{2}}{\ell} \rightarrow \text{sen } 30° = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \cos 30° = \frac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\ell} \rightarrow \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg } 30° = \frac{\frac{\ell}{2}}{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}} \rightarrow \text{tg } 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



Fernanda Youssef

$$\text{sen } 60° = \frac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\ell} \rightarrow \text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{e} \quad \cos 60° = \frac{\frac{\ell}{2}}{\ell} \cos 60° = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg } 60° = \frac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\frac{\ell}{2}} \rightarrow \text{tg } 60° = \sqrt{3}$$

Como os ângulos de 30° e 60° são complementares, pois somam 90°, podemos destacar as relações entre as razões trigonométricas:

$$\text{sen } 30° = \cos 60° = \frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad \cos 30° = \text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg } 30° = \frac{1}{\text{tg } 60°} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

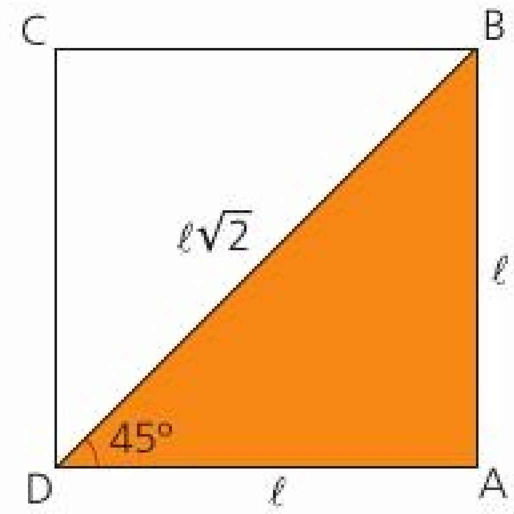
Para obter as razões trigonométricas do ângulo de 45°, considere um quadrado de lado ℓ. A diagonal divide o quadrado em dois triângulos retângulos isósceles.

No triângulo ABD, temos:

$$\text{sen } 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\ell}{\ell\sqrt{2}}$$

$$\text{sen } 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg } 45^\circ = \frac{\ell}{\ell} \rightarrow \text{tg } 45^\circ = 1$$

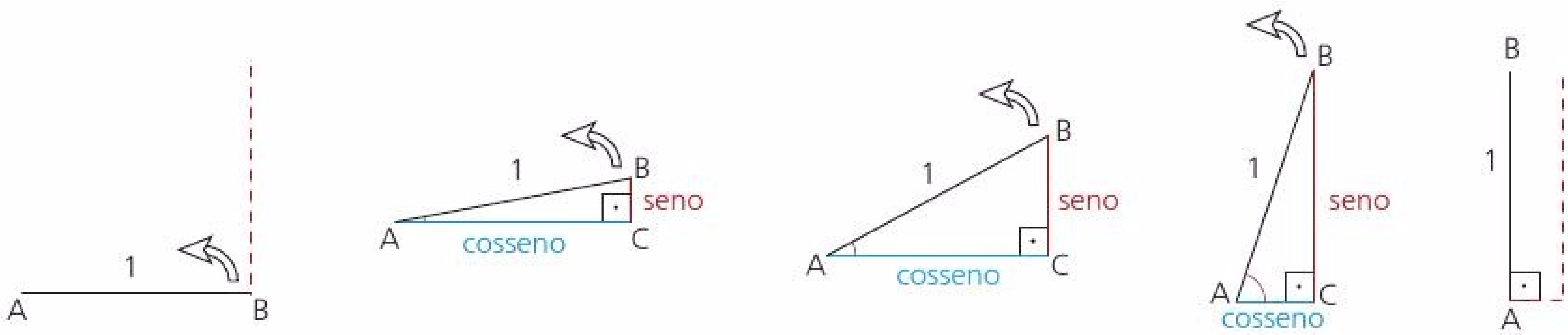


Agora, podemos resumir as razões trigonométricas dos ângulos notáveis numa única tabela:

	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{3}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

A tabela trigonométrica

Suponha um segmento $\overline{AB}$ de medida 1. Se girarmos $\overline{AB}$ no sentido contrário ao movimento dos ponteiros de um relógio (denominado sentido anti-horário), de tal maneira que formemos ângulos com a horizontal que variam de 0° a 90°, teremos triângulos retângulos ABC de hipotenusa 1, nos quais $\overline{AC}$ será o valor do cosseno do ângulo e $\overline{BC}$ o valor do seno.



Observe o crescimento do seno e o correspondente decrescimento do cosseno no giro do segmento $\overline{AB}$. Observe também que quando atingimos 90° o seno atinge seu valor máximo igual a 1 e o cosseno seu valor mínimo igual a 0.

Nos diversos triângulos que podemos formar, é possível calcular os valores de seno e cosseno entre 0° e 90°. Dessa maneira construímos uma tabela trigonométrica para valores de ângulos entre 0 e 90°. No entanto, qualquer calculadora científica pode substituir essa tabela através das teclas de seno e cosseno.

Atividades

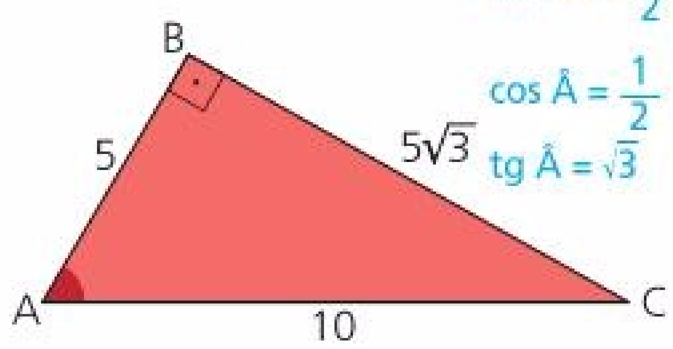
Comente com seus alunos os aspectos mais importantes de cada uma das atividades.

1. Calcule seno, cosseno e tangente de $\hat{A}$ no triângulo ABC, retângulo em B. Determine também a medida do ângulo $\hat{C}$ utilizando a tabela trigonométrica.

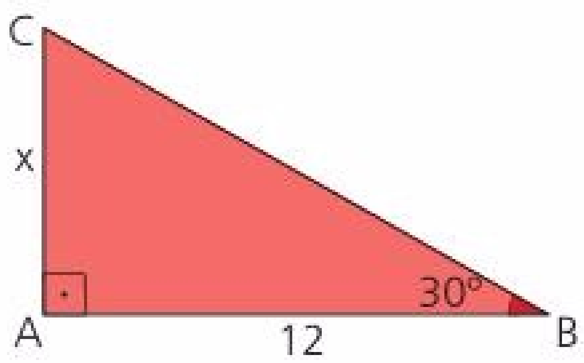
$\text{sen } \hat{A} = \frac{\sqrt{3}}{2} \therefore \hat{A} = 60°$

$\cos \hat{A} = \frac{1}{2}$

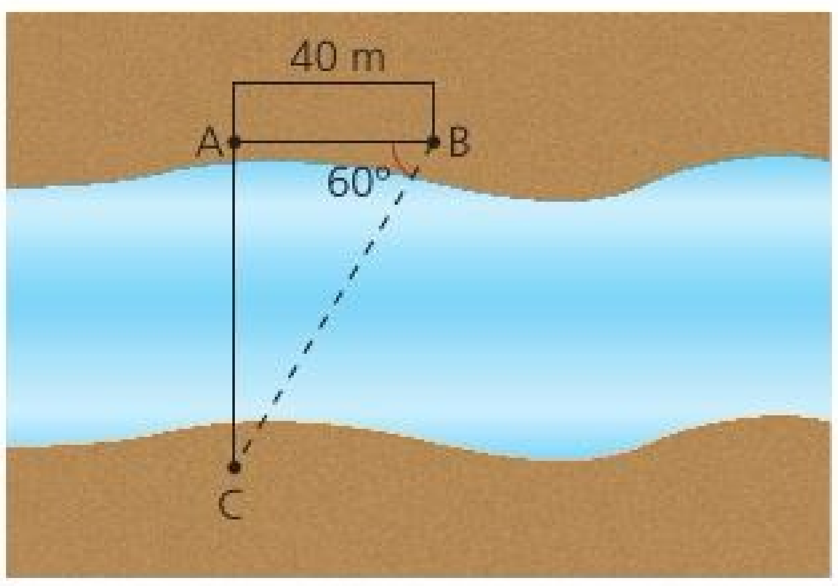
$\text{tg } \hat{A} = \sqrt{3}$



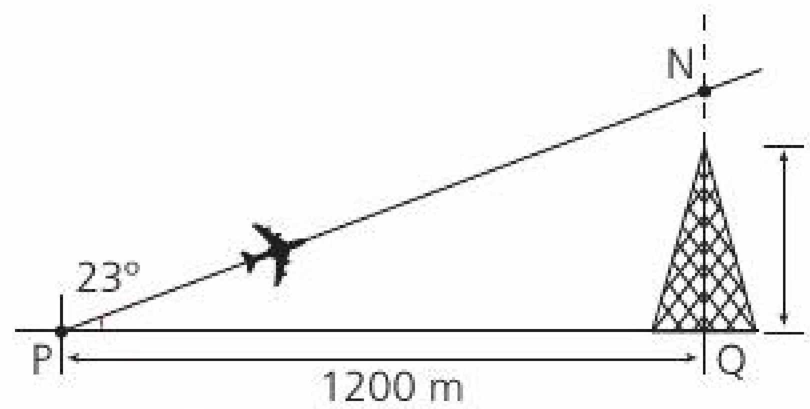
2. Calcule $\overline{AC}$ sabendo que o triângulo ABC é retângulo em A. $x = 4\sqrt{3}$



3. Um topógrafo, localizado num ponto A da margem de um rio, deseja medir a largura deste rio. Para isso, mede a distância a um ponto B na mesma margem em que se encontra e, utilizando um teodolito (aparelho próprio para medidas topográficas de ângulos e distâncias), estabelece o valor do ângulo $A\hat{B}C$, considerando C como um ponto frontal a A na outra margem do rio. Determine a largura $\overline{AC}$, sabendo que $\overline{AB}$ = 40 m e que o ângulo $A\hat{B}C$ medido é de 60°. $AC = 40\sqrt{3}$ m

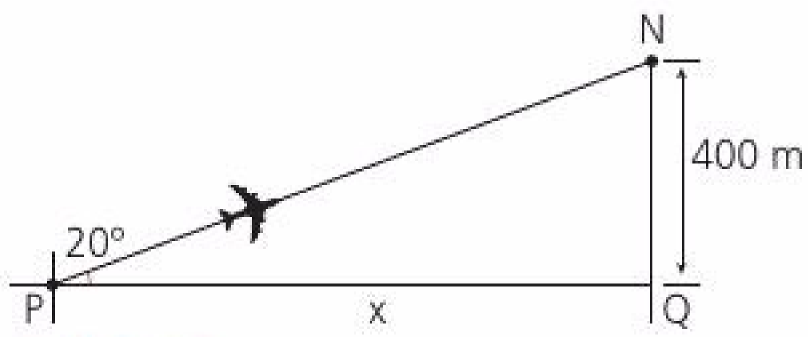


4. Um avião levanta voo com um ângulo de inclinação de 23° e tem que ultrapassar uma torre de 340 m de altura que dista 1 200 m do ponto de onde iniciou a decolagem. Verifique se o avião conseguiu ultrapassar a torre e, em caso afirmativo, a quantos metros acima dela ele passou.
(Utilize tg 23° = 0,424)



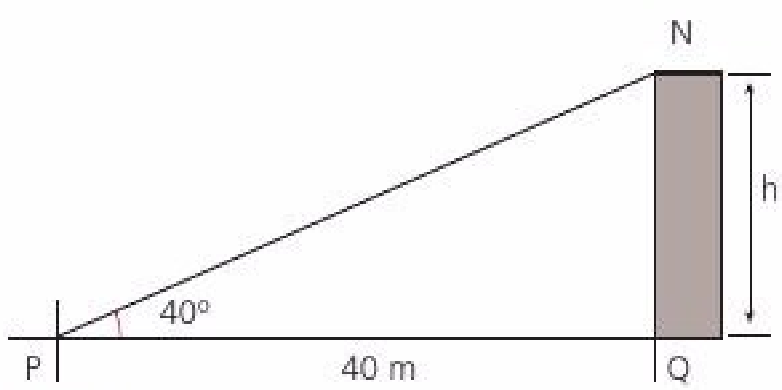
x = 508,8 m (Sim, passa acima da torre.)

5. Um jato, ao levantar voo, mantém um ângulo de inclinação constante de 20°. Determine a distância por ele percorrida em linha reta e em relação ao solo ao atingir a altura de 400 m.



x = 1 099 m

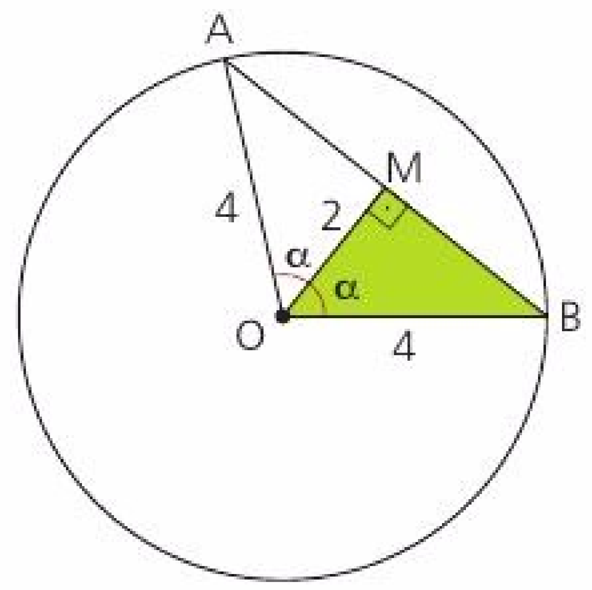
6. Determine a altura de um prédio sabendo que seu topo é visto sob um ângulo de 40°, a uma distância de 40 m de sua base.



h = 33,56 m

7. Numa circunferência de centro O e raio 4, é traçada uma corda $\overline{AB}$. Se a distância do centro à corda é igual a 2, determine a medida do ângulo AOB.

$A\hat{C}B = 120°$

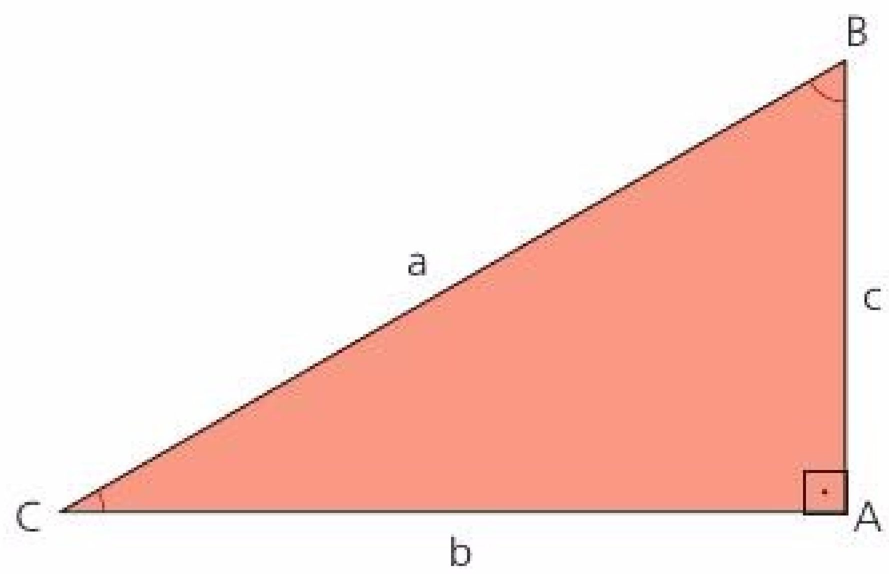


Tangente em função de seno e cosseno

Considerando os valores de seno, cosseno e tangente de um mesmo ângulo agudo do triângulo retângulo, podemos estabelecer a seguinte relação:

$$\mathbf{tg}\ \hat{C} = \frac{\mathbf{sen}\ \hat{C}}{\mathbf{cos}\ \hat{C}}$$

Essa relação pode ser obtida a partir do triângulo ABC.

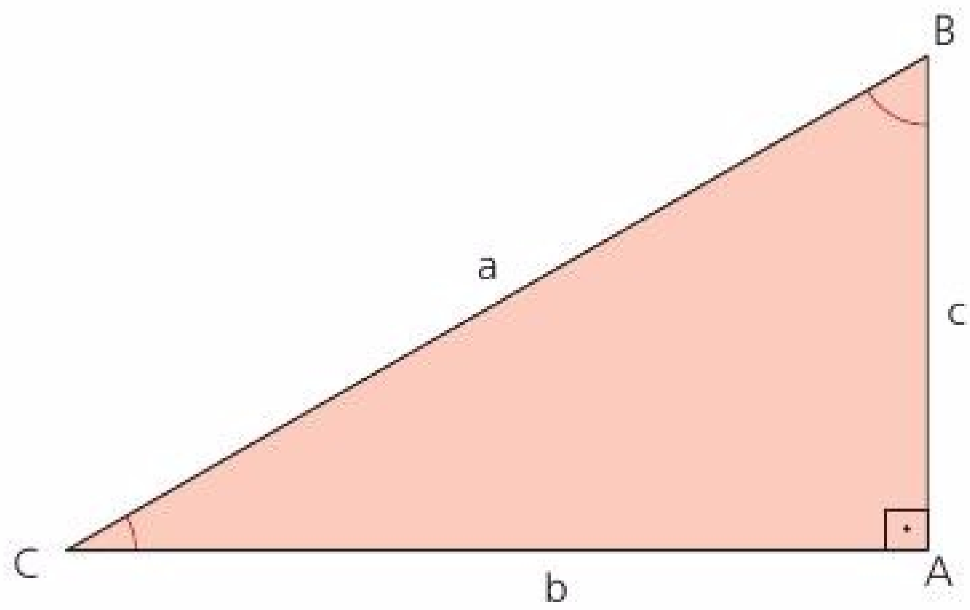


Como sen $\hat{C} = \frac{c}{a}$, cos $\hat{C} = \frac{b}{a}$ e tg $\hat{C} = \frac{c}{b}$, temos:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\text{sen}\ \hat{C}}{\cos\ \hat{C}} = \dfrac{\frac{c}{a}}{\frac{b}{a}} = \dfrac{c}{b} \\[2em] \text{tg}\ \hat{C} = \dfrac{c}{b} \end{array}\right\} \rightarrow \text{tg}\ \hat{C} = \frac{\text{sen}\ \hat{C}}{\cos\ \hat{C}}$$

Relação fundamental

Existe uma outra importante relação entre seno e cosseno de um ângulo. Considere o triângulo retângulo ABC.



Neste triângulo, temos $a^2 = b^2 + c^2$ e podemos escrever:

$$\frac{a^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} \text{ (dividimos ambos os membros por } a^2\text{)}$$

$$1 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2$$

Como $\text{sen } \hat{C} = \frac{c}{a}$, $\cos \hat{C} = \frac{b}{a}$, $\text{sen } \hat{B} = \frac{b}{a}$ e $\cos \hat{B} = \frac{c}{a}$, podemos concluir:

$$(\text{sen } \hat{C})^2 + (\cos \hat{C})^2 = 1$$

ou

$$(\cos \hat{B})^2 + (\text{sen } \hat{B})^2 = 1$$

De uma forma geral, podemos escrever, para um ângulo a:

$$\mathbf{sen^2\, \alpha + cos^2\, \alpha = 1}$$

Acompanhe a seguir alguns exemplos de aplicação da relação fundamental

a) Vamos verificar para $\alpha = 30^\circ$ a validade da relação fundamental.
Substituindo α por 30° no 1º membro da relação $\text{sen}^2\, \alpha + \cos^2\, \alpha = 1$, temos:

$$\text{sen}^2\, 30^\circ + \cos^2\, 30^\circ = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$\text{sen}^2\, 30^\circ + \cos^2\, 30^\circ = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}$$

$$\text{sen}^2\, 30^\circ + \cos^2\, 30^\circ = 1$$

b) Conhecendo o valor de sen $\alpha = \frac{3}{5}$ e sendo α um ângulo agudo, determine cos α e tg α:

Vamos usar a relação $\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$ para obter cos α.

$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\frac{9}{25} + \cos^2\alpha = 1 \rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$

$\cos\alpha = \frac{4}{5}$

Com sen α e cos α, obtemos a tg α.

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} \rightarrow \text{tg}\,\alpha = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} \rightarrow \text{tg}\,\alpha = \frac{3}{4}$$

Fernanda Youssef

Atividades

Professor, auxilie seus alunos na construção das questões.

8. Dado o valor de tg $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (a ângulo agudo), calcule cos α e sen α. $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\text{sen}\,30° = \frac{1}{2}$

9. Dado cos $\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$ (a ângulo agudo), encontre sen α e tg α. $\text{tg}\,\alpha = 2$

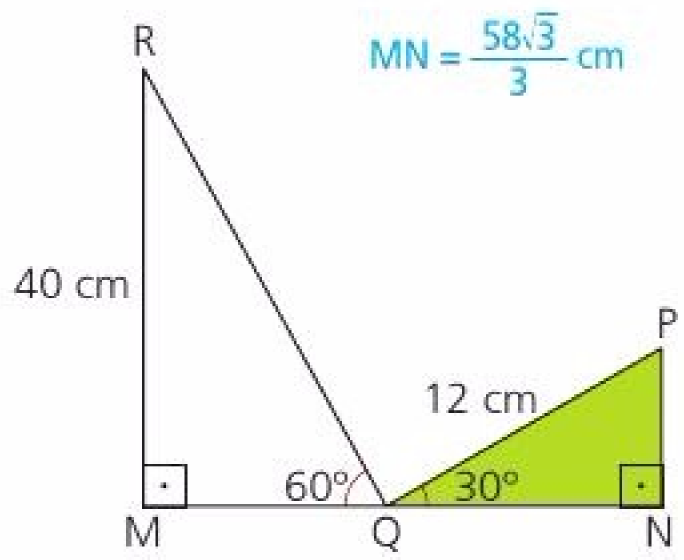
10. Determine tg α, dado que sen $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$ e o ângulo α é agudo. $\text{tg}\,\alpha = \frac{\sqrt{39}}{3}$

11. Dado sen $\alpha = \frac{\sqrt{11}}{6}$, encontre cos α e tg α, sendo α ângulo agudo. $\text{tg}\,\alpha = \frac{\sqrt{11}}{5}$

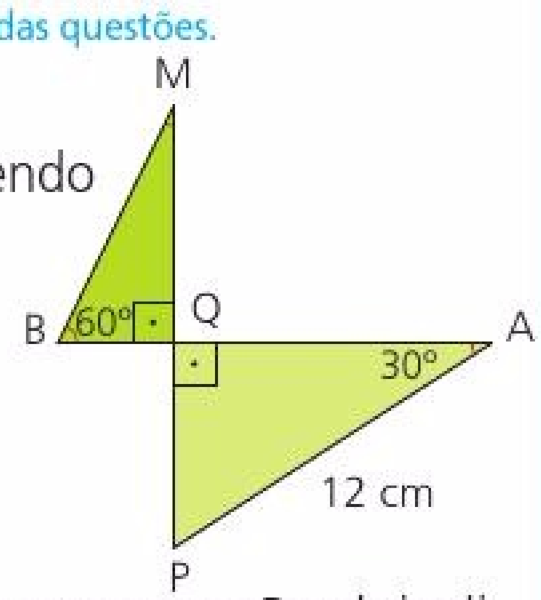
12. Dado tg $\alpha = 2\sqrt{3}$, encontre sen α e cos α, sendo α ângulo agudo. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{13}}{13}$ $\text{sen}\,\alpha = \frac{2\sqrt{39}}{13}$

13. Determine $\overline{MN}$ na figura:

$MN = \frac{58\sqrt{3}}{3}$ cm

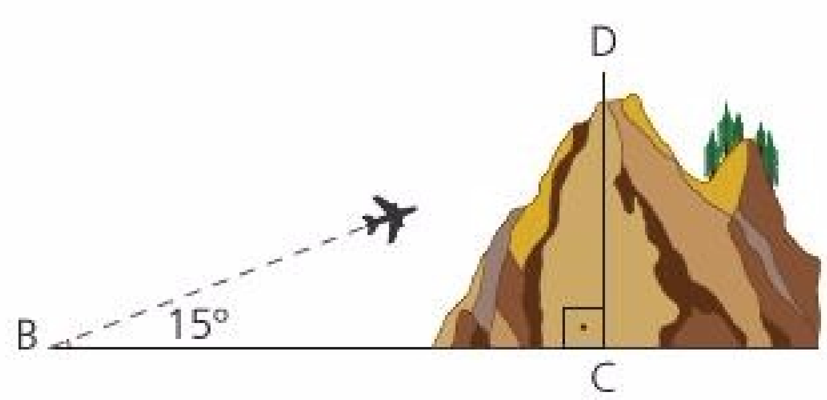


14. Determine $\overline{AB}$, sabendo que $\overline{MQ} = \overline{QA}$:



$6(1 + \sqrt{3})$ cm

15. Um avião decola de um ponto B sob inclinação constante de 15° com a horizontal. A 2 km de B se encontra a projeção vertical C do ponto mais alto D de uma serra de 600 m de altura, conforme a figura abaixo. Dados: cos 15° $\cong$ 0,97; sen15° $\cong$ 0,26; tg 15° $\cong$ 0,27.



É correto afirmar que:

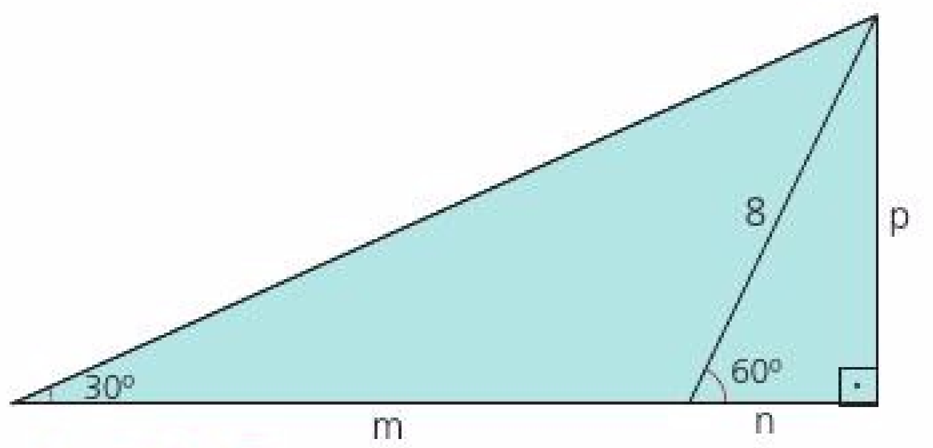
a) não haverá colisão do avião com a serra.

b) haverá colisão do avião com a serra antes de alcançar 540 m de altura.

c) haverá colisão do avião com a serra em D.

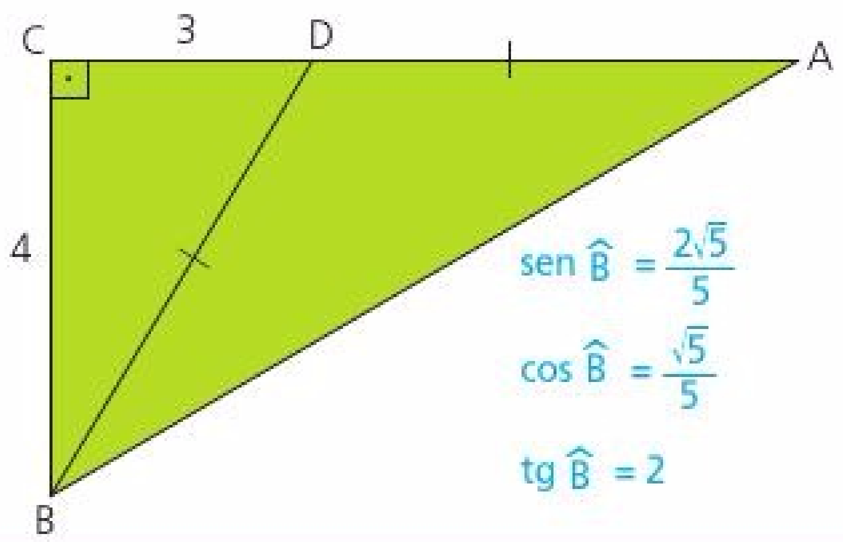
d) se o avião decolar 220 m antes de B, mantendo a mesma inclinação, não haverá colisão do avião com a serra. haverá colisão do avião com a serra em D.

16. Determine **m**, **n** e **p** na figura a seguir.



$S = \{8, 4, 4\sqrt{3}\}$

17. Na figura abaixo, $\overline{AD} = \overline{BD}$. Pede-se:



$\text{sen}\ \hat{B} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\cos \hat{B} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$\text{tg}\ \hat{B} = 2$

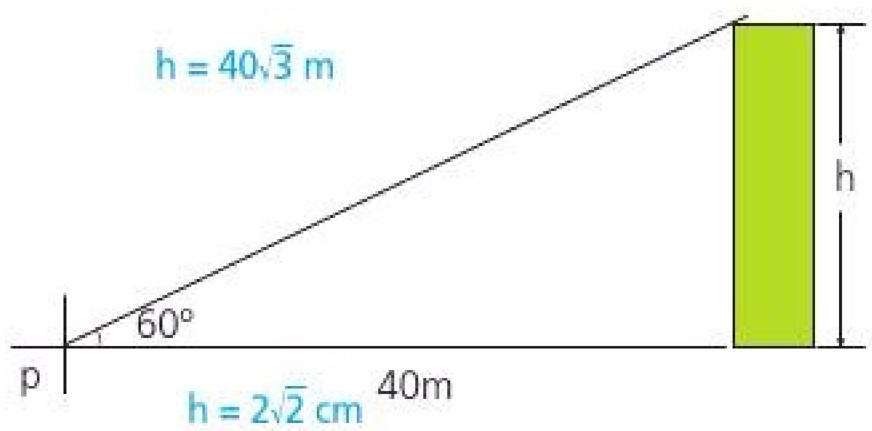
a) a medida de $\overline{AD}$. $AD = BD = 5$

b) o valor do seno, do cosseno e da tangente de $\hat{B}$, no triângulo ABC.

18. A base de um triângulo isósceles mede 10 cm e cada ângulo da base, 30º. Determine a altura relativa à base. $h = \frac{5\sqrt{3}}{3}$

19. Determine a altura de um prédio, sabendo que seu topo é visto sob ângulo de 60º a uma distância de 40 m de sua base.

$h = 40\sqrt{3}$ m



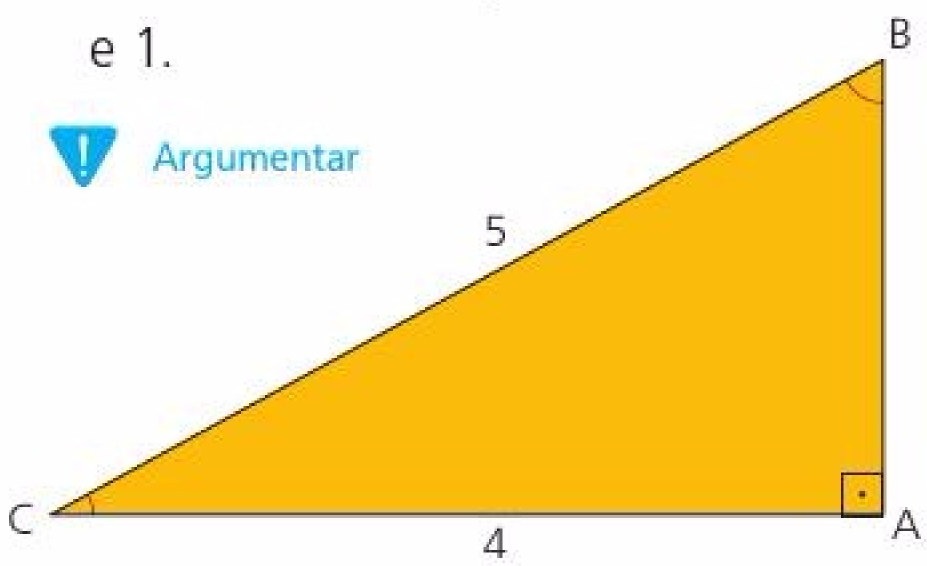
$h = 2\sqrt{2}$ cm

20. Os ângulos da base de um triângulo isósceles medem 45º e um dos seus lados iguais mede 4 cm. Determine a altura relativa à base.

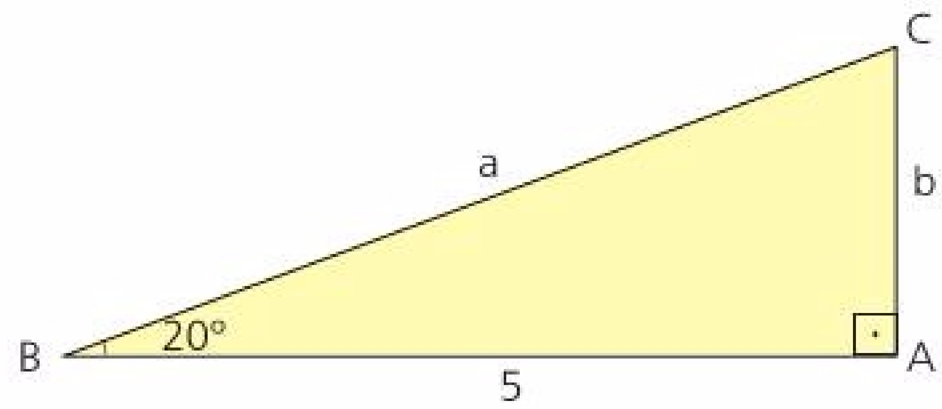
Para estudar

21. Obtenha os valores de seno, cosseno e tangente para os $\hat{C}$ e $\hat{B}$ no triângulo retângulo da figura abaixo e justifique por que razão seno e cosseno têm sempre valores entre 0 e 1.

Argumentar



22. Determine as medidas do cateto **b** e da hipotenusa **a** do triângulo ABC da figura. Dados cos 20º = 0,9397 e tg 20º = 0,3640.



23. Um jato, ao levantar voo, mantém um ângulo de inclinação constante de 20º. Determine a distância por ele percorrida em linha reta e em relação ao solo ao atingir a altura de 400 m. (tg 20º = 0,36)

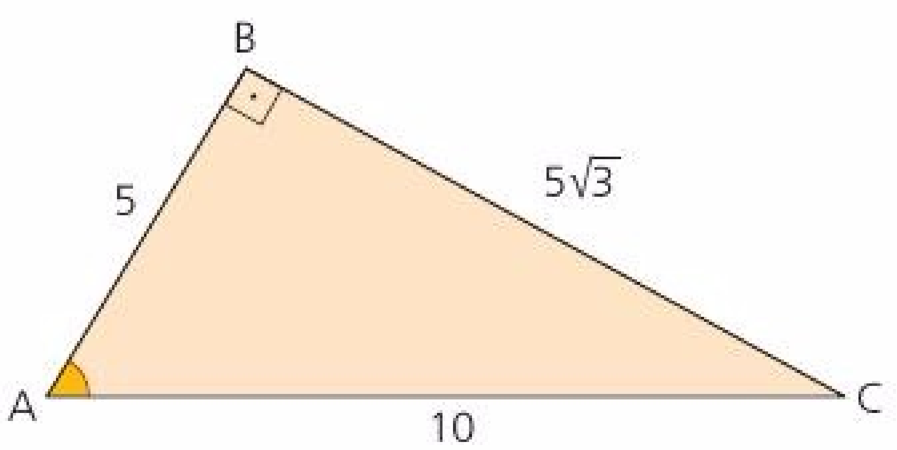
24. Determine a altura de um prédio sabendo que seu topo é visto sob um ângulo de 40° a uma distância de 40 m de sua base. (tg 40° = 0,84)

25. Numa circunferência de centro O e raio 4, é traçada uma corda $\overline{AB}$. Se a distância do centro à corda é igual a 2, determine a medida do ângulo AOB.

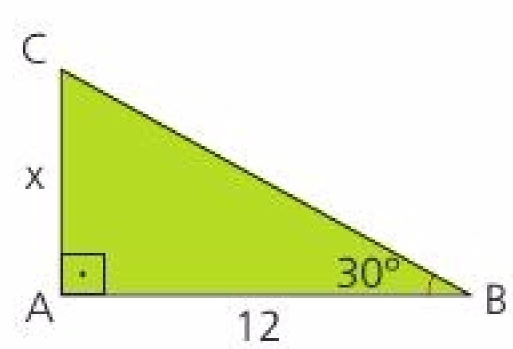
26. Um topógrafo posiciona um teodolito à margem de um rio e mira o topo de uma árvore na outra margem sob um ângulo de 60°. Em seguida, recua 30 m e mira a mesma árvore sob um ângulo de 30°. Considerando que a luneta do teodolito está a 1,7 m do solo, determine aproximadamente a largura do rio.

27. Verifique para $\alpha = 30°$ a validade da relação fundamental.

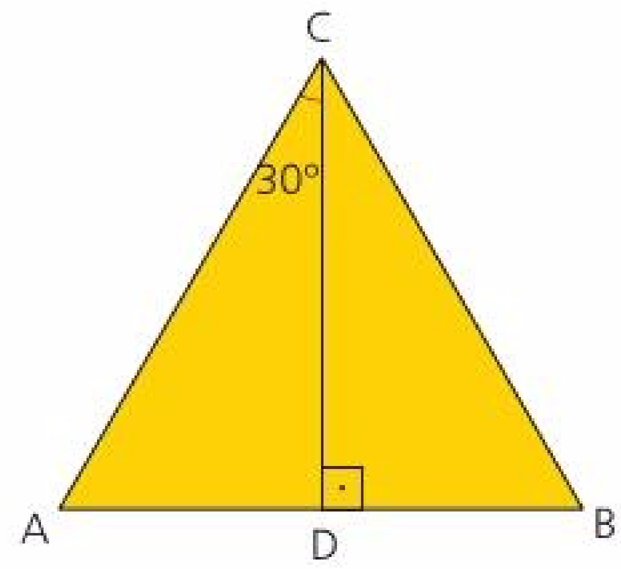
28. Calcule seno, cosseno e tangente de $\hat{A}$ no triângulo ABC, retângulo em B. Determine também a medida do ângulo C.



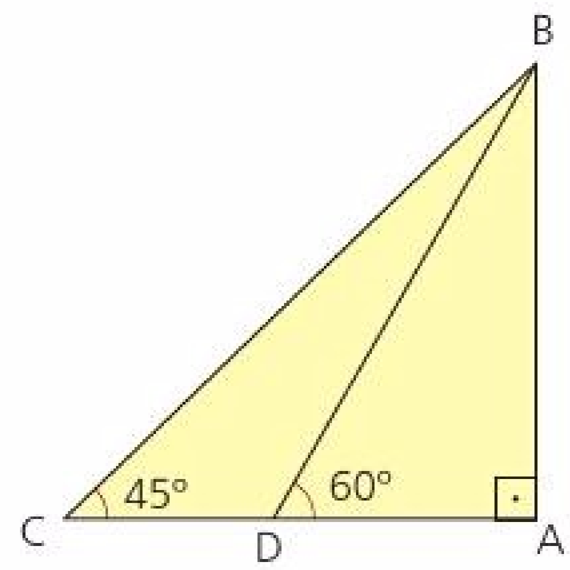
29. Calcule $\overline{AC}$ sabendo que o triângulo ABC é retângulo em A.



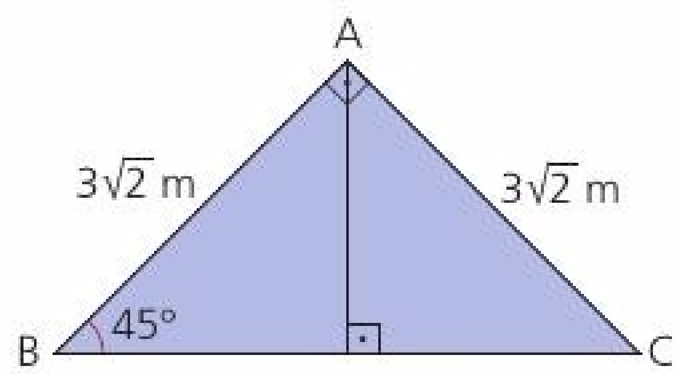
30. No triângulo ABC, $\overline{AB} = \overline{AC} = 6$ cm. Determine $\overline{CD}$.



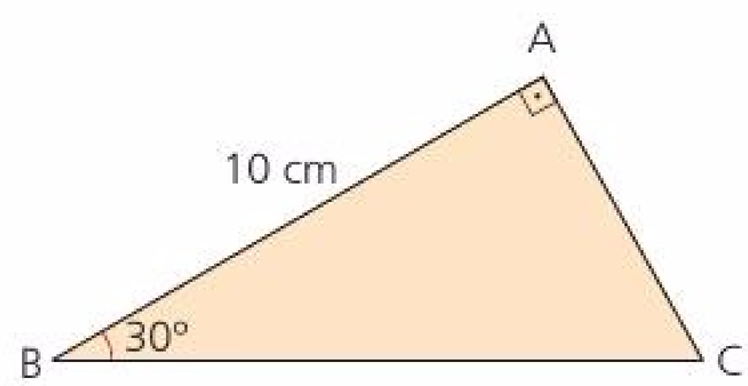
31. No triângulo retângulo ABC, $\overline{AB} = 6$ cm. Obtenha $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$.



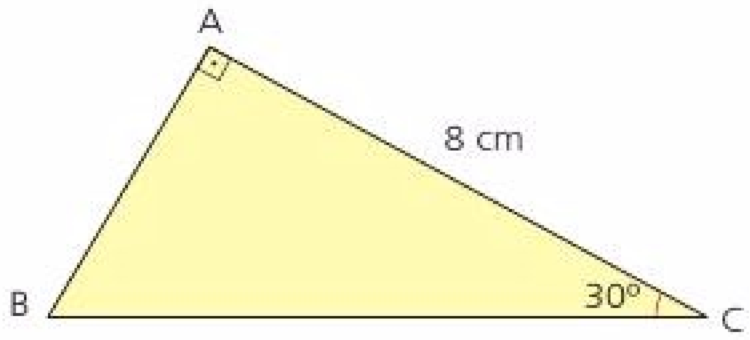
32. Se α é um ângulo agudo do triângulo retângulo abaixo e cos $\alpha = 45°$, determine sen α e tg α. Determine a altura do triângulo e, em seguida, sua área.



33. Determine a área do triângulo retângulo abaixo.



34. Determine a área do triângulo retângulo abaixo.



35. A base de um triângulo isósceles mede 10 cm e cada ângulo da base, 30°. Determine a altura relativa à base.

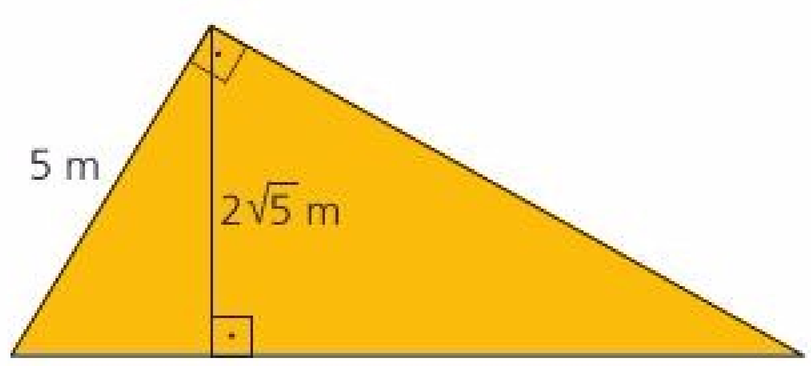
36. Determine a altura de um prédio, sabendo que seu topo é visto sob um ângulo de 60° a uma distância de 40 m de sua base.

37. Os ângulos da base de um triângulo isósceles medem 45° e um dos seus lados iguais mede 4 cm. Determine a altura relativa à base.

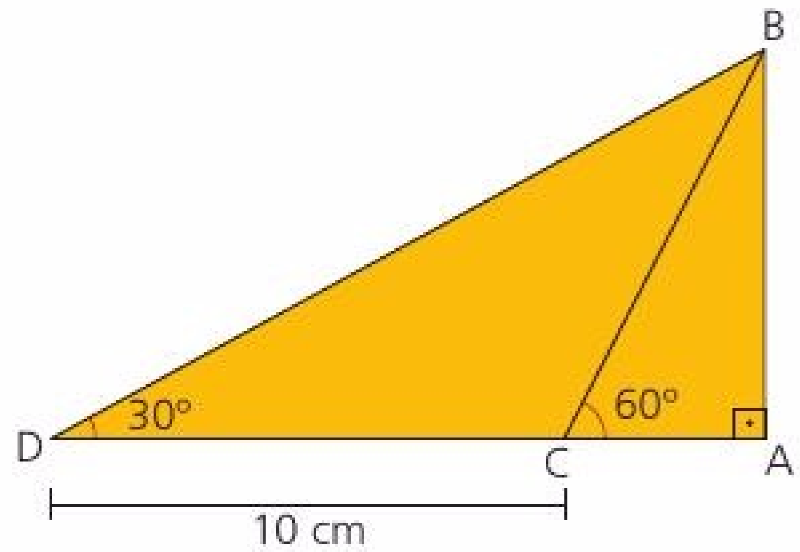
38. Se sen $x = \frac{2}{3}$, e x é um $\measuredangle$ agudo, o valor de $tg^2\,x$ é:

a) 0,6
b) 0,7
c) 0,8
d) 0.9
e) 1

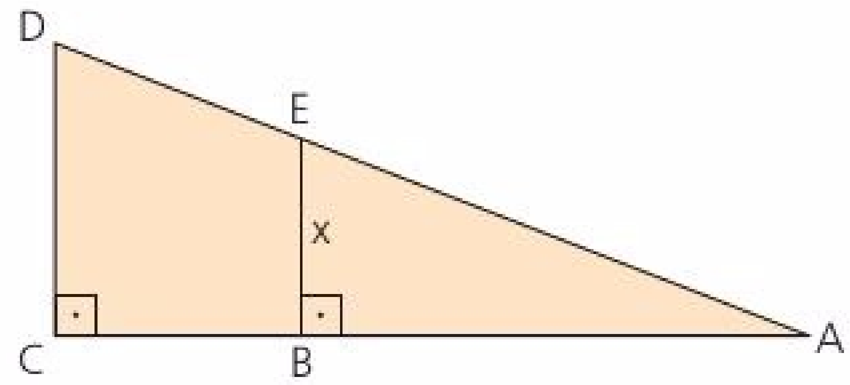
39. Num triângulo retângulo, o comprimento de um cateto é de 5 m, e o da altura relativa à hipotenusa é $2\sqrt{5}$ m. Determine o comprimento do outro cateto.



40. Na figura a seguir, $\overline{AD}$ é perpendicular a $\overline{AB}$, $A\hat{D}B = 30°$, $A\hat{C}B = 60°$ e $\overline{DC} = 10$ cm. Calcule a área do triângulo DCB.



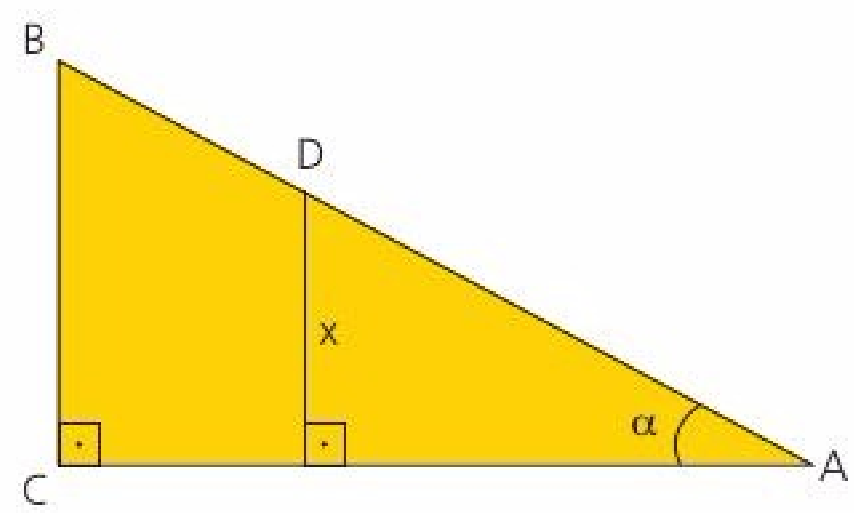
41. Dada a figura abaixo, se $\overline{AB} = 8$ cm, $\overline{CD} = 4$ cm e $\overline{AD} = 20$ cm, a medida de **x**, em cm, é:



42. A sombra de uma pessoa que tem 1,80 m de altura mede 60 cm. No mesmo momento, a seu lado, a sombra projetada de um poste mede 2 m. Se, mais tarde, a sombra do poste diminuiu 50 cm, a sombra da pessoa passou a medir:

a) 30 cm
b) 45 cm
c) 50 cm
d) 80 cm
e) 90 cm

43. Na figura abaixo, $\overline{AB} = 8$, $\overline{BC} = 4$ e $\overline{AD} = 16$. Determine a medida de **x**.



Resolução das atividades

1. $\text{sen}\ \hat{A} = \dfrac{\cancel{5}\sqrt{3}}{\cancel{10}_2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\ \therefore\ \hat{A} = 60°$

$\cos \hat{A} = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$

$\text{tg}\ \hat{A} = \dfrac{\cancel{5}\sqrt{3}}{\cancel{5}} = \sqrt{3}$

2. $\text{tg}\ 30 = \dfrac{x}{\cancel{12}_4} = \dfrac{\sqrt{3}}{\cancel{3}_1}$

$x = 4\sqrt{3}$

3. $\text{tg}\ 60° = \dfrac{AC}{40} = \sqrt{3}$

$AC = 40\sqrt{3}$ m

4. $\text{tg}\ 23 = \dfrac{x}{1\,200} = 0{,}424$

$x = 508{,}8$ m (Sim, passa acima da torre.)

5. $\text{tg}\ 20° = \dfrac{400}{x} = 0{,}364$

$x = 1\,099$ m

6. $\text{tg}\ 40° = \dfrac{h}{40} = 0{,}839$

$h = 33{,}56$ m

7. $\cos\alpha = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

$\alpha = 60° \rightarrow A\hat{O}B = 120°$

8. $\text{tg}\ \alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \alpha = 30°$

$\cos\alpha = \cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\text{sen}\ 30° = \dfrac{1}{2}$

9. $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

$\text{sen}^2\ \alpha + \left(\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 = 1$

$\text{sen}^2\ \alpha = 1 - \dfrac{5}{25} = \dfrac{20}{25}$

$\text{sen}\ \alpha = \sqrt{\dfrac{20}{25}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

$\text{tg}\ \alpha = \dfrac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\dfrac{2\sqrt{5}}{5}}{\dfrac{\sqrt{5}}{5}} = \dfrac{2\cancel{\sqrt{5}}}{\cancel{5}} \cdot \dfrac{\cancel{5}}{\cancel{\sqrt{5}}}$

$\text{tg}\ \alpha = 2$

10. $\text{sen}\ \alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$

$\cos^2\alpha = 1 - \dfrac{3}{16} = \dfrac{13}{16}$

$\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{13}}{4}$

$\text{tg}\ \alpha = \dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{4}}{\dfrac{\sqrt{13}}{4}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\cancel{4}} \cdot \dfrac{\cancel{4}}{\sqrt{13}} \cdot \dfrac{\sqrt{13}}{13} = \dfrac{\sqrt{39}}{13}$

\11. $\text{sen}\ \alpha = \dfrac{\sqrt{11}}{6}$.

$\left(\dfrac{\sqrt{11}}{6}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$

$\cos^2\alpha = 1 - \dfrac{11}{36} = \dfrac{25}{36}$

$\cos\alpha = \dfrac{5}{6}$

$\text{tg}\ \alpha = \dfrac{\dfrac{\sqrt{11}}{6}}{\dfrac{5}{6}} = \dfrac{\sqrt{11}}{\cancel{6}} \cdot \dfrac{\cancel{6}}{5} = \dfrac{\sqrt{11}}{5}$

12. $\text{tg}\ \alpha = 2\sqrt{3}$

$\text{tg}\ \alpha = \dfrac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\alpha} = 2\sqrt{3}$

$\text{sen}\ \alpha = 2\sqrt{3}\cos\alpha$

$(2\sqrt{3}\cos\alpha)^2 + \cos^2\alpha = 1$

$12\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$13\cos^2\alpha = 1$

$\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{13}} \cdot \dfrac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = \dfrac{\sqrt{13}}{13}$

$\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{13}}{13}$

$\text{sen}\ \alpha = 2\sqrt{3} \cdot \dfrac{\sqrt{13}}{13}$

$\text{sen}\ \alpha = \dfrac{2\sqrt{39}}{13}$

13. $\text{tg}\ 60° = \dfrac{40}{MQ} = \sqrt{3}$

$MQ = \dfrac{40}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{40\sqrt{3}}{3}$

$\cos 30° = \dfrac{QN}{12} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$QN = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$

$MN = MQ + QN = \frac{40\sqrt{3}}{3} + 6\sqrt{3}$

$MN = \frac{58\sqrt{3}}{3}$ cm

14. $\cos 30° = \frac{QA}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$QA = \frac{\cancel{12}^{6}\sqrt{3}}{\cancel{2}} = 6\sqrt{3}$

$MQ = QA$

$\text{tg } 60 = \frac{6\sqrt{3}}{BQ} = \sqrt{3}$

$BQ = 6$

$AB = 6 + 6\sqrt{3} = 6(1 + \sqrt{3})$ cm

15. $\text{tg } 15° = \frac{CD}{2\,000} = 0{,}27$

$CD = 540$ m

c) haverá colisão do avião com a serra em D.

16. $\text{sen } 60° = \frac{p}{\cancel{8}_4} = \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}_1}$

$p = 4\sqrt{3}$

$\cos 60° = \frac{n}{\cancel{8}_4} = \frac{1}{\cancel{2}}$

$n = 4$

$\text{tg } 30° = \frac{4\cancel{\sqrt{3}}}{m + 4} = \frac{\cancel{\sqrt{3}}}{3}$

$m + 4 = 12$

$m = 8$

$S = \{8, 4, 4\sqrt{3}\}$

17. a) $AD = BD = 5$

b) $AB^2 = 8^2 + 4^2$

$AB^2 = 64 + 16$

$AB = \sqrt{80}$

$AB = 4\sqrt{5}$

$\text{sen } \hat{B} = \frac{\cancel{8}^{2}}{{}_1\cancel{4}\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\cos \hat{B} = \frac{\cancel{4}^{1}}{{}_1\cancel{4}\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$\text{tg } \hat{B} = \frac{8}{4} = 2$

18. $\text{tg } 30° = \frac{h}{5} = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow h = \frac{5\sqrt{3}}{3}$

19. $\text{tg } 60° = \frac{h}{40} = \sqrt{3} \rightarrow h = 40\sqrt{3}$ m

20. $\text{sen } 45° = \frac{h}{\cancel{4}_2} = \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}_1} \rightarrow h = 2\sqrt{2}$ cm

Respostas da seção Para estudar

21. $\text{sen } \hat{C} = \frac{3}{5}$, $\cos \hat{C} = \frac{4}{5}$, $\text{tg } \hat{C} = \frac{3}{4}$

$\text{sen } \hat{B} = \frac{4}{5}$, $\cos \hat{B} = \frac{3}{5}$, $\text{tg } \hat{B} = \frac{4}{3}$

Porque o cateto é sempre menor que a hipotenusa.

22. $a = 5{,}32$ e $b = 1{,}82$

23. aproximadamente 1 111 metros

24. $h = 33{,}6$ m

25. $A\hat{O}B = 60°$

26. $\ell \cong 14{,}74$ m

27. 1

28. $\hat{A} = 60° \rightarrow \hat{C} = 30°$

29. $4\sqrt{3}$

30. $\overline{CD} = 3\sqrt{3}$

31. $\overline{AD} = 2\sqrt{3}$ cm

$\overline{BC} = 6\sqrt{2}$ cm

$\overline{CD} = (6 - 2\sqrt{3})$ cm

32. $A = \frac{15\sqrt{2}}{2}$

33. $A = 30$

34. $A = 20$

35. $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ cm

36. $40\sqrt{3}$ m

37. $2\sqrt{2}$ cm

38. (c) 0,8

39. 10 m

40. $25\sqrt{3}$ cm^2

41. $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

42. (b) 45 cm

43. $\frac{12\sqrt{3}}{3}$

capítulo 10

Introdução à estatística e probabilidades

- Frequência
- Distribuição de frequências
- Histogramas e polígonos de frequências
- Médias
- Espaço amostral e evento
- Probabilidade de um evento

Bill Frymire/Masterfile

Monumento no Memorial da América Latina. (São Paulo – SP)

Conversa Inicial

Professor, a origem da palavra Estatística está associada à palavra latina STATUS (Estado). Há indícios de que 3000 anos A.C. já se faziam censos na Babilônia, China e Egito e até mesmo o 4º livro do Velho Testamento faz referência à uma instrução dada a Moisés, para que fizesse um levantamento dos homens de Israel que estivessem aptos para guerrear.

Todos os dias nos deparamos com informações de toda a natureza, que chegam a nós pelos jornais, revistas, televisão, rádio e internet. Grande parte dessas informações são apresentadas em gráficos, tabelas, percentuais e indicadores que nos ajudam a compreender melhor o que ocorre ao nosso redor.

Você também já deve saber dos enormes benefícios sociais que nos traz o conhecimento detalhado da distribuição da população, consumo, estudos, ocupações, condições de saúde e dados econômicos fornecidos pelo Censo, realizado a cada 10 anos no Brasil, pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE).

Rubens Chaves/Folhapress

Recenseador do IBGE no Censo 2010.

A estatística organiza, estuda e pesquisa o levantamento de dados com a máxima quantidade possível de informação. Também estuda a tomada de decisões sob condições de incerteza com o menor risco possível, a otimização de recursos econômicos para o aumento da qualidade e produtividade, em questões judiciais, entre outros.

Neste capítulo vamos estudar as principais ferramentas utilizadas na Estatística.Você verá a aplicação de vários conceitos que desenvolvemos no estudo de Funções. Na segunda parte desse capítulo estudaremos os primeiros conceitos de probabilidades.

Frequência

Quando nos deparamos com um conjunto de dados numéricos, a primeira providência é tentar organizá-lo, considerando o número de vezes que cada um dos dados aparece neste conjunto.

Consideremos, por exemplo, uma lista de 100 notas obtidas em uma prova:

66	63	69	69	68	68	68	65	64	64	71	75	67	67	68	67
67	66	65	66	61	68	68	69	67	60	65	68	67	71	71	70
74	72	66	63	62	61	61	69	69	74	69	69	69	67	66	67
63	66	67	68	68	67	66	64	64	68	68	69	69	67	67	66
64	71	72	73	72	66	66	65	68	65	68	64	68	64	68	61
64	64	65	70	70	70	70	70	71	68	70	67	68	69	70	71
70	69	67	67												

Essa tabela pode ficar mais compreensível se agruparmos as notas em ordem crescente.

Observe:

60																
61	61	61	61													
62																
63	63	63														
64	64	64	64	64	64	64	64	64								
65	65	65	65	65	65											
66	66	66	66	66	66	66	66	66	66							
67	67	67	67	67	67	67	67	76	67	67	67	67	67	67		
68	68	68	68	68	68	68	68	68	68	68	68	68	68	68	68	68
69	69	69	69	69	69	69	69	69	69	69	69					
70	70	70	70	70	70	70	70	70								
71	71	71	71	71	71											
72	72	72														
73																
74	74															
75																

A simples observação dessa lista organizada permite algumas conclusões a respeito dos resultados obtidos no teste:

- a maior nota foi 75 e a menor, 60;
- a nota que mais aparece é 68;
- a nota 70 aparece 9 vezes etc.

Fernanda Youssef

Chamamos de **frequência** o número de vezes que um determinado dado aparece em uma lista qualquer. No caso que estamos considerando, a frequência da nota 70, por exemplo, é 9, pois ela aparece nove vezes, e a da nota 75 é 1.

Vamos agora organizar a tabela de frequências para as notas da prova, contando e indicando quantas vezes cada uma aparece.

TABELA DE FREQUÊNCIA DA PROVA	
NOTA	FREQUÊNCIA
60	1
61	4
62	1
63	3
64	9
65	6
66	10
67	15
68	17
69	12
70	9
71	6
72	3
73	1
74	2
75	1

Observe que nesse caso temos 16 notas diferentes, cada uma delas associada a uma frequência. A soma de todas as frequências fornece o total de notas da lista.

Atividades

1. Considere a tabela de frequências a seguir, que representa "o peso" de atletas participantes de uma competição olímpica:

Peso (kg)	Frequência
66	6
67	7
68	10
69	9
70	9
71	8
72	12
73	10
74	11
75	10
76	11
77	9
78	11
79	8
80	7
81	6
81	6

A partir da tabela, determine:

a) quantos atletas participam da competição; 150 atletas

b) quantos têm menos de 70 kg; 32 atletas

c) a porcentagem de atletas que têm massa entre 70 kg e 75 kg, inclusive. 60 atletas

2. A tabela a seguir indica as medidas de altura de alunos de uma turma de 9º ano.

Altura dos alunos em cm					
163	168	168	170	170	166
166	163	164	169	166	163
171	164	165	165	169	171
165	166	169	165	170	164
164	170	170	172	164	171

Em seu caderno, organize a tabela de frequências de alturas.

2.

Altura	Frequência
163	3
164	5
165	4
166	4
167	0
168	2
169	3
170	5
171	3
172	1
	$\Sigma = 30$

Distribuição de frequências

Em geral, as medidas numéricas relativas a um determinado fenômeno consistem em grandes coleções de dados. Nesses casos, torna-se necessário organizar a tabela de frequências utilizando os conceitos de **intervalos de classe, frequências de classe e distribuição de frequências**.

Vamos tomar como exemplo uma tabela de audiência, que mostra o número de aparelhos de TV sintonizados em certo canal, num mesmo horário, em 100 dias consecutivos, para um bairro onde existem aproximadamente 5 000 televisores.

Quantidade de aparelhos sintonizados em 100 dias consecutivos									
762	451	602	440	570	553	367	520	454	653
433	508	520	603	532	673	480	592	565	662
712	415	595	580	643	542	470	743	608	503
566	493	635	780	537	622	463	613	502	577
618	581	644	605	588	695	517	537	552	682
340	537	370	745	605	673	487	412	613	470
548	627	576	637	787	507	566	628	676	750
442	591	735	523	518	612	589	648	662	512
663	588	627	584	672	533	738	455	512	622
544	462	730	576	588	705	695	541	537	563

Em vez de contarmos quantas vezes cada medida aparece na tabela, vamos agrupá-las em **k** intervalos de classe convenientes e determinar quantos dados caem em cada um desses intervalos.

Em geral, é conveniente que o número k de **intervalos de classe** situe-se entre 5 e 20, dependendo da quantidade de dados numéricos. Para 100 dados, um número conveniente é 10 intervalos.

Para os valores apresentados na tabela, vamos calcular a **amplitude R** do conjunto de dados. Essa amplitude é a diferença entre o maior e o menor valor da tabela. Assim, nesse caso, a amplitude R será:

$$R = 787 - 340 \rightarrow R = 447$$

Vamos agora determinar a **amplitude h** de cada intervalo de classe. Isso é feito dividindo-se a amplitude R que calculamos pelo número de intervalos k que escolhemos. É comum encontrarmos um valor aproximado para h. Para representar isso, utilizaremos o símbolo ($\cong$).

$$h \cong \frac{R}{k}$$

Como, em nosso caso, escolhemos k = 10, temos:

$$h \cong \frac{447}{10} = 44{,}7$$

Para facilitar a distribuição das frequências, vamos utilizar h = 50. Assim, como o menor valor é 340, vamos estabelecer os intervalos a partir de 300, com amplitude 50, convencionando que eles são fechados à esquerda e abertos à direita.

Obtidos os intervalos de classe, podemos contar quantos dados "caem" em cada um deles e montar uma tabela de frequências de classe, que chamamos de distribuição de frequências.

O símbolo $\vdash$ indica um intervalo ao qual pertence o valor à esquerda e não pertence o da direita.

Distribuição de frequências	
Intervalo de classe	Frequência de classe
$300 \vdash 350$	1
$350 \vdash 400$	2
$400 \vdash 450$	5
$450 \vdash 500$	10
$500 \vdash 550$	21
$550 \vdash 600$	20
$600 \vdash 650$	19
$650 \vdash 700$	11
$700 \vdash 750$	7
$750 \vdash 800$	4
Total	100

Professor, reproduza no quadro uma tabela de dados, faça o cálculo da amplitude e também a divisão dos intervalos de classes e, com essas informações construa uma tabela de frequências.

Em resumo, se chamarmos os intervalos de classe simplesmente de **classes** e as **frequências de classe de** f_i, teremos a seguinte distribuição de **frequências** para uma coleção de n dados:

Classe	f_i
$a_1 \vdash a_2$	f_1
$a_1 \vdash a_2$	f_2
$a_1 \vdash a_2$	f_3
$\vdots$	$\vdots$
$a_{i-1} \vdash a_i$	f_i
$\sum f_i$	n

$\sum f_i$ deve ser lido como "*soma das frequências de classe*" e é sempre

$$\sum f_i = n$$

Acompanhe alguns exemplos de distribuição de frequências.

a) Em um exame vestibular foram cronometrados os tempos, em minutos, gastos por 50 alunos para entregar a prova. Obtiveram-se os valores indicados na tabela a seguir:

61	65	43	53	55	51	58	55	59	56
52	53	62	49	68	51	50	67	62	64
53	56	48	50	61	44	64	53	54	55
48	54	57	41	54	71	57	53	46	48
55	46	57	54	48	63	49	55	52	51

Vamos fazer a distribuição de frequências.
Da tabela temos:
R = maior valor – menor valor
$R = 71 - 41 \rightarrow R = 30$
Adotando $k = 7$, calculamos:

$$h \cong \frac{R}{k} \rightarrow h \cong \frac{30}{7} \cong 4{,}28 \text{ b} \rightarrow \text{adotamos } h = 5.$$

A distribuição de frequências é obtida contando-se na tabela original quantos dados "caem" em cada classe. Assim temos:

Classe	f_i
$40 \vdash 45$	3
$45 \vdash 50$	8
$50 \vdash 55$	16
$55 \vdash 60$	12
$60 \vdash 65$	7
$65 \vdash 70$	3
$70 \vdash 75$	1
$\sum f_i$	50

A tabela nos mostra, por exemplo, que 16 alunos fizeram a prova entre 50 e 55 minutos e apenas 1 aluno gastou mais que 70 minutos para realizar a prova.

b) Vamos retomar a tabela de notas em uma prova e organizar a distribuição de frequências.

Tabela de frequências da prova	
Nota	Frequência
60	1
61	4
62	1
63	3
64	9
65	6
66	10
67	15
68	17
69	12
70	9
71	6
72	3
73	1
74	2
75	1

Neste caso:

$$R = 75 - 60 \rightarrow R = 15$$

Vamos adotar, aqui, k = 8. Logo:

$$h \cong \frac{R}{k} \rightarrow h \cong \frac{15}{8} \rightarrow$$

$$h \cong 1{,}87 \rightarrow h = 2$$

Assim:

Classe	f_i
60 ⊢ 62	5
62 ⊢ 64	4
64 ⊢ 66	15
66 ⊢ 68	25
68 ⊢ 70	29
70 ⊢ 72	15
72 ⊢ 74	4
74 ⊢ 76	3

4.

Pesos	Frequência
42 ⊢ 44	3
44 ⊢ 46	7
46 ⊢ 48	12
48 ⊢ 50	17
50 ⊢ 52	19
52 ⊢ 54	18
54 ⊢ 56	15
56 ⊢ 58	7
58 ⊢ 60	2

5. $R = 59 - 42 \rightarrow R = 17$
$K = 2 \quad h = 1{,}7 \rightarrow h = 2$

42 ⊢ 44	4
44 ⊢ 46	7
46 ⊢ 48	12
48 ⊢ 50	18
50 ⊢ 52	19
52 ⊢ 54	17
54 ⊢ 56	14
56 ⊢ 58	7
58 ⊢ 60	2

3.

Acidentes	Frequência
3	1
4	4
5	7
6	15
7	16
8	5
9	11
10	9
11	4
12	4
13	6
14	2
15	2
16	1
17	4
18	3
19	3
20	
28	1
31	1
33	1

Acidentes	Frequência
3 ⊢ 6	12
6 ⊢ 9	36
9 ⊢ 12	24
12 ⊢ 15	12
15 ⊢ 18	7
18 ⊢ 21	6
21 ⊢ 24	0
24 ⊢ 27	0
27 ⊢ 30	1
30 ⊢ 33	1

Fernanda Youssef

Atividades

3. Obtenha a distribuição de frequências para a tabela abaixo, que representa o número de acidentes sem vítimas registrados em 100 finais de semana, em uma rodovia para o litoral. Utilize k = 10.

7	11	6	6	10	6	31	28	13	19
6	18	9	7	5	5	9	8	10	6
10	3	4	6	7	9	9	19	7	9
17	33	17	12	7	5	7	10	7	9
18	17	4	6	11	13	7	6	10	7
7	9	8	15	16	11	10	7	5	14
12	10	6	7	7	13	10	5	6	4
10	6	7	11	19	17	6	9	6	5
6	13	4	7	6	12	9	14	9	7
18	5	12	8	8	8	13	9	13	15

Organizar dados

4. Construa a distribuição de frequências com 8 classes, para as 100 medidas a seguir, que representam os pesos em kg de alunos de uma escola do Ensino Fundamental.

51	54	47	53	59	46	50	50	56	46
48	50	45	49	52	55	42	57	45	51
53	55	51	47	53	53	49	51	43	48
44	48	54	46	49	51	52	50	55	51
50	53	45	49	57	54	53	49	46	48
52	48	50	52	47	50	44	46	47	49
49	51	57	49	51	42	49	53	44	52
53	55	48	52	44	46	54	54	57	55
48	50	50	55	52	48	47	52	55	50
59	52	47	46	56	54	51	56	54	55

5. Utilizando a tabela do exercício anterior, faça a distribuição de frequências para k = 10.

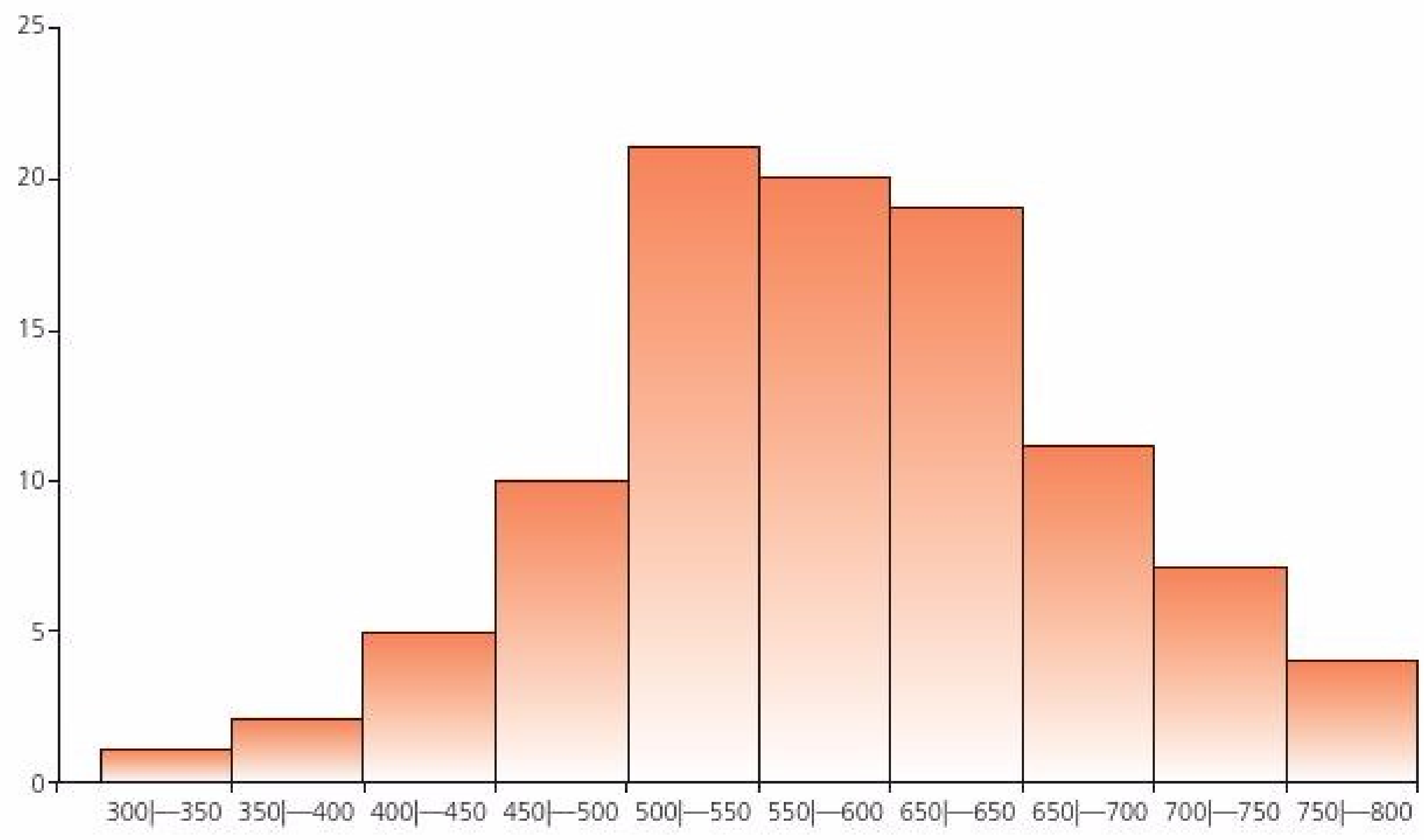
Histogramas e polígonos de frequências

Histograma é uma forma particular de gráfico de barras, utilizado para representar graficamente uma tabela de distribuição de frequências.

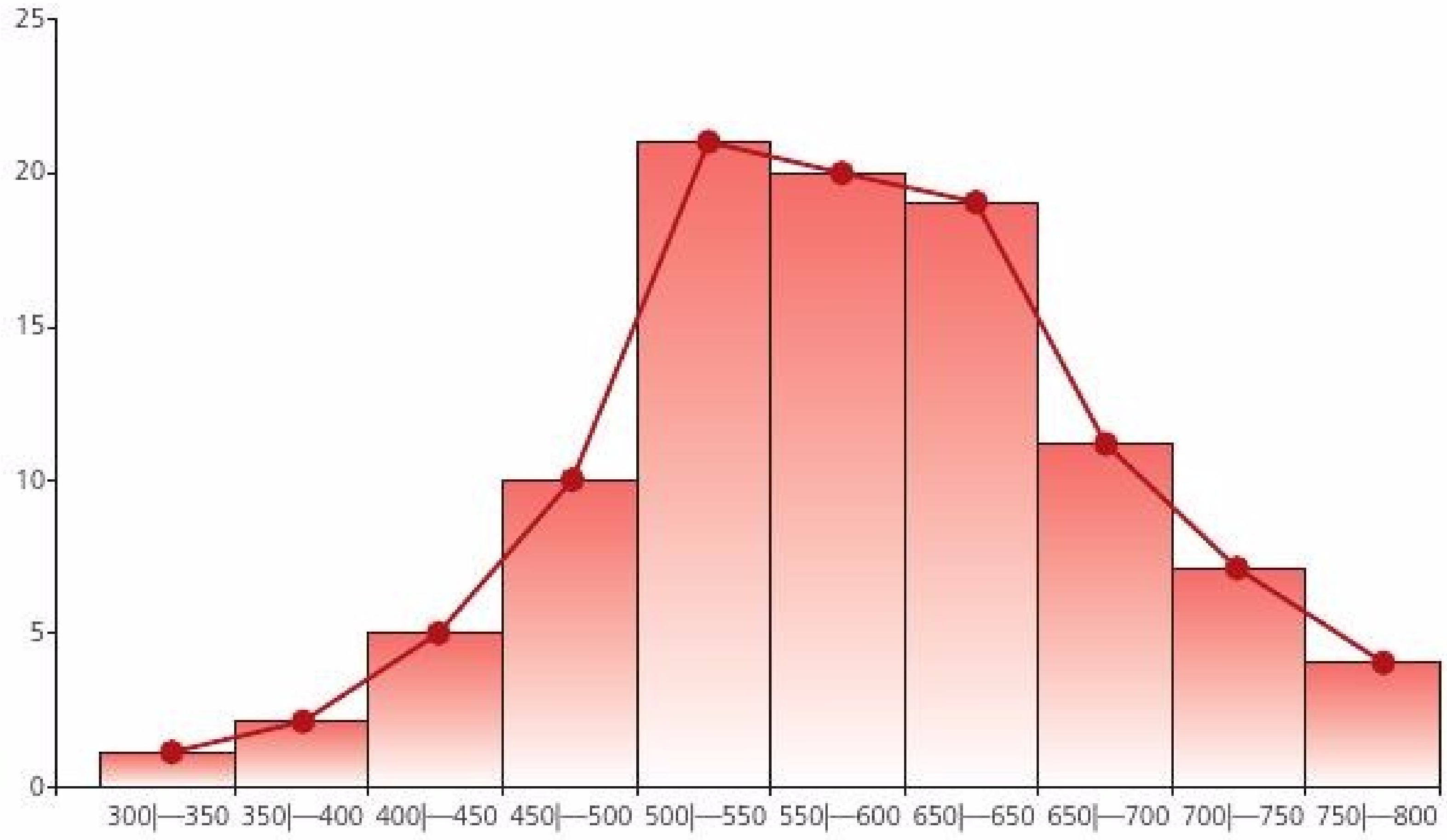
Considere, por exemplo, a distribuição de frequências de audiência, que corresponde ao número de aparelhos de TV sintonizados em um determinado canal, em um mesmo horário:

Distribuição de frequências	
Intervalo de classe	Frequência de classe
$300 \vdash 350$	1
$350 \vdash 400$	2
$400 \vdash 450$	5
$450 \vdash 500$	10
$500 \vdash 550$	21
$550 \vdash 600$	20
$600 \vdash 650$	19
$650 \vdash 700$	11
$700 \vdash 750$	7
$750 \vdash 800$	4
Σf_i	100

Para construir o histograma relativo a essa distribuição, traçamos barras sem espaço entre elas, lado a lado, com alturas f_i e bases de largura h, ou seja, igual aos intervalos de classe.



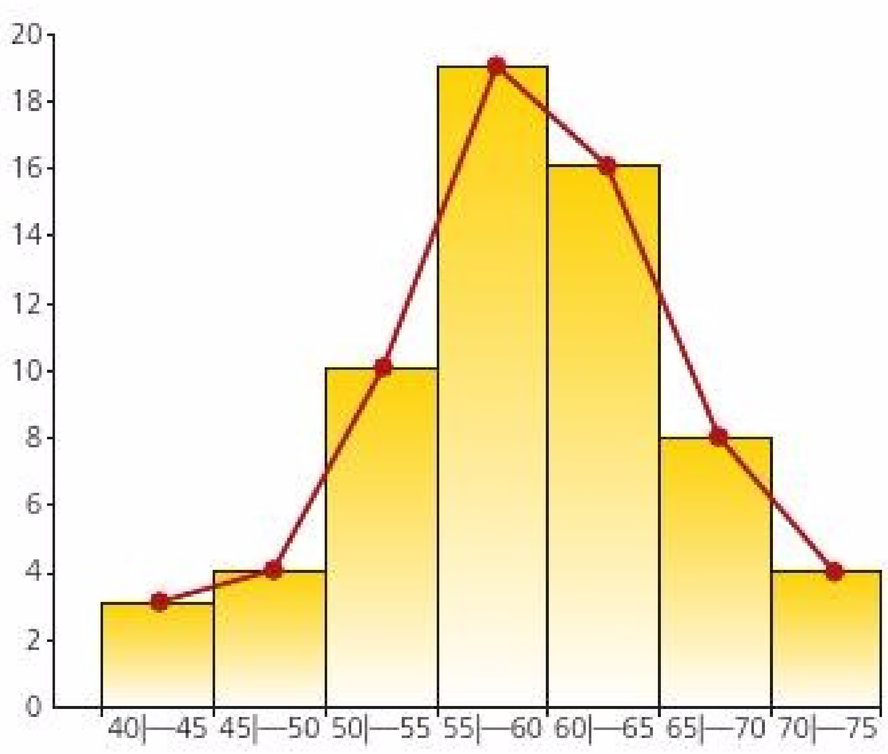
A partir do histograma, podemos traçar o **polígono de frequências**. Basta ligar os pontos médios do topo das barras com segmentos de reta consecutivos:



Acompanhe os exemplos a seguir.

a) Vamos fazer, em um mesmo gráfico, o histograma e o polígono de frequências relativos à distribuição a seguir:

Classe	f_i
40 ⊢ 45	3
45 ⊢ 50	4
50 ⊢ 55	10
55 ⊢ 60	19
60 ⊢ 65	16
65 ⊢ 70	8
70 ⊢ 75	4



b) A tabela a seguir, representa o número de ligações telefônicas atendidas por uma empresa em 80 dias, incluindo os finais de semana. Observe a construção da tabela de distribuição, o histograma correspondente e o polígono de frequências.

64	73	44	10	43	31	51	4	25	53
51	36	47	45	65	69	58	45	54	73
28	38	42	49	19	49	65	32	33	11
57	25	39	2	40	22	5	60	44	3
8	3	65	50	38	9	56	21	9	57
15	28	48	47	68	6	34	12	65	28
59	8	54	84	45	39	41	43	41	38
52	63	40	16	52	44	46	59	22	15

Inicialmente, determinamos a amplitude da distribuição e a de cada classe.

$$R = x_{max} - x_{min}$$

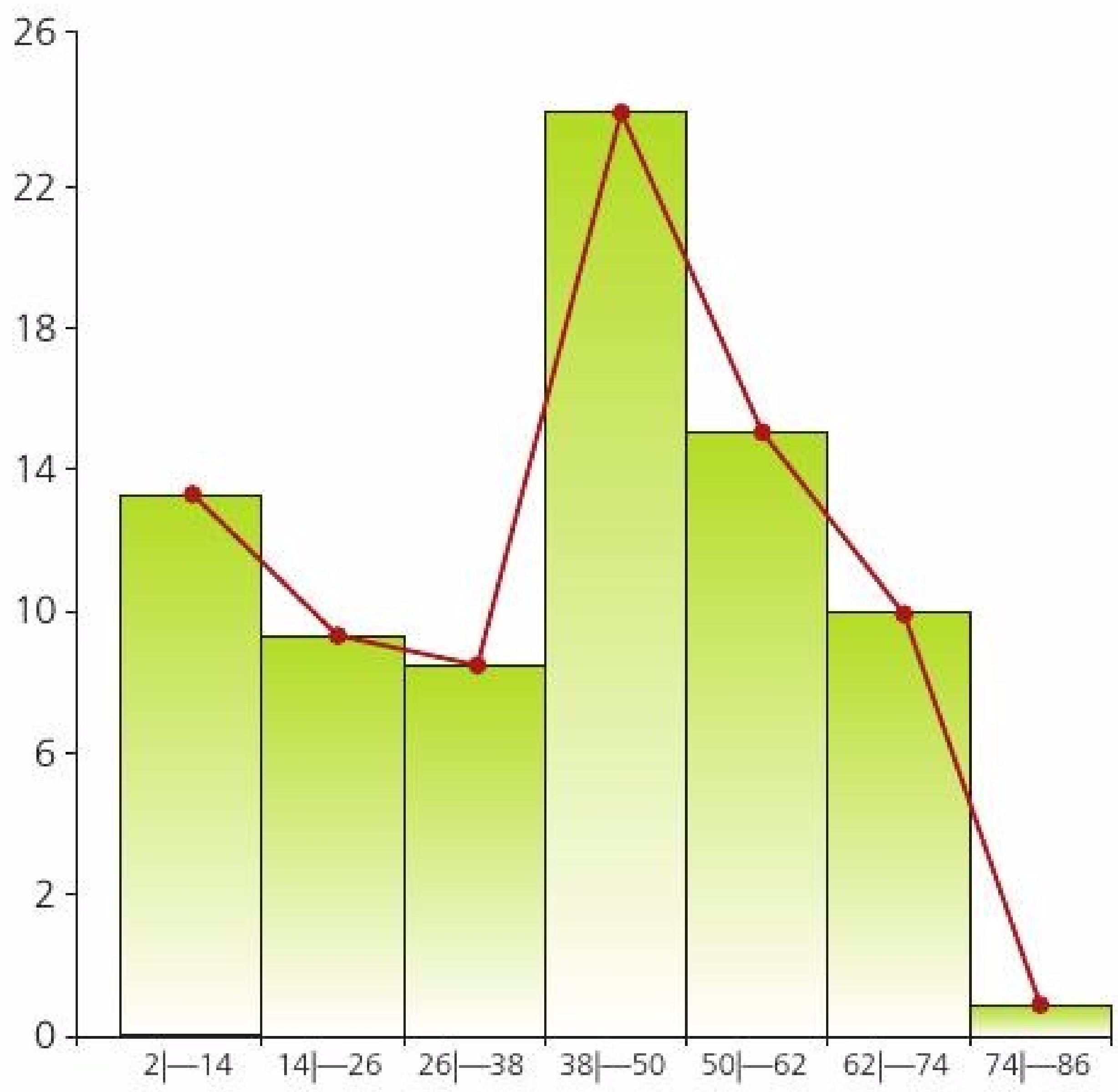
$$R = 84 - 2 \rightarrow R = 82$$

Considerando k = 7, calculamos h:

$$h \cong \frac{82}{7} \rightarrow h \cong 11{,}7 \rightarrow h = 12$$

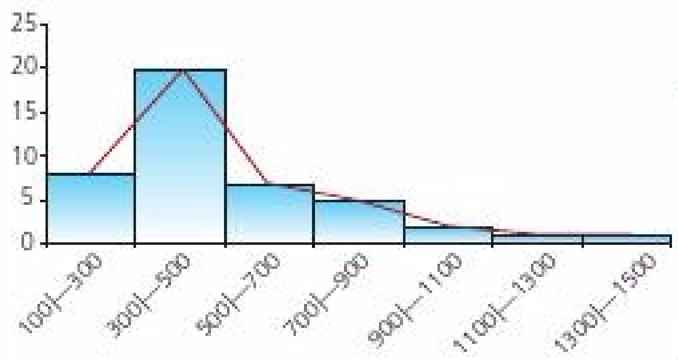
Fazendo a contagem, organizamos a tabela de distribuição de frequências, a partir da qual temos o histograma e o polígono de frequências correspondentes.

número de ligações	f_i
$2 \vdash 14$	13
$14 \vdash 26$	9
$26 \vdash 38$	8
$38 \vdash 50$	24
$50 \vdash 62$	15
$62 \vdash 74$	10
$74 \vdash 86$	1
Σf_i	80



Atividades

6. Construa, em um mesmo gráfico, o histograma e o polígono de frequências relativos à distribuição a seguir:



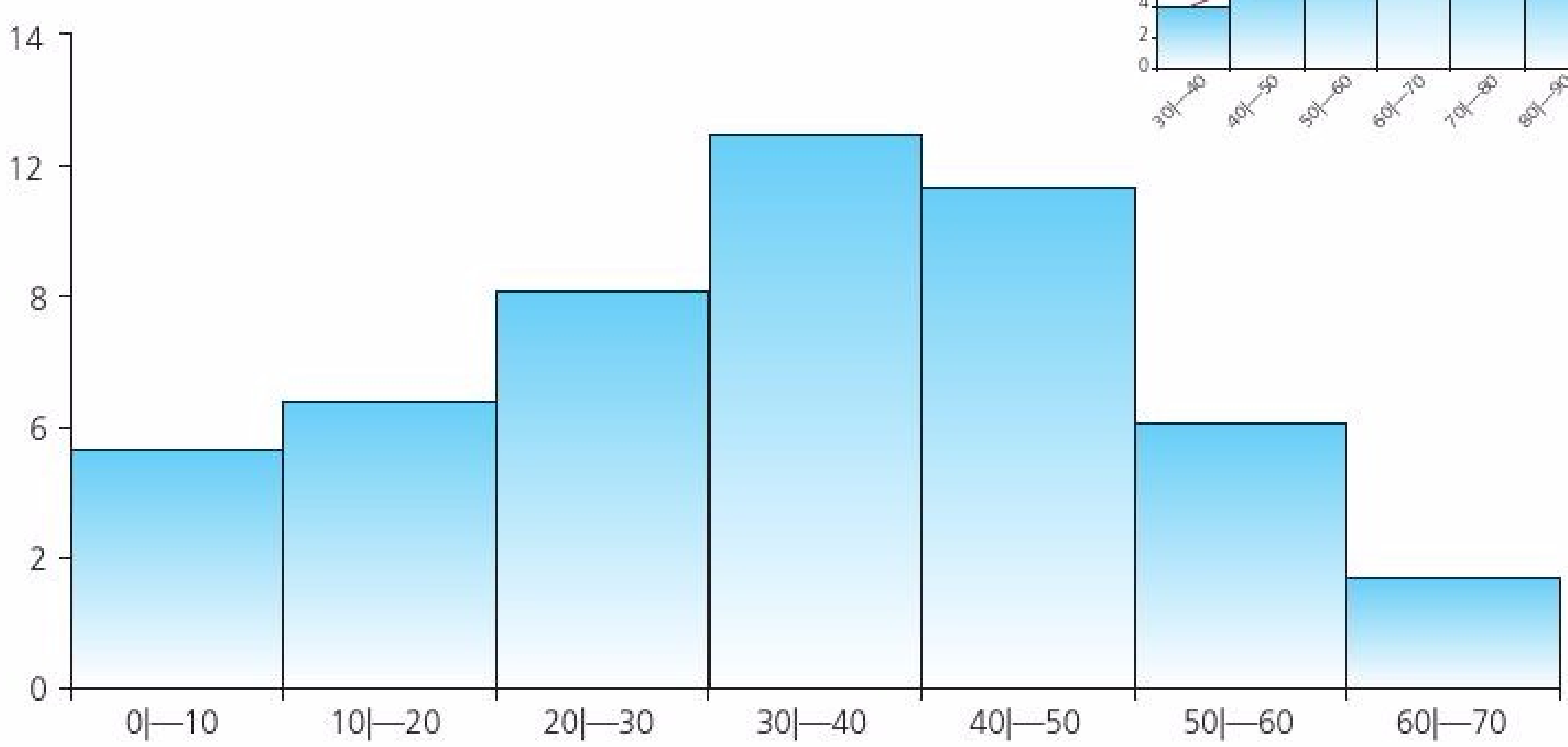
Salário (R$)	f_i
100 ⊢ 30	8
300 ⊢ 500	20
500 ⊢ 700	7
700 ⊢ 900	5
900 ⊢ 1 100	2
1 100 ⊢ 1 300	1
1 300 ⊢ 1 500	1

7. Elabore a tabela de distribuição, o histograma e o polígono de frequências correspondente à tabela de notas de 50 alunos.

68	85	33	52	65	77	84	65	74	57
71	35	81	50	35	64	74	47	54	68
80	61	41	91	55	73	59	53	77	45
41	55	78	48	69	85	67	39	60	76
94	98	66	66	73	42	65	94	88	89

8. Examine o histograma que corresponde às notas finais, em Matemática, dos alunos de uma escola e, depois, responda às perguntas:

7.



a) Qual é o intervalo de classe que tem maior frequência? 30 ⊢— 40

b) Qual é o número total de alunos? 52 alunos

c) Quais são os intervalos de classe que têm a mesma frequência? 10 ⊢— 20 e 50 ⊢— 60

Médias

O conceito de média traduz uma ideia muito importante e significa que é um valor associado a todos os elementos de uma determinada lista de valores, de tal maneira que esse valor pode substituí-la, dependendo do critério que escolhemos para essa associação.

Se esse critério é a soma dos elementos da lista, obtemos a **média aritmética** que é a mais simples e de uso mais comum. Assim, a média aritmética $\overline{\mathbf{x}}$ de uma lista de valores x_1, x_2, x_3, ... x_n é um valor tal calculado a partir da soma dos valores dividida pela quantidade de valores:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n} \text{ ou } \overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Se o critério a ser considerado for o produto dos elementos da lista, obteremos a **média geométrica** $\overline{\mathbf{g}}$. Assim, a média geométrica simples da lista x_1, x_2, x_3, ..., x_n é um valor positivo obtido a partir a raiz de índice **n** do produto dos valores da lista:

$$\overline{g} = \sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 \ldots x_n}$$

Por outro lado, a **média ponderada** dos elementos de uma lista x_1, x_2, x_3, ..., x_n, considera o que chamamos de **pesos** ou **ponderações** associados a cada valor. Assim, se os pesos dos valores x_1, x_2, x_3, ..., x_n forem respectivamente iguais a p_1, p_2, p_3, ..., p_n a média ponderada $\overline{\mathbf{p}}$ da lista é definida por:

$$\overline{p} = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + \ldots p_n x_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \ldots p_n}$$

Vejamos alguns exemplos de cálculos de médias:

a) Para a lista de valores 16, 25, e 49, vamos calcular a média aritmética e a média geométrica:

- Média aritmética:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{16 + 25 + 49}{3} = \frac{90}{3} = 30$$

- Média geométrica:

$$\overline{g} = \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3} = \sqrt[3]{16 \cdot 25 \cdot 49} \cong 26{,}96$$

b) Veja, agora, as diferentes maneiras que podemos utilizar para calcular a média aritmética $\overline{x}$ da seguinte coleção de 100 dados:

66	63	69	69	68	68	68	65	64	64	71	75	67	67	68	67
67	66	65	66	61	68	68	69	67	60	65	68	67	71	71	70
74	72	66	63	62	61	61	69	69	74	69	69	69	67	66	67
63	66	67	68	68	67	66	64	64	68	68	69	69	67	67	66
64	71	72	73	72	66	66	65	68	65	68	64	68	64	68	61
64	64	65	70	70	70	70	70	71	68	70	67	68	69	70	71
70	69	67	67												

- Podemos obter a média somando um a um os valores da coleção e, em seguida, dividindo a soma por 100:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{100} x_i}{100} \rightarrow \overline{x} = \frac{6\,738}{100} \rightarrow \overline{x} = 67{,}38$$

Nesse caso, obtivemos o valor $\sum x_i$ somando um a um todos os valores, um processo pouco prático para tabelas extensas.

- Para facilitar o cálculo da média $\overline{x}$, para uma coleção x_i (i = 1, 2, ..., n) de **n** valores, podemos agrupar os dados em uma tabela de frequências para os **n** valores diferentes e multiplicar cada valor por sua frequência, da seguinte forma:

x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$
x_1	f_1	$x_1 \cdot f_1$
x_2	f_2	$x_2 \cdot f_2$
...	...	...
x_n	f_n	$x_2 \cdot f_2$

Fazendo isso, obteremos a média aritmética fazendo:

$$\overline{p} = \frac{p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + \ldots p_nx_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \ldots p_n}$$

A partir dos dados da tabela anterior, ordenamos os valores do menor para o maior e contamos a frequência f em que cada um aparece:

x^i	f^i	$x^i \cdot f^i$
60	1	60
61	4	244
62	1	62
63	3	189
64	9	576
65	6	390
66	10	660
67	15	1 005
68	17	1 156
69	12	828
70	9	630
71	6	426
72	3	216
73	1	73
74	2	148
75	1	75
Totais	100	6738

Assim, a média aritmética será:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot f_i}{100} \rightarrow \overline{x} = \frac{6\,738}{100} \rightarrow \overline{x} = 67{,}38$$

c) Suponha agora a seguinte situação: em uma turma com 20 rapazes e 30 moças, foi realizada uma prova; a média das moças foi 8 e a dos rapazes, 7. Qual foi a média da turma?

Observe que na turma existem mais moças do que rapazes. Assim, o **peso** da média das moças é maior que a dos rapazes. A média da turma será, portanto, a **média ponderada** entre as médias das moças, com peso 30 e a dos rapazes com peso 20.

$$\overline{p} = \frac{20 \cdot 8 + 30 \cdot 7}{50} = \frac{160 + 210}{50} = 7{,}4$$

Outra forma conveniente e prática de calcular a média aritmética para coleções extensas de valores é a partir da distribuição de frequências.

Para determinar a média a partir de uma distribuição de frequências, relativa a uma coleção x_i (i = 1, 2, 3, ..., n) de n dados, procedemos da seguinte forma:

- determinamos o ponto médio $\mathbf{x_i}$ de cada um dos **k** intervalos de classe;
- multiplicamos cada $\mathbf{x_i}$ pela frequência de classe f_i correspondente.

A partir desse processo, obtemos a tabela:

Classe	Ponto médio	Frequência	Produto
$x_a \vdash x_b$	$x_i = \dfrac{x_a + x_b}{2}$	f_i	$x_i \cdot f_i$

$$\sum f_i = n \ \sum x_i \cdot f_i$$

A média $\overline{x}$ será dada por:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot f_i}{n}$$

a) Veja o cálculo da média aritmética de uma coleção de 80 dados, representada pela seguinte distribuição de frequências:

Classe	f_i
$2 \vdash 14$	13
$14 \vdash 26$	9
$26 \vdash 38$	8
$38 \vdash 50$	23
$50 \vdash 62$	15
$62 \vdash 74$	10
$74 \vdash 86$	2
$\sum f_i$	80

Montamos uma nova tabela com os pontos médios x_i dos intervalos de classe e os produtos $x_i \cdot f_i$. Note que k (número de classes) é 7.

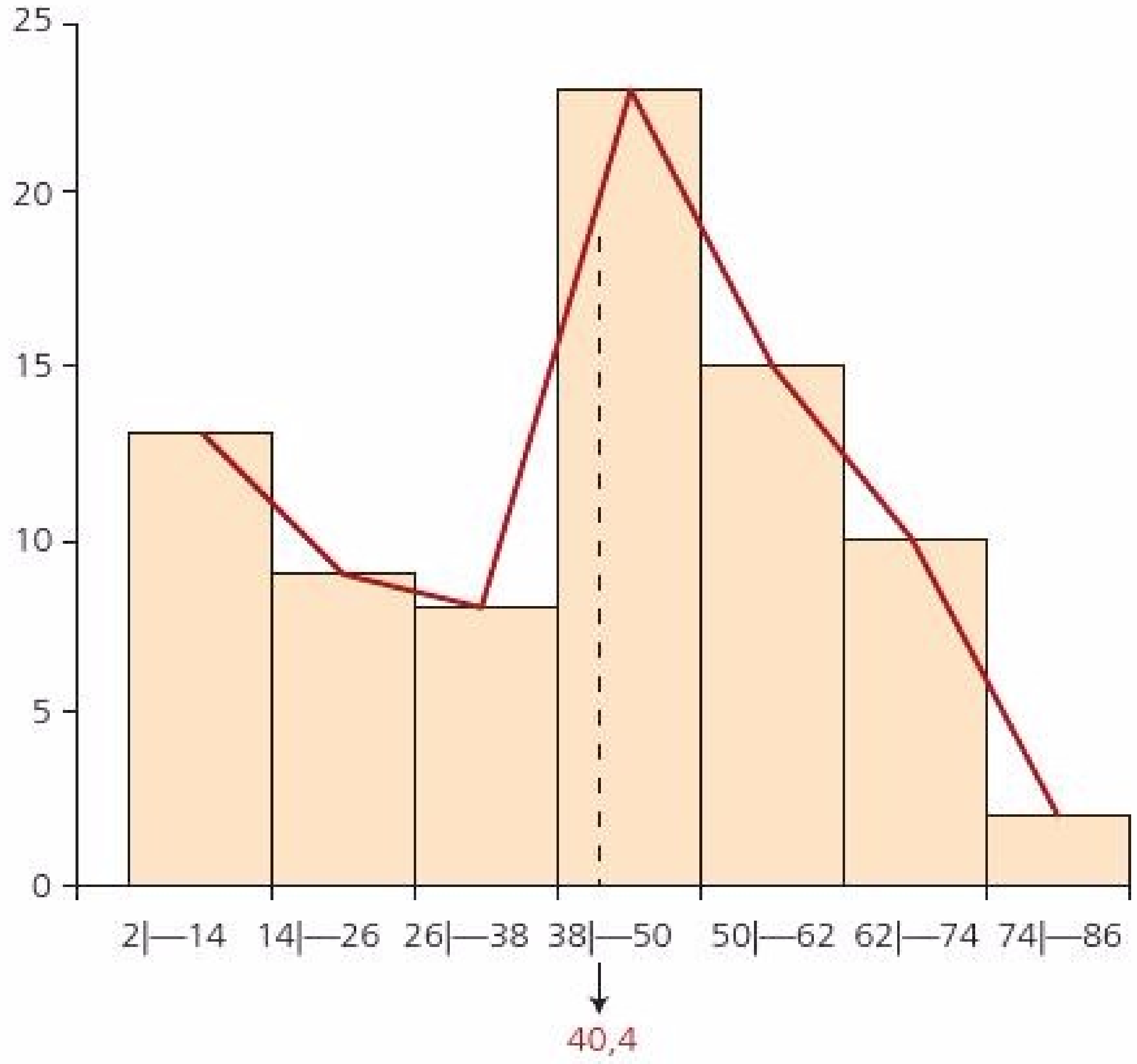
Classe	x_i	f_i	$x_k \cdot f_k$
2 ⊢ 14	8	13	104
14 ⊢ 26	20	9	180
26 ⊢ 38	32	8	256
38 ⊢ 50	44	23	1 012
50 ⊢ 62	56	15	840
62 ⊢ 74	68	10	680
74 ⊢ 86	80	2	160

$\sum x_k f_k = 3\,232$

Assim:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{7} x_i \cdot f_i}{80} \rightarrow \overline{x} = \frac{3\,232}{80} = 40{,}4$$

Podemos também obter o histograma e o polígono de frequências para a distribuição, posicionando a média



Observe que o posicionamento da média $\overline{x}$ indica sua característica de medida central.

Atividades

9. Quatro competidores demoraram, respectivamente 2min 15s, 1min 45s, 2min 25s, 1min 55s para cumprirem uma prova de atletismo. Qual foi a média em minutos e segundos desses competidores?
$\bar{x}$ = 2 min e 5 s

10. Numa população, a razão do número de mulheres para o de homens é de 11 para 10. A idade média das mulheres é 34 e a idade média dos homens é 32. Qual é, aproximadamente, a idade média da população?
Interpretar textos 33 anos

11. Uma empresa concedeu aumento salarial para seus funcionários nos meses de março e abril. A taxa utilizada em março foi de 1,5% e a de abril foi de 2,3%. Qual foi a taxa média de aumento mensal nesse bimestre? $\bar{x}$ = 1,91%

12. Calcule a média aritmética dos números: $\bar{x} = \frac{87}{40}$

$$\frac{3}{5}, \frac{13}{4} \text{ e } \frac{1}{2}.$$

13. Uma emissora de televisão distribui semanalmente um prêmio aos ganhadores de uma gincana. Nas últimas três semanas ela distribuiu um total de R$ 1 000,00 por semana, em prêmios, para 3, 2 e 5 ganhadores, respectivamente. Calcule o prêmio médio desses contemplados. $\bar{x}$ = 300 reais

14. Em uma turma de 40 alunos foi realizada uma pesquisa quanto ao número de irmãos. A lista do número de irmãos de cada aluno é a seguinte: $\bar{x}$ = 1,3

1	1	2	0	2	2	1	0	2	2
2	0	2	4	3	0	0	3	2	1
4	1	1	1	2	3	1	1	2	0
2	2	2	1	0	1	0	0	1	1

Calcule o número médio de irmãos dos alunos dessa turma.

15. Calcule a média aritmética para os seguintes valores:

a)

x_1	0	1	2	3	4	5
f_i	6	12	14	5	2	1

$\bar{x}$ = 6,6

b)

Classe	Frequência
1,50 ⊢ 1,56	6
1,56 ⊢ 1,62	10
1,62 ⊢ 1,68	12
1,68 ⊢ 1,74	8
1,74 ⊢ 1,80	4
Σf_i	40

$\bar{x}$ = 8

16. Cem candidatos fizeram uma prova concorrendo a uma bolsa de estudos. Foram atribuídas notas de zero a cem e os resultados foram os seguintes:

43	53	25	21	50	66	26	23	49	76
28	82	6	60	73	40	50	72	55	41
12	47	90	37	27	5	54	32	68	11
33	20	76	60	88	38	47	60	20	56
26	26	17	64	50	86	43	45	60	53
24	9	4	70	60	56	18	76	5	37
65	38	27	16	43	19	3	68	34	40
32	50	68	46	37	36	62	34	70	14
50	63	44	38	92	28	51	42	22	52
37	72	16	55	13	63	98	12	18	33

Agrupe esses dados em dez classes e calcule a média para a distribuição de frequências.

Para estudar

Professor, oriente os alunos para organizarem as resoluções dos exercícios e utilizarem materiais adequados nas construções (régua, compasso, esquadro quando necessário).

17. O quadro ao lado corresponde ao número de faltas às aulas de Matemática, relativas ao primeiro bimestre de 2014, de uma sala de 1ª série do Ensino Médio.

5	8	10	4	2	3	2	3	2	10
2	2	3	5	7	1	12	25	5	3
2	5	3	3	19	9	5	4	1	2
6	14	1	3	6	18	2	4	2	8

a) Faça a distribuição das frequências (k = 5)

b) Construa o histograma e o polígono de frequências.

18. Os dados abaixo fornecem o número de aparelhos eletrônicos de cada uma das residências da rua A.

8	12	4	6	5	12	9	4	8	10
10	9	12	10	6	8	7	9	7	10
7	10	6	10	16	10	8	7	13	8

a) Organize os dados em uma tabela de frequências.

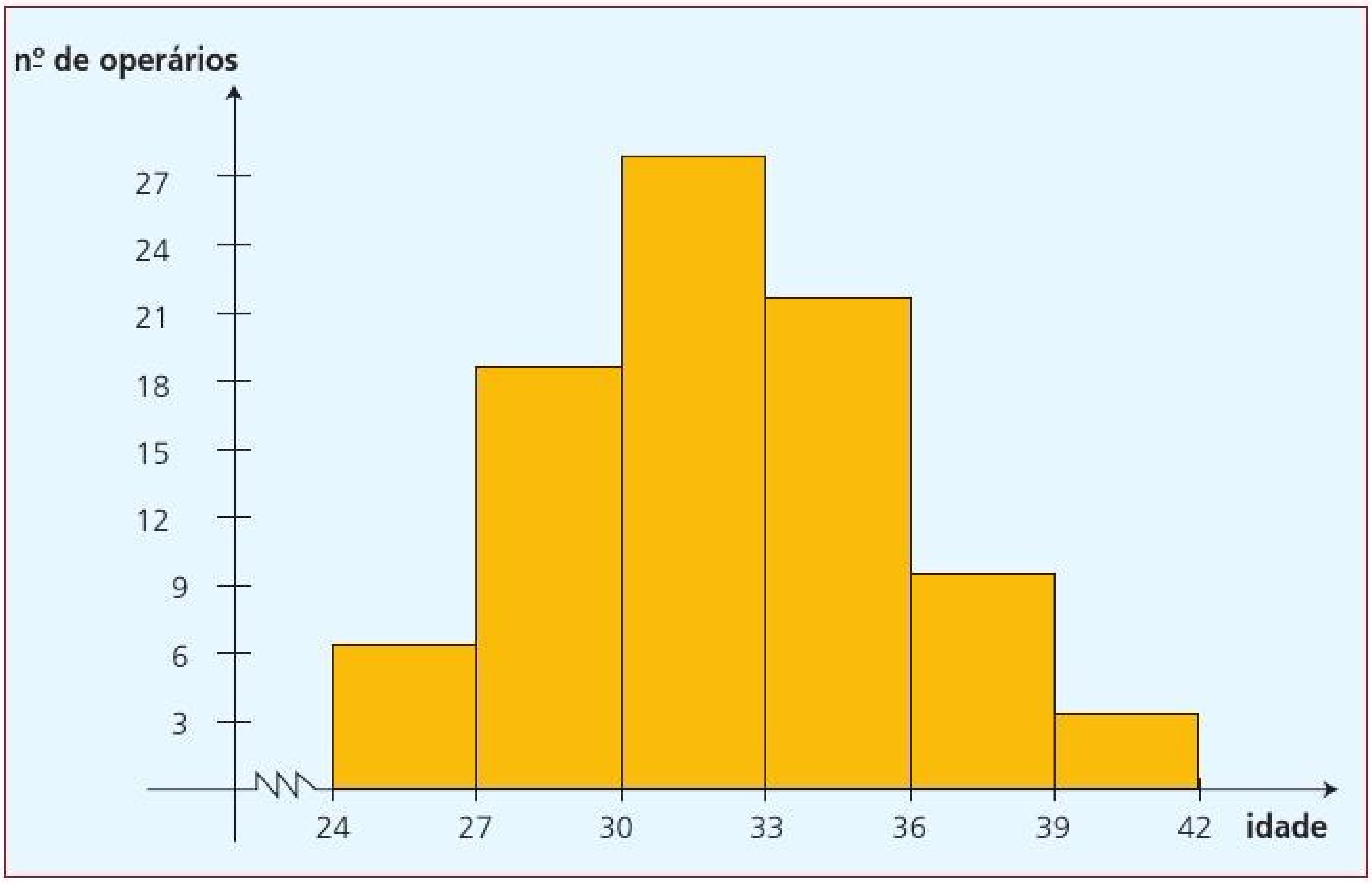
b) Quantas residências foram consultadas?

c) Quantas residências possuem 10 ou mais aparelhos?

d) Qual é a porcentagem correspondente às residências com menos de 8 aparelhos?

19. Observe o histograma que corresponde à idade dos funcionários de uma empresa e responda:

Interpretar gráficos



a) Qual é o intervalo de maior frequência? O que isso representa?

b) Quantos funcionários essa empresa tem?

c) Qual é a porcentagem de funcionários com 36 anos ou mais?

20. Calcule a média dos seguintes dados:

3	2	6	4	3	2	3	1	2	4	3

Cálulo mental

21. As alturas em metros dos membros de uma família são: 1,80; 1,65; 1,50; 1,73; 0,90 e 1,55. Determine a média dessas alturas.

22. A tabela abaixo representa o número de filhos de cada família pertencente a um clube esportivo.

Número de filhos	0	1	2	3	4	5	6	8
Frequência	3	7	15	9	7	4	3	2

Calcule a média dessa distribuição.

23. Calcule a média da distribuição das frequências abaixo:

Classe	f_i
0 |— 4	3
4 |— 8	6
8 |— 12	2
12 |— 16	5
16 |— 20	4
20 |— 24	8
24 |— 28	10
28 |— 32	5
32 |— 36	7

24. Dados os valores abaixo, calcule a média:

40	55	55	60	60	60	65	75	75	80	90

25. Foi anotado o número de unidades de um produto de beleza vendidas em um período de 40 dias na loja Fique Bela:

64	61	65	43	45	54	51	74
30	100	91	75	78	68	80	69
72	27	40	93	99	94	78	72
59	78	95	62	42	96	100	95
81	84	78	103	98	60	84	91

a) Faça a distribuição de frequências.

b) Faça o histograma.

26. Uma pesquisa efetuada entre 30 casais, sobre a quantidade de filhos, apresentou os seguintes dados:

1	3	1	2	2	1	4	2	3	5	3	6	4	0	3
2	3	7	4	2	4	1	6	5	3	8	5	4	3	4

a) Faça a distribuição de frequências.

b) Calcule o número médio de filhos.

27. Num grupo de amigos as idades são:

18	12	17	13	13	15	13	15	16	14

Calcule a média das idades.

28. Um professor aplicou uma prova em uma turma de 35 alunos e montou a seguinte tabela de frequências:

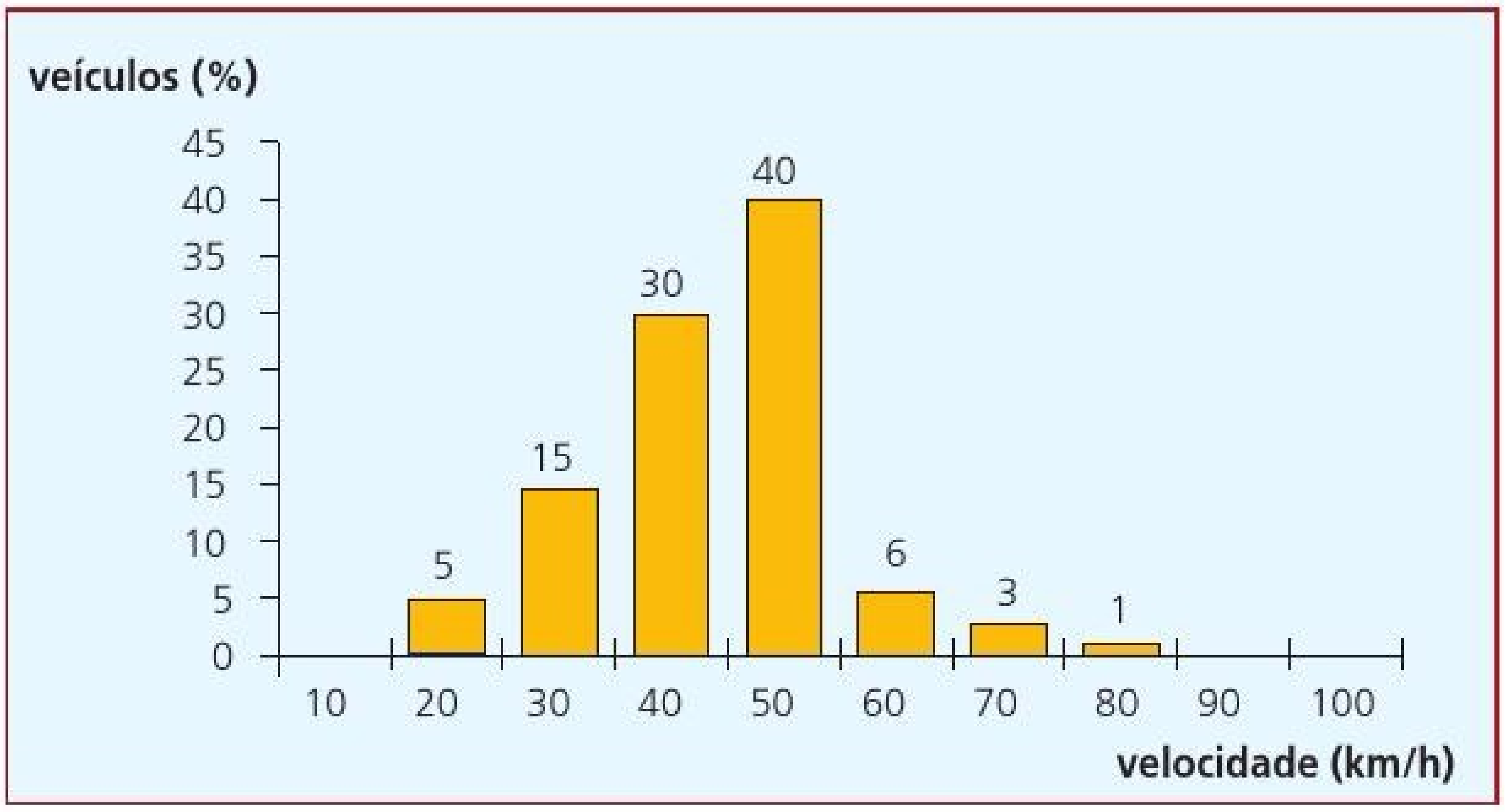
Nota	Número de alunos
3	2
4	6
5	5
6	8
7	9
8	5

Calcule a média.

29. Dada a distribuição de frequências abaixo, construa o histograma e o polígono de frequências. Posicione a média $\overline{x}$.

Classe	f_i
0 |— 10	2
10 |— 20	3
20 |— 30	7
30 |— 40	3
40 |— 50	12
50 |— 60	18
60 |— 70	15
70 |— 80	13
80 |— 90	7
90 |— 100	5

30. Um sistema de radar é programado para registrar automaticamente a velocidade de todos os veículos que trafegam por uma avenida, onde passam em média 300 veículos por hora, sendo 55 km/h a máxima velocidade permitida. Um levantamento estatístico dos registros do radar permitiu a elaboração da distribuição percentual de veículos de acordo com sua velocidade aproximada.



A velocidade média dos veículos que trafegam nessa avenida é de:

a) 35 km/h

b) 44 km/h

c) 55 km/h

d) 76 km/h

e) 85 km/h

Após estudarmos as noções básics de Estatística, vamo estudar as "chances", que chamamos de **probabilidade**. Esse estudo sempre chamou a atenção de matemáticos, alguns deles, por incrível que pareça, interessados, também, em ganhar algum dinheiro por "dominar" as regras de probabilidades.

Partindo do evento aleatório mais conhecido por todos, que é o lançamento de uma moeda, vamos dar como intuitiva a noção de probabilidade.

Espaço amostral e evento

Espaço amostral (E) de um experimento aleatório é o conjunto dos resultados possíveis para aquele experimento.

Professor, é interessante que o aluno tenha em mãos, nessa aula, dados e moedas para compor o espaço amostral em diversas situações propostas, como: no lançamento de dois dados, de duas moedas, de um dado e uma moeda e outros.

Espaço amostral

$$E = \{r_1, r_2, r_3, ..., r_n\}$$

$r_1, r_2, r_3, ..., r_n$ são os resultados possíveis

$$\left.\begin{array}{l} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ \vdots \\ r_n \end{array}\right\} \text{resultados possíveis}$$

Veja alguns exemplos de espaços amostrais:

a) Quando lançamos uma moeda, temos duas possibilidades:
   – obter cara;
   – obter coroa.
   Logo, o espaço amostral do experimento será:

Mariana Berdoldi

E = {cara, coroa}

b) Jogando um dado ideal e anotando a face voltada para cima, teremos o seguinte espaço amostral:

Yuka26/PhotoXpress

E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Qualquer subconjunto do espaço amostral chama-se **evento**.

Probabilidade de um evento

A probabilidade de um evento A representa a "chance" de ocorrer um evento A. O valor p(A) é igual ao número de elementos de A, dividido pelo número de elementos do espaço amostral E.

$$\mathbf{p(A)} = \frac{\text{número de elementos de A}}{\text{número de elementos de E}} = \frac{n(A)}{n(E)}$$

p(A): probabilidade de um evento A.

Como $A \subset E$, temos $n(A) \leq n(E)$. Logo:

$$\mathbf{0 \leq p(A) \leq 1}$$

Em particular, se p(A) = 0, A será chamado **evento impossível** e, se p(A) = 1, A será chamado **evento certo**.

Acompanhe alguns exemplos do cálculo da probabilidade de um evento.

a) Qual é o espaço amostral quando lançamos uma moeda duas vezes seguidas? Escreva dois eventos possíveis nesse espaço amostral.

E = {(cara, cara); (cara, coroa); (coroa, cara); (coroa, coroa)}

São exemplos de eventos:

– obter 2 caras: A = {(cara, cara)}

– obter ao menos 1 cara: B {(cara, cara); (cara, coroa); (coroa, cara)}

b) Calcule a probabilidade de, jogando um dado ideal, obter um número maior que 4:

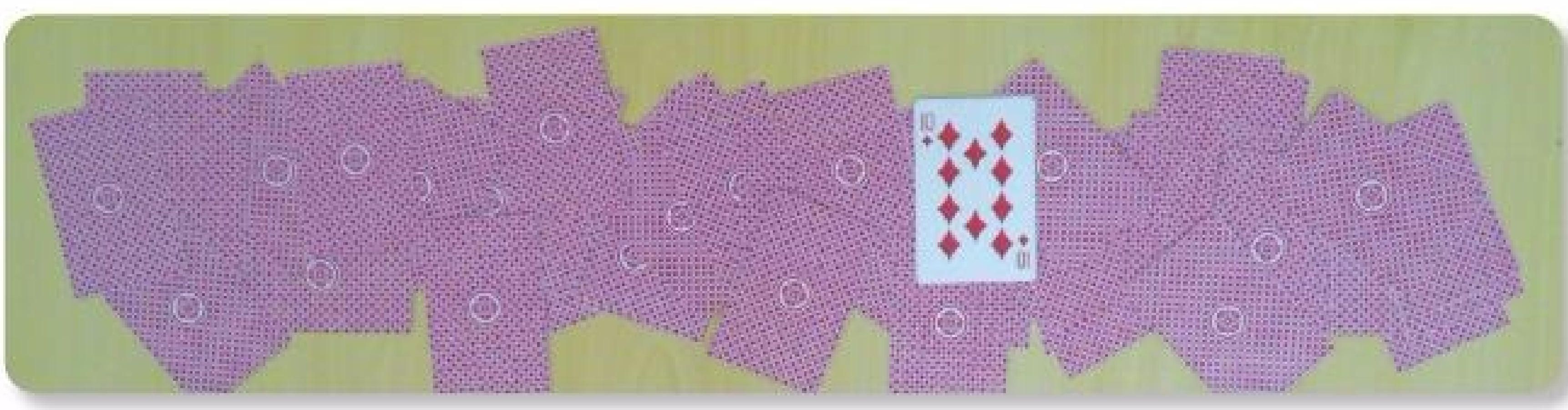
Espaço amostral: E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Evento: A = {5, 6}

$$\left.\begin{array}{l} n(A) = 2 \\ n(E) = 6 \end{array}\right\} \rightarrow p(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

O uso de árvores de possibilidades pode ajudar a ilustrar o raciocínio probabilístico. Utilize-a se achar conveniente.

c) Dispondo de um baralho completo, podemos determinar a probabilidade de retirar ao acaso uma carta de ouros.



Mariana Berdoldi


Mariana Berdoldi

Um baralho é formado por 52 cartas, divididas em 4 naipes: ouros, copas, paus e espadas, sendo 13 cartas de cada naipe.

$$\left.\begin{array}{l} n(E) = 52 \\ n(A) = 13 \end{array}\right\} \rightarrow P(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4} \rightarrow p(A) = 0,25$$

Podemos também expressar p(A) em porcentagem:

$$p(A) = 0,25 \rightarrow p(A) = 25\%.$$

d) Vamos calcular a probabilidade de retirar 1 bola vermelha de uma urna contendo 3 bolas brancas, 2 vermelhas e 5 verdes:

$$\left.\begin{array}{l} \text{3 brancas} \\ \text{2 vermelhas} \\ \text{5 verdes} \end{array}\right\} \rightarrow n(E) = 10 \text{ e } n(A) = 2$$

$$p(A) = \frac{2}{10} \rightarrow p(A) = \frac{1}{5} \text{ ou } p(A) = 20\%$$

e) Suponha que dois dados são lançados simultaneamente. Qual a probabilidade de a soma das faces voltadas para cima ser 12?

Escrevendo os pares ordenados onde as coordenadas são as faces do dado, obtemos o espaço amostral:

$$\mathbf{E} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$$

Note que, para cada face de um dado, temos 6 faces possíveis no outro. Logo, o número de elementos do espaço amostral é n(E) = 36.

O evento A = {(6, 6)} é o único em que a soma das faces é 12. Portanto n(A) = 1.

Assim, a probabilidade que queremos calcular é $\frac{1}{36}$.

Atividades

31. Lançando-se um dado ideal, qual a probabilidade de se obter um número menor que 4? $\frac{1}{2}$

32. Retirando-se 1 carta ao acaso de um baralho de 52 cartas. Determine a probabilidade de ser:

a) uma dama; $\frac{1}{13}$

b) uma dama ou um rei. $\frac{2}{13}$

33. Qual é a probabilidade de sorteio de 1 bola que não seja branca em uma urna que contém 6 bolas brancas, 2 azuis e 4 amarelas? $\frac{1}{2}$

34. Em um avião viajam 40 brasileiros, 20 japoneses, 8 americanos e 3 árabes. Escolhendo ao acaso um passageiro, determine a probabilidade de ele: Total 71.

a) ser árabe; $\frac{3}{71}$

b) não ser árabe; $\frac{68}{71}$

c) ser japonês ou americano; $\frac{28}{71}$

d) ser argentino. zero

35. Em uma urna há 20 bolas, numeradas de 1 a 20. Retira-se 1 bola ao acaso. Calcule a probabilidade de seu número ser:
20 bolas de 1 a 20.

a) ímpar; $\frac{1}{2}$

b) múltiplo de 3; $\frac{3}{10}$

c) divisível por 2 e 3; $\frac{3}{20}$

d) múltiplo de 5 e 7. zero

36. Lançando-se 2 dados simultaneamente, qual a chance de ocorrerem números iguais? $\frac{1}{36}$

37. Jogando-se 2 dados simultaneamente, qual a probabilidade de se obter um número par na soma das faces? $\frac{1}{2}$

38. São lançadas 3 moedas simultaneamente. Qual a chance de se obterem 3 caras? $\frac{1}{8}$

39. Calcule a probabilidade de se retirar 1 bola vermelha de uma urna contendo 3 bolas brancas, 2 vermelhas e 5 verdes.
P(vermelha) = $\frac{1}{5}$

40. Um número é escolhido ao acaso entre os 100 inteiros, de 1 a 100. Qual é a probabilidade de o número ser múltiplo de 11? $\frac{9}{100}$

Para estudar

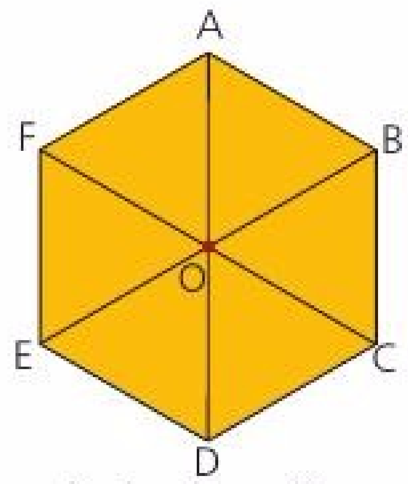
41. Num sorteio de um número natural entre 1 e 50 calcule as probabilidades de:

a) ocorrer um número divisível por 10;
b) ocorrer um número divisível por 5;
c) ocorrer um múltiplo de 50;
d) ocorrer um número par.

42. No lançamento de dois dados, qual a probabilidade de se obter número de pontos iguais em ambos os dados?

43. No lançamento de duas moedas, qual é a probabilidade de se obter pelo menos uma cara?

44. Considere o hexágono regular ao lado e responda:



a) Quantas são as diagonais desse polígono?
b) Quantas dessas diagonais passam pelo centro do polígono?
c) Qual a probabilidade de, tomando-se uma das diagonais ao acaso, ela passar pelo centro?

45. Numa fábrica de peças para automóveis, de um lote com 250 peças, 20% apresentaram defeito.

a) Sendo retirada uma peça desse lote, qual a probabilidade de ela apresentar defeito?
b) Qual a probabilidade de ela não apresentar defeito?

46. A probabilidade de você ganhar uma motocicleta em uma rifa de 200 números da qual você comprou oito números é:

a) $\frac{2}{5}$ b) $\frac{1}{25}$ c) $\frac{1}{50}$ d) $\frac{1}{10}$ e) $\frac{1}{30}$

47. O número da placa de um carro é par. Qual é a probabilidade de que o algarismo das unidades seja 2?

48. Escolhem-se ao acaso dois números naturais distintos, de 1 a 20. Qual a probabilidade de que o produto dos números escolhidos seja ímpar?

49. Qual a probabilidade de, tomados ao acaso três vértices de um quadrado e uma diagonal o triângulo formado ser um triângulo retângulo isósceles?

50. Retira-se ao acaso uma carta de um baralho de 52 cartas. Determine a probabilidade dessa carta:

a) ser preta; b) ser figura; c) ser um ás.

51. Com os algarismos 2, 3, 4 e 5, são formados números de 3 algarismos distintos. Calcule a probabilidade de, escolhendo-se ao acaso um desses números:

a) ele ser par.
b) ele ser impar.

52. Uma sacola contém 7 bolas brancas e 3 azuis, Qual a probabilidade de:

a) Retirarmos uma bola azul?
b) Após retirarmos uma bola branca, logo em seguida, retirarmos outra branca?
c) Após retirarmos uma bola azul, logo em seguida retirarmos outra azul?

53. Um restaurante oferece refeições que são servidas com uma entrada, um prato principal e uma sobremesa. Observe o quadro a seguir com as opções do restaurante.

Entrada	Prato principal	Sobremesa
• canja • salada	• feijoada • mocotó • carne com batatas	• sorvete • bolo

Responda:
Qual é a probabilidade de escolher uma refeição e comer feijoada como prato principal?

Resolução das atividades

1. a) 150 atletas

b) 32 atletas

c) 60 atletas

2.

Altura	Frequência
163	3
164	5
165	4
166	4
167	0
168	2
169	3
170	5
171	3
172	1

$\Sigma = 30$

3.

acidentes	Frequência
3	1
4	4
5	7
6	15
7	16
8	5
9	11
10	9
11	4
12	4
13	6
14	2
15	2
16	1
17	4
18	3
19	3
20	
28	1
31	1
33	1

Acidentes	Frequência
3 ⊢ 6	12
6 ⊢ 9	36
9 ⊢ 12	24
12 ⊢ 15	12
15 ⊢ 18	7
18 ⊢ 21	6
21 ⊢ 24	0
24 ⊢ 27	0
27 ⊢ 30	1
30 ⊢ 33	1

4.

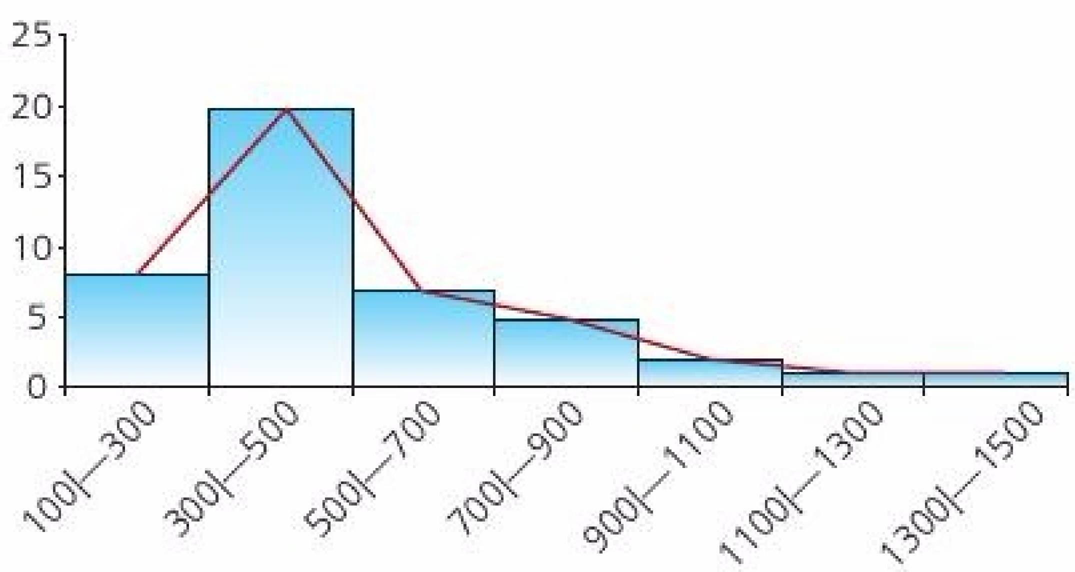
Pesos	Frequência
42 ⊢ 44	3
44 ⊢ 46	7
46 ⊢ 48	12
48 ⊢ 50	17
50 ⊢ 52	19
52 ⊢ 54	18
54 ⊢ 56	15
56 ⊢ 58	7
58 ⊢ 60	2

5. $R = 59 - 42 \rightarrow R = 17$

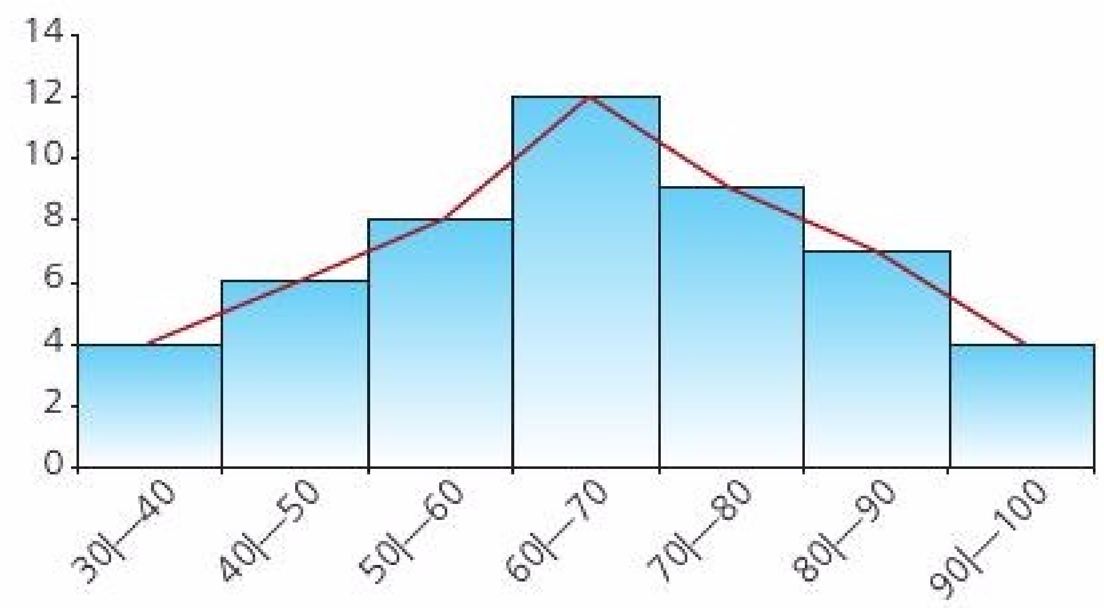
$K = 2 \qquad h = 1{,}7 \rightarrow h = 2$

42 ⊢ 44	4
44 ⊢ 46	7
46 ⊢ 48	12
48 ⊢ 50	18
50 ⊢ 52	19
52 ⊢ 54	17
54 ⊢ 56	14
56 ⊢ 58	7
58 ⊢ 60	2

6.



7.



8. a) $30 \vdash 40$
b) 52 alunos
c) $10 \vdash 20$ e $50 \vdash 60$

9. $\overline{x} = 2$ min e 5 min

10. $\dfrac{M}{H} = \dfrac{11}{10}$ (quantidade)
$\overline{M} = 34$ (idade)
$\overline{H} = 32$
idade média da população
$\dfrac{11 \cdot 34 + 10 \cdot 32}{21} = 33$ anos

11. $\overline{x} = 1{,}91\%$

12. $\overline{x} = \dfrac{87}{40}$

13. $\overline{x} = 300$ reais

14. a) $\overline{x} = 6{,}6$
b) $\overline{x} = 8$

15. $\overline{x} = 1{,}3$

16.

Nota	Frequência
$0 \vdash 10$	6
$10 \vdash 20$	11
$20 \vdash 30$	14
$30 \vdash 40$	14
$40 \vdash 50$	13
$50 \vdash 60$	14
$60 \vdash 70$	14
$70 \vdash 80$	8
$80 \vdash 90$	3
$90 \vdash 100$	3
	100

i	nota	f_i	x_i	$x_i f_i$
1	$0 \vdash 10$	6	5	30
2	$10 \vdash 20$	11	15	165
3	$20 \vdash 30$	14	25	350
4	$30 \vdash 40$	14	35	490
5	$40 \vdash 50$	13	45	585
6	$50 \vdash 60$	14	55	770
7	$60 \vdash 70$	14	65	910
8	$70 \vdash 80$	8	75	600
9	$80 \vdash 90$	3	85	255
10	$90 \vdash 100$	3	95	285
		100		4440

$\overline{x} = \dfrac{4440}{100} = 44{,}40$

31. $P = \dfrac{1}{2}$

32. a) $P = \dfrac{4}{52} = \dfrac{1}{13}$ b) $P = \dfrac{8}{52} = \dfrac{2}{13}$

33. Bolas: 6 brancas, 2 azuis e 4 amarelas.
1 bola não branca
$P = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2}$

34. 40 brasileiros, 20 japoneses, 3 americanos e 3 árabes.
Total 71.
a) $P = \dfrac{3}{71}$ c) $P = \dfrac{28}{71}$
b) $P = \dfrac{68}{71}$ d) zero

35. 20 bolas de 1 a 20.
a) $P = \dfrac{10}{20} = \dfrac{1}{2}$ c) $P = \dfrac{3}{20}$
b) $P = \dfrac{6}{20} = \dfrac{3}{10}$ d) zero

36. $P = \dfrac{1}{36}$

37. $P = \dfrac{18}{36} = \dfrac{1}{2}$

38. $P = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{8}$

39. 3 brancas, 2 vermelhas, 5 verdes
P vermelha $= \dfrac{2}{10} = \dfrac{1}{5}$

40. P múltiplo de 11 $= \dfrac{9}{100}$

Respostas da seção Para estudar

Introdução à Estatística

17. Construção no caderno.

18. b) 30 residências
c) 11 residências
d) 30%

19. a) $30 \vdash 33$
b) 84 funcionários
c) 14,3%

20. $\bar{x} = 3$

21. $\bar{x} = 1{,}52$ m

22. $\bar{x} = 2{,}92$ filhos

23. $\bar{x} = 20{,}57$

24. $\bar{x} = 65$

25. Construção no caderno.

26. $\bar{x} = 3$

27. $\bar{x} = \overline{14{,}6}$

28. $\bar{x} = 5{,}9$

29. Construção no caderno.

30. (b) 44 km/h

Noções de probalidade

41. a) 10%
b) 20%
c) 2%
d) $\frac{1}{2}$

42. $\frac{1}{36}$

43. $\frac{2}{3}$

44. a) 9
b) 3
c) $\frac{1}{3}$

55. a) 20%
b) 80%

46. (a) $\frac{1}{25}$

47. $\frac{1}{2}$

48. $\frac{1}{25}$

49. 100%

50. a) $\frac{1}{26}$
b) $\frac{3}{13}$
c) $\frac{1}{13}$

51. a) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{1}{2}$

52. a) $\frac{3}{10}$
b) $\frac{1}{3}$
c) $\frac{2}{9}$

53. $P(A) = \frac{1}{3}$

Indicações de leituras complementares

A seguir, apresentamos uma relação de títulos indicados para sua leitura. Neles, você irá encontrar interessantes relações entre a Matemática e seu cotidiano, além da revelação da beleza presente nas formas geométricas e das divertidas atividades e jogos que podem ser desenvolvidos utilizando os conceitos matemáticos. Tudo isso ajudará bastante no desenvolvimento de seu raciocínio lógico.

BARI, Atílio. *O tesouro do pirata pão-duro*. São Paulo: Scipione, 2002.

Coleção *O Prazer da Matemática*, de vários autores (Lisboa: Gradiva)

GUELLI, O. *O mágico da Matemática*. São Paulo: Atual, 1997.

GUELLI, Oscar. *A invenção dos números*. São Paulo: Ática, 1998.

IMENES, Luis Márcio Pereira et al. Coleção *Pra que Serve a Matemática?* São Paulo: Atual, 1990.

- *Álgebra*
- *Ângulos*
- *Equação do 2° grau*
- *Frações e números decimais*
- *Estatística*
- *Geometria*
- *Números negativos*
- *Proporções*
- *Semelhanças*

IMENES, Luis Márcio Pereira et al. Coleção *Vivendo a Matemática*. São Paulo: Scipione, 1990.

- *Brincando com números*
- *Geometria dos mosaicos*
- *Descobrindo o teorema de Pitágoras*
- *Medindo comprimentos*
- *Problemas curiosos*
- *Polígonos, centopeias e outros bichos*
- *Geometria das dobraduras*
- *Lógica? É lógico*
- *Os poliedros de Platão e os dedos da mão*
- *Semelhança não é mera coincidência*
- *Os números na história da civilização*
- *A numeração indo-arábica*
- *Par ou ímpar?*

MACHADO, Nilson José. *A Geometria na sua vida*. São Paulo: Ática, 2003.

MALBA Tahan. *As maravilhas da Matemática*. Rio de Janeiro: Bloch, 1987.

MALBA Tahan. *Matemática divertida e curiosa*. Rio de Janeiro: Record, 2008.

MALBA Tahan. *O homem que calculava*. Rio de Janeiro: Record, 2008.

OBERMAIR, Gilberto. *Quebra-cabeças, truques e jogos com palitos de fósforo*. Rio de Janeiro: Ediouro. 2000.

RAMOS, Luzia Faraco. *Frações sem mistério*. São Paulo: Ática, 2001.

ROSA NETO, Ernesto. *As mil e uma equações*. São Paulo. Ática, 2001.

TEIXEIRA, Martins Rodrigues. *Quem inventou o dinheiro?* São Paulo: FTD, 1998.

TEIXEIRA, Martins Rodrigues. *Uma aventura na mata - frações*. São Paulo: FTD, 1997.

TOWNSEND, Charles. *O livro dos desafios*, v. 1. Rio de Janeiro: Ediouro, 2004.

TRAMBAIOLLI NETO, Egídio. *A profecia*. São Paulo: FTD, 1997.

TRAMBAIOLLI NETO, Egídio. *A revelação*. São Paulo: FTD, 1997.

Referências Bibliográficas

BAIFANG, Liu. *Puzzles com fósforos*. Trad. Jorge Casimiro. Lisboa: Gradiva, 1995. (O prazer da Matemática).

BASSANEZI, R. C. *Ensino-Aprendizagem com modelagem matemática. São Paulo: Contexto, 2002.*

BERLOQUIN, Pierre. *100 jogos geométricos*. Lisboa: Gradiva, 2001.

BERLOQUIN, Pierre. *100 jogos numéricos*. Lisboa: Gradiva, 2000.

BICUDO, M. Aparecida Viggiani (Org.). *Educação matemática*. São Paulo: Moraes, 1987.

BIEMBENGUT, M. S. et al. *Ornamentos e Criatividade : uma alternativa para ensinar geometria* plana. Blumenau: Ed. da FURB, 1996.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. *Modelagem matemática no ensino*. São Paulo: Contexto, 2000.

BLOOM, Benjamin S. et al. *Manual de avaliação formativa e somativa do aprendizado escolar.* São Paulo: Pioneira, 1983.

BORIN, Júlia. *Jogos e resolução de problemas: uma estratégia para as aulas de Matemática*. São Paulo: CAEM--USP, 1995. v. 6.

BOYER, Carl Benjamin. *História da Matemática*. 2. ed. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

BROUSSEAU,G. *Introdução ao estudo das situações didáticas – Conteúdos e métodos de ensino. São Paulo*: Ática, 2008.

BRUNER, Jerome S. *O processo da educação*. 4. ed. Trad. Lobo L. de Oliveira. São Paulo: Nacional, 1974.

CAGGIANO, Ângela. et al. *Problema não é mais problema*. São Paulo: FTD, 1996. v. 4.

CAPRA, Frejot. *O ponto de mutação: a ciência, a sociedade e a cultura emergente*. São Paulo: Cultrix, 1982.

CARAÇA, Bento de Jesus. *Conceitos fundamentais da matemática*. Lisboa: Gradiva, 1998.

CARDOSO, Virgínia Cardia. *Materiais didáticos para as quatro operações*. São Paulo: CAEM-USP, 1992. v. 2.

CARVALHO, F. et al. *Por que Baskara? História & Educação Matemática*, v. 2, n. 2. Rio Claro, 2002.

CARVALHO, M.C.C.S. *Padrões Numéricos e funções*. São Paulo: Moderna, 1998.

CENTURIÓN, Marília. *Conteúdo e metodologia da Matemática: números e operações*. São Paulo: Scipione, 1994.

COLE, K. C. *O universo e a xícara de chá – A matemática da verdade e da beleza*. Rio de Janeiro: Record, 2006.

COLEÇÃO Matemática: aprendendo e ensinando. São Paulo: Atual/Mir, 1997.

COXFORD, Arthur R; SHULTE, Albert P. (Orgs.). *As ideias da Álgebra*. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.

D'AMBROSIO, U. *Educação Matemática: da teoria à prática*. Campinas: Papirus, 1997.

D'AMBROSIO, Ubiratan. *Etnomatemática: elo entre tradição e modernidade*. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

D'AMBROSIO, Ubiratan. *Da realidade à ação: reflexões sobre educação e Matemática*. São Paulo/Campinas: Summus/Editora da Unicamp, 1986.

DANTE, L. R. *Didática da resolução de problemas de Matemática*. São Paulo: Ática, 1996.

DANTE, Luiz Roberto. *Didática da resolução de problemas de Matemática*. São Paulo: Ática, 1989.

DANTZIG, Tobias. *Número: a linguagem da ciência*. Trad. Sérgio Góes de Paula. Rio de Janeiro: Zahar, 1970.

DEMO, Pedro. *Avaliação qualitativa*. São Paulo: Cortez, 1987.

DEVLIN, Keith. *O gene da matemática*. Rio de Janeiro: Record, 2004.

DINIZ, M. Ignez de S. V.; SMOLE, K. C. S.. *O conceito de ângulo e o ensino de Geometria*. São Paulo: CAEM-USP, 1993. v. 3.

DINIZ, M. Ignez; SMOLE, K. C. S.; MILANI, Estela. *Jogos de Matemática de 6o a 9o ano*. São Paulo: Artmed, 2006. (Coleção Cadernos do Mathema)

ESTEVES, 0. P. *Testes, medidas e avaliação*. Rio de Janeiro: Arte & Indústria, 1972.

FRIEDMAN, Thomas L. *O mundo é plano*. Rio de Janeiro: Objetiva, 2007.

FRIEDMAN, Thomas L. *Quente, Plano e Lotado*. Os desafios e oportunidades de um novo mundo. Rio de Janeiro: Objetiva, 2007.

GARBI, Gilberto G. *A rainha das ciências – Um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática*. São Paulo: Livraria da Física, 2007.

GARDNER. H. *Inteligências múltiplas: a teoria na prática*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

GLADWELL, Malcolm. *Fora de série – Outliers*. São Paulo: Sextante, 2008

GLEISER, Marcelo. *A dança do Universo: dos Mitos de criação ao big-bang*. São Paulo: Companhia das Letras, 1997.

HAYDT, R. Cazaux. *Avaliação do processo ensino-aprendizagem*. São Paulo: Ática, 1988.

HOGBEN, Lancelot. *Maravilhas da Matemática*. 4. ed. Porto Alegre: Globo, 1956.

IFRAH, Georges. *Os números: a história de uma grande invenção*. 4. ed. Trad. Stella M. de Freitas Senra. São Paulo: Globo, 1992.

JACOBINI, O. R. *A modelação matemática aplicada no ensino de estatística em cursos de graduação*. Dissertação de mestrado. Rio Claro: IGCE/UNESP, 1999. 155p.

LIBÂNEO, José Carlos. *Didática*. São Paulo: Cortez, 1993.

LINDQUIST, Mary M.; SHULTE, Albert P. (Orgs.). *Aprendendo e ensinando Geometria*. São Paulo: Atual, 1994.

LUCKESI, C. *Avaliação na aprendizagem escolar*. São Paulo: Cortez, 1992.

LUCKESI, Cipriano Carlos. *O que é mesmo o ato de avaliar a aprendizagem?* Revista Pedagógica. Porto Alegre: Artmed, n. 12, fev.-abr. 2000.

MACHADO, Nilson José. *Matemática e língua materna*. São Paulo: Cortez, 1990.

MARTINS, J. S. *O trabalho com projetos de pesquisa: do ensino fundamental ao ensino médio*. Papirus, 2001.

MIORIM, M. Ângela. *Introdução à história da Educação Matemática*. São Paulo: Atual, 1998.

MLODINOW, Leonard. *A Janela de Euclides. - A história da geometria das linhas paralelas ao hiperespaço*, 2. ed. Geraçao Editorial, 2004.

MLODINOW, Leonard. *O andar do bêbado – Como o acaso determina nossas vidas. Rio de Janeiro:* Jorge Zahar, 2009.

MOREY, Bernadete. *Geometria e trigonometria na Índia e nos países árabes*. (Org. Sergio Nobre). Rio Claro: Unesp, 2003. (História da Matemática para professores)

OCHI, Fusako Hori. et al. *O uso de quadriculados no ensino de Geometria*. São Paulo: CAEM-USP, 1992. v. 1.

PERRENOUD, P. *Avaliação: da excelência à regulação das aprendizagens*. Porto Alegre: Artmed, 1999.

PIAGET, Jean. *Fazer e compreender Matemática*. São Paulo: Melhoramentos, 1978.

PIRES, C.M.C. *Currículos de Matemática: da organização linear à idéia de rede*. São Paulo: FTD, 2000.

POLYA, George. *A arte de resolver problemas*. Trad. Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

PONTE, João P. da; BROCADO, J; OLIVEIRA, H. *Investigações Matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

RIBEIRO, José Pedro Machado; DOMITE, M. do C. Santos; FERREIRA, Rogerio. *Etnomatemática: papel, valor e significado*. Porto Alegre: Zouk, 2004.

ROCHA FILHO, Romeu C. *Grandezas e unidades de medida: o sistema internacional de unidades*. São Paulo: Ática, 1988.

ROSA; OREY, Daniel C. *Etnomatemática como ação pedagógica*. Natal: UFRN, 2004.

SANT'ANNA, Flávia M. et al. *Planejamento de ensino e avaliação*. 11. ed. Porto Alegre, 1995.

SINGH, Simon. *O último teorema de Fermat*. Rio de Janeiro: Record, 1998.

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA. *Coleção do Professor de Matemática*. Rio de Janeiro: SBM, 1999. Vários números.

SOUSA, C. Prado de (Org.). *Avaliação do rendimento escolar*. Campinas: Papirus, 1991.

SOUZA, E. Reame. et al. *A Matemática das sete peças do Tangram*. São Paulo: CAEM-USP, 1995. v. 7.

STEWART, IAN. *Incríveis passatempos matemáticos*. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2010.

STRATHERN, Jorge. *Pitágoras e seu teorema em 90 minutos*. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1998.

TAHAN, Malba. *Diabruras da Matemática: problemas curiosos e fantasias aritméticas*. 2. ed. São Paulo: Saraiva, 1996.

TOLEDO, Marília; TOLEDO, Mauro. *Didática de Matemática: como dois e dois. A construção da Matemática*. São Paulo: FTD, 1997.

Matemática

ASSESSORIA PEDAGÓGICA

9º ano

Ensino Fundamental

UMA PALAVRA INICIAL

Caro(a) professor(a),

Esta coleção pretende contribuir com o seu trabalho e o de seus alunos. Este manual tem como objetivo apresentar um panorama da abordagem dos conteúdos da coleção e fundamentar as opções que assumimos na condução do curso de Matemática para as séries finais do Ensino Fundamental. Além disso, propõe sugestões e canais de aquisição de conhecimentos que o ajudem a oferecer a seus alunos uma aprendizagem mais eficaz.

O **Assessoria Pedagógica** objetiva também auxiliá-lo no planejamento e gestão de suas aulas e, dessa forma, procura descrever os processos de abordagem dos conteúdos, exercícios e atividades individuais e em grupo, funcionando como um valioso recurso, que deve ser um agente importante do processo de ensino-aprendizagem.

Nesse contexto, buscamos aqui ampliar as informações propostas no livro do aluno, oferecendo sugestões complementares de atividades, leituras, e de projetos a serem desenvolvidos com os alunos, entre outras.

A proposta desta obra surgiu na prática de sala de aula, objetivando despertar o interesse do aluno pela Matemática presente em seu cotidiano. A partir das atividades aqui propostas, procuramos fazer o aluno "enxergar" onde, como e quando a Matemática se manifesta; seja na natureza, nas construções humanas, nas leis da Ciência, na Astronomia ou atividades corriqueiras como, por exemplo, fazer compras, ouvir uma música ou praticar esportes.

Essa abordagem levou à produção desta coleção como uma ferramenta de diálogo nas diferentes linguagens da Matemática. Isso pode ser visto no formalismo e no encadeamento da apresentação dos conceitos, nas diferentes seções que apresentam textos complementares para leitura, aplicações e conexões interdisciplinares, informações históricas contextualizadas, oficinas, desafios, curiosidades e exercícios com dosagem progressiva de dificuldade.

Acreditamos que, com sua insubstituível colaboração, conseguiremos atingir os objetivos gerais e específicos da Educação Matemática respeitando as especificidades sociais e culturais de cada escola que utilizar essa obra. Nossos alunos precisam desta educação de qualidade. Nosso país, também.

Os Autores

Pressupostos da coleção

A Matemática constitui uma das mais significativas e universais heranças culturais da humanidade e é, também, um aprimorado modo de pensar e de se ter acesso ao conhecimento. A ênfase da Educação Matemática no Ensino Fundamental está na utilização da Matemática para resolver problemas, raciocinar, apropriar-se e difundir conhecimentos, o que implica em abordá-la de forma a desenvolver alunos seguros e motivados.

A Matemática sempre foi usada na sociedade relacionando-se com as mais diversas áreas da atividade humana. Porém, num mundo cada vez mais tecnológico, ela passa a ter, também, uma maior importância implícita, que deve ser discutida pelos educadores, objetivando o aprimoramento da aprendizagem pelos alunos e da apropriação das tecnologias disponíveis.

O trabalho dos educadores deve ter como objetivo ajudar a revelar a matemática presente nas mais variadas situações e promover a formação de cidadãos participativos, críticos e confiantes nos modos como lidam com a Matemática.

Trata-se de promover o desenvolvimento integrado de conhecimentos, capacidades e atitudes em vez de simplesmente adicionarmos capacidades de resolução de problemas, raciocínio e comunicação e atitudes favoráveis à atividade matemática a um currículo baseado em conhecimentos isolados e técnicas de cálculo. Ao mesmo tempo, destaca-se a compreensão de aspetos fundamentais da natureza e do papel da Matemática e dá-se uma atenção explícita ao desenvolvimento das concepções dos alunos sobre a própria Matemática.

Com esse olhar, é possível encontrar muitos estudos e experiências sobre a construção e aquisição dos conceitos e procedimentos matemáticos, que defendem, acima de tudo, que o ensino da Matemática não se limita à transmissão de informações, mas trata-se de um processo complexo de construção de um conjunto de competências cognitivas, que deve ter a participação ativa dos alunos.

Nessa obra, procuramos abordar algumas competências gerais de forma articulada com as competências específicas de cada conteúdo trabalhado dentro do campo dos **números e operações, da álgebra, da geometria, das grandezas e medidas e do tratamento das informações**.

Assim, as sugestões de abordagem dos conteúdos apresentadas nessa coleção tendem a relacionar essas competências e permite que o professor possa adaptá-las para cada contexto educacional dentro das diversidades de cada cenário de nosso País.

Vários significados

A necessidade de compreender os vários significados e propriedades das operações fundamentais e dominar os algoritmos são imprescindíveis no mundo atual, pois permitem desenvolver a capacidade de contar, comparar e quantificar grandezas, além de fazer e compreender codificações. Por isso, propomos o uso do cálculo mental, estimativas e o uso da tecnologia para apresentar conteúdos de aritmética, álgebra, contagens, sistemas de medidas, geometria e no tratamento da informação.

Por meio da percepção de regularidades, a obra propõe a construção de modelos simbólicos em várias situações e, da mesma forma, busca a compreensão e interpretação de problemas do cotidiano, correlacionando, eventualmente, outras áreas do conhecimento. Dessa forma, destaca-se o estudo da álgebra, que assume também, a função de linguagem capaz de expressar propriedades matemáticas e suas relações com a realidade.

O estímulo ao uso da percepção espacial e sua interação com o mundo físico em que vive o aluno, é destacado no ensino da Geometria, onde desenvolvemos as competências de localização, visualização, construção e representação de figuras geométricas, de forma a estimular a capacidade de organização e síntese desse conhecimento.

Buscamos, também, propiciar ferramentas de conexão da realidade das aulas de matemática com as demais disciplinas e com o mundo exterior. Assim, o estudo dos conceitos de número natural, inteiro, racional e irracional associa-se ao conceito de grandezas e, assim, relaciona-se à Geometria e à Álgebra, de forma a permitir uma linguagem que favoreça aplicações em outras disciplinas.

O tratamento da informação baseia-se na leitura e interpretação de problemas do cotidiano. A coleção trata de maneira simples e natural de estatística, probabilidade e contagens. A coleta, seleção, organização, apresentação e interpretação crítica dos dados são abordadas com exemplos e atividades que estimulam o uso de inferências baseadas em informações qualitativas ou quantitativas. São introduzidos os conceitos de chance e incerteza ainda nessa fase da educação básica, além de uma ampla apresentação dos diversos tipos de gráficos, aqui entendidos também como "idioma" cada vez mais presente na comunicação matemática.

Nesse cenário, a contextualização e a proposta de interdisciplinaridade e multidisciplinaridade são consequências naturais de um processo de trabalho no dia a dia em sala de aula, na escola e na comunidade, nas quais alunos e professores estão inseridos. Essa conduta participativa, crítica e responsável viabiliza discussões sobre o papel da Educação Matemática na vida desses indivíduos e na sociedade, formando assim, agentes transformadores, críticos e responsáveis, capazes de exercer sua cidadania.

Considerando os pressupostos que assumimos para o desenvolvimento desta coleção, apresentamos a seguir a competências a serem desenvolvidas e os objetivos específicos de cada um dos eixos de condução do curso.

I. Competências gerais a serem desenvolvidas

- Reconhecer a Matemática como instrumento para a compreensão e resolução de problemas do homem na sociedade contemporânea;
- Interpretar matematicamente situações do cotidiano e de outras áreas do conhecimento;
- Resolver problemas de forma criativa, criando suas próprias estratégias de forma a desenvolver a iniciativa e a imaginação;
- Usar o raciocínio matemático de forma independente para compreender o mundo que o cerca;
- Avaliar de forma crítica os resultados obtidos;
- Contribuir para a formação de um cidadão crítico, criativo, observador e leitor do mundo que o cerca;
- Raciocinar e fazer abstrações com base em situações concretas;
- Representar, organizar e generalizar;
- Compreender e transmitir ideias matemáticas por escrito e oralmente;
- Desenvolver a capacidade de argumentação de forma consistente e, assim, desenvolver também sua autoconfiança exprimindo e fundamentando as suas opiniões e formando juízos sobre as situações com as quais é confrontado;
- Desenvolver a curiosidade e o prazer pela aprendizagem de novos assuntos, de forma a aumentar o interesse pelos problemas da sociedade em que vive;
- Estabelecer conexões entre os diferentes campos da matemática;
- Estabelecer conexões entre a matemática e as demais áreas do saber;
- Manipular diferentes tipos de dispositivos tecnológicos como suporte ao raciocínio matemático.

II. Objetivos e competências específicas

Números e Operações/Álgebra

- Compreender o sentido global dos textos trabalhados;
- Relacionar a história da humanidade com o desenvolvimento da matemática;
- Transferir o uso da linguagem oral para a escrita;
- Relacionar a língua materna e a linguagem matemática;
- Usar com clareza os símbolos matemáticos;
- Comparar, refletir e deduzir por meio dos textos trabalhados;

- Ler e interpretar textos diversos;
- Operar através dos algoritmos da adição, subtração, multiplicação e divisão;
- Operar através dos algoritmos da potenciação e radiciação;
- Desenvolver jogos ou atividades lúdicas para complementar o processo do ensino -aprendizagem no desenvolvimento da criatividade, aplicando também o cálculo mental;
- Utilizar os variados recursos tecnológicos para o desenvolvimento de habilidades cognitivas.
- Ler e interpretar textos para compreender e transmitir ideias matemáticas, por escrito ou oralmente, desenvolvendo a capacidade de argumentação.
- Interpretar matematicamente situações do dia-a-dia e, também, do mundo tecnológico e científico para o exercício da cidadania. Usar com clareza os símbolos matemáticos.

Geometria

- Compreender o sentido global dos textos trabalhados;
- Conhecer os conceitos primitivos de ponto, reta e plano;
- Reconhecer e classificar polígonos, triângulos e quadriláteros;
- Interpretar figuras que foram reduzidas e ou ampliadas por meio de uma escala;
- Desenvolver jogos ou atividades lúdicas para complementar o processo do ensino-aprendizagem no desenvolvimento da criatividade, aplicando também o cálculo mental;
- Utilizar os variados recursos tecnológicos para o desenvolvimento de habilidades cognitivas.
- Usar com autonomia o raciocínio matemático para compreensão do mundo que o cerca, desenvolvendo a visão geométrica, a visão espacial e o raciocínio lógico dedutivo.
- Classificar ângulos quanto à sua medida, calcular a soma das medidas dos ângulos de um polígono.
- Fazer uso de régua e de outros instrumentos de medição.
- Compreender e transmitir ideias matemáticas por escrito ou oralmente, desenvolvendo a capacidade de argumentação.
- Classificar ângulos definidos por retas paralelas e transversais.
- Calcular a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero.
- Reconhecer retângulos, trapézios, paralelogramos, losangos e aplicar suas propriedades.
- Reconhecer a diferença entre figuras planas e figuras tridimensionais.
- Identificar e diferenciar sólidos geométricos.
- Reconhecer os elementos de um prisma e de uma pirâmide.
- Definir expressões para cálculo de área e de volume dos sólidos geométricos.
- Reconhecer a maior rigidez de um triângulo em relação aos outros polígonos.
- Verificar a condição de existência de um triângulo.
- Reconhecer as isometrias de figuras planas.
- Representar as simetrias de figuras planas.

- Verificar as condições necessárias para a congruência de triângulos.
- Reconhecer a circunferência e seus elementos.
- Explorar a relação entre as medidas do comprimento da circunferência e seu diâmetro.
- Explorar os ângulos na circunferência.
- Reconhecer a semicircunferência como um lugar geométrico. Identificar polígonos inscritos e circunscritos na circunferência.
- Calcular as áreas do círculo, da coroa e do setor circular.
- Explorar e aplicar as relações entre as medidas de cordas e outros segmentos em uma circunferência.
- Identificar retas externas, secantes e tangentes a uma circunferência.
- Caracterizar os elementos de um triângulo retângulo.
- Aplicar as relações de semelhança em triângulos assim como o Teorema de Pitágoras.
- Identificar e aplicar outras relações métricas no triângulo retângulo.
- Definir as razões trigonométricas no triângulo retângulo utilizando a semelhança de triângulos.

Grandezas e Medidas

- Compreender o sentido global dos textos trabalhados;
- Fazer uso de uma régua e conhecer outros instrumentos para medição;
- Usar adequadamente as diversas unidades de medida de comprimento;
- Desenvolver jogos ou atividades lúdicas para complementar a aprendizagem, desenvolver a criatividade e aplicar também o cálculo mental;
- Utilizar os variados recursos tecnológicos para o desenvolvimento de habilidades cognitivas.
- Compreender e utilizar o conceito de medidas padronizadas e não padronizadas, reconhecer a importância social da adoção de medidas padronizadas.
- Compreender e utilizar medidas usuais de comprimento, de área, de massa e capacidade.
- Utilizar com pertinência ferramentas matemáticas em situações do cotidiano, de práticas sociais, de maneira a exercer a sua cidadania.
- Raciocinar e fazer abstrações com base em situações concretas, generalizar, organizar e representar adequadamente suas ideias matemáticas.
- Reconhecer e operar com as unidades grau e radiano.

Tratamento da Informação

- Ler e interpretar textos em forma de tabelas e gráficos;
- Compreender o sentido global dos textos trabalhados;
- Construir gráficos de colunas, de barras, de setores, de linhas e pitogramas;
- Registrar, organizar, e coletar elementos elencados numa pesquisa;
- Desenvolver pesquisas para exercitar o tratamento da informação e para conhecer o ambiente no qual está inserido;
- Utilizar os variados recursos tecnológicos para o desenvolvimentos de habilidades cognitivas.

- Promover uma reflexão sobre o termo frequência.
- Construir tabelas de frequências.
- Ler, interpretar e construir histogramas.
- Calcular a média de um conjunto de dados.

III. EXPERIÊNCIAS DE APRENDIZAGEM

O desenvolvimento do conjunto de competências citado, deve se dar dentro de um universo rico de experiências de aprendizagem, formando um mosaico de interações com os mais diversos campos do conhecimento, da história, do desenvolvimento e da utilização da Matemática.

Assim, uma boa utilização dos livros desta coleção deve levar os alunos a ter oportunidades de se envolver nos seguintes tipos de experiências de aprendizagem:

Resolução de problemas

É o mais comum e universal contexto de aprendizagem matemática. Deve, por isso, estar sempre presente, associada ao raciocínio e à comunicação e integrada naturalmente nas diversas atividades apresentadas ao longo do curso. Os problemas são situações que constituem desafios para os alunos, em que, frequentemente, podem ser utilizadas várias estratégias e métodos de resolução. São diferentes de exercícios, geralmente de resolução mecânica e repetitiva, em que apenas se aplica um algoritmo que conduz diretamente à solução. A formulação de problemas deve igualmente integrar a experiência matemática e vivencial dos alunos.

Atividades de pesquisa

Numa atividade de pesquisa, os alunos exploram uma situação problema, procuram regularidades, fazem e testam hipóteses, argumentam e comunicam oralmente ou por escrito as suas conclusões. Qualquer tema da matemática pode proporcionar ocasiões para a realização de atividades de natureza investigativa. Este tipo de atividades também é favorável à ligação da matemática com outras áreas do conhecimento.

Projetos

Um projeto é uma atividade prolongada que normalmente inclui trabalho dentro e fora da sala de aula e é realizada em grupo. Pressupõe a existência de um objetivo claro, compreendido pelos alunos, desenvolvimento e a apresentação de resultados. Qualquer tema da Matemática pode proporcionar ocasiões para a realização de projetos. Pela sua própria natureza, os projetos constituem contextos naturais para o desenvolvimento de trabalho interdisciplinar.

Textos e Comunicação oral

A leitura, a interpretação e a escrita de pequenos textos de conteúdos matemáticos ou a eles associados, devem permear todo o curso, sobretudo no Ensino Fundamental. Na comunicação oral, são importantes as experiências de argumentação e de discussão em grande e pequeno grupo, assim como a compreensão das exposições do professor.

Prática de procedimentos e algoritmos

A prática de procedimentos não deve constituir uma atividade repetitiva, isolada e sem significado. Deve ser entendida como algo que pode promover a aquisição de habilidades utilizáveis com segurança e autonomia. O cálculo mental, o domínio de um algoritmo, a utilização de uma fórmula, a resolução de uma equação, uma construção geométrica, a manipulação de um instrumento, entre muitos outros procedimentos, habilidades úteis que se adquirem com prática, desde que sejam claras sua compreensão e a sua integração nas experiências matemáticas significativas.

Exploração de conexões

Um componente essencial da formação matemática é a compreensão das relações existentes entre as diversas ideias matemáticas, bem como daquelas existentes entre essas ideias e outras áreas de aprendizagem como a música, as artes plásticas, a natureza, a arquitetura e a tecnologia. Atividades que permitam evidenciar e explorar tais conexões devem ser proporcionadas a todos os alunos.

Utilização das tecnologias na aprendizagem da Matemática

O mundo tem passado por mudanças cada vez mais aceleradas. Estamos diante de um novo paradigma, a revolução tecnológica, em que as informações são processadas de maneira rápida. A educação está cada vez mais inserida nesse processo de busca da construção contínua do conhecimento.

Objetos digitais de aprendizagem

No ambiente educacional, muito se tem discutido acerca do conceito de objetos de aprendizagem. A principal ideia sobre eles, genericamente falando, é que se configuram em qualquer artefato, organização material ou comportamental, digital ou não digital, que possa ser usada, reutilizada ou referenciada durante o uso de técnicas pedagógicas que deem suporte ao ensino. Dessa maneira, todo objeto de aprendizagem pode ser utilizado como um meio de ensino/aprendizagem. Um cartaz, uma maquete, um kit de laboratório, uma canção, um ato teatral, uma apostila, o próprio livro, um filme, um jornal, uma página web, diferentes livros podem ser objetos de aprendizagem. Mesmo não sendo um conceito, ainda, universalmente aceito, é razoável supor que o caráter de suporte à situação de ensino prevalece quando tentamos entender o conceito mais central de objeto de aprendizagem.

No contexto dos impactos de tecnologias da informação e da comunicação nos processos educacionais, devemos considerar que o computador e os dispositivos móveis, como tablets e celulares, representam poderosas ferramentas para auxiliar professores a desenvolver situações de aprendizagem que permitam ao aluno a construção do saber de forma mais prazerosa e eficiente. Nessas circunstâncias, passamos a considerar o conceito de objetos digitais de aprendizagem.

Nessa sociedade tecnológica e informacional, as tecnologias interativas aplicadas à educação permitem a pluralidade de abordagens, o atendimento a diferentes estilos de aprendizagem e, por essa razão, favorece a aquisição de conhecimentos, competências e habilidades. Caminhamos para um novo cenário, em que cursos e materiais digitais, destinados a uma nova dinâmica de aulas, criam um novo contexto em que o professor assume funções novas e diferenciadas. Os educadores devem fazer sua parte pela procura de informações e de recursos disponíveis, refletindo sobre a utilização de novas ferramentas.

Entre essas possibilidades, destaca-se o uso desses objetos digitais de aprendizagem ao longo do conteúdo trabalhado no livro. Tais objetos encontram-se disponíveis e diversos portais e sites, dentre os quais destaca-se o Portal do Professor, espaço em que o professor pode acessar sugestões de planos de aula e baixar mídias de apoio, que servem como objetos digitais de aprendizagem. Além disso, o professor toma conhecimento de notícias sobre educação e iniciativas do MEC e pode compartilhar planos de aula, participar de discussões ou mesmo fazer um curso. O acesso ao Portal do MEC é:

portaldoprofessor.gov.br.

O planejamento e o desenvolvimento dos objetos de aprendizagem buscam soluções que favorecem as capacidades de ordem cognitiva superior, com atividades interativas e situações que estimulam a aprendizagem dos estudantes. A pretensão é que os objetos de aprendizagem sejam disponibilizados ao longo do desenvolvimento dos conteúdos, sempre que puderem prover à situação de ensino níveis de interação que os processos convencionais não alcancem. Esses objetos, como dissemos, se configuram por recursos digitais que trazem informações em diversos formatos como imagens, sons, infográficos, simuladores, jogos e listas complementares de conteúdos, testes e novos textos, entre outros, sempre com objetivos educacionais.

Existem diversas abordagens para a definição e a caracterização de objetos digitais de aprendizagem. Nos últimos anos, muito se tem discutido e escrito acerca de tão valorosa colaboração para a situação de ensino e aprendizagem.

De modo geral, há uma interessante convergência dos diversos autores a respeito das principais características destes objetos de aprendizagem. Entre elas, destacam-se:

- a flexibilidade – os objetos digitais são flexíveis, isto é, podem ser utilizados e reutilizados em diversas situações, sem nenhum tipo de manutenção;
- são fáceis de serem atualizados, mesmo por que, seu uso em diferentes situações, constantemente sugere melhorias;
- os objetos são customizáveis, pois, em muitos casos, suas estruturas centrais podem ser adaptadas para o uso em diversas áreas do conhecimento;
- a partir do momento em que um objeto é reutilizado diversas vezes em diversas especializações, ao longo do tempo ele melhora e sua consolidação cresce de maneira espontânea.

O uso dos objetos digitais de aprendizagem pode se dar diretamente em sala de aula, por meio de projeções em dispositivos do tipo data show, combinando tais projeções com o acompanhamento de materiais impressos.

Como foi dito, não podemos negar o impacto e a potencialidade das novas tecnologias como um conjunto de recursos que pode subsidiar o processo de aprendizagem da Matemática. Inicialmente, ressaltamos a necessidade de se pensar em um ensino de Matemática que capacita os alunos para o uso confortável de calculadoras e planilhas eletrônicas, dois instrumentos de trabalho extensivamente utilizados nos mais diversos ambientes do mundo moderno.

No trabalho com calculadoras é preciso saber informar, via teclado, as instruções de execução das operações que devem ser realizadas..

De outro lado, as planilhas eletrônicas manipulam tabelas cujas células podem ser relacionadas por expressões matemáticas. Para operar com uma planilha, em um nível básico, é preciso algum conhecimento matemático, uma vez que as operações e as funções são definidas sobre as células de uma tabela em que se faz uso de notação para matrizes. Assim, é importante conhecer bem a notação matemática usada para expressar diferentes conceitos, em particular o conceito de função, apresentado no livro de 9º ano desta coleção. Além disso, a elaboração de planilhas mais complexas requer raciocínio típico dos problemas que exigem um processo de solução em diferentes etapas.

No uso de tecnologia para o aprendizado da Matemática, a definição de alguns objetos digitais de aprendizagem, além de softwares e planilhas, pode ser um fator determinante para a melhoria da qualidade do aprendizado por meio da exploração de conceitos e ideias oportunamente propostos nas situações de ensino.

Nessas situações, o professor deve saber explorar a variedade de soluções que podem ser dadas para um mesmo problema e capitalizar para o grupo a capacidade criativa de cada um de seus alunos, produzindo discussões e trocas de ideias que revelam uma intensa atividade intelectual.

Entre os diversos tipos de objetos digitais de aprendizagem, destacamos:

Galerias

Coleções de imagens relativas ao tema suscitado no ponto onde estão incluídas. São excelentes ferramentas para introdução de conceitos, levantamento de conhecimentos prévios e ilustração de uma gama de exemplos visuais, com legendas específicas, que objetivam o enriquecimento do conteúdo estudado. Em geral, as galerias oferecem a ferramenta de zoom, que permite a análise de detalhes interessantes nas diversas fotografias ou ilustrações apresentadas.

Algumas galerias de imagens podem, também, simular um desenvolvimento progressivo de algum processo, transformação de um fenômeno qualquer representado por uma figura, foto ou esquema. Além dessas utilizações, as galerias são extremamente úteis para criar questões em situações de avaliação, em razão da variedade de aspectos que apresentam sobre um único conceito.

Animações e Infográficos animados

Como o próprio nome desse tipo de objeto sugere, a inserção do movimento como elemento que introduz um novo nível de percepção de um conceito, esquema, figura ou situação dinâmica, que o papel apresenta de forma estática, pode fazer a diferença na compreensão do que se estuda. O professor deve usar as animações em suas aulas, paralisando-as para mostrar um detalhe num infográfico ou fixando-se em um detalhe que pode ser observado por mecanismos de zoom. Existem situações nas quais os infográficos animados contêm vídeos ou mesmo galerias.

Vídeos

A utilização de vídeos como objetos de aprendizagem é antiga e muito desenvolvida. A principal diferença em relação ao uso clássico de vídeos e seu uso no formato de objetos digitais encontram-se na duração. No caso dos objetos digitais, situa-se entre 1 e 3 minutos. Apenas em alguns casos especiais essa duração se aproxima dos 5 minutos;

Simuladores

Esse tipo de objeto digital reúne os principais atributos do formato digital: permite aplicações em diversos contextos, bem como o controle de seu uso em sala de aula ou em laboratórios de informática. Sobretudo no desenvolvimento de conteúdos que exigem interações com fenômenos impossíveis de serem reproduzidos em condições normais de ensino, ou ainda quando são necessários múltiplos exemplos com variações de parâmetros, como no caso de traçados de gráficos.

Jogos

O jogo eletrônico é uma categoria de software de entretenimento cujo objetivo da interação envolve completar uma tarefa, vencer um desafio, obter a maior pontuação, derrotar um adversário. Essa estrutura pode ser utilizada para a fixação de conteúdos educacionais, fazendo com que o aluno desenvolva a percepção dos conceitos através da intensa interação exigida pelos jogos.

Programas e aplicativos

Agora, se imaginarmos como a tecnologia pode nos ajudar no ensino de Matemática, devemos considerar, a princípio, o grande conjunto de programas destinados especificamente a esse fim, como os geradores de gráficos do tipo do **Geogebra** ou os softwares de desenho e geometria, como o **CABRI**, nos quais os alunos podem explorar e construir diferentes conceitos matemáticos, fazer experimentos, testar hipóteses, esboçar conjecturas, criar estratégias para resolver problemas. São características desses programas:

- conter certo domínio de saber matemático – a sua base de conhecimento;
- oferecer diferentes representações para um mesmo objeto matemático;
- possibilitar a expansão de sua base de conhecimento por meio de ensaios;
- permitir a manipulação dos objetos que estão na tela.

Se, por um lado, é muito interessante o uso de grandes programas como o **Geogebra** e o **CABRI**, há que se considerar, também que, para a utilização mais eficiente, esse tipo de software praticamente exige um treinamento específico do aluno, o que, em si, pode ser um obstáculo suplementar à conquista de objetivos instrucionais menos sofisticados, mas estratégicos. A seguir, estão alguns links interessantes para a download gratuito de vários desses softwares:

http://www.ibilce.unesp.br/#!/departamentos/matematica/extensao/lab-mat/softwares-matematicos/
http://www.m3.ime.unicamp.br
https://www.ufpe.br/dmat
http://www.math.psu.edu/MathLists/Software.html
http://www.ufv.br/dma/intermat/Softwares/softwares_matematicos.htm
http://www.apm.pt/apm/software/soft.htm
http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/
http://www.mat.ufrgs.br/edumatec
http://www.ufv.br/cee/pec/Neicim/ead/linksmat.htm
ttp://www.projetozk.ufjf.br/base_p/ensaios/ensaio3/ant_primos.htm
http://math.exeter.edu/rparris/
http://am.esalq.usp.br/desr/dum/node2.html

IV. ORGANIZAÇÃO GERAL DA COLEÇÃO

Conversa Inicial

Esta seção, apresentada no início de cada capítulo, tem como objetivo recuperar a importância e a variedade das experiências que o aluno já possui sobre o assunto e, ao mesmo tempo, introduzir de forma problematizada a necessidade de estudo dos conceitos matemáticos envolvidos no capítulo.

Uma prática interessante para o início do desenvolvimento de cada capítulo é, antes da exploração da seção **Conversa Inicial**, fazer um inventário oral dos conteúdos que já foram trabalhados até o momento. Isso pode fortalecer a discussão dos temas propostos na seção e melhorar a percepção dos alunos em relação às razões pelas quais estudam o conteúdo do capítulo.

Além disso, a seção **Conversa Inicial** pode ser explorada com outros exemplos, dados ou informações, diferentes daqueles propostos no livro e, muitas vezes, tais dados e informações podem ser fornecidos ou enriquecidos pelos próprios alunos, desde que estimulados pelo professor a apresentá-los ou falar sobre eles.

Sugerimos também que o professor dê preferência para explorar temas regionais ou locais, que possam se adaptar à exemplificação contida na seção, de forma a permitir que o aluno identifique a Matemática que está presente na cultura, perceba que ela faz parte da história da civilização e se aproprie do conhecimento matemático pela evidência de seus usos sociais.

Atividades

Esta seção apresenta problemas e exercícios de aplicação dos conteúdos abordados nos capítulos. Os exercícios utilizam diversos enfoques para os temas e diferentes graus de dificuldades. As atividades foram selecionadas segundo o critério de contribuir para o desenvolvimento das competências citadas na parte inicial desta Assessoria Pedagógica, sem, no entanto, deixar de lado a importância de desenvolver as habilidades específicas que envolvem a manipulação de algoritmos, conceitos e nomenclaturas da linguagem matemática. A identificação das principais competências e habilidades às quais se referem as atividades é feita com um ícone e com uma descrição junto às listas.

Com o objetivo de tornar os livros didaticamente mais eficientes e também de proporcionar aos alunos uma visão detalhada das etapas de resolução das atividades propostas, de tal forma que eles aprimorem os processos discutidos em sala de aula e se referenciem para a resolução de outras atividades propostas, introduzimos ao final de cada capítulo a resolução de todas as atividades nele contidas, exceção feita àquelas da seção **Para estudar**.

Desafio

Aqui o aluno é exposto a situações que o provocam a usar a criatividade para resolver problemas e propor soluções interpretando o mundo de forma crítica, fazendo uso da Matemática.

As atividades que os alunos desenvolvem a partir da seção **Desafio** devem sempre ser entendidas como estímulo ao raciocínio lógico e à exploração da capacidade criativa de cada um. Procure, neste caso, mostrar que um mesmo Desafio pode ter caminhos diversos para sua solução e estimule a discussão em sala de aula.

A resolução de Desafios é uma prática que permite ao aluno se colocar diante de questionamentos e pensar por si próprio, possibilitando o exercício do raciocínio lógico e não apenas o uso padronizado de regras.

Sugerimos que o professor explore essa seção de forma ampla e criativa, propondo inclusive, situações para jogos e competições se o ambiente de sua sala de aula for propício.

Para estudar

Essa seção propõe uma relação de atividades, com diferentes graus de dificuldade, que abordam os conteúdos trabalhados no capítulo e as relações estabelecidas com outros temas. Espera-se que o aluno interprete as informações dos exercícios, relacione os conteúdos e aplique os conhecimentos adquiridos para estruturar as resoluções, garantindo assim um bom momento de estudo. Especificamente para esta seção, não foram incluídas as resoluções no livro do aluno. A ideia é que os alunos relacionem as atividades aqui propostas e retornem às atividades resolvidas em classe para montar, autonomamente, suas soluções. As resoluções das atividades da seção Para estudar encontram-se nesta Assessoria Pedagógica. Os exercícios podem ser utilizados como avaliações contínuas do processo de aprendizagem e também em diferentes estratégias de aprendizado, como por exemplo, alunos em duplas confrontando as resoluções de suas atividades ou resolvendo-as no quadro.

Conexão

Os textos apresentados nessa seção resgatam exemplos de aplicações da Matemática nas mais diversas áreas do conhecimento. Sua abordagem visa instigar o aluno a relacionar os conteúdos estudados ao mundo que o cerca e, dessa forma, ampliar sua percepção da Matemática e compreendendo-a, também, como linguagem.

Além disso, é possível propor novas questões de interpretação desses textos e relacioná-los com os conteúdos de outras disciplinas e, em alguns casos, conteúdos relacionados com outros temas da própria Matemática. Essa prática poderá viabilizar a criação de novas questões para atividades, ou ainda, para futuras avaliações em grupo ou individuais.

O processo de leitura e interpretação de textos é essencial para toda prática educativa e é um dos principais desafios que nós, professores, enfrentamos no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, pois muitas vezes há uma superposição da dificuldade de leitura na língua materna com as dificuldades de interpretar a linguagem matemática. Segundo muitos pesquisadores, a habilidade de ler e interpretar textos não se desenvolve espontaneamente e deve ser objeto de um trabalho específico do professor, que deve oferecer aos alunos um modelo de como isso deve ser feito.

Sugerimos ainda, destaque especial para a observação e leitura criteriosa do rico repertório de imagens oferecidas nessa seção e, salientamos que, esse processo de comunicação em sala de aula pode ser utilizado como um importante instrumento para que professores e alunos partilhem os significados matemáticos e linguísticos dos textos.

Quando, quem e onde

Os textos desta seção foram escritos de forma simples e clara para tornar a leitura agradável e possuem todo o rigor científico nas informações neles contidos. O aluno perceberá os caminhos percorridos na construção do pensamento matemático e assim entenderá que são processos longos, não havendo o imediatismo das conclusões ou validações. Os textos abordam a Matemática como um conjunto de conhecimentos e uma linguagem em construção, negando o pressuposto de uma Matemática pronta e acabada, abrindo, assim, possibilidades para discussões e reflexões. Essa seção vincula os conhecimentos matemáticos com as necessidades do momento histórico de cada época, possibilitando ao professor estimular os alunos a fazerem relações com a História da Humanidade. Gera também, permanentes oportunidades para a realização de atividades com outros componentes curriculares como, por exemplo, História, Artes, Ciências, Geografia e Língua Portuguesa. Podem ser sugeridas pesquisas para que o aluno conheça mais sobre os diversos vultos citados na coleção e suas contribuições para a humanidade.

Na prática

Essa seção oferece atividades nas quais os alunos desenvolvem na prática o que aprenderam. São apresentadas propostas de oficinas, pesquisas ou ações que possibilitem observar e interpretar situações problema, aplicando os temas estudados. Nesse contexto, enfatizamos que esta seção oferece melhores condições de ser desenvolvida em grupos ou, pelo menos, em duplas. O trabalho cooperativo aplicado na sala de aula de Matemática enfatiza a interação entre professor e alunos, assim como entre os próprios alunos. Ao trabalharem cooperativamente as atividades dessa seção, os alunos se envolvem em duas situações de aprendizagem; a solução de situações problema e o trabalho produtivo das atividades instrucionais propostas.

Essa prática permitirá ainda expandir as propostas de cada seção para outros trabalhos ou mesmo conectar algum trabalho que os grupos estejam fazendo em outras disciplinas, sempre adequando essas propostas à realidade dos seus alunos.

Além disso, essa seção oferece ainda uma boa oportunidade para propor a organização de exposições dos trabalhos realizados pelos seus alunos para os demais grupos da classe e para as demais classes da escola.

Para ler

Sugerimos textos e informações complementares que visam ilustrar e enriquecer a aprendizagem do aluno, ampliando seu processo de construção de conhecimentos matemáticos.

Além da importância intrínseca para o desenvolvimento dos conhecimentos matemáticos, a seção Para ler é mais uma ferramenta para o aprimoramento da capacidade de leitura e interpretação dos alunos. A relação entre linguagem natural (Português) e a linguagem matemática está presente de forma implícita em diversas situações dentro dessa coleção e, em especial, é possível explorá-la nessa seção de forma adicional.

A prática da leitura coletiva em sala de aula pode ser uma técnica útil para explorar essa seção e, dessa forma, o professor pode interferir durante a leitura e propor questões para a discussão entre os alunos.

Curiosidade

A seção apresenta informações interessantes sobre os diversos conceitos estudados por meio de textos que mostram o uso da imaginação, investigação e criatividade para interpretar o mundo.

Aqui é possível observar aspectos interessantes da Matemática, de nossa História, da Cultura, da Arquitetura, de Ciência e Tecnologia e da Natureza, que auxiliam bastante na compreensão da presença da Matemática em nosso cotidiano.

Sugerimos também a leitura dos textos da seção em sala de aula e o estímulo do debate sobre os principais pontos apresentados.

V. UMA PALAVRA SOBRE AVALIAÇÃO

Atribuir um juízo de valor sobre a propriedade intelectual não é tarefa fácil e os métodos para a aferição da qualidade do processo de ensino/aprendizagem enfrenta históricos desafios. A avaliação é um tema abrangente que apresenta muitos aspectos divergentes e está relacionada a concepções distintas do processo de ensino e aprendizagem. Discutir a avaliação hoje é um desafio que requer uma visão mais ampla da educação, pois, revê os papéis do professor e de toda a prática pedagógica.

Há certo consenso que, na atualidade, o professor deve buscar características menos centralizadoras e mais voltadas para o acompanhamento, a motivação e a orientação de seu aluno, de modo a proporcionar condições para que esses adquiram uma aprendizagem autônoma e integrada. Atuando mais como provocador cognitivo, o professor deve levar seu aluno a desenvolver competências que o tornem crítico e reflexivo.

Nesse contexto, a avaliação também ganha novo propósito e deve fazer uma reflexão crítica sobre a prática, no sentido de captar os avanços de seus alunos, as suas resistências e dificuldades, além de possibilitar uma tomada de decisão sobre o que fazer para superar os obstáculos enfrentados por eles.

COMPARAÇÃO ENTRE DUAS CONCEPÇÕES DE AVALIAÇÃO

MODELO TRADICIONAL	MODELO ADEQUADO
Foco na promoção – o alvo dos alunos é a promoção. Nas primeiras aulas, se discutem as regras e os modos pelos quais as notas serão obtidas para a promoção de uma série para outra. **Implicação** – as notas vão sendo observadas e registradas. Não importa como elas foram obtidas, nem por qual processo o aluno passou.	**Foco na aprendizagem** – o alvo do aluno deve ser a aprendizagem e o que de proveitoso e prazeroso dela obtém. **Implicação** – neste contexto, a avaliação deve ser um auxílio para se verificar quais objetivos foram atingidos, quais ainda faltam e quais as interferências do professor que podem ajudar o aluno.
Foco nas provas – são utilizadas como objeto de pressão psicológica, sob pretexto de serem um "elemento motivador da aprendizagem", seguindo ainda a sugestão de Comenius em sua Didática Magna criada no século XVII. É comum ver professores utilizando expressões como "*Estudem! Caso contrário, vocês poderão se dar mal no dia da prova!*" ou ainda "*Fiquem quietos! Prestem atenção! O dia da prova vem aí e vocês verão o que vai acontecer...*". **Implicação** – as provas são utilizadas como um fator negativo de motivação. Os alunos estudam pela ameaça da prova, não pelo que a aprendizagem pode lhes trazer de proveitoso e prazeroso. Estimula o desenvolvimento da submissão e de hábitos de comportamento físico tenso (estresse).	**Foco nas competências** – o desenvolvimento das competências previstas no projeto educacional deve ser a meta em comum dos professores. **Implicação** – a avaliação deixa de ser somente um objeto de certificação da consecução de objetivos, mas também se torna necessária como instrumento de diagnóstico e acompanhamento do processo de aprendizagem. Neste ponto, modelos que indicam passos para a progressão na aprendizagem, como a Taxonomia dos Objetivos Educacionais de Benjamin Bloom, auxiliam muito a prática da avaliação e a orientação dos alunos.
Os estabelecimentos de ensino estão centrados nos resultados das provas e exames – eles se preocupam com as notas que demonstram o quadro global dos alunos, para a promoção ou reprovação. **Implicação** – o processo educativo permanece oculto. A leitura das médias tende a ser ingênua (não se buscam os reais motivos para discrepâncias em determinadas disciplinas).	Estabelecimentos de ensino centrados na qualidade – os estabelecimentos de ensino devem preocupar-se com o presente e o futuro do aluno, especialmente com relação à sua inclusão social (percepção do mundo, criatividade, empregabilidade, interação, posicionamento e criticidade). **Implicação** – o foco da escola passa a ser o resultado de seu ensino para o aluno e não mais a média do aluno na escola.

Fonte: KRAEMER, E. P. A avaliação da aprendizagem como processo construtivo de um novo fazer. Disponível em: <http://www.gestiopolis.com/Canales4/rrhh/aprendizagem.htm>. Acesso 03. Junho, 2015.

Diante disso, sugerimos ao professor que utiliza essa obra, um processo de ensino/aprendizagem que promova sempre uma avalição de forma contínua, cumulativa e sistemática e que vise acima de tudo:

- Diagnosticar e registrar os progressos e dificuladades do aluno para uma possível mudança de estratégia se necessário for.
- Possibilitar situações de auto avaliação para que o aluno tenha consciência e se responsabilize pelo empenho em avançar nesse processo de aprendizagem . O professor poderá usar um quadro como o sugerido a seguir:

	Satisfatório	Parcialmente satisfatório	Insatisfatório
Participei das aulas e esclareci minhas dúvidas			
Fiz minhas tarefas no prazo			
Estudo regularmente			

- A seção **Para estudar** oferece ao longo dos capítulos uma série de atividades para serem desenvolvidas pelos alunos. Utilize as atividades desta seção para propor aos alunos que as resolval em casa, comparando-as com aquelas desenvolvidas em sala de aula e trazendo-as para discussão em aulas subsequentes. Servem também para que os alunos façam revisões dos conteúdos dos capítulos, como forma de se prepararem para situações de avaliação.
- Forme duplas entre os alunos e faça com que um tenha que explicar para o outro a estrutura de resolução de alguns exercícios. Essa troca de informações é bem rica e construtiva;
- Se a sua escola possui um laboratório de informática, podem ser criadas atividades como processos avaliativos. O manual do professor sugere algumas atividades informatizadas.
- Faça um *checklist* no final de cada capítulo para que o aluno possa dizer se está dominando os temas estudados, e assim poderá se dedicar aos itens em que possui mais dificuldade ou não compreendeu. Observe o exemplo a seguir:

	DOMÍNIO COMPLETO	DOMÍNIO PARCIAL	NÃO DOMINADO
Resoluções de equações com uma incógnita.			
Ler e interpretar problemas.			
Resolução de sistemas lineares.			
Resolver equações fracionárias.			

- Fundamentar as decisões quanto à necessidade de procedimentos de reforço e recuperação de aprendizagem.
- Orientar as atividades de planejamento e replanejamento dos conteúdos curriculares.

Acreditamos que essas sugestões podem promover uma avaliação que englobe a observação e análise do conhecimento e de habilidades específicas adquiridas pelo aluno, além dos aspetos formativos.

Nessa proposta de avaliação, a obra permite que o professor avalie também aspectos das atitudes do aluno referentes à participação nas atividades pedagógicas, na responsabilidade e compromisso com o cotidiano escolar e, enfim, no cumprimento de seu papel de cidadão em formação.

Dessa forma, as avaliações propostas podem ser feitas por meio de provas escritas, trabalhos, pesquisas e observação direta, sendo que os aspetos qualitativos devem sempre prevalecer sobre os aspetos quantitativos. Os instrumentos de avaliação devem sempre abranger dois ou mais tipos, sendo que pelo menos um deles deve ser uma prova escrita, para que o aluno demonstre seus avanços na relação entre a escrita e leitura utilizada pela língua materna e a linguagem matemárica.

Os critérios dessas avaliações devem ser os previstos nos objetivos de cada componente curricular e nos objetivos gerais de formação educacional preconizada pela escola e, os resultados finais, devem ser registrados para cada componente curricular, por meio de sínteses dentro do período determinado por cada escola.

Os professores podem encorajar a aprendizagem significativa usando tarefas que irão engajar o estudante na busca de conexões entre o seu conhecimento prévio e o novo conhecimento, usando estratégias de avaliação que premiam a aprendizagem significativa.

Não é possível ao estudante alcançar altos níveis de aprendizagem significativa até que uma estrutura de concecimentos relevantes seja construída. Neste estágio, a aprendizagem passa a ser um processo interativo ao longo do tempo até se atingir a proficiência na área deste conhecimento.

Na medida em que interage com a informação, o estudante está construindo seu conhecimento, ele faz conexões importantes entre significados e desse modo possibilita a sua aprendizagem significativa.

Referências sobre avaliação

ALARCÃO, I. *Professores reflexivos em uma escola reflexiva*. 7ª Ed., São Paulo: Cortez, 2010.

ARROYO, M. G. *Imagens quebradas: trajetórias e tempos de alunos e mestres*. Petrópolis: Vozes, 2004.

CZESZAK, W. A. A. C. *A construção dos saberes dos professores e as contribuições do mapeamento conceitual*. 2011. 319 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo. 2001. Disponível em: <http://www.teses.usp.br/teses/ *disponiveis*/48/48134/tde-28062011-091506/pt-br.php>. Acesso em 12 abr 2013.

HAYDT, R. C. C. *Avaliação do processo ensino-aprendizagem*. São Paulo: Ática, 1999.

KRAEMER, E. P. *A avaliação da aprendizagem como processo construtivo de um novo fazer*. Disponível em: <http://www.gestiopolis.com/Canales4/ rrhh/aprendizagem.htm>. Acesso 03. Junho, 2015.

LUCKESI, C.C. Avaliação da Aprendizagem Escolar. São Paulo: Cortez, 2005.

Referências de documentos oficiais

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática - 5ª série*. Brasília, 1998.

______ *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática - 6ª série*. Brasília, 1998.

______ *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática - 7ª série*. Brasília, 1998.

______ *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática - 8ª série*. Brasília, 1998.

FUNDAÇÃO ROBERTO MARINHO/Fiesp/Ciesp/Sesi/Senai/IRS. *Mecânica: metodologia*. São Paulo: Globo, 1996. (Telecurso 2000/Curso Profissionalizante).

SÃO PAULO (Cidade). Prefeitura Municipal. *Movimento de reorientação curricular-Matemática - Relatos de prática 4/8, Documento 6/92'*. São Paulo, 1992.

______ *Movimento de reorientação curricular - Matemática - Visão de área, Documento 5*. São Paulo, 1992.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. Fundação para o Desenvolvimento da Educação. *A didática e a escola de 1º grau*. São Paulo, 1992. (Idéias, 11).

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. *Proposta curricular para o ensino da Matemática - 1º grau*. 4. ed. São Paulo, 1991.

______ *Experiências matemáticas: 5ª série*. São Paulo, 1994.

______ *Experiências matemáticas: 6ª série*. São Paulo, 1994.

______ *Experiências matemáticas: 7ª série*. São Paulo, 1994.

______ *Experiências matemáticas: 8ª série*. São Paulo, 1994.

______ *Prática pedagógica: Matemática: 1º grau*. São Paulo, 1993.

______ *Proposta curricular de Matemática para o CEFAM e habilitação específica para o magistério*. São Paulo, 1990.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CULTURA. *Parâmetros Curriculares Nacionais – Matemática (3º e 4º Ciclos).* Brasília: MEC – Secretaria do Ensino Fundamental, 1998.

PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS – MATEMÁTICA (3º E 4º CICLOS). Brasília: MEC – Secretaria do Ensino Fundamental, 1998.

PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS PARA O ENSINO MÉDIO, *Ciências da natureza, Matemática e suas tecnologias*. Brasília: MEC – Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 2000.

Outros documentos interessantes

CRISCUOLO, C; LOMBARDO, M. Técnicas de sensoriamento remoto aplicadas ao ensino fundamental. *Boletim de Geografia*, 2011. PDF

Disponível em: <http://eduemojs.uem.br/ojs/index.php/BolGeogr/article/viewFile/14133/7492>. Acesso em: 12 out. 2011.

SIQUEIRA, A. Práticas interdisciplinares na educação básica: uma revisão bibliográfica-1970-2000. *ETD-Educação Temática Digital*, 2008.

Disponível em: <http://www.fae.unicamp.br/revista/index.php/etd/article/viewArticle/1754>. Acesso em: 16 mar. 2012.

MOTA, I.A.R. TANGRAM. PDF

Disponível em: <http://www.feg.unesp.br/extensao/teia/trab_finais/TrabalhoIvany.pdf>. Acesso em: abr. 2012.

NCTM - National Council of Teachers of Mathematics. *Teaching Mathematics to English Language Learners*. PDF

Disponível em: <http://<www.nctm.org/uploadedFiles/About_NCTM/Position_Statements/English%20Language%20Learners%20final%282%29.pdf>. Acesso em: abr. 2012.

ALVES, E.L.; Bandão C.L.F.; Araquam, W.W.C. *A resolução de problemas de distâncias inacessíves com o uso do Geogebra por crianças do Ensino fundamental*. VI EPBEM – Monteiro, PB – 09, 10 e 11 de novembro de 2010.

Disponível em: <www.sbempb.com.br/epbem>. Acesso em: 12 fev. 2012.

FONTALVA, Gerson Martins. *Um estudo sobre inequações*. PDF

Disponível em: <www.sbempaulista.org.br/epem/anais/Posteres%5Cp040.doc>

Sugestão de sites

A seguir, relacionamos um conjunto de *sites* úteis para o desenvolvimento das atividades do professor de matemática. Atualmente, são inúmeras as possibilidades de indicações de endereços interessantes para pesquisa. No entanto, para que isso seja feito com segurança, selecionamos alguns sites seguros, dentro dos quais encontram-se diversos outros *links* que o direcionarão para um rico universo de pesquisa. Todos os *sites* a seguir foram acessados pela última vez em 28 de março de 2012.

Associação dos professores de matemática.
Disponível em: < http://www.apm.pt/portal/index.php>.

Sociedade Brasileira de Educação Matemática.
Disponível em: <www.sbem.com.br>.

Sociedade Brasileira Matemática.
Disponível em: <www.sbm.com.br>.

Revista Scientific American Brasil.
Disponível em: <www.sciam.br>.

Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística.
Disponível em:<www.ibge.gov.br>.

WebAlgebra:A Series of 49 lessons.
Disponível em: <www.albert.math.uiuc.edu/algebra.html>.

Site com material de apoio aos alunos do curso de licenciatura em matemática do IME-USP.
Disponível em: <http://ecalculo.if.usp.br>.

Site mantido pela USP-Universidade de São Paulo com vários softwares gratuitos destinados ao ensino da Matemática
Disponível em: <http://www.ludoteca.if.usp.br/index.php>.

Sociedade Brasileira de Educação Matemática.
Disponível em: <http://www.sbem.com.br>.

Instituto de Matemática da PUCRS
Disponível em: <http://www.mat.pucrs.br>.

Instituto de Matemática da USP – Laboratório de Matemática
Disponível em: <http://www.ime.usp.br/lem>.

Instituto de Matemática, Estatística e Computação da UNICAMP
Disponível em: <http://www.ime.unicamp.br/>.

Orientações Específicas

Capítulo 1: Números Naturais

Objetivos específicos do capítulo

Relacionar a história da humanidade com o desenvolvimento da matemática; transferir o uso da linguagem oral para a escrita. Fazer estimativas mentais de resultados ou cálculos aproximados. Ler e interpretar textos para compreender e transmitir ideias matemáticas, por escrito ou oralmente, desenvolvendo a capacidade de argumentação. Interpretar matematicamente situações do dia-a-diae, também, do mundo tecnológico e científico para o exercício da cidadania. Usar com clareza os símbolos matemáticos e identificar diferentes formas ou abordagens para resolver problemas.

Página 10

Se procurarmos no dicionário pela definição da palavra "radical", encontraremos vários sinônimos que, de forma geral, tentam explicar que radical se refere à raiz, e que raiz é a operação de extração feita de certa quantidade com a ajuda do radical. Não é por acaso que uma explicação depende da outra, já que a origem da palavra radical vem do latim radix ou radicis e significa raiz.

Mas, a história mostra que esse conceito fazia parte da cultura de várias civilizações antigas como os hindus e que os árabes, por exemplo, utilizavam uma palavra (gird) para designar radicais e, cuja definição, era o significado de raiz quadrada. Outro caso já conhecido é a relação entre a medida da diagonal com o lado de um quadrado de lado unitário, que apresenta um número irracional e foi descoberto pelos pitagóricos na Grécia por volta do século V a.C.

Há controvérsias sobre a origem do símbolo $\sqrt{}$ (radical) e alguns pesquisadores atribuem essa descoberta aos árabes, mencionando que ele teria sido utilizado pela primeira vez por Al-Qalasadi, matemático do século XIV.

Mas, os primeiros registros do uso de radicais para solução de problemas foram feitos pelos Hindus que utilizaram as regras de extração de raízes quadradas e cúbicas e impulsionaram os processos de resolução da matemática.

Contudo, o símbolo $\sqrt{}$ só foi inserido no ano de 1525 pelo matemático Chistoff Rusolff, em seu livro sobre álgebra chamado Die coss. Há indícios que o símbolo $\sqrt{}$ tenha surgido devido a sua semelhança com a letra r, letra inicial da palavra radical.

Uma boa forma de abordagem inicial é mencionar que, como o próprio nome sugere, a radiciação é a operação por meio da qual extraímos raízes de números e, para entender o que significa "extrair uma raiz", pode ser interessante recorrer a um problema simples, que envolve a área de um quadrado. Veja o exemplo a seguir.

Sugestão de problema de abordagem:

Antônio é corretor de imóveis e precisa atualizar a ficha de uma sala comercial que consta no cadastro da imobiliária na qual trabalha. Sabendo que a sala tem a forma de um quadrado e possui 1600 m^2 de área, ele deseja saber quanto ela tem de frente. Veja a ilustração a seguir e ajude o Antônio a descobrir a medida da frente da sala.

Sabemos que $A = l^2$.

Então, temos que: $1600 = l^2$

Assim, $l = \sqrt{1600} = \sqrt{2^2 2^2 2^2 5^2} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \rightarrow l = 40$ m

Dessa forma, concluímos que a sala tem 40 metros de frente

Potenciação e radiciação utilizando a calculadora científica

Estudos e experiências evidenciam que a calculadora é um instrumento motivador na realização de tarefas exploratórias e de investigação. Portanto, antes de qualquer coisa, reflita sobre o tema e aponte exemplos de atividades em que, de acordo com o trecho acima, a calculadora pode ser usada com recurso didático no Ensino Fundamental.

Na sala de aula, discuta com os alunos sobre o uso da calculadora e apresente os seguintes desafios ou atividades que podem ser:

a) Na calculadora de um aluno a tecla da divisão não funciona. O que deverá fazer esse aluno, quando quiser dividir um número por 0,5. Apresente argumentos matemáticos que evidenciem tal fato.

Peça aos alunos que introduzam o número $8{,}49 \cdot 10^{15}$ na calculadora e escreva o resultado que aparece no visor. Para isso, digite $\boxed{8}$ $\boxed{\text{vírgula}}$ $\boxed{4}$ $\boxed{9}$ $\boxed{\text{EXP}}$ $\boxed{1}$ $\boxed{5}$ Questione: O que se obtém?

Questione os alunos sobre a relação que há entre o expoente e a posição da vírgula ao transformar da notação científica para a forma decimal. É esperado que os alunos respondam: Se a vírgula se deslocar para a direita, diminuirá o valor do expoente da potência de dez de tantas unidades quantas forem as casas deslocadas. Se a vírgula se deslocar para a esquerda, aumentará o valor do expoente da potência de dez de tantas unidades quantas forem as casas deslocadas.

Em seguida, explore a caculadora padrão propondo a atividade:

Como calcular $(7{,}5 \cdot 10^{35}) : (5{,}0 \cdot 10^{38})$ utilizando uma calculadora comum?

É esperado que os alunos respondam:

Dividi-se 7,5 por 5,0 e aplicam-se as propriedades da potenciação para dividir 103538 por 10.

Supondo que os alunos já desenvolveram habilidades no uso da calculadora, proponha as seguintes operações, solicitando aos alunos que primeiramente façam as operações com as potências de 10:

a) (Apresente o resultado em notação científica) $1{,}3 \cdot 10^{-4} + 2{,}7 \cdot 10^{-6} =$
b) (Apresente o resultado em notação científica) $0{,}3 \cdot 10^{4} + 0{,}2 \cdot 10^{6} =$
c) (Apresente o resultado em notação científica) $3{,}6 \cdot 10^{-7} \cdot 5 \cdot 10^{4} =$
d) (Apresente o resultado em notação científica).

Se a massa do átomo de oxigênio é de $2{,}7 \cdot 10^{-23}$ g, qual é a massa de $20 \cdot 10^{17}$ átomos?

Para os cálculos seguintes, proponha inicialmente que os alunos estimem um valor aproximado para as potências e para as raízes (sugira que transformem as radiciações em potências de expoentes racionais não inteiros).

e) (Apresente o resultado com aproximação até décimos) $2^{\frac{3}{5}}$
f) (Apresente o resultado com aproximação até décimos) $\sqrt[5]{2^3}$
g) (Apresente o resultado com aproximação até centésimos) $4^{-\frac{1}{2}}$
h) (Apresente o resultado com aproximação até centésimos) $10\sqrt[10]{2}$
i) (Apresente o resultado com aproximação até décimos) $2 - \sqrt[5]{2}$
j) (Apresente o resultado com aproximação até décimos) $2^{\frac{3}{2}} + 2^{\frac{2}{3}}$

Disponível em: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=5175> Acesso em 30 abr. 2015.

Disponível em: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/storage/materiais/0000016826.> Acesso em 30 abr. 2015.

b) Na calculadora de um aluno a tecla da multiplicação não funciona. O seu professor de matemática deu como tarefa de casa a seguinte atividade: "Montar o algoritmo e dividir por 50 os números m, n, p, q, r, ... , z." O que deverá fazer esse aluno se quiser utilizar a referida calculadora para conferir os resultados de suas operações. Apresente argumentos matemáticos que evidenciem tal fato.

Depois, mostre aos alunos que é inegável a utilidade das calculadoras em diversas profissões sempre que é necessário fazer algum tipo de cálculo. Daí sua incorporação à educação. Ressalte, no entanto, a importância de que a calculadora seja utilizada na escola como um recurso didático, assim como a régua, o compasso etc. O uso sensato da calculadora contribui para a formação de cidadão apto a intervir numa sociedade cada vez mais complexa, em que a ciência e a tecnologia se fazem cada vez mais presentes.

Comparando tipos de calculadoras

Em seguida, leve os alunos para o laboratório de informática e mostre as calculadoras padrão e cientifica. Mostre aos alunos que a calculadora científica apresenta algumas teclas que simplificam as notações. Por exemplo, a tecla EXP possibilita escrever números em notação científica.

Peça aos alunos que descrevam a diferença entre as duas ferramentas. Questione os alunos sobre a divisão por zero e proponha a seguinte questão: Nunca podemos dividir um número por zero. Se você fizer isso na calculadora, o que acontece? Solicite que façam os cálculos nas duas calculadoras.

SUGESTÃO DE ATIVIDADE

Agora, chegou o momento de explorar a calculadora científica. Para isso, você já deve ter trabalhado em sala de aula a potenciação e a radiciação.

Peça aos alunos que introduzam o número $8{,}49 \cdot 10^{15}$ na calculadora e escreva o resultado que aparece no visor. Para isso, digite $\boxed{8}$ $\boxed{\text{vírgula}}$ $\boxed{4}$ $\boxed{9}$ $\boxed{\text{EXP}}$ $\boxed{1}$ $\boxed{5}$ Questione: O que se obtém?

Questione os alunos sobre a relação que há entre o expoente e a posição da vírgula ao transformar da notação científica para a forma decimal. É esperado que os alunos respondam: Se a vírgula se deslocar para a direita, diminuirá o valor do expoente da potência de dez de tantas unidades quantas forem as casas deslocadas. Se a vírgula se deslocar para a esquerda, aumentará o valor do expoente da potência de dez de tantas unidades quantas forem as casas deslocadas.

Em seguida, explore a caculadora padrão propondo a atividade:

Como calcular $(7{,}5 \cdot 10^{35}) : (5{,}0 \cdot 10^{38})$ utilizando uma calculadora comum?

É esperado que os alunos respondam:

Dividi-se 7,5 por 5,0 e aplicam-se as propriedades da potenciação para dividir 103538 por 10.

Supondo que os alunos já desenvolveram habilidades no uso da calculadora, proponha as seguintes operações, solicitando aos alunos que primeiramente façam as operações com as potências de 10:

a) (Apresente o resultado em notação científica) $1{,}3 \cdot 10^{-4} + 2{,}7 \cdot 10^{-6} =$
b) (Apresente o resultado em notação científica) $0{,}3 \cdot 10^{4} + 0{,}2 \cdot 10^{6} =$
c) (Apresente o resultado em notação científica) $3{,}6 \cdot 10^{-7} \cdot 5 \cdot 10^{4} =$
d) (Apresente o resultado em notação científica).

Se a massa do átomo de oxigênio é de $2{,}7 \cdot 10^{-23}$ g, qual é a massa de $20 \cdot 10^{17}$ átomos?

Para os cálculos seguintes, proponha inicialmente que os alunos estimem um valor aproximado para as potências e para as raízes (sugira que transformem as radiciações em potências de expoentes racionais não inteiros).

e) (Apresente o resultado com aproximação até décimos) $2^{\frac{3}{5}}$
f) (Apresente o resultado com aproximação até décimos) $\sqrt[5]{2^3}$
g) (Apresente o resultado com aproximação até centésimos) $4^{-\frac{1}{2}}$
h) (Apresente o resultado com aproximação até centésimos) $10\sqrt[10]{2}$
i) (Apresente o resultado com aproximação até décimos) $2 - \sqrt[5]{2}$
j) (Apresente o resultado com aproximação até décimos) $2^{\frac{3}{2}} + 2^{\frac{2}{3}}$

Disponível em: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=5175>
Acesso em 30 abr. 2015.

Disponível em: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/storage/materiais/0000016826.>
Acesso em 30 abr. 2015.

Festival de curtas da rede SESI de São Paulo. A LENDA DO JOGO DE XADREZ.

Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=o7xCUm19nMo>. Acesso em 28 abr. 2015.

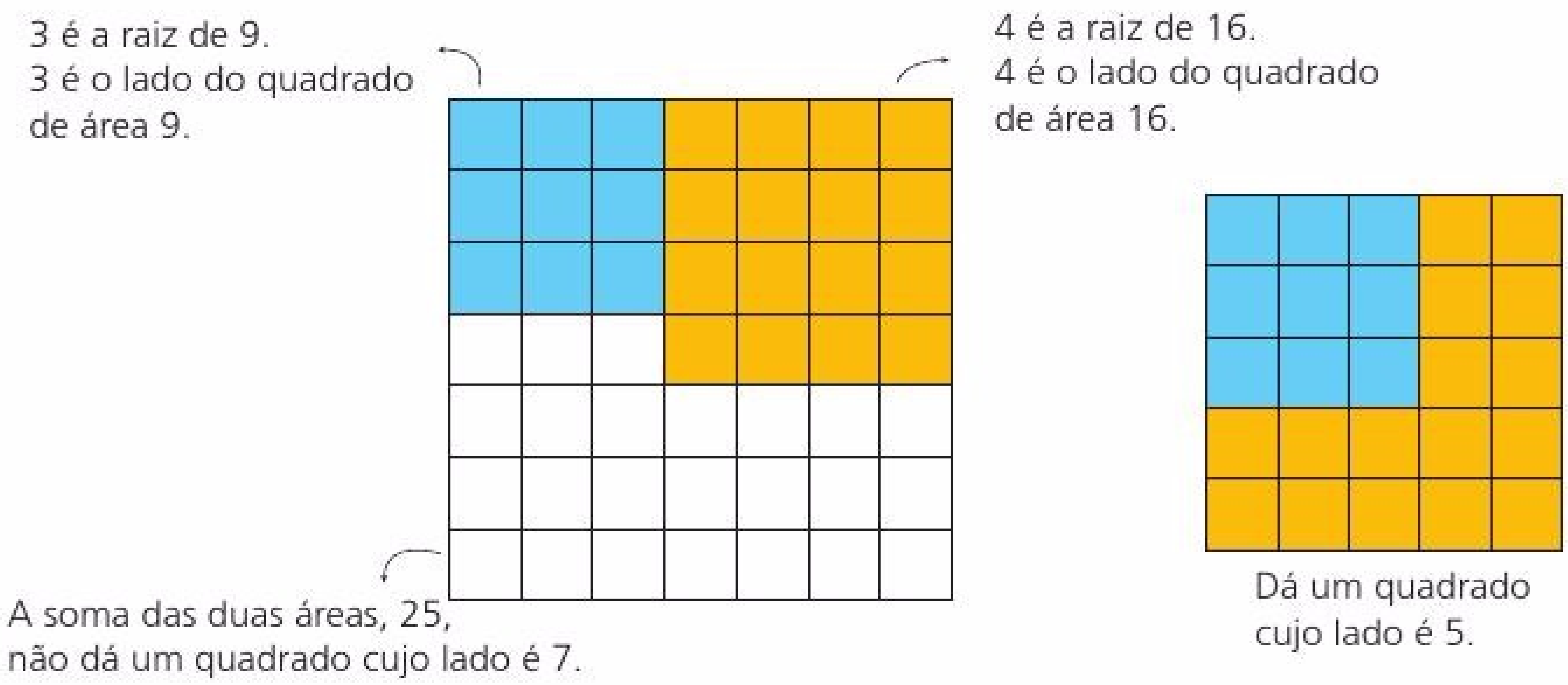
História do jogo de xadrez:

Disponível em: < https://www.youtube.com/watch?v=W0Bhnk9CJ3s>. Acesso em 28 abr. 2015.

Página 18

Deixe bem claro para os alunos que raízes não podem ser distribuídas para somas ou subtrações, pois este é um erro comum cometido por eles. Por exemplo, $\sqrt{9 + 16} \neq \sqrt{9} + \sqrt{16}$. Mostre que $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$ e, por outro lado, $\sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$.

Geometricamente:



Página 19 e 20

Destacamos que o uso da calculadora torna-se pouco útil se os alunos não conseguem fazer estimativas e, por isso, é importante observar que as atividades sugeridas não devem se resumir apenas à simples verificação de resultados com a calculadora. Seu desenvolvimento em sala de aula deve também incluir as justificativas matemáticas desses resultados. As atividades devem enfocar a interpretação e crítica de resultados, visando estimular a formação de uma expectativa para os alunos, além do desenvolvimento prático da verificação por meio de estimativas e cálculo mental.

Sugerimos ao professor mencionar que, como a radiciação é a operação inversa da potenciação, as raízes possuem propriedades similares àquelas apresentadas para as potências. Assim, se achar conveniente, podem ser utilizadas atividades que mostrem o uso das propriedades. Veja sugestões:

$$\begin{array}{r|l} 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$\sqrt{27} = \sqrt{3^3}$ Fatoração de 27.

$= \sqrt{3^2 3}$ Separação de um termo 3^2.

$= \sqrt{3^2}\sqrt{3}$ Propriedade

$= 3\sqrt{3}$ Propriedade

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$, pois $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (a \cdot b)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

$(\sqrt[n]{a^n}) = a$, pois, $(\sqrt[n]{a^n}) = a^{\frac{n}{n}} = a^1 = a$

SUGESTÃO DE ATIVIDADE

$$\begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$\sqrt[3]{\dfrac{-8}{125}} = \dfrac{\sqrt[3]{-8}}{\sqrt[3]{125}}$ Propriedade

$= \dfrac{\sqrt[3]{-2^3}}{\sqrt[3]{5^3}}$ Fatoração de 8 e 125.

$= -\dfrac{2}{5}$ Propriedade

$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

$(\sqrt[n]{a^n}) = a$, pois, $(\sqrt[n]{a^n}) = a^{\frac{n}{n}} = a^1 = a$

$$\begin{array}{r|l} 216 & 2 \\ 108 & 2 \\ 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$\sqrt[3]{216} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3^3}$ Fatoração de 216

$= \sqrt[3]{2^3}\ \sqrt[3]{3^3}$ Propriedade

$= 2 \cdot 3$ Propriedade

$= 3\sqrt{3}$ Simplificação do resultado

$= 6$

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$, pois $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (a \cdot b)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

$(\sqrt[n]{a^n}) = a$, pois $(\sqrt[n]{a^n}) = a^{\frac{n}{n}} = a^1 = a$

$$\begin{array}{r|l} 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$\sqrt{75}\sqrt{12} = \sqrt{75 \cdot 12}$ Propriedade

$= \sqrt{(5^2 3) \cdot (2^2 3)}$ Fatoração de 75 e 12

$= \sqrt{5^2 3^2 2^2}$ Agrupamento das potências

$= \sqrt{5^2}\sqrt{3^2}\sqrt{2^2}$ Propriedade

$= 2 \cdot 3 \cdot 2$ Propriedade

$= 30$ Simplificação do resultado

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$, pois $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (a \cdot b)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

$(\sqrt[n]{a^n}) = a$, pois $(\sqrt[n]{a^n}) = a^{\frac{n}{n}} = a^1 = a$

$$\begin{array}{r|l} 64 & 2 \\ 32 & 2 \\ 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\sqrt[3]{64}} &= \sqrt[2\cdot 3]{64} && \text{Propriedade} \\ &= \sqrt[6]{2^6} && \text{Fatoração de 64} \\ &= \sqrt[6]{2^6} && \text{Propriedade} \\ &= 2 && \text{Simplificação do resultado} \end{aligned}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}, \text{ pois } \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = (\sqrt[n]{a})^{\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = (a)^{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{m}} = \sqrt[m\cdot n]{a}$$

$$(\sqrt[n]{a^n}) = a, \text{ pois } (\sqrt[n]{a^n}) = a^{\frac{n}{n}} = a^1 = a$$

Página 22

Como já mencionamos, assim como ocorre com as potências, é comum o uso incorreto das propriedades das raízes. O engano mais comum é a tentativa de separar a raiz de uma soma fazendo $\sqrt[n]{a+b} = \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$, o que não é possível. Abaixo há mais alguns exemplos que podem ser feitos em sala de aula também com o uso da calculadora:

Observe que não se pode escrever: $\sqrt{4} + \sqrt{9} = \sqrt{13}$.

a) $\sqrt{4} + \sqrt{9} = 2 + 3 = 5$.

b) $3\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = (3 + 4)\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$.

c) $5\sqrt{7} - 2\sqrt{7} = (5 - 2)\sqrt{7} = 3\sqrt{7}$.

d) $\sqrt{12} - \sqrt{3} = \sqrt{4 \cdot 3} - \sqrt{3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} - \sqrt{3} = 2\sqrt{3} - \sqrt{3} = (2 - 1)\sqrt{3} = \sqrt{3}$.

e) $\dfrac{\sqrt[4]{9}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt[4]{3^2}}{\sqrt{3}} = 3^{\frac{2}{4}-\frac{1}{2}} = 3^0 = 1$.

Página 24

É fundamental ao aluno entender que algumas vezes, quando terminado o cálculo de uma expressão matemática, é possível que o denominador contenha uma raiz. Nesse caso, é comum eliminar-se essa raiz por meio de um processo muito utilizado, chamado racionalização do denominador. Na verdade, algebricamente o processo descrito para um número x qualquer é definido como:

Nesse exemplo, supomos que $x > 0$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{x}} &= \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot 1 && \text{O número 1 é o elemento neutro da multiplicação.} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} && \text{Conversão de 1 em uma fração conveniente.} \\ &= \frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x})^2} && \text{Propriedade do produto de frações.} \\ &= \frac{\sqrt{x}}{x^{2/2}} && \text{Propriedade das potências.} \\ &= \frac{\sqrt{x}}{x} && \text{Simplificação do resultado.} \end{aligned}$$

Como a raiz quadrada de qualquer número inteiro que não seja um quadrado perfeito é irracional, o processo acima transformou a expressão $\frac{1}{\sqrt{x}}$ em outra expressão equivalente, na qual o denominador certamente não contém um número irracional, tornando-a mais conveniente do ponto de vista estético.

Veja também:

Mais uma vez, supomos que $x > 0$,

$$\frac{6x}{\sqrt{2x}} = \frac{6x}{\sqrt{2x}} \cdot \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}} = \frac{6x\sqrt{2x}}{2x} = 3\sqrt{2x}.$$

Quando o denominador contém um temo $\sqrt[n]{x^m}$, com $m < n$, e $x > 0$ se n é par, a racionalização é feita multiplicando-se o numerador e o denominador por $\sqrt[n]{x^{n-m}}$.

$$\frac{1}{\sqrt[n]{x^m}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}} \cdot 1 = \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}} \cdot \frac{\sqrt[n]{x^{n-m}}}{\sqrt[n]{x^{n-m}}} = \frac{\sqrt[n]{x^{n-m}}}{\sqrt[n]{x^n}} = \frac{\sqrt[n]{x^{n-m}}}{x}.$$

Para fazer a racionalização com raiz enésima podemos fazer:

a) $\frac{1}{\sqrt[3]{10}} = \frac{1}{\sqrt[3]{10}} \cdot \frac{\sqrt[3]{10^2}}{\sqrt[3]{10^2}} = \frac{\sqrt[3]{10^2}}{\sqrt[3]{10^3}} = \frac{\sqrt[3]{10^2}}{10}.$

b) $\frac{5}{\sqrt[4]{x^6}} = \frac{5}{\sqrt[4]{x^4} \cdot \sqrt[4]{x^2}} = \frac{5}{x\sqrt[4]{x^2}} = \frac{5}{x\sqrt[4]{x^2}} \cdot \frac{\sqrt[4]{x^2}}{\sqrt[4]{x^2}} = \frac{5\sqrt[4]{x^2}}{x\sqrt[4]{x^4}} = \frac{5\sqrt[4]{x^2}}{x^2}.$

c) $\frac{1}{2\sqrt[8]{x^5}} = \frac{1}{2\sqrt[8]{x^5}} \cdot \frac{\sqrt[8]{x^3}}{\sqrt[8]{x^3}} = \frac{\sqrt[8]{x^3}}{2\sqrt[8]{x^8}} = \frac{\sqrt[8]{x^3}}{2x}.$

Aqui, também supomos que $x > 0$.

Resoluções da seção Para estudar

52. a) $5^4 = 625$
b) $(-3)^5 = -243$
c) $3{,}5^2 = 12{,}25$
d) $4{,}1^6 = 4750{,}1$
e) $0{,}25$

53. a) $\frac{1}{9}$
b) $\frac{1}{8}$
c) 1
d) $\frac{1}{16}$
e) 4
f) $\frac{1}{1000}$

54. a) $3^5 = 243$
b) $10^3 = 1000$
c) $\frac{2^{-6}}{3^5} = 12{,}25$

55. a) $7^{-3} = \frac{1}{343}$
b) $\frac{3^{-10}}{3^{-10}} = 1$
c) 7^{21}
d) $\frac{5^3}{2^2} = \frac{125}{4}$

56. a) V b) V c) F d) F

57. $\frac{x^6y^4}{x^9 \cdot y^6} = \frac{1}{x^3 \cdot y^2}$

58. a) 3 b) 2 c) –10 d) –4

59. a) $\frac{2}{5}$ c) $-\frac{1}{3}$

b) $\frac{9}{100}$ d) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{4}{3}}$

60. a) $\sqrt[10]{m}$ c) $\sqrt[20]{2}$

b) $\sqrt[8]{17}$ d) $\sqrt[18]{a}$

61. a) $\sqrt{7}$ c) $200\sqrt{3}$

b) $\sqrt{3}$ d) 3

62. a) $3\sqrt[3]{7} = 27\sqrt{7}$

b) $4 \cdot 5 = 20$

c) $6 \cdot 5\sqrt{6} \cdot 5 = 30\sqrt{30}$

d) $4 \cdot 5^3 = 500$

63. a) $\sqrt{6} + 5\sqrt{3}$ b) $3 - \sqrt{6}$ c) $\sqrt[3]{35} - \sqrt[3]{14}$

64. $(\sqrt{5} - \sqrt{125})(\sqrt{5} + \sqrt{125}) = 5 - 125 = -120$

65. a) $\sqrt{81} + \sqrt{6} - \sqrt{54} - \sqrt{10}$

b) $3 - \sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 2 = 1 - \sqrt{2}$

c) $3\sqrt{10} + \sqrt{50} - 3 - \sqrt{15}$

d) $1 + 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 18 = -17 + \sqrt{3}$

66. $$\frac{5 + 2\sqrt{15} + 3 - 5 + 2\sqrt{15} + 3}{3 + 1} =$$

$$= \frac{6 + 2\sqrt{15}}{4} = \frac{3 + \sqrt{15}}{2}$$

67. a) $\frac{3\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ c) $\frac{4\sqrt{7}}{7}$

b) $\frac{8 \cdot \sqrt{2}}{10} = \frac{4\sqrt{2}}{5}$ d) $\frac{28\sqrt{42}}{42} = \frac{2\sqrt{42}}{3}$

68. a) $\frac{\sqrt[4]{3}}{3}$ c) $\frac{3\sqrt[3]{49}}{7}$

b) $\frac{\sqrt[5]{3^2}}{9}$ d) $\frac{7\sqrt{5}}{5}$

69. a) $\dfrac{5(1-\sqrt{3})}{1-3} = -\dfrac{5(1-\sqrt{3})}{2}$

b) $\dfrac{\sqrt{7}+2}{7-4} = \dfrac{\sqrt{7}+2}{3}$

c) $\dfrac{\sqrt{2}\,(\sqrt{2}-1)}{9} = \dfrac{2-\sqrt{2}}{9}$

d) $\dfrac{(\sqrt{3}+1)\,(\sqrt{3}+2)}{5} = \dfrac{5+3\sqrt{3}}{5}$

Capítulo 2: Equações do 2º grau

Objetivos específicos do capítulo

Relacionar a história da humanidade com o desenvolvimento da matemática. Transferir o uso da linguagem oral para a escrita. Fazer estimativas mentais de resultados ou cálculos aproximados. Ler e interpretar textos para compreender e transmitir ideias matemáticas, por escrito ou oralmente, desenvolvendo a capacidade de argumentação. Interpretar matematicamente situações do dia-a-dia e, também, do mundo tecnológico e científico para o exercício da cidadania. Usar com clareza os símbolos matemáticos e identificar diferentes formas ou abordagens para resolver problemas.

Página 29

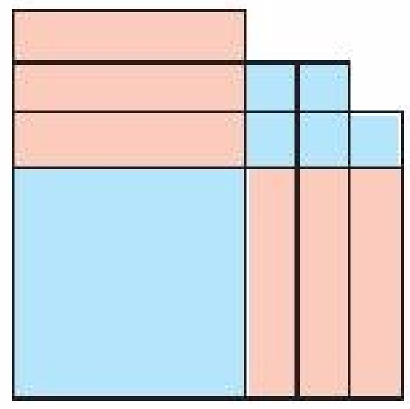
A abordagem sugerida visa mostrar ao aluno que nem todos os fenômenos poderão ser modelados utilizando-se uma função do 1º grau.

Desde a época das civilizações babilônica, grega, hindu e chinesa, as equações do 2º grau são abordadas pelos estudiosos da Matemática.

O primeiro registro que se tem sobre as equações do 2º grau data da época da civilização babilônica. Os babilônios resolviam equações do 2º grau por métodos semelhantes aos que utilizamos hoje ou pelo método de "completar quadrados".

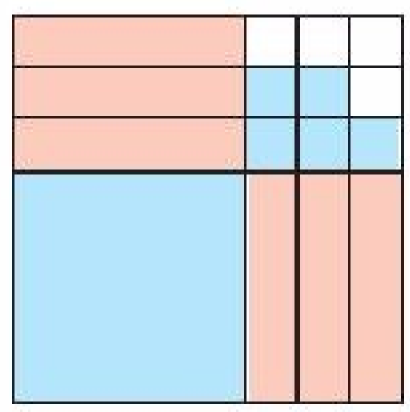
O método de "completar quadrados" tem, como o próprio nome diz, suas raízes na Geometria. Veja as figuras a seguir e a representação da equação $x^2 - 6x + 5 = 0$ que pode ser entendida como sendo uma figura plana, pois

x^2 nos indica a presença de um quadrado ($A = x \cdot x = x^2$), $6x$ parece ser um retângulo ($A = b \cdot h = 6 \cdot x$) e o 5 é o suposto valor das unidades de área.



$x^2 - 6x + 5$: quadrado incompleto

Para que tenhamos um quadrado completo, precisamos ainda somar mais 4 quadrados (azuis), como mostra a seguir:



$x^2 - 6x + 5$: quadrado completo

Algebricamente, teremos a seguinte situação:

$$x^2 - 6x + 5 + 4 = 0 + 4 \rightarrow x^2 - 6x + 9 = 4 \rightarrow (x - 3)^2 = 2^2$$

Assim, as soluções sao:

$$x' = 2 + 3 = 5 \text{ e } x = -2 + 3 = 1$$

Uma placa babilônica da época traz a seguinte escritura:

"Somei quatro vezes o lado de meu quadrado a sua área, encontrei 21..." Traduzindo-o para a linguagem algébrica que conhecemos hoje, temos a expressão: $x^2 + 4x = 21$

Para solucionar esse problema, os babilônios chegaram ao seguinte procedimento:

"[...] Multiplique 4 por 4 e some com o produto de 4 vezes 21. Extraia a raiz quadrada e subtraia 4. O número procurado é o resultado anterior dividido por 2 [...]".

Avançando no tempo, chegamos à Grécia, onde as concepções de Matemática afloravam sem necessariamente se relacionarem a uma prática, confundindo-se com estudos da Filosofia.

A obra Os elementos de Euclides, representante dessa época, apresenta métodos geométricos para resolução de equações do 2º grau.

O método geométrico aparece também na Índia, quando Al-Kwarizmi retoma o método de completar quadrados para a resolução de equações do

2° grau. Não se consideravam raízes negativas, mas consideravam-se raízes irracionais. Havia uma espécie de algoritmo para a resolução de equações, com caráter puramente algébrico.

O método Fan fa (fazer até aparecer) ou método de Horner era utilizado pelos chineses para o cálculo de equações do 2º grau. A necessidade dos chineses de resolver equações de 2º grau relacionava-se com problemas de área e inventários. Eles utilizavam métodos escritos em textos para resolução de equações, pois não conheciam a álgebra formal.

Página 30

Verifique se os alunos conseguem identificar corretamente os coeficientes a, b e c, se a ordem dos monômios for diferente da padrão. Por exemplo:

$-5x + 12x^2 - 6 = 0$

$a = 12$

$b = -5$

$c = -6$

Um erro comum é associar os coeficientes à ordem dos monômios e fazer, no caso do exemplo, $a = -5$, $b = 12$ e $c = -6$. Outro erro comum é ignorar os sinais negativos nos coeficientes.

Página 32

Uma regra para identificar e escrever o trinômio quadrado perfeito na forma fatorada é:

- Tirar as raízes dos monômios de grau 2 e zero, que devem ser positivos;
- Verificar se o dobro do produto dessas raízes dá o monômio de grau 1 (ignore o sinal);
- A forma fatorada é o quadrado da soma ou da diferença das duas raízes, dependendo se o sinal do monômio de grau 1 for positivo ou negativo.

Exemplo:

$$9x^2 - 6x + 1$$

$$3x \qquad 1$$

$$2 \cdot 3x \cdot 1 = 6x$$

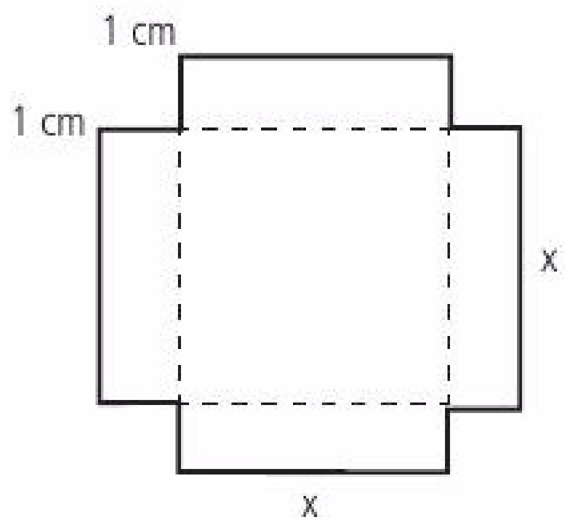
Página 34

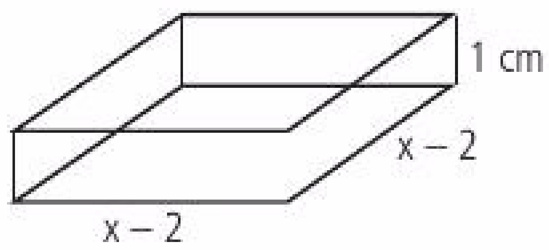
Muitas vezes, o aluno acredita que o sinal de $-b$ na fórmula de Bhaskara indica que este valor deve ser sempre negativo. Lembre-o que $-b$ significa "b com o sinal trocado". Portanto, se $b = 3$, $-b = -3$, se $b = -5$, $-b = 5$, por exemplo.

Página 35

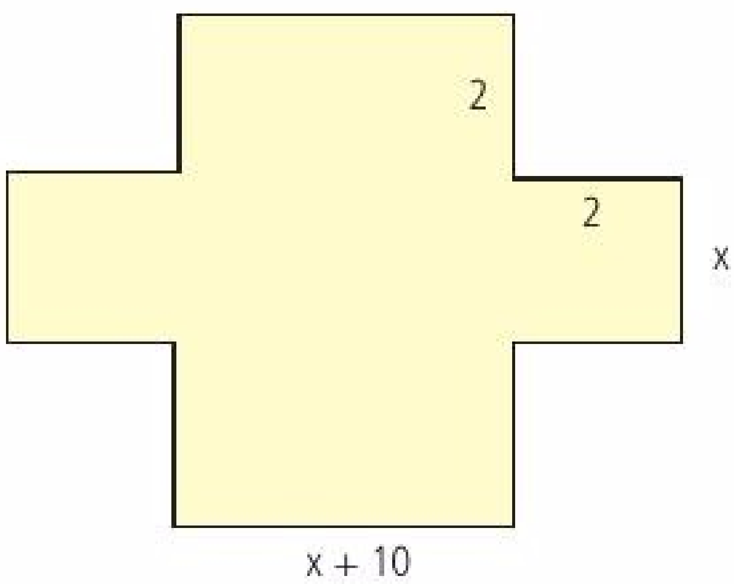
SUGESTÃO DE ATIVIDADE

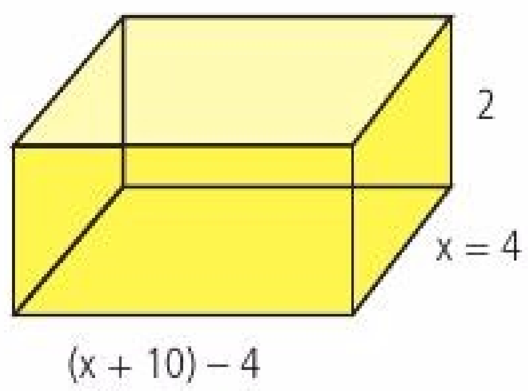
1. Cortando quadradinhos de 1 cm^2 nos cantos de uma lâmina quadrada e dobrando os ldos da lâmina, obtivemos uma caixa com um volume de 900 cm^3. Qual é a dimensão da lâmina original?





2. Um pedaço de cartolina mede 10 cm a mais de comprimento que de largura. Cortando quadrados de 2 cm de lado em cada canto do papel e dobrando os extremos, formamos uma caixa aberta de 1008 cm^3 de volume. Quais são as dimensões do papel?





Desafio

x, x + 2, x + 4 são as dimensões do paralelepípedo.

$2[x(x + 2) + x(x + 4) + (x + 2)(x + 4)] = 142 \rightarrow$

$x^2 + 2x + x^2 + 4x + x^2 + 6x + 8 = 71 \rightarrow$

$3x^2 + 12x - 63 = 0 \rightarrow x^2 + 4x - 21 = 0$

$\Delta = 4^2 - 4(1)(-21) = 16 + 84 = 100$

$x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{100}}{2(1)} \rightarrow x = \dfrac{-4 + 10}{2} = 3$ ou

$x = \dfrac{-4 - 10}{2} = \cancel{-7}$

$V = [3(3 + 2)(3 + 4)]\ cm^3 = 105\ cm^3$

Página 40

Lembre-se que a raiz de uma equação (solução da equação) é diferente de raiz da função (valor que zera a função). Destaque a solução raiz da equação em sala de aula.

O coeficiente c, da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, é chamado de termo independente e é a ordenada do ponto de encontro da parábola com o eixo y, uma vez que:

Se $x = 0 : f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$

Assim: $f(0) = c$

Assim, o ponto de intersecção com o eixo y é o ponto (0, c).

Com os gráficos apresentados, podemos fazer uma relação das raízes da parábola com o discriminante (Δ). Resumidamente, podemos determinar um esboço dos diferentes tipos de funções quadráticas usando como referência o coeficiente a e o discriminante.

Intersecção com o eixo x (raízes)

Se $\Delta > 0$: intercepta em 2 pontos diferentes (2 raízes reais e distintas)
Se $\Delta = 0$: tangencia o eixo x (2 raízes reais iguais)
Se $\Delta < 0$: não intercepta o eixo x (nenhuma raiz real)

Resolução das Atividades Sugeridas

1. $(x - 2)(x - 2)1 = 900 \rightarrow x^2 - 4x + 4 = 900$

$x^2 - 4x - 896 = 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4(1)(-896) = 16 + 3\,584 = 3\,600$

$x = \dfrac{-(-4) \pm \sqrt{3\,600}}{2(1)} \rightarrow x = \dfrac{40 + 60}{2} = 32$ ou

$x = \dfrac{4 - 60}{2} = \cancel{-28}$

A lâmina original é um quadrado de lado 32 cm.

2. $[(x + 10) - 4](x - 4)2 = 1\,080 \rightarrow (x + 6)(x - 4) = 504 \rightarrow x^2 + 2x - 24 = 504 \rightarrow x^2 + 2x - 528 = 0$

$\Delta = 2^2 - 4(1)(-528) = 4 + 2\,112 = 2\,116$

$x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{2\,116}}{2(1)} \rightarrow x = \dfrac{-2 + 46}{2} = 22$ ou

$x = \dfrac{-2 - 46}{2} = \cancel{-24}$

As dimensões da cartolina são (22 + 10) cm = 32 cm e 22 cm.

Página 47

Desafio

Jogando com a Matemática.

Paulo

$(-4) + 15 = 11$

$(-4)(15) = -60$

$x^2 - Sx + P = 0 \rightarrow x^2 \underset{\substack{\downarrow \\ \text{errado}}}{- 11x} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{certo}}}{- 60} = 0$

Luís

$3 + 4 = 7$

$3 \cdot 4 = 12$

$x^2 - Sx + P = 0 \rightarrow x^2 \underset{\substack{\downarrow \\ \text{certo}}}{- 7x} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{errado}}}{+ 12} = 0$

A equação original é $x^2 - 7x - 60 = 0$

$S = \dfrac{-(-7)}{1} = 7$

$P = \dfrac{-60}{1} = -60$

O conjunto solução é $\{-5, 12\}$, pois $(-5) + 12 = 7$ e $(-5)(12) = -60$.

Resoluções da seção Para estudar

55. a) $a = 1$ $b = -10$ $c = 2$

b) $a = 3$ $b = 1$ $c = -1$

c) $a = 1$ $b = 0$ $c = -49$

d) $a = 1$ $b = -6$ $c = 0$

e) $a = -1$ $b = 1$ $c = 0$

56. a) $x + 8 = \pm 3 \rightarrow x = -5$ ou $x = -11$

b) $(x - 4)^2 = -49 \rightarrow$ não existem raízes reais

c) $x + 5 = 0 \rightarrow x = -5$

d) $(x - 1) = \pm\sqrt{14} \rightarrow x = 1 + \sqrt{14}$ ou $x = 1 - \sqrt{14}$

57. x = lado do jardim

ℓ = lado do terreno

$x^2 = 36$

$x = \ell - 10 \rightarrow \ell^2\ 20\ell + 100 = 36$

$\ell^2 - 20\ell + 64 = 0$

$\ell = 16$ ou $\ell = 4$ (não serve)

O lado do terreno é 16 m.

58. a) $x = \dfrac{2 \pm 6}{16} \rightarrow x = \dfrac{1}{2}$ ou $x = -\dfrac{1}{4}$

b) $x = \dfrac{-2 \pm 6}{2} \rightarrow x = 2$ ou $x = -4$

c) $x = \dfrac{-11 \pm 9}{2} \rightarrow x = -10$ ou $x = -1$

d) $x = \dfrac{-10 \pm 2}{-2} \rightarrow x = 4$ ou $x = 6$

e) $x = \dfrac{2 \pm 0}{6} \rightarrow x = 0$

59. a) $x = \pm 11$

b) $x = \pm 7$

c) não existem raízes reais

d) não existem raízes reais

60. a) $x(x - 3) = 0 \rightarrow x = 0$ ou $x = 3$

b) $x(x + 13) = 0 \rightarrow x = 0$ ou $x = -13$

c) $6x(x - 9) = 0 \rightarrow x = 0$ ou $x = 9$

d) $8x(x + 8) = 0 \rightarrow x = 0$ ou $x = -8$

61. a) $(x - 3)(x - 5)$

b) $(x-4)^2$

c) $x(x-4)$

d) $(x + 4)(x - 4)$

62. a) $\Delta > 0$

$1 - 4k > 0 \rightarrow k < \dfrac{1}{4}$

63. a) $\Delta > 0 \rightarrow 1 - 8k > 0 \rightarrow k < \dfrac{1}{8}$

a) $\Delta = 0 \rightarrow 1 - 8k = 0 \rightarrow k = \dfrac{1}{8}$

a) $\Delta < 0 \rightarrow 1 - 8k < 0 \rightarrow k > \dfrac{1}{8}$

64. $\Delta = 0 \rightarrow 1 - 4(2m - 1) = 0$

$1 - 8m + 4 = 0 \rightarrow m = \dfrac{5}{8}$

65. a) $4x^2 - 16m^2 = 0 \rightarrow 4x^2 = 16m^2$

$x^2 = 4m^2$

$x^2 = \pm 2m$

b) $4(x^2 + m^2) = 8m^2$

$4x^2 + 4m^2 = 8m^2$

$4x^2 + 4m^2 \rightarrow x = \pm m$

66. a) $S = \left\{\dfrac{3}{4}; \dfrac{3}{2}\right\}$

b) Não tem raízes reais.

c) $S = \{-1; 1\}$

d) $S = \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$

Capítulo 3: Pontos, retas e circunferências

Objetivos específicos do capítulo

Explorar e aplicar as relações entre as medidas de cordas e outros segmentos em uma circunferência. Utilizar recursos tecnológicos para o desenvolvimento de habilidades cognitivas. Identificar retas externas, secantes e tangentes a uma circunferência.

Página 59

Leia o texto com seus alunos e procure estimular a discussão sobre alguns importantes conceitos relativos à circunferência, que envolvem ângulos, arcos e relações entre eles.

Lembre-se de escrever no quadro possíveis palavras que ainda sejam desconhecidas pelos alunos. Essa prática estimula a leitura de textos e propicia ao aluno discutir palavras, termos e ou conceitos que podem ser motivo de dúvidas gerais. O uso de dicionários pode ajudar em sala de aula e, podem possibilitar alguma atividade para fazer em casa, como uma tarefa programada de pesquisa das palavras novas dos textos.

Além disso, o uso de softwares como o Geogebra pode ser uma ferramenta útil nesse momemento. Veja um bom exemplo desse uso em:

CRISTINA CERRI. Computador na sala de aula: atividades com Geometria Dinâmica. Minicurso do IME – USP no 5o Encontro da RPM – Revista do Professor de Matemática. 3 a 4 de junho de 2011 – Salvador – BA.

Disponível em: < http://www.rpm.org.br/5e/docs/mc6.pdf >. Acesso em 02 mai. 2012.

Página 62

Atividade sobre potência de ponto

SUGESTÃO DE ATIVIDADE

Os alunos, em duplas, deverão:

1) Construir circunferências, em seus cadernos, utilizando compasso e traçar as cordas AB e AC que se interceptam em P.
2) Medir os segmentos PA, PB, PC e PD.
3) Identificar uma proporcionalidade com essas medidas.

O professor deverá fazer a socialização dos dados obtidos e enunciar a propriedade: O produto das medidas dos segmentos formados em uma corda (PA · PB) é igual ao produto dos segmentos formados na outra corda (PC · PD).

As demais atividades propostas são baseadas na interpretação dos enunciados e buscam avaliar o entendimento dos alunos sobre os principais tópicos do conteúdo.

O trabalho em equipe pode ser sugerido se o professor achar conveniente ao ambiente da sala de aula. Estimule a discussão e o processo de reprodução das representações geométricas, de forma análoga ao desenvolvido durante a leitura do livro texto.

A intenção é oferecer atividades com níveis crescentes de dificuldade e que podem ser corrigidas pelos alunos no quadro. Se o professor achar adequado, é possível estimular o convívio em sala de aula por meio das correções de exercícios, atividades em grupo etc.

Páginas 64 a 67

Organize grupos de alunos para fazerem pesquisas e depois, apresentarem seminários que tenham como objeto de estudo os elementos da circunferência, as propriedades dos arcos e dos ângulos, bem como as posições relativas entre duas circunferências e entre uma reta e uma circunferência. Você pode impor algumas condições para a apresentação desse seminário, como:

- Todos os participantes do grupo devem falar durante a apresentação.
- Os alunos que assistem ao seminário deverão fazer perguntas ao grupo que se apresenta.
- Os grupos devem produzir material de exposição: cartazes, painéis, objetos que representem a circunferência e seus elementos.
- Usar recursos tecnológicos, caso a escola disponha de algum.
- Os alunos deverão usar a imaginação para fazer uma boa apresentação.

SUGESTÃO DE ATIVIDADE

Sugestão de leitura

Faça a leitura do texto e discuta com seus alunos sobre o tema apresentado.

É uma boa oportunidade para discutir catástrofes semelhantes que ocorreram em outras localidades, antes e depois do terremoto do Chile e sugerir aos alunos pesquisas sobre as diferenças entre cada caso.

Os professores de Geografia e História podem se interessar em participar de forma colaborativa com esse tipo de pesquisa e essas comparações podem ser usadas para criar atividades multidisciplinares, onde as diferenças de impacto sobre cada população, em cada época, têm características distintas.

Veja na internet o Monitor de Terremotos, um sitio que dá formações sobre terremotos e está disponível em < http://www.apolo11.com/terremotos.php>. Acesso em 02/05/12.

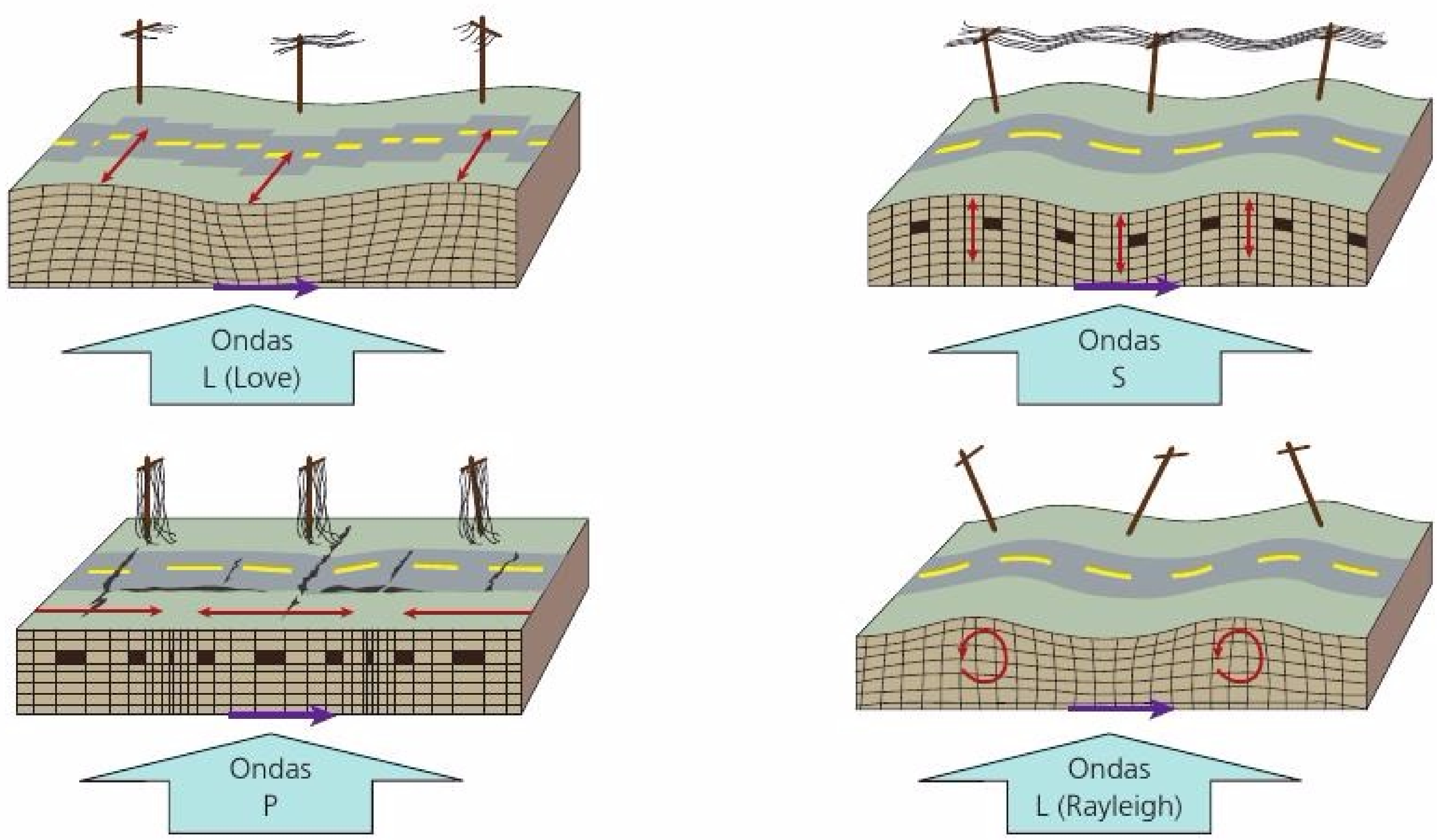
Epicentro de um terremoto

No sábado, 27 de fevereiro de 2010, um terremoto de 8,8 pontos na escala Richter ocorreu no Chile, provocando cerca 300 mortes e destruindo mais de 80% das casas e edifícios da região afetada. Seu epicentro localizou-se no mar chileno, a aproximadamente 150 quilômetros a noroeste da cidade de Concepción, uma das mais atingidas pelo terremoto.

Emi Cristea/Dreamstime

Sempre que ocorre um terremoto, duas informações importantes são imediatamente transmitidas: seu grau de intensidade e a localização de seu epicentro, ou seja, do local a partir do qual as ondas sísmicas (ondas produzidas pelo terremoto) se propagam. Vamos entender qual é o processo utilizado para a localização do epicentro.

As ondas produzidas por um terremoto são de quatro tipos: Ondas de Love, Ondas de Raleigh, ondas P e ondas S. Veja no esquema os quatro tipos de ondas produzidas num terremoto e as diferentes vibrações por elas produzidas.

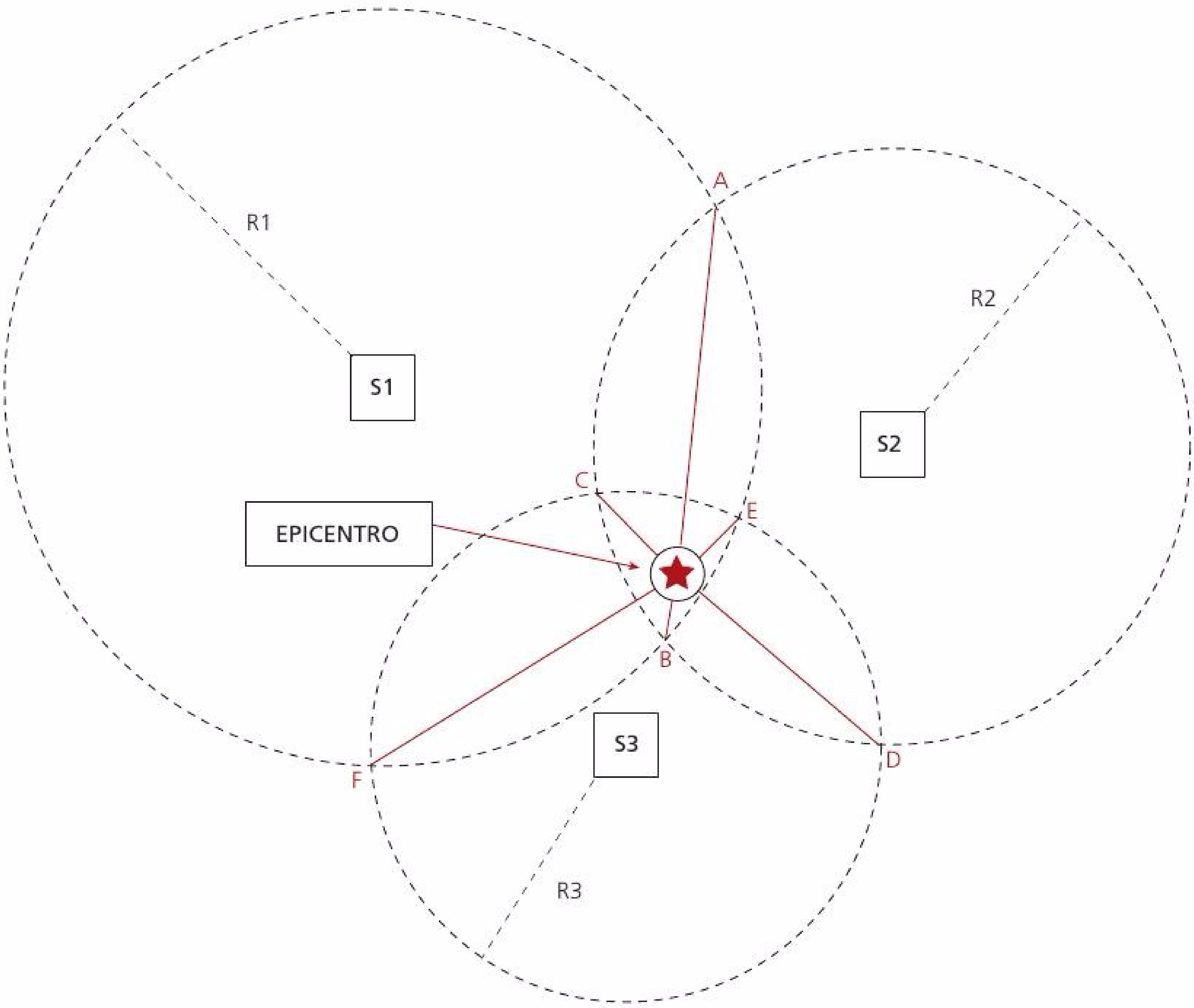


Observe que cada uma delas tem um tipo de propagação e vibração que, juntamente com as outras, provocam a destruição que estamos acostumados a observar nos terremotos.

O aparelho que detecta as ondas provocadas pelo terremoto chama-se sismógrafo e é preciso uma rede de pelo menos três sismógrafos para localizar o epicentro do terremoto.

Cada um dos sismógrafos S1, S2 e S3 recebe as ondas em intervalos de tempos diferentes e, através de cálculos geológicos preestabelecidos, calcula a distância que o separa do epicentro. Basicamente, este cálculo é feito multiplicando-se o tempo pela velocidade média dessas ondas compostas, que é de 6,7 quilômetros por segundo.

Assim, se um sismógrafo recebe ondas a cada 20 segundos, o epicentro estará a 134 km da estação onde está o sismógrafo. Esta é uma distância radial, ou seja, o epicentro está numa posição dentro do raio de uma circunferência de 134 km.



A localização de um epicentro é feita estabelecendo-se os raios de posicionamento a partir de três sismógrafos, que fornecem três circunferências, duas a duas secantes entre si. Veja o esquema com os sismógrafos S1, S2 e S3.

As circunferências de raios R1 e R2, encontram-se em A e B, as de raios R1 e R3, em E e F e as de raio R2 e R3 em C e D. O epicentro estará localizado no ponto de encontro dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ e $\overline{EF}$.

Resoluções da seção Para estudar

14. a) $x = y = 104°$
b) $x = y = 80°$

15. a) $2x + x + 15 = 180°$
$3x = 165 \rightarrow x = 55°$
Os ângulos do triângulo são 30°, 60° e 90°.
b) $x + 10 + x + 50 = 90$
$2x + 60 = 90 \rightarrow x = 15°$
Os ângulos do triângulo são 25°, 65°, 90°.

16. $2x - 24 = x + 14 \rightarrow x = 38°$
$2x - 24 = 52° \rightarrow$ ângulo inscrito $= 26°$

17. 30° corresponde a $\frac{1}{12}$; 135°, a $\frac{3}{8}$; e 15°, a $\frac{1}{24}$.

18. a) 12
b) 32
c) 16

19. a) $2 \cdot (4x - 1) = 3x \rightarrow x = \frac{2}{5}$
b) $2 \cdot 4x = 16 \rightarrow x = 2$

20. a) $6 \cdot (6 + r) = 64$
$36 + 6r = 64$
$6r = 28 \rightarrow r = \frac{14}{3}$ cm
b) $4r^2 = 81 + 36$
$4r^2 = 117 \rightarrow r = \frac{\sqrt{117}}{4}$ cm

21. $14 \cdot 20 = \overline{PT}^2$
$\overline{PT}^2 = 280$
$20^2 = \overline{PT}^2 + 4r^2 \rightarrow 4r^2 = 120$
$r^2 = 30$
$r = \sqrt{30}$ cm

22. ΔPTQ é retângulo
$P\hat{O}T = 60° \rightarrow x = 30°$

Capítulo 4: Equações algébricas

Objetivos específicos do capítulo

Relacionar a história da humanidade com o desenvolvimento da Matemática; transferir o uso da linguagem oral para a escrita. Fazer estimativas mentais de resultados ou cálculos aproximados. Ler e interpretar textos para compreender e transmitir ideias matemáticas, por escrito ou oralmente, desenvolvendo a capacidade de argumentação. Interpretar matematicamente situações do dia-a-dia e, também, do mundo tecnológico e científico para o exercício da cidadania. Usar com clareza os símbolos matemáticos e identificar diferentes formas ou abordagens para resolver problemas.

Página 74

Outra maneira de abordar o problema é verificar qual é o intervalo de validade do termo A dentro da raiz:

$$\{\sqrt{A} \in R \colon A \geq 0\}$$

No caso do exemplo dado no livro do aluno, pode-se averiguar que:

$$3x - 2 \geq 0$$
$$x \geq \frac{2}{3}$$

Como o resultado válido da equação $\sqrt{3x - 2} = 4$ é 6, então a averiguação funcionou, pois ajudou a invalidar o outro resultado, que é 0.

Na próxima equação, $\sqrt{5x + 1} = x - 1$, a abordagem é outra, pois existe a variável em ambos os lados da expressão. Neste caso, pode-se utilizar um sistema de inequações de primeiro grau, na seguinte forma:

$$\begin{cases} 5x + 1 \geq 0 \\ x - 1 \geq 0 \end{cases}$$

Tanto o termo dentro da raiz como o resultado da raiz precisam ser positivos. Assim, $x \geq \frac{3}{2}$ e $x \geq 1$; é óbvio que prevalece a última condição e, portanto, a resposta válida para a equação $\sqrt{5x + 1} = x - 1$ é $x = 7$.

Já no último exemplo,

$$\sqrt{3x - 11} - \sqrt{5 - x} = 2$$

não há um procedimento trivial para avaliar o intervalo de validade a não ser resolver a equação acima e testar os resultados para verificar se não há falseamento.

Página 75

Em todo o caso, peça ao aluno para verificar se a solução é compatível com a equação, isto é, peça para ele substituir os valores encontrados para nas equações fracionárias.

Página 76

Das obras de Diofanto de Alexandria (*A Aritmética*, uma obra sobre números poligonais, da qual se conhece apenas um fragmento, e a obra *Porismas*, que está perdida) a Aritmética é a mais importante. Está escrita em grego, é um tratado analítico de teoria algébrica dos números e é constituída por 13 livros, como nos diz o próprioDiofanto no prefácio. Até há cerca de 30 anos, desses livros eram conhecidos apenas 6, na língua original; posteriormente, apareceram mais 4 livros, traduzidos em árabe, que alguns historiadores julgam fazer parte da obra.

A Aritmética de Diofanto é um trabalho completamente diferente dos demais trabalhos gregos da época, assemelhando-se aos trabalhos "algébricos" dos babilônios, mas revelando relativamente a eles, um grande avanço nesta área. Esta obra não é umaexposição sistemática de proposições, mas sim uma recolha de problemas (mais de uma centena!) formulada em termos de exemplos (o que do ponto de vista matemático é inferior à ciência grega feita até então) e as demonstrações são apenas ilustrações, em casos particulares concretos.

Uma das contribuições mais significativas deste trabalho diz respeito às notações: são introduzidas algumas abreviaturas para designar quantidades e operações, iniciando o que viria a chamar-se "álgebra sincopada". Os historiadores distinguem, em geral, três períodos no desenvolvimento da álgebra: álgebra retórica, em que tudo é explicado por palavras; álgebra sincopada, na qual se usam algumas abreviaturas e álgebra simbólica).

Página 79

Qual das duas soluções podem ser usadas? Ambas, pois as equações não definem qual lado é maior que o outro. Caso se queira definir que x > y, por exemplo, é preciso acrescentar esta condição denominada condição de contorno:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 42 \\ xy \qquad\; = 80 \\ (x > y) \end{cases}$$

Equações semelhantes a esta foram comentadas por Hipátia de Alexandria (370-415 A.D. - Anno Domini), considerada a primeira matemática mulher de quem se tem conhecimento mais seguro.

Alguns trabalhos de Hepátia incluem extensões da obra de Diofanto, *Arithmetica*. Um dos desafios propostos por ela é encontrar soluções com valores inteiros do sistema abaixo, sendo a e b conhecidos:

$$\begin{cases} x - y = a \\ x^2 - y^2 = (x - y) + b \end{cases}$$

Foi vítima do fanatismo de alguns cristãos na época, que não toleravam uma adepta do neoplatonismo e seguidora de Pitágoras. Ela foi retratada na famosa pintura de Rafael, *Escola de Atenas*.

Página 79

Como foi ressaltado anteriormente, neste sistema de equações há uma condição de contorno, onde os valores do resultado têm que ser naturais,

$$x, y \in N.$$

Atenção: resultados de um sistema de equações na forma abaixo, na verdade, representam uma equação de segundo grau:

$$\begin{cases} x + y = s \\ xy = t \end{cases}$$

onde s e t são valores dados.

Para perceber isto, faça a seguinte troca de expressões:

$$s = -\frac{b}{a}$$

$$s = \frac{c}{a}$$

$$x = x_1$$

$$y = x_2$$

$$(a \neq 0)$$

Assim,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

Substituindo $x_2 = -x_1 - \frac{b}{a}$ em $x_1x_2 = \frac{c}{a}$, obtém-se que:

$$x_1\left(-x_1 - \frac{b}{a}\right) - \frac{c}{a} = 0$$

$$x_1^2 + \frac{b}{a}x_1 + \frac{c}{a} = 0 \quad (x_a)$$

$$ax_1^2 + bx_1 + c = 0.$$

O enfoque desse tema é desenvolver no aluno a capacidade de ler, interpretar, escolher estratégias e analisar a solução de uma situação-problema.

Ao abordar cada situação-problema, sempre dê atenção e faça comentários para qualquer solução diferente dada pelos alunos. O importante é que foi feita a leitura, a interpretação, a análise e a escolha de uma estratégia correta para resolução do problema em questão.

Situação Problema 1. Determine três números inteiros positivos e consecutivos tais que o quadrado do menor seja igual a diferença dos outros dois.

SUGESTÃO DE ATIVIDADE

Comentários:

Acreditamos que nesse tipo de problema, os alunos têm dificuldade em interpretar corretamente, visto que é muito comum a montagem da equação errada: $x^2 = (x + 1) - (x + 2)$.

O quadrado de um número não pode ser negativo, portanto, neste caso, devemos fazer $(x + 2) - (x + 1)$ e não o contrário.

Devemos, então, enfatizar, que a leitura atenta do enunciado é fundamental para uma correta interpretação!

Uma proposta de solução:

Interpretando o problema e usando a linguagem algébrica:

x, representa o menor número

$x + 1$, representa o consecutivo de x

$x + 2$, representa o consecutivo de $x + 1$

Obs: Poderíamos também representá-los por x, $x - 1$ e $x - 2$. Nesse caso, x representa o maior dos três números.

Como estratégia de resolução, procedemos a montagem da equação de acordo com o enunciado do problema:

$x^2 = (x + 2) - (x + 1)$

Desenvolvendo, temos:

$x^2 = x + 2 - x - 1$

$x^2 = 1$

Lembrando que: $a^2 = b \rightarrow a = \pm\sqrt{b}$

Temos: $x = \pm1$ e $x = \pm\sqrt{1}$

Logo, $x = 1$ ou $x = -1$

Analisando a condição do problema, "três números inteiros positivos e consecutivos", a única solução que satisfaz é $x = 1$.

Resposta: Os números são 1, 2 e 3.

Situação Problema 2. Pai e filho têm hoje 45 e 15 anos, respectivamente. Há quantos anos a idade do pai era igual ao quadrado da idade do filho?

Comentários:

Em problemas como esse que envolvem tempo decorrido — Há quantos anos... — é importante comentar na turma, que o sinal de menos (–), não significa "retirar" uma quantidade e sim, voltar no tempo! O mesmo vale para situações que se remetem a tempo futuro: "Daqui a quanto tempo...". O sinal de mais (+) significa avançar no tempo.

Uma proposta de solução:

De acordo com o enunciado, podemos fazer uma representação algébrica das idades do pai e do filho, há x anos.

idade do pai há x anos: $45 - x$

idade do filho há x anos: $15 - x$

Equalizando as informações: $45 - x = (15 - x)2$

Desenvolvendo a equação, obtemos:

$$45 - x = 225 - 30x + x^2$$

Utilizando o princípio de equivalência, temos:

$$x^2 - 29x + 180 = 0$$

Resolvendo a equação utilizando as relações entre coeficientes e raízes:

$$S = 29$$
$$P = 180$$

Devemos pensar em dois números positivos (soma e produto positivos).

Os números são: 9 e 20.

Analisando os resultados encontrados, o valor 20 não pode ser usado no problema, pois, nesse caso, o filho teria idade negativa!

Portando, para $x = 9$ temos para idades: 36 e 6 anos.

Resposta: Há 9 anos.

Sugestão de Leitura

Leia para os alunos e apresente o Desafio sobre a vida de Diofanto.

De preferência, monte a tabela no quadro e prencha-a coletivamente, até a montagem da equação.

O enigma de Diofanto

Diofanto de Alexandria foi, sem dúvida, o maior algebrista grego. Apesar de ter nascido em Alexandria, no Egito, foi educado e viveu toda a sua vida em Atenas, na Grécia. À semelhança de outros matemáticos antigos, pouco se sabe sobre sua vida. Supõe-se, a partir de seus escritos, que tenha vivido em torno de 220 A.D. (*Anno Domini*).

Diofanto desempenha na história da Aritmética e da Álgebra um papel semelhante ao que Euclides teve na Geometria e Ptolomeu na Astronomia, tendo contribuído de forma definitiva na elaboração dos conceitos teóricos e práticos que influenciaram os métodos hoje empregados na Álgebra.

Biblioteca Nacional, Paris, França

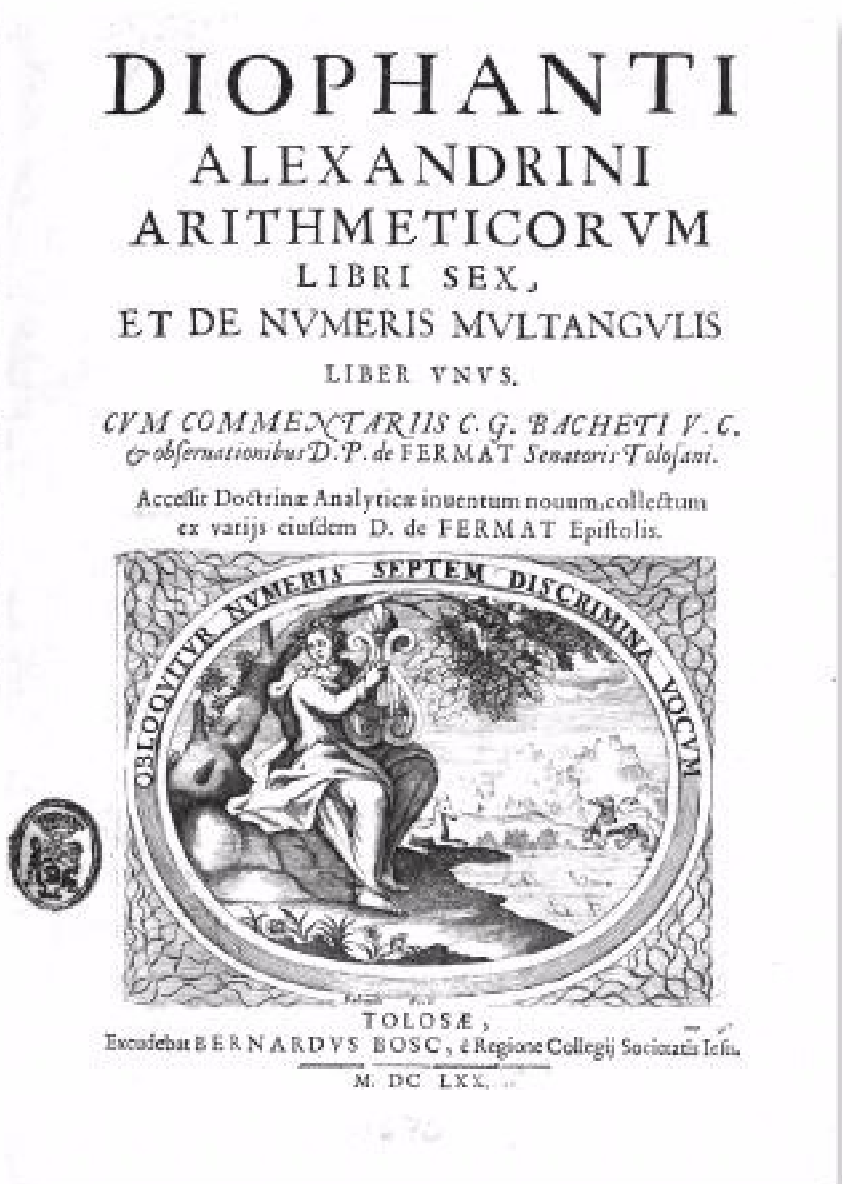
Diofanto

Sua principal obra é a *Arithmetica*, tratado originalmente escrito em treze livros dos quais só foram preservados os seis primeiros. Essa obra não é uma exposição sobre as operações algébricas ou as funções algébricas, mas uma coleção de 130 problemas, dos quais não se sabe os que eram originais e os que eram emprestados de outras coleções.

Alguns historiadores registram que no túmulo onde Diofante estaria enterrado, havia uma lápide com um texto acerca de sua vida, na forma de um enigma que indicaria quantos anos Diofanto viveu.

Reproduzimos a seguir este enigma para que você o decifre e responda às perguntas deste desafio.

Bibliothèque Publique et Universitaire; Genebra


DIOPHANTI ALEXANDRINI ARITHMETICORVM LIBRI SEX, ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS LIBER VNVS.

CVM COMMENTARIIS C. G. BACHETI V. C. & obseruationibus D. P. de FERMAT Senatoris Tolosani.

Accessit Doctrinæ Analyticæ inuentum nouum, collectum ex varijs eiusdem D. de FERMAT Epistolis.

TOLOSÆ, Excudebat BERNARDVS BOSC, è Regione Collegij Societatis Iesu. M. DC. LXX.

Capa de uma publicação, de 1670, do sexto livro do conjunto de treze livros de Diofanto, denominados *Arithmetica*.

Para melhor compreensão do texto, lembre-se que:

- **A vida de Diofanto é determinada em anos.**
- **Duodécima parte significa $\frac{1}{12}$.**
- **Quinquênio quer dizer "5 anos".**

Leia atentamente o texto da próxima página. Utilizando a tabela que contém as informações contidas no enigma, responda as perguntas. Para começar a resolver o enigma, uma dica: Diofanto viveu **x anos.**

Na lápide do túmulo de Diofanto, segundo historiadores, estava escrito o enigma que você deve resolver usando a linguagem simbólica da álgebra para montar uma equação:

> **Caminhante! Aqui estão sepultados os restos de Diofanto. Os números podem mostrar quão longa foi sua vida, cuja sexta parte foi sua bela infância.**
>
> **Tinha decorrido mais uma duodécima parte de sua vida, quando seu rosto cobriu-se de pelos e a sétima parte seguinte de sua vida decorreu com um casamento estéril.**
>
> **Passou mais um quinquênio e ficou feliz com o nascimento de seu querido primogênito, cuja bela existência durou apenas metade da de seu pai, que com muita pena de todos desceu à sepultura quatro anos depois do enterro de seu filho.**

DESAFIO:

1. $x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 \rightarrow x = 84$ anos

2. $\frac{84}{6} + \frac{84}{12} + \frac{84}{7} + 5 = 38$ anos

3. 42 anos

1. Quantos anos viveu Diofanto?

2. Quantos anos tinha Diofanto quando seu primeiro filho nasceu?

3. Com quantos anos morreu este filho?

Para ajudá-lo na solução do enigma, organizamos a tabela a seguir onde algumas informações já estão preenchidas. Em seu caderno, traduza as demais para a linguagem algébrica e calcule **x.**

ENIGMA	TRADUÇÃO ALGÉBRICA
Caminhante! Aqui estão sepultados os restos de Diofanto. Os números podem mostrar quão longa foi sua vida.	x
Cuja sexta parte foi sua bela infância.	$\frac{x}{6}$
Tinha decorrido mais uma duodécima parte de sua vida, quando seu rosto cobriu-se de pelos.	$\frac{x}{12}$
E a sétima parte seguinte de sua vida decorreu com uma casamento estéril.	$\frac{x}{7}$
Passou mais um quinquênio e ficou feliz com o nascimento de seu querido primogênito.	5
Cuja bela existência durou apenas metade da de seu pai.	$\frac{x}{2}$
Que com muita pena de todos desceu à sepultura quatro anos depois do enterro de seu filho.	4

Resoluções da seção Para estudar

28. a) $1 + x = 1 + 2x + x^2$

$x^2 + x = 0 \rightarrow x(x+1)$

$x = 1$ ou $x = -1$

Na verificação, $x = 1$ não serve.

$S = \{-1\}$

b) $5 + x = x + 2\sqrt{5x} + 5$

$2\sqrt{5x} = 0 \rightarrow x = 0$

$S = \{0\}$

c) $2x + 1 = x^2 - 2x + 1$

$x^2 - 4x = 0 \rightarrow x = 0$ ou $x = 4$

Na verificação, $x = 0$ não serve.

$S = \{4\}$

d) $2x - 5 = 1$

$x = 3 \rightarrow S = \{3\}$

29. $S = \varnothing$

30. a) $S = \varnothing$

b) $S = \{36\}$

31. a) $S = \{-17\}$

b) $S = \varnothing$

c) $S = \{0, 1\}$

32. a) $S = \{1\}$

b) $S = \{-1\}$

c) $S = \{0\}$

d) $S = \{-4, 1\}$

33 a) $S = \{(5; 2)\}$

b) $S = \{(25, 5); (16, -4)\}$

34. a) $S = \varnothing$

b) $\{(2; 2), (-3; 7)\}$

35. $\begin{cases} 2x + 2y = 12 \\ x \cdot y = 8 \end{cases}$

Como x e y são lados do retângulo, são não nulos.

$y = \dfrac{8}{x} \rightarrow 2x + 2 \cdot \dfrac{8}{x} = 12 \rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0$

Logo: $x = 4$ ou $x = 2 \rightarrow y = 2$ ou $y = 4$

Os lados do retângulo são 2 e 4.

36. $\begin{cases} x + y = 15 \\ x \cdot y = 56 \end{cases}$

$x \neq 0$ e $y \neq 0 \rightarrow y = \dfrac{56}{x}$

$x + \dfrac{56}{x} = 15 \rightarrow x^2 - 15x + 56 = 0$

Logo: $x = 8$ ou $x = 7 \rightarrow y = 7$ ou $y = 8$

Os números são 7 e 8.

37. $\begin{cases} x \cdot y = 99 \\ y = x + 2 \end{cases}$

$x(x + 2) = 99 \rightarrow x^2 + 2x - 99 = 0$

Logo: $x = 9$ ou $x = -11$ (não serve)

$x = 9 \rightarrow y = 11.$

38. $(x + 1)^2 = 5x - 1 \rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$

Logo: $x = 2$ ou $x = 1$

39. $(x + 1)^2 - x^2 = 19$

$x^2 + 2x + 1 - x^2 = 19 \rightarrow x = 9$

Logo, os inteiros são 9 e 10.

Capítulo 5: Semelhança de Triângulos

Objetivos específicos do capítulo

Identificar a semelhança entre triângulos. Discutir as consequências da semelhança de triângulos. Utilizar recursos tecnológicos para o desenvolvimento de habilidades cognitivas. Desenvolver jogos ou atividades lúdicas para complementar o processo do ensino- aprendizagem no desenvolvimento da criatividade.

Página 91

Leia o livro texto em sala de aula e, no quadro, reproduza as representações do feixe de paralelas cortado por uma transversal. Se possível, solicite para que alunos venham até o quadro para fazer as representações. Estimule o uso de diferentes cores para representar as figuras.

Espera-se que o aluno reconheça que no estudo das proporcionalidades não há um único método de resolução.

A atividade a seguir trabalha com o Teorema de Tales. É proposto que os alunos construam um jogo utilizando os conhecimentos matemáticos sobre proporcionalidade e o Teorema de Tales. Confira as instruções no site:

http://www.ibilce.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/metodologias-alternativas--para-o-ensino-do-teorema-de-tales-informatica-e-jogos.pdf acessado em 13 de maio de 2015.

Sugestão de leitura:

Semelhança não é mera coincidência
Parte da coleção Vivendo a Matemática
Editora Scipione
Autor: Nílson José Machado
Ilustrador: Joubert J. Lancha

Este livro introduz o tema da semelhança a partir de situações presentes no cotidiano do aluno e recupera os conceitos, já minimamente construídos, de manutenção da forma, proporcionalidade e escala, aprofundando-os com habilidade e clareza.

Página 94 a 96

As atividades foram elaboradas para obedecer a uma ordem crescente de dificuldade. Contudo, é interessante que o professor leia com os alunos os enunciados e represente no quadro cada enunciado.

Estimule a discussão em grupos, se achar propício e, solicite que os alunos representem no quadro suas respostas.

Página 98 a 101

A leitura do livro texto deve prosseguir nos mesmos moldes anteriores e a sensibilização do aluno para os detalhes pode ser ilustrada no quadro e com o uso do software, se possível. No quadro, reproduza a ideia da "Semelhança" sugerida no texto. Se possível, solicite para que alunos venham até o quadro para fazer as representações e estimule o uso de diferentes cores para representar a situação proposta.

SUGESTÃO DE ATIVIDADE

Atividade Didática: Espelho serve para medir?

Objetivos:

- Compreender o que é semelhança;
- Utilizar a semelhança de triângulos para o cálculo de distâncias inacessíveis.

Material Necessário: espelho, fita métrica ou trena, calculadora.

Desenvolvimento:

1ª Etapa: A turma deverá ser dividida em pequenos grupos.

2ª Etapa: Cada grupo deverá escolher o que irá medir (elevador da escola, a altura da haste da cesta de basquete, a altura de um dos prédios da escola)

3ª Etapa: Cada grupo recebe um espelho e posiciona-o entre um dos integrantes do grupo e a estrutura a ser medida, de tal forma que, seja possível ver o seu topo.

4ª Etapa: Os demais integrantes do grupo fazem as medidas da altura do integrante que se posicionou entre o espelho e o objeto, da distância entre o integrante e o espelho e entre o espelho e o objeto a ser medido.

5ª Etapa: Identificar a semelhança entre os triângulos formados pelo observador, espelho e objeto observado.

6ª Etapa: Através dos resultados obtidos, realizar o cálculo da altura inacessível utilizando a semelhança dos triângulos.

Avaliação:

Após o desenvolvimento da atividade alunos e professor promovem uma discussão sobre tudo o que foi feito, sobre os resultados obtidos e a sua aplicabilidade.

Veja mais informações no site < http://www.fai.com.br/portal/pibid/adm/atividades_anexo/36.pdf >acessado em 13 de maio de 215.

Páginas 106 a 107

Veja outras atividades propostas pelo Núcleo de Ensino da Unesp que aborda congruência e semelhança de triângulos através de modelos.

http://www.ibilce.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/congruencia-e-semelhanca--de-triangulos---prof-rita.pdf acessado em 13 de maio de 2015.

Página 108

Leia o texto sobre Tales com seus alunos e discuta sobre o tema.

Reproduza a experiência com seus alunos com a utilização de lanternas, cabos de vassouras, canetas, enfim, qualquer material disponível. Outra ideia é pedir para que os alunos se reúnam em grupos e construam suas próprias experiências e, tomando nota de cada medida encontrada, apresentem um relatório na aula seguinte.

SUGESTÃO DE ATIVIDADE

Proponha aos alunos uma atividade experimental em que ele utilize semelhança de triângulos.

Algumas sugestões:

- Medir a altura de um colega utilizando a sua sombra e comparando com a altura e a sombra de um outro objeto menor (cabo de vassoura, caneta,...). Para isso, leve os alunos ao pátio e use materiais adequados como trenas e fitas métricas para realizar as medições.
- Fazer a medição de alturas inacessíveis (altura do prédio da escola, da tabela de basquete,....), comparando com a altura e a sombra de um objeto menor (caneta, cabo de vassoura,...). Para isso, leve os alunos ao pátio e use materiais adequados como trenas e fitas métricas para realizar as medições.

- Sugira que os alunos gravem as etapas dos procedimentos de medições e depois, em aula, assistam os vídeos de todos os colegas. Assim além de trabalhar com conceitos matemáticas o aluno desenvolverá os procedimentos de trabalhar em grupo, fazer filmagens e edições dos filmes.

Resoluções da seção Para estudar

34. a) Sim.

b) Sim.

c) Sim.

35. $\frac{3}{2x} = \frac{8}{16} \rightarrow x = 3$

$\frac{3}{6} = \frac{8}{AD} \rightarrow AD = 16$

36. a) $x = 3{,}6$

b) $\frac{7}{14} = \frac{x-2}{x} \rightarrow x = 2x - 4 \rightarrow x = 4$

c) $\frac{x}{2} = \frac{22{,}5}{7{,}5} \rightarrow x = 4$

37. a) $\frac{6}{4} = \frac{x}{5} \rightarrow x = 7{,}5$ e $y = 8$

b) $\frac{12}{3} = \frac{x}{2} \rightarrow x = 8$

$\frac{y}{12} = \frac{6}{8} \rightarrow y = 9$

38. a) $\frac{24}{x} = \frac{15}{10} \rightarrow x = 16 \rightarrow y = 8$

b) $\frac{27}{9} = \frac{x}{6} \rightarrow x = 18$

39. a) $\frac{x}{6} = \frac{10}{8} \rightarrow x = 7{,}5$

b) $\frac{2x+1}{12} = \frac{3x+1}{16} \rightarrow x = 1$

40. a) $x = 10$

b) 48

c) 10

d) 68

41. $k = \frac{12}{9} = 1{,}\overline{3}$

42. 12, 8, 14 → 2p = 34

43. a) x = 3,6, y = 23,04

b) $x = \frac{5}{3}$ e y = 6

44. Aproximadamente 21m

45. Altura = 24m

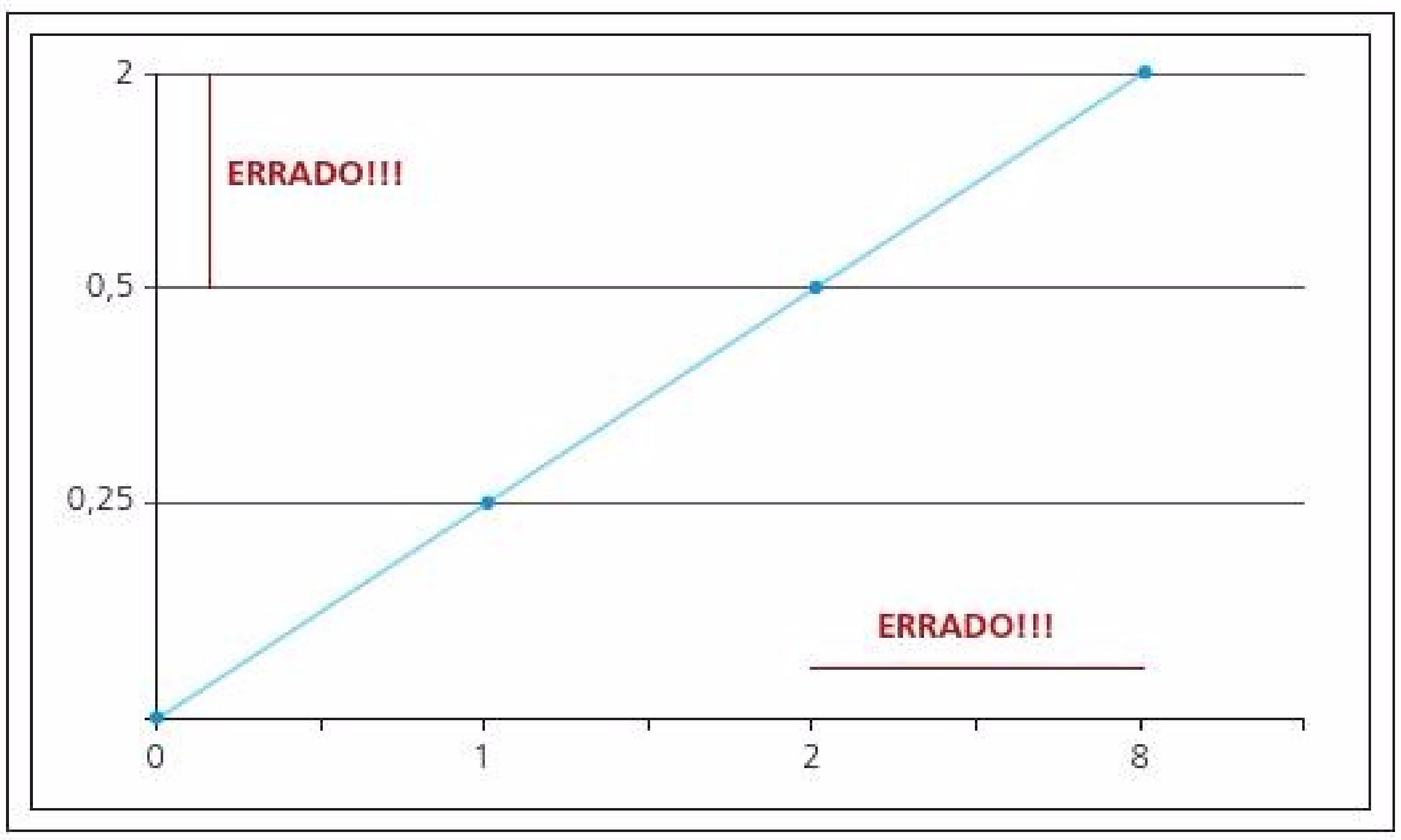
Capítulo 6: Funções

Objetivos específicos do capítulo

Relacionar a história da humanidade com o desenvolvimento da Matemático. Transferir o uso da linguagem oral para a escrita. Fazer estimativas mentais de resultados ou cálculos aproximados. Ler e interpretar textos para compreender e transmitir ideias matemáticas, por escrito ou oralmente, desenvolvendo a capacidade de argumentação. Interpretar matematicamente situações do dia-a-diae, também, do mundo tecnológico e científico para o exercício da cidadania. Usar com clareza os símbolos matemáticos e identificar diferentes formas ou abordagens para resolver problemas.

Página 120

Enfatize a importância de se observar as escalas nos gráficos, pois é comum o aluno simplesmente colocar as coordenadas em ordem, como no exemplo abaixo:



Página 128

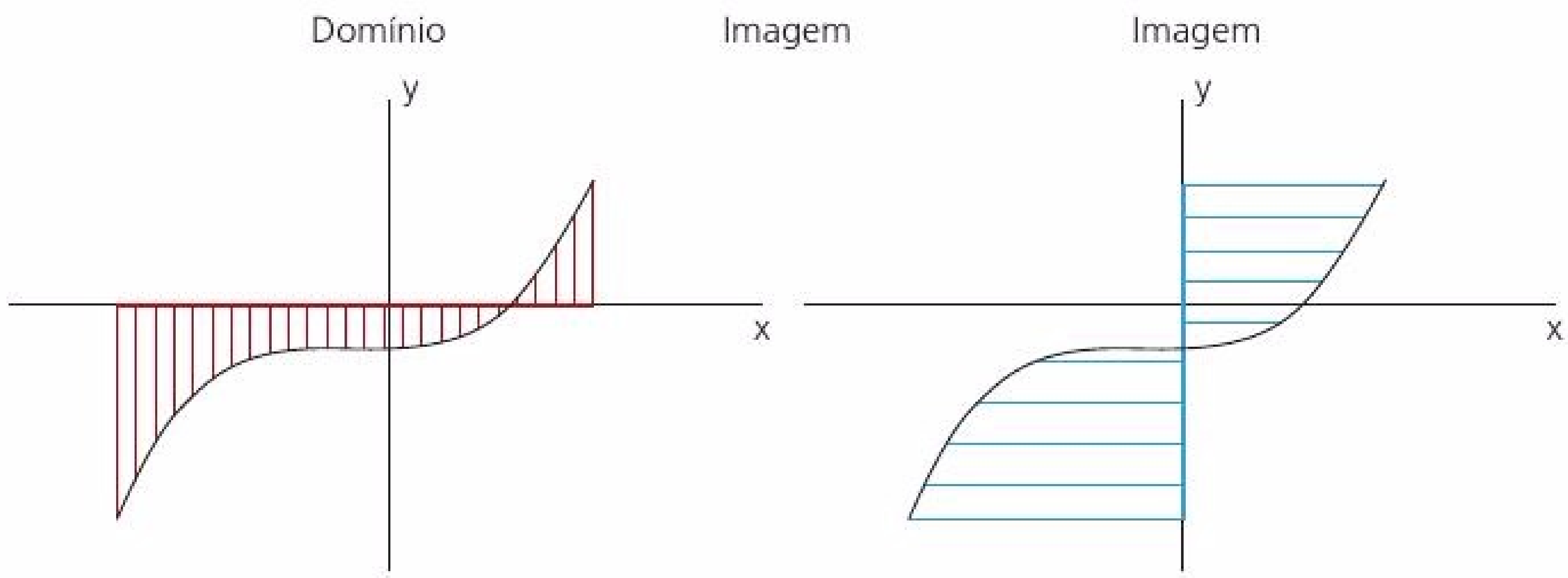
Uma ideia para tornar o conceito de domínio um pouco menos abstrato é através do uso da calculadora. Dizer que o domínio é o conjunto dos valores de x para os quais a calculadora não dá mensagem de erro ajuda o aluno a fazer uma associação de um conceito matemático com algo físico e manipulável, o que ajuda na compreensão.

Por exemplo, a calculadora dá mensagem de erro quando se tenta dividir por zero. Então, em $f(x) = \frac{1}{x-3}$, não podemos fazer x=3, pois $\frac{1}{3-3}$ dá uma mensagem de erro.

A calculadora também dá mensagem de erro quando se tenta tirar a raiz quadrada de um número negativo.

Portanto, numa função como $f(x) = \sqrt{x-5}$, se substituirmos x por qualquer valor menor que 5, a subtração $x - 5$ resultará num número negativo e, ao tirarmos a raiz deste número, a calculadora dará uma mensagem de erro.

Enfatize o uso das projeções, pois, em geral, elas não são triviais para os alunos, e são úteis para que eles enxerguem os sinais das funções, principalmente quando forem estudar as inequações.



Página 130

Uma das principais razões pelas quais estamos interessados em estudar o gráfico de uma função é determinar o número e a localização (pelo menos aproximada) de seus zeros. Recorde que zero ou raiz de uma função f é uma solução da equação $f(x) = 0$.

O problema de calcular as raízes de uma equação sempre foi objeto de estudo da matemática ao longo dos séculos. Já era conhecida, na antiga Babilônia, a fórmula para o cálculo das raízes exatas de uma equação geral do segundo grau. No século XVI, matemáticos italianos descobriram fórmulas para o cálculo de soluções exatas de equações polinomiais do terceiro e do quarto grau. Essas fórmulas são muito complicadas e por isso são raramente usadas nos dias de hoje. Perguntas como as descritas a seguir ocuparam as mentes dos matemáticos até o início do século XIX, quando este problema foi completamente resolvido.

Qual é o maior número de zeros que uma função polinomial pode ter?

Qual é o menor número de zeros que uma função polinomial pode ter?

Como podemos encontrar todos os zeros de um polinômio, isto é, como podemos encontrar todas as raízes de uma equação polinomial?

Ao estudar as raízes de uma função tentamos responder a estas perguntas refazendo o caminho percorrido por famosos matemáticos desde o século XVI.

Disponível em: http://www.im.ufrj.br/dmm/projeto/projetoc/precalculo/sala/conteudo/capitulos/cap111s4.html Acesso em 10. Maio, 2015

Página 154

SUGESTÃO DE ATIVIDADE

Se achar conveniente, utilize mais exemplos para ilustrar a função constante:

Situação Problema 1: Um carro passa por um semáforo, cujo sinal luminoso está na cor verde.

Nos próximos 20 segundos, seu velocímetro indicará 60 km/h.

(Considere o semáforo como um instante t = 0)

Durante todo o percurso, à medida que o tempo passa a velocidade se mantém a 60 km/h.

Na ilustração, observamos que a posição do carro está variando com o decorrer do tempo. Isso é o que fez o carro estar em movimento!

Dependendo do movimento podemos classificá-lo em:

a) Movimento Uniformemente: quando o valor da velocidade permanece invariável (constante) com o decorrer do tempo, ou seja, a aceleração é nula.

b) Movimento Uniforme Variado: possui aceleração constante e diferente de zero, em qualquer instante ou intervalo de tempo.

Com base no conceito apresentado responda:

a) Associando aos conhecimentos da Física, descreva o movimento desenvolvido pelo carro no contexto apresentado.

b) Nesse movimento, a velocidade do carro pode ser descrita por uma lei. Escreva essa lei (utilizar as grandezas v e t).

Depois de respondidas essas questões é hora de formalizar esse conceito e o professor pode ilustrar o tema no quadro as situações para $a > 0$ e $a < 0$ presentes no livro do aluno.

Página 167

Lembre ao aluno que, em $-x^2$, primeiro se resolve a potência e, depois, o produto por -1. O aluno, muitas vezes, acha que o resultado de $-x^2$ deve ser positivo, pois "negativo ao quadrado dá positivo".

Lembre-o que $-3^2 = -9$, e que o que dá positivo é $(-3)^2=9$

Página 171

Enfatize a ideia de que uma equação não muda se for multiplicada ou dividida por um número (diferente de zero), mas, uma função, sim.

Por exemplo, considere $f(x) = -2x^2 + 10x - 12$

Para achar as raízes:

$-2x^2 + 10x - 12 = 0 \rightarrow x = 2$ ou $x = 3$

Multiplicando-se a equação acima por -1:

$2x^2 - 10x + 12 = 0 \rightarrow x = 2$ ou $x = 3$

Dividindo-se a equação acima por 2:

$x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow x = 2$ ou $x = 3$

Porém as funções obtidas têm gráficos diferentes.

$f(x) = -2x^2 + 10x - 12$

$f(x) = 2x^2 - 10x + 12$

$f(x) = x^2 - 5x + 6$

Proponha aos alunos essa discussão e peça para que eles esbocem os gráficos dessas funções, para perceberem as diferenças existentes entre elas.

Resoluções da seção Para estudar

41. $P^2 = P \times P$

$P^2 = \{(1; 1), (1; 3), (1; 5), (3;1), (3; 3), (3; 5), (5; 1), (5; 3), (5; 5)\}$

42. $A \cdot B = \{(0; 5), (0, 6), (2; 5), (2; 6), (3; 5), (3; 6)\}$

$B \cdot C = \{(5; 1), (5; 3), (5, 4), (6; 1), (6; 3), (6; 4)\}$

43. a) 1º quadrante c) 2º quadrante

b) 4º quadrante d) 3º quadrante

44. $A = \{x \in R/x \geq 3\}$

a) $B = R$

b) $A = R$

$B = \{y \in R/y \leq 3\}$

45. Resposta no caderno.

46. $D = A$

$Im = \{4\}$

47. a) Sim. b) Sim. c) Não. d) Sim. e) Sim. f) Sim. g) Sim. h) Não.

48. $f(k+1) = 2(k^2 + 2k = 1) - 4(k+1) + 1$

$f(k+1) = 2k^2 - 1$

49. $\dfrac{-3}{-b} = -1 \rightarrow b = 3$

$\dfrac{-4a-3}{-2-3} = 1 \rightarrow -4a - 3 = -5$

$-4a = -2 \rightarrow a = \dfrac{1}{2}$

50. $d(4) = 20 \cdot 4 + 10 \rightarrow d(4) = 90$ km

51. a) $x^2 - 4 \neq 0 \rightarrow D = \{x \in R \mathbin{/} x \neq -2 \text{ e } x \neq 2\}$

b) $D = \{x \in R \mathbin{/} x \neq -4 \text{ e } x \neq 2\}$

c) $4 - x \geq 0 \rightarrow D = \{x \in R \mathbin{/} x \geq 4\}$

d) $x - 8 \geq 0$ e $15 - x > 0 \rightarrow D = \{x \in R \mathbin{/} 8 \leq x < 15\}$

52. $D = \{x \in R \mathbin{/} 0 \leq x \leq 15\}$

$f(x) > 0 \rightarrow 2 < x < 7$ ou $12 < x < 15\}$

53. a) $\{x \in R \mathbin{/} -5 \leq x \leq 5\}$

b) $\{y \in R \mathbin{/} -2 < y \leq 3\}$

c) $\{0, 2\}$

d) $\{x \in R \mathbin{/} 0 < x < 2\}$

54. a) $f(x) = 0 \rightarrow x = -\dfrac{5}{2}$

$f(x) < 0 \rightarrow x < -\dfrac{5}{2}$

$f(x) > 0 \rightarrow x > -\dfrac{5}{2}$

b) $f(x) = 0 \rightarrow x = 4$

$f(x) < 0 \rightarrow x > 4$

$f(x) > 0 \rightarrow x < 4$

c) $f(x) = 0 \rightarrow x = 4$ ou $x = -4$

$f(x) > 0 \rightarrow x < -4$ ou $x > 4$

$f(x) < 0 \rightarrow -4 < x < 4$

55. $f(x) = 0 \rightarrow x = 6$ ou $x = 8$

$f(x) > 0 \rightarrow 0 < x < 6$ ou $x > 8$

$f(x) < 0 \rightarrow 6 < x < 7$

56. a) $x = -2$; $x = 3$; $x = 5$

b) $-2 < x < 3$; $x > 5$

c) $x < -2$; $3 < x < 5$

57. a) F b) V c) V d) F

58 a) V b) F c) F d) F

59. $\begin{cases} 2a + b = -3 \\ -3a + b = 7 \end{cases}$

$-5a = 10 \rightarrow a = -2 \rightarrow b = 1$

$f(x) = -2x + 1 \rightarrow f(-1) = 3$

60. a) $y = x + 3$

b) $y = -x + 1$

61. a) $D = \{x \in R/x \geq -3\}$

b) $D = \{x \in R/x > 2\}$

c) $D = \{4\}$

d) $D = \{x \in R/x > \dfrac{1}{3}\}$

62. a) $m > 2$

b) $m < 2$

63. a) $f(x) \rightarrow v\,(0; 0)$

$g(x) \rightarrow v\,(0; 0)$ b) $Im = \{y \in R/y \geq 0\}$

64. a) $4 - 4m > 0 \rightarrow m < 1$

b) $4 - 4m = 0 \rightarrow m = 1$

c) $4 - 4m < 0 \rightarrow m > 1$

65. $x = 0 \rightarrow f(x) = 0$

66. a) $y = x^2 - 6x + 5$

b) $y = x^2 - 6x + 8$

67. a) $V\left(\dfrac{5}{2}; -\dfrac{1}{4}\right)$; V é mínimo.

b) V (0; 4); V é máximo.

c) V (0; 0); V é mínimo.

d) $V\left(\dfrac{1}{2}; -\dfrac{3}{4}\right)$; V é máximo.

68. (e) $a < 0$ (concavidade para baixo)

$c > 0$ ($y > 0$ para $x = 0$)

Capítulo 7: Relações métricas no triângulo retângulo

Objetivos específicos do capítulo

Caracterizar os elementos de um triângulo retângulo. Interpretar figuras que foram ampliadas ou reduzidas por meio de uma escala. Aplicar as relações de semelhança em triângulos assim como o Teorema de Pitágoras. Identificar e aplicar outras relações métricas no triângulo retângulo.

Páginas 170 a 173

Atividade para comprovar as relações métricas.

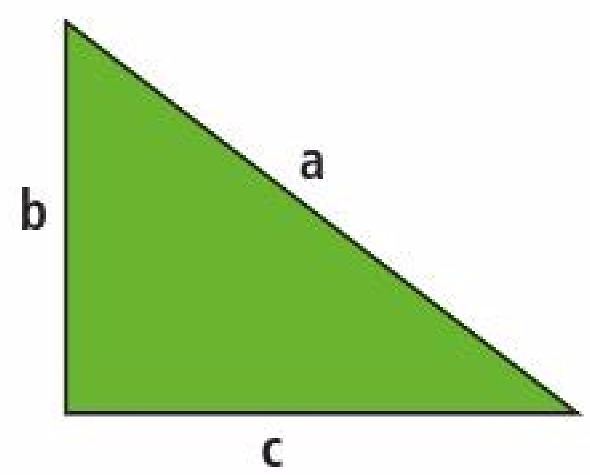
SUGESTÃO DE ATIVIDADE

Material: papel cartão, régua e esquadro.

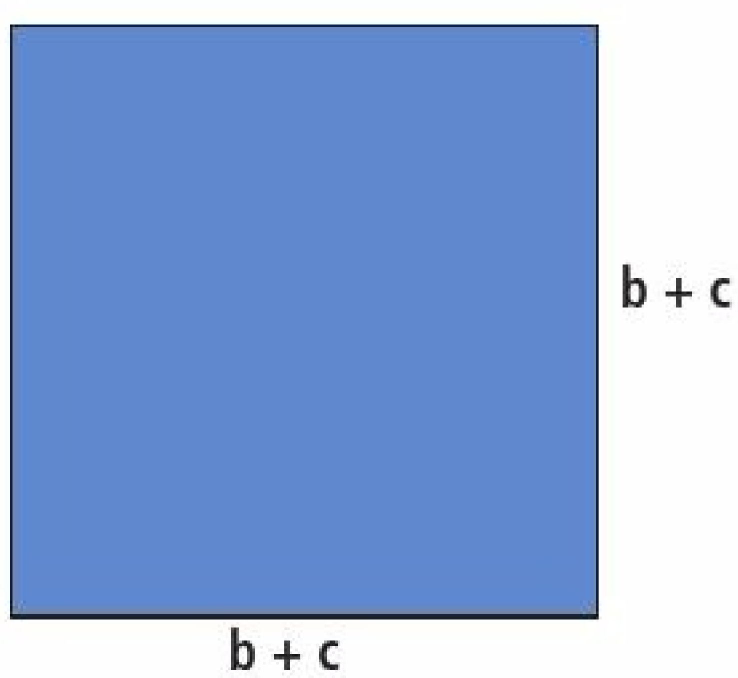
Utilize papel cartão para construir dois triângulos retângulos de mesma medida. Trace a altura relativa à hipotenusa em ambos. Recorte um dos triângulos em dois outros, utilizando a altura relativa à hipotenusa como separação dos dois. Em mãos os alunos terão 3 triângulos para estabelecerem as semelhanças entre eles. Peça aos alunos para pintarem os ângulos congruentes de mesma cor, e assim, registrar nos cadernos as razões de semelhança.

Atividade sobre o Teorema de Pitágoras

- Construa 4 triângulos retângulos de hipotenusa a e catetos b e c.



- Construa também um quadrado cujo lado tenha a medida b + c.



- No quadrado e a partir de cada um de seus vértices, coloque cada um dos 4 triângulos iniciais que você construiu.
- Como os quatro triângulos são idênticos e sua hipotenusa mede a, temos então um quadrado menor de área a^2 dentro do quadrado maior de área $(b + c)^2$.
- Desenvolvendo a expressão da área do quadrado maior, que é um produto notável, temos:

$$(b + c)^2 = b^2 + 2 \cdot b \cdot c + c^2 \quad \text{(I)}$$

- A área do quadrado maior também pode ser a área do quadrado menor mais as quatro áreas dos triângulos retângulos.

$$a^2 + 4 \cdot \frac{b \cdot h}{2} = a^2 + 2 \cdot b \cdot h \quad \text{(II)}$$

- Igualando as áreas temos:

$$\text{I} = \text{II}$$

$$b^2 + 2 \cdot b \cdot c + c^2 = a^2 + 2 \cdot b \cdot h \rightarrow b^2 + c^2 = a^2$$

As medidas a, b e c que aparecem nessa expressão final são exatamente as medidas dos lados do triângulo inicial, exatamente como queríamos demonstrar.

Obtenha mais informações sobre essa atividade no site da Secretaria de Educação de Pernambuco.

Página 175 a 178

As atividades estão desenvolvidas com diferentes níveis de complexidade, procurando obedecer a uma ordem crescente de dificuldade. Contudo, é interessante que o professor leia com os alunos os enunciados e represente no quadro a representação de cada enunciado.

Seria interessante que os alunos pudessem participar desse processo de construção do enunciado e correção no quadro.

Proponha pesquisas sobre alguns matemáticos com o objetivo de saber: período de sua existência, principais correntes de ideia, influências e contribuições para a humanidade.

Página 180

Leia o texto com seus alunos e destaque as Aplicações dos casos de semelhança de triângulos.

Nessa fase, é possível propor atividades especiais em salas de computadores disponíveis em algumas escolas. Se sua escola possuir esse tipo de recurso será possível propor trabalhos cooperativos com os professores de Informática.

Resoluções da seção Para estudar

24. $a^2 = 144 + 256 \rightarrow a = 20$

$bc = ah \rightarrow 12 \cdot 16 = 20 \cdot h \rightarrow h = 9,6$

25. $64 = h^2 + 16 \rightarrow h^2 = 48 \rightarrow h = 4\sqrt{3}$ cm

26. $h^2 = m \cdot n \rightarrow 4 \cdot 6 = 6 \cdot n \rightarrow n = 4$

$AB = 10$

27. $a = 100 \rightarrow 80^2 = an \rightarrow n = 64$ cm

28. a) $x = 8$

$10y = 48 \rightarrow y = 4,8$

b) $x = 8$

$n = \frac{32}{5}$

$h = \frac{24}{5}$

$m = \frac{18}{5}$

c) $d^2 = 400 + 256$

$d^2 = 656$

$d = 25,6$

d) $BC^2 = 100 + 576$

$BC^2 = 676 \rightarrow BC \angle 26,0$

$x \angle 13$

29. a) $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $2\sqrt{3} = \frac{x\sqrt{3}}{2} \rightarrow x = 4$

c) $100 = x^2 + 9 \rightarrow x^2 = 91 \rightarrow x = \sqrt{91}$

30. $d^2 = 8 + 8 \rightarrow d = 4$

31. $d = \ell\sqrt{2} \rightarrow \frac{2\sqrt{2}}{3} = \ell\sqrt{2} \rightarrow \ell = \frac{2}{3}$

32. $r = 12$

33. $20^2 = 16^2 + x \rightarrow x = 12 \rightarrow d = 24$

34. $\ell + \frac{\ell\sqrt{3}}{2} = 4 \rightarrow 2\ell + \ell\sqrt{3} = 8$

$2\ell(\sqrt{3} + 1) = 8$

$\ell = \frac{4(\sqrt{3} - 1)}{2} = \ell = 2\sqrt{3} - 2$

34. $h = \dfrac{8\sqrt{3}}{2} \rightarrow h = 4\sqrt{3}$ cm

36. $\dfrac{6{,}5}{4} = \dfrac{h}{76} \rightarrow h = 123{,}5$ m

37. $\dfrac{h}{2} = \dfrac{4{,}8}{6} \rightarrow h = 1{,}6$ m

38. $\dfrac{1}{x-1} = \dfrac{1+x}{3x-1} \rightarrow 3x - 1 = x^2 - 1$

$x^2 - 3x = 0$

$x(x - 3) = 0 \rightarrow x = 3$

O perímetro será 19.

39. lote I = 12 m

lote II = 9 m

lote III = 10,5 (leste) e 24,8 (central)

40. $5^2 = 3^2 + \overline{DC}^2 \rightarrow DC = 4$ m

$A = \dfrac{(4+3)\,3}{2} \rightarrow A = 10{,}5$

41. Área = 38 u^2

42. 180 cm

43. a) 8 cm

b) $2\sqrt{3}$ cm

c) $4\sqrt{3}$ cm

Capítulo 8: Inequações

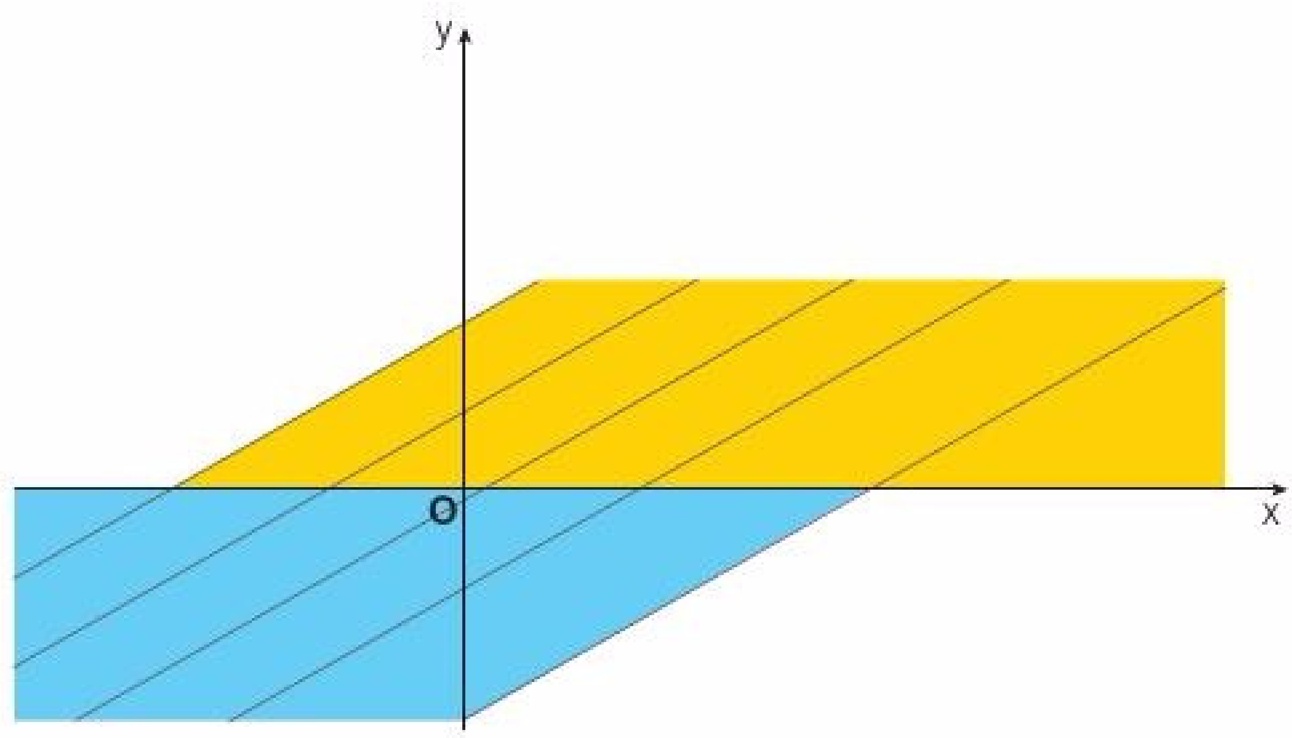
Objetivos específicos do capítulo

Relacionar a história da humanidade com o desenvolvimento da matemática; transferir o uso da linguagem oral para a escrita. Fazer estimativas mentais de resultados ou cálculos aproximados. Ler e interpretar textos para compreender e transmitir ideias matemáticas, por escrito ou oralmente, desenvolvendo a capacidade de argumentação. Interpretar matematicamente situações do dia-a-dia e, também, do mundo tecnológico e científico para o exercício da cidadania. Usar com clareza os símbolos matemáticos e identificar diferentes formas ou abordagens para resolver problemas.

Página 191

Este é um capítulo onde vale a pena usar algum recurso de software de gráfico, eventualmente à disposição no laboratório de informática, se a escola tiver um. Independentemente disso, o importante é enfatizar processos nos se identifique em quais intervalos a função é positiva ou negativa, a partir da análise de seu gráfico.

Os alunos podem, eventualmente, apresentar dificuldades para compreender o posicionamento das ordenadas de valor zero no eixo das abscissas. Um artifício recomendado para ajudar nessa compreensão é traçar (no quadro ou com o uso do computador) um feixe de retas paralelas. Assim, mostrando os intervalos em que cada uma é positiva ou negativa, ajudamos o aluno a fixar a identificação dos intervalos de variação de sinais da função.



SUGESTÃO DE ATIVIDADE

Página 194

Sugestão de mais exemplos:

Resolva, de acordo com os números Reais, as inequações a seguir:

a) $\dfrac{2x - 3}{1 - x} \leq 0$

Resolução

$f(x) = 2x - 3$

$f(x) = 0$

$2x - 3 = 0$

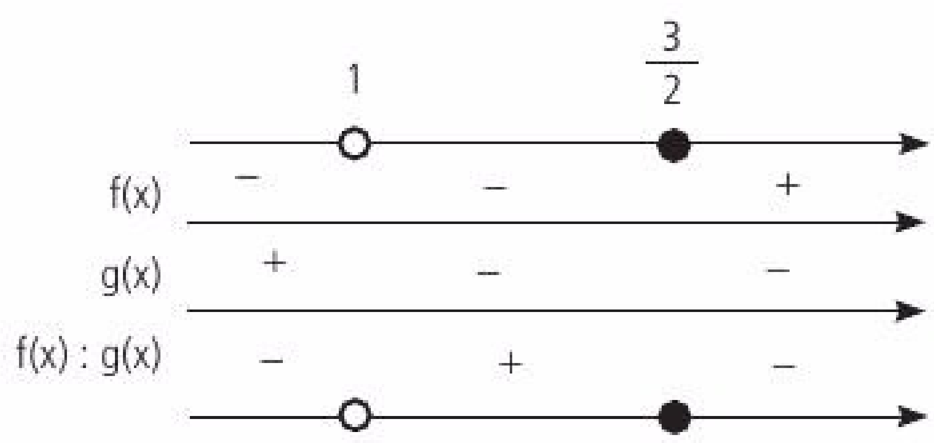
$2x = 3$

$x = \dfrac{3}{2}$

$g(x) = 1 - x$

$1 - x = 0$

$x = 1$



Solução: $\left\{x \in R \,/\, 1 > x \geq \dfrac{3}{2}\right\}$

b) $\dfrac{(1 - x) \cdot (x^2 - 6x + 8)}{-x^2 + 5x - 6} \leq 0$

Resolução:

$f(x) = (1 - x) \rightarrow$ zeros: $1 - x = 0 \rightarrow x = 1$

$g(x) = x^2 - 6x + 8 = (x - 4) \cdot (x - 2) \rightarrow$ zeros: $(x - 4) \cdot (x - 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 2 \end{cases}$

$h(x) = -x^2 + 5x - 6 \rightarrow$ zeros: $-x^2 + 5x - 6 = 0 \rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow$

$(x - 2) \cdot (x - 3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$

Solução: $]-\infty, 1] \cup]3, 4]$.

Página 196

Faça um estudo de sinais com a expressão:

$$\frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 3} \leq 0$$

O estudo é semelhante ao que está no livro no caso do produto

$$(x^2 - 2x)\,(x^2 - 4x + 3) \leq 0,$$

com a diferença que o denominador não pode resultar em zero, ou seja, as raízes 1 e 3 tem que ser ``bolas vazias''.

	1	2	3	4	
$f(x) = 1 - x$	+	−	−	−	−
$g(x) = x^2 - 6x - 8$	+	+	−	−	+
$(1 - x) \cdot (x^2 - 6x - 8)$	+	−	+	+	−
$h(x) = -x^2 + 5x - 6$	−	−	+	−	−
$\frac{(1 - x) \cdot (x^2 - 6x - 8)}{-x^2 + 5x - 6}$	−	+	+	−	+

Resoluções da seção Para estudar

17. a) $f(x) = 0 \rightarrow x = 4$
$f(x) < 0 \rightarrow x < 4$
$f(x) > 0 \rightarrow x > 0$

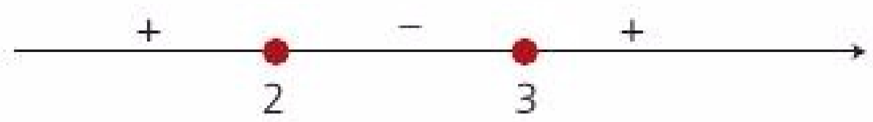
b) $f(x) = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{3}$
$f(x) < 0 \rightarrow x > -\frac{1}{3}$
$f(x) > 0 \rightarrow x < -\frac{1}{3}$

18. a) $f(x) = 0 \rightarrow x = 0$
$f(x) < 0 \rightarrow x > 0$
$f(x) > 0 \rightarrow x < 0$

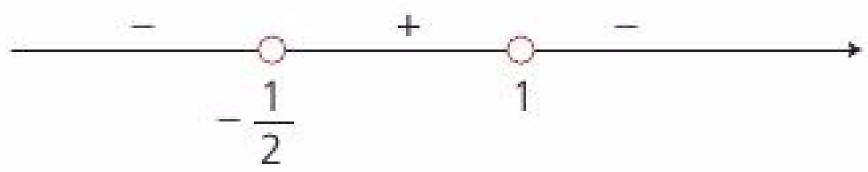
b) $g(x) = 0 \rightarrow x = 3$
$g(x) < 0 \rightarrow x > 3$
$g(x) > 0 \rightarrow x < 3$

c) $x = 0 \rightarrow f(x) = 0$
$x > 0 \rightarrow f(x) < 0$
$x < 0 \rightarrow f(x) > 0$

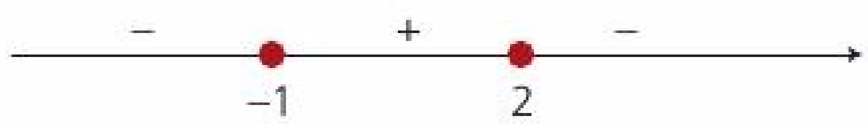
20. a)



b)



c)

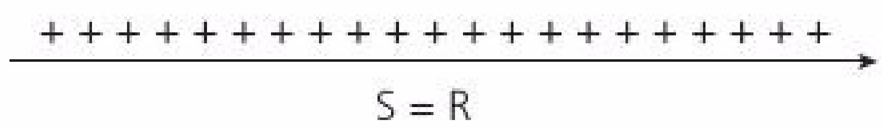


21. a) $S = \{x \in R \,/\, x \leq -3 \text{ ou } x \geq 2\}$

b) $S = \{x \in R \,/\, -1 < x < 0 \text{ ou } x > 3\}$

22. a)

b)



23. a) $S = \{x \in R/\ 0 \leq x \leq 1 \text{ ou } 2 \leq x \leq -4\}$

b) $S = \{x \in R/\ 2 < x < 3 \text{ ou } x > 6\}$

24. a) $x = 1$ ou $x = -1 \rightarrow y = 0$
$-1 < x < 1 \rightarrow y < 0$
$x < -1 \rightarrow y > 0$
$x > 1 \rightarrow y > 0$

b) $x = 1$ ou $x = 5 \rightarrow y = 0$
$1 < x < 5 \rightarrow y > 0$
$x < 1 \rightarrow y < 0$
$x > 1 \rightarrow y > 0$

c) $y > 0$ para qualquer $x \in R$

d) $x = 0$ ou $x = 4 \rightarrow y = 0$
$0 < x < 4 \rightarrow y < 0$
$x < 0 \rightarrow y > 0$
$x > 4 \rightarrow y > 0$

25. a) $S = \{x \in R \,/\, x < -1 \text{ ou } x > 1\}$

b) $S = \{x \in R \,/\, x < \frac{1}{2} \text{ ou } x > 3\}$

c) $S = \{x \in R \,/\, -3 \leq x \leq 2\}$

d) $S = \{x \in R \,/\, -1 \leq x \leq 5\}$

26. a) $S = \{x \in R \,/\, x < -1 \text{ ou } x > 1\}$

b) $S = \{x \in R \,/\, x \neq -1\}$

27. a) $S = \{x \in R \,/\, x < -3 \text{ ou } 2 \leq x < 3 \text{ ou } x \geq 6\}$

b) $S = \{x \in R \,/\, x < -6 \text{ ou } -1 < x < 1 \text{ ou } x > 7\}$

28. $D = \{x \in R \,/\, x \leq 0 \text{ ou } x > 1\}$

Capítulo 9 – Razões trigonométricas

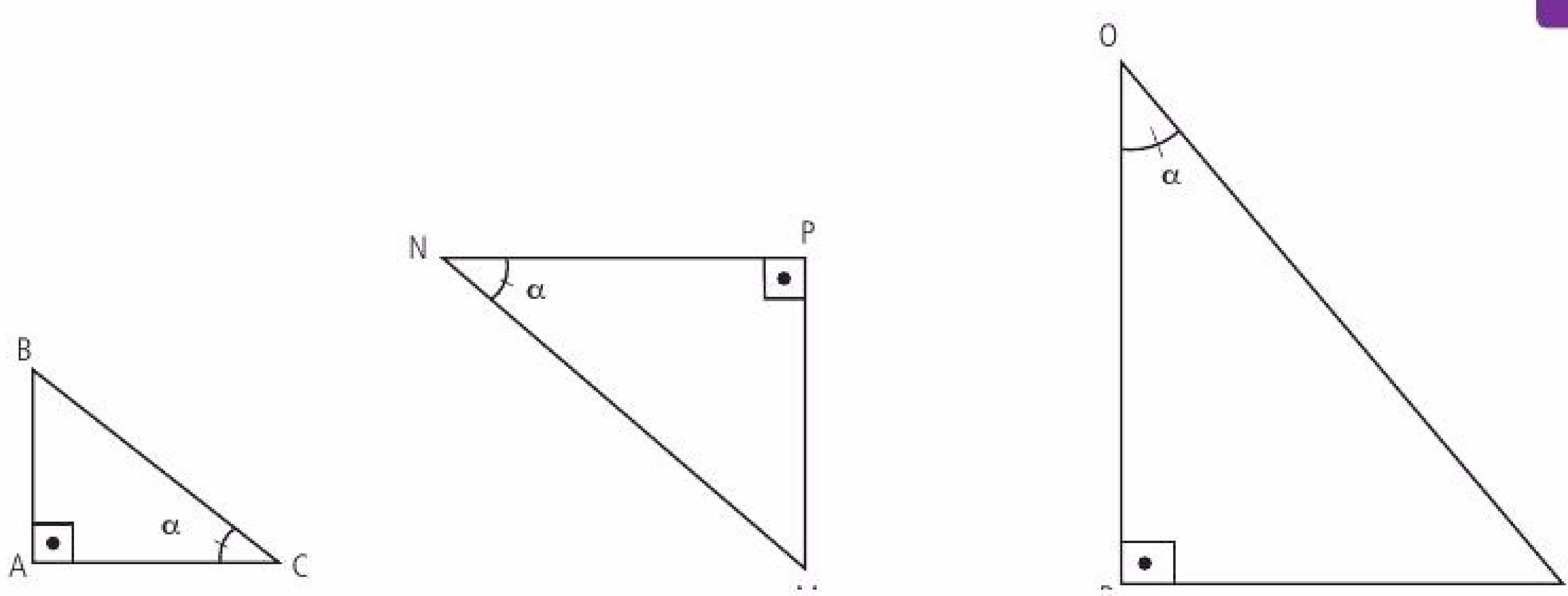
Objetivos específicos do capítulo

Definir as razões trigonométricas no triângulo retângulo utilizando a semelhança de triângulos. Aplicar as razões trigonométricas nas resoluções de problemas. Identificar o seno, o cosseno e a tangente de um ângulo agudo. Reconhecer um ângulo notável e suas respectivas razões trigonométricas.

Páginas 208 a 210

SUGESTÃO DE ATIVIDADE

Utilizando transferidor e régua, vamos fazer algumas medições nos triângulos abaixo:



med ($\overline{AC}$) =
med ($\overline{AB}$) =
med ($\overline{BC}$) =
med ($A\hat{C}B$) =

med ($\overline{NP}$) =
med ($\overline{MP}$) =
med ($\overline{MN}$) =
med ($P\hat{N}M$) =

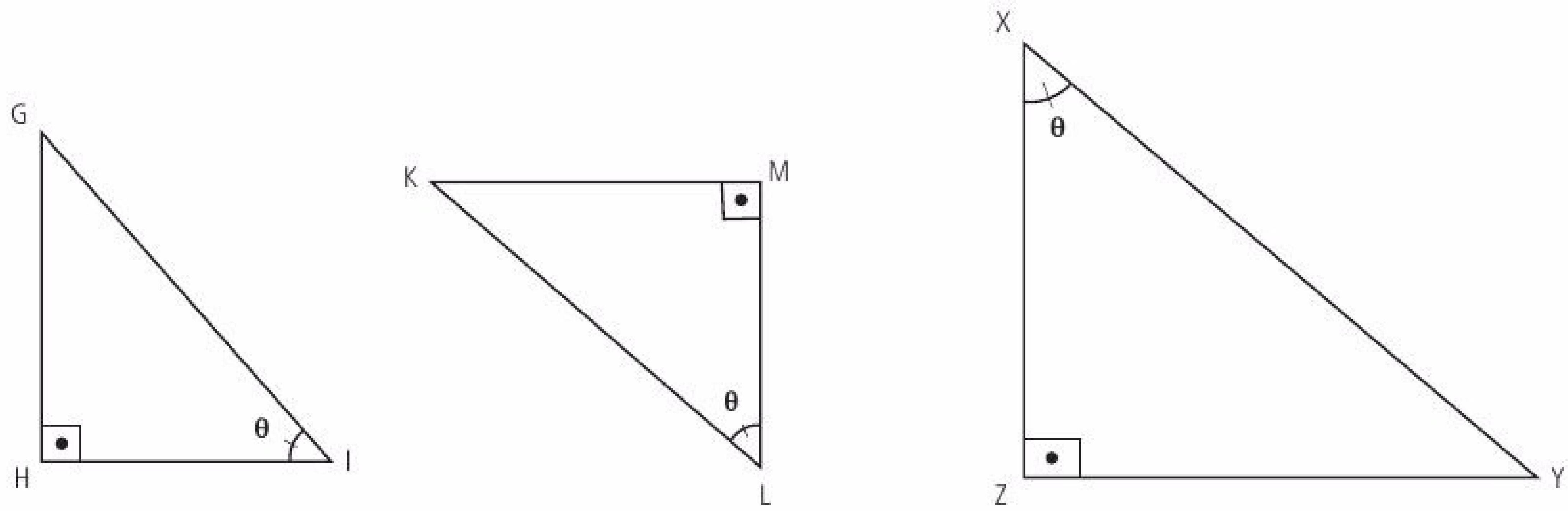
med ($\overline{QR}$) =
med ($\overline{RS}$) =
med ($\overline{QS}$) =
med ($R\hat{Q}S$) =

Nos três triângulos acima, calcule:

a) A razão entre a medida do cateto oposto a α sobre a medida da hipotenusa.
b) A razão entre a medida do cateto adjacente a α sobre a medida da hipotenusa.
c) A razão entre a medida do cateto oposto a α sobre a medida do cateto adjacente a α.

Você observou regularidades nos resultados acima obtidos? Registre.

Vamos fazer outras medições:



med ($\overline{IH}$) =	med ($\overline{LM}$) =	med ($\overline{YZ}$) =
med ($\overline{IG}$) =	med ($\overline{LK}$) =	med ($\overline{XY}$) =
med ($\overline{GH}$) =	med ($\overline{KM}$) =	med ($\overline{XZ}$) =
med ($H\hat{I}G$) =	med ($K\hat{L}M$) =	med ($Y\hat{X}Z$) =

Nos três triângulos anteriores, calcule:

a) A razão entre a medida do cateto oposto a θ sobre a medida da hipotenusa.

b) A razão entre a medida do cateto adjacente a θ sobre a medida da hipotenusa.

c) A razão entre a medida do cateto oposto a θ sobre a medida do cateto adjacente a θ.

Você observou regularidades nos resultados acima obtidos? Registre.

No final da atividade o professor deverá fazer as definições das razões trigonométricas e falar de arcos complementares.

Sugestão de leitura:

Dando corda na Trigonometria
Parte da coleção Contando a História da Matemática
Autor: Oscar Guelli
Editora Ática

Viajando pela Grécia e pelo Egito, o livro apresenta um dos ramos mais importantes da Matemática e revela como ideias simples deram origem a conceitos importantes.

Página 212

Destaque a construção das razões trigonométricas em forma de tabelas e se achar oportuno, possibilite a utilização de planilhas eletrônicas. Inicie um trabalho de utilização da calculadora científica para obtenção da tabela trigonométrica completa.

Estimule que os alunos encontrem esses valores tanto na calculadora, quando em planilhas eletrônicas.

SUGESTÃO DE ATIVIDADE

Com o objetivo de despertar a curiosidade dos alunos para saber como são feitas as medições de distâncias inacessíveis e o uso da trigonometria, sugerimos uma atividade na qual o aluno deve construir um teodolito caseiro e realizar as medições necessárias. A atividade deve ser feita em grupos de 3 ou 4 alunos.

1ª etapa: Construção de um teodolito caseiro.

O teodolito é um instrumento de medida utilizado para realizar medidas de ângulos verticais e horizontais.

Nesta etapa o objetivo é que cada grupo construa um teodolito caseiro. O aluno deverá pesquisar na internet as diferentes maneiras de se construir um teodolito caseiro, escolher uma das maneiras e executar a construção.

A construção deverá ser feita por todos os componentes do grupo e esta etapa deverá ser filmada.

2ª etapa: Com o auxílio do teodolito construído, cada grupo deverá escolher algo a ser medido, como por exemplo: um poste de iluminação, o prédio de sua escola, a altura da tabela de basquete entre outras possibilidades. Nesta etapa o grupo deverá entregar o registro constando o procedimento utilizado para fazer a medição e os cálculos efetuados (distância, ângulo, etc).

3ª etapa: Entrega do vídeo.

Cada equipe realizará um vídeo, de curta duração, em que estejam registradas as etapas 1 (construção do teodolito) e 2 (medição) do trabalho.

O vídeo deve conter a explicação de como se constrói um teodolito, mostrar a construção (com os participantes) e depois mostrar como usar o teodolito para fazer medição (largura e altura dos lugares escolhidos).

Resoluções da seção Para estudar

21. $\overline{AB} = 3$

$\operatorname{sen} \hat{C} = \frac{3}{5}$, $\cos \hat{C} = \frac{4}{5}$, $\operatorname{tg} \hat{C} = \frac{3}{4}$

$\operatorname{sen} \hat{B} = \frac{4}{5}$, $\cos \hat{B} = \frac{3}{5}$, $\operatorname{tg} \hat{B} = \frac{4}{3}$

Porque o cateto é sempre menor que a hipotenusa.

22. $\cos 20 = \frac{5}{a} \rightarrow a = 5{,}32$

$\operatorname{tg} 20 = \frac{b}{5} \rightarrow b = 1{,}82$

23. aproximadamente 1 111 metros

24. $\operatorname{tg} 40 = \frac{h}{40} \rightarrow h = 33{,}6$ m

25. $A\hat{O}B = 60°$

26. $1{,}73\ell = 0{,}57\ell + 17{,}1 \rightarrow \ell \cong 14{,}74$ m

27. $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$

28. $\operatorname{sen} A = \frac{5\sqrt{3}}{10} \rightarrow \operatorname{sen} A = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos A = \frac{5}{10} \rightarrow \cos A = \frac{1}{2}$

$\hat{A} = 60° \rightarrow \hat{C} = 30°$

29. $\operatorname{tg} 30° = \frac{x}{12} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{12} \rightarrow x = 4\sqrt{3}$

30. $\overline{CD} = \frac{6\sqrt{3}}{2} \rightarrow \overline{CD} = 3\sqrt{3}$

31. $\overline{AD} = 2\sqrt{3}$ cm

$\overline{BC} = 6\sqrt{2}$ cm

$\overline{CD} = (6 - 2\sqrt{3})$ cm

32. $A = \frac{15\sqrt{2}}{2}$

33. $A = 30$

34. $A = 20$

35. $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ cm

36. $40\sqrt{3}$ m

37. $2\sqrt{2}$ cm

38. (c) 0,8

39. 10 m

40. $A = 25\sqrt{3}$ cm^2

41. (c) 12 m

42. $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

43. $x = 48$ m

44. (b) 45 cm

45. $x = \frac{12\sqrt{3}}{3}$

46. $\frac{15(1 + \sqrt{3})}{2}$

Capítulo 10: Introdução à Estatistica e Probabilidades

Objetivos específicos do capítulo

Ler e interpretar textos em forma de tabelas e gráficos. Compreender o sentido global dos textos trabalhados. Coletar, registrar e organizar elementos elencados em uma pesquisa. Desenvolver pesquisas para exercitar o tratamento da informação e para conhecer o ambiente em que está inserido. Utilizar recursos tecnológicos para o desenvolvimento de habilidades cognitivas. Promover uma reflexão sobre o termo frequência. Construir tabelas de frequências. Ler, interpretar e construir histogramas. Calcular a média de um conjunto de dados.

Página 223

Leia o texto com seus alunos e estimule a discussão em sala de aula.

Lembre-se que esse tema pode permitir o envolvimento de outras disciplinas. Analise essa possibilidade e avalie também a possibilidade de realizar pesquisas tanto no ambiente escolar, como na comunidade na qual a escola está inserida.

O uso de jornais e revistas será um aliado para o estudo desse capítulo. Solicite que seus alunos tragam material de casa, ou comece a guardar artigos de jornais, notícias específicas, gráficos e tabelas disponíveis. Desse modo você poderá realizar atividades sempre discutindo temas atuais.

Veja alguns dados estatísticos curiosos:

- Os destros vivem em média 9 anos a mais do que os canhotos.
- A mais baixa temperatura alguma vez registrada foi de –128,6 °C em 21 julho de 1983 na Antártica.
- O coração bombeia o sangue com uma pressão suficiente para esguichar o sangue a uma altura de 9 metros.

Páginas 232 a 236

Reproduza, no quadro, as representações observadas sobre os histogramas e polígonos de frequências. Se possível, solicite para que alunos venham até o quadro para fazer essas representações.

Destaque a construção dos histogramas e polígonos de frequências em cada caso, lembre-se de citar detalhes em cada caso.

Proponha pesquisas sobre a quantidade de número de irmãos, idade, altura, frequência em que você faz lições de casa, entre outros temas, entre o alunado. Após a pesquisa os alunos deverão organizar os dados em tabelas de frequências, fazer histogramas que representem os dados das tabelas e traçar o polígono de frequências. Se for possível, use o programa excel para os alunos construírem os histogramas e os polígonos de frequências. A exposição das informações coletas devem ser feitas no ambiente escolar para que os alunos possam ter um perfil do grupo de estudantes.

Páginas 237 a 239

Reproduza, no quadro, as representações sobre o cálculo dos tipos de médias apresentados. Se possível, solicite para que alunos venham até o quadro para fazer os problemas propostos, sempre destacando o significado da média em cada caso.

Utilize as notas obtidas pelos alunos em alguma avaliação para propor que os alunos calculem a média da classe. Você pode pegar as notas de dois ou três bimestres para que os alunos organizem os dados em tabelas de frequências, construam o histograma que as representem. Eles poderão calcular as médias aritmética e ponderada das notas obtidas nos bimestres e avaliar os resultados para emitirem opiniões sobre suas observações.

Página 242

Poderia ser interessante propor agora, uma pesquisa na classe ou na escola já que os alunos exercitaram alguns conceitos abordados na estatística.

A sugestão pode partir dos alunos ou de outros professores. Discuta com os demais professores a possibilidade de elaboração dessa pesquisa.

Proponha também exposições dos trabalhos feitos em sala de aula ou na escola. Isso valoriza o processo e, em geral, os alunos gostam de mostrar o resultado de suas pesquisas. Além disso, o publico pesquisado também gosta de saber esses resultados.

Noções de probabilidade

Página 246

Lembre-se que esse tema pode permitir o envolvimento de outras disciplinas. Analise essa possibilidade principalmente, na área de Ciências da Saúde, onde o tema é amplamente utilizado.

O uso de temas apresentados e discutidos em jornais e revistas será um aliado para o estudo desse capítulo. Solicite que seus alunos tragam material de casa, ou comece a guardar artigos de jornais, notícias específicas, gráficos e tabelas disponíveis. Desse modo você poderá realizar atividades sempre discutindo temas atuais.

Página 247

SUGESTÃO DE ATIVIDADE

Para introduzir o conceito de espaço amostral, evento e probabilidade, segue a sugestão de uma atividade.

Material: dados e moedas.

Essa é uma atividade prevista para acontecer em grupos com três alunos. Os alunos de cada grupo deverão fazer apostas entre cara ou coroa em uma moeda, e em seguida começam os lançamentos e as anotações dos resultados obtidos. O experimento deve ser realizado 15 vezes ou mais por integrante do grupo. O mesmo procedimento deve ser repetido utilizando um dado. No final o professor deve conduzir com a definição de espaço amostral a partir da observação dos alunos sobre os possíveis resultados dos experimentos.

O evento, em uma probabilidade, deve ser definido a partir das escolhas que os alunos fizeram nos experimentos. As probabilidades seguem o mesmo caminho das outras definições, ou seja, as chances que cada aluno tem para ganhar as apostas. Agora os alunos podem escrever qual foi a probabilidade de ocorrer o evento escolhido por cada aluno, qual foi o vencedor e analisar as escolhas feitas nos experimentos realizados.

O próximo passo é lançar dois dados simultaneamente e construir uma árvore de possibilidades para escrever o espaço amostral. Os alunos devem avaliar qual dos eventos terá mais chances de ocorrer: obter soma par ou números iguais nos dados.

Aproveite o envolvimento dos alunos nessa atividade e proponha o lançamento de um dado e uma moeda ou de dois dados e uma moeda, assim os alunos devem refletir e transferir conhecimentos para pensar sobre o espaço amostral, e você professor faça algumas questões dentro dos experimentos sugeridos.

Resoluções da seção Para estudar

17. Construção no caderno.

18. b) 30 residências
c) 11 residências
d) 30%

19. a) $30 \vdash 33$
b) 84 funcionários
c) 14,3%

20. $\bar{x} = 3$

21. $\bar{x} = 1{,}52$ m

22. $\bar{x} = 2{,}92$ filhos

23. $\bar{x} = 20{,}57$

24. $\bar{x} = 65$

25. Construção no caderno.

26. $\bar{x} = 3$

27. $\bar{x} = \overline{14{,}6}$

28. $\bar{x} = 5{,}9$

29. Construção no caderno.

30. (b) 44 km/h

11. a) $\frac{5}{50} = 10\%$

c) $\frac{1}{50} = 2\%$

b) $\frac{10}{50} = 20\%$

d) $\frac{25}{50} = \frac{1}{2}$

12. $\frac{1}{36}$

13. $\frac{2}{3}$

14. a) 9

b) 3

c) $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

15. a) $\frac{50}{250} = \frac{1}{5} = 20\%$

b) $\frac{200}{250} = \frac{4}{5} = 80\%$

16. (a) $\frac{8}{200} = \frac{1}{25}$

17. $\frac{1}{2}$

18. $\frac{1}{25}$

19. 100%

20. a) $\frac{1}{26}$

b) $\frac{12}{52} = \frac{3}{13}$

c) $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

21. a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{2}$

22. a) $\frac{3}{10}$

b) $\frac{6}{9} = \frac{1}{3}$

c) $\frac{2}{9}$

23. $P(A) = \frac{1}{3}$

Anotações: