Coleção
Linguagens
e Aplicações

MANUAL DO PROFESSOR

Matemática

Antonio Nicolau
Clarice Fonseca
Heloisa Hessel

7º ano
Ensino Fundamental

Cereja editora

Coleção
Linguagens
e Aplicações

Matemática

MANUAL DO PROFESSOR

Antonio Nicolau Youssef
Licenciado em Física pela Universidade de São Paulo
Professor de Matemática no Ensino Fundamental e no Ensino
Médio da rede privada e pública em São Paulo.

Clarice Gameiro da Fonseca Pachi
Licenciada em Matemática pela Universidade de Taubaté com
aperfeiçoamento em Estatística pelo IME – Universidade de São Paulo.
Professora de Ensino Fundamental e de Ensino Médio, Técnico Profissionalizante e
Curso Superior nas redes públicas e privadas no estado de São Paulo.

Heloísa Maria Hessel
Licenciada e Bacharel em Matemática pela Pontifícia Universidade
Católica de São Paulo. Professora de Ensino Fundamental e de
Ensino Médio na rede privada no estado de São Paulo.

1ª edição
São Paulo, 2015

Cereja editora

7º ano
Ensino Fundamental

Responsabilidade editorial: Ana Mortara
Edição: Antonio Nicolau Youssef
Revisão: Ana Cristina Mendes Perfetti
Iconografia: Elaine Bueno
Capa: A+ Comunicação
Projeto gráfico: Alexandre Romão
Editoração eletrônica: Lauro Takayuki Akamatsu
Alfredo Pereira de Santana
Juliana Cristina Silva
Vivian Trevizan
Ilustrações: Fernanda Youssef
Cinthia Yamasaki
Luyse Costa

Imagem da capa: Floco de neve, Kichigin/Shutterstock

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação – CIP

Y831 Youssef, Antonio Nicolau; Pachi, Clarice Gameiro da Fonseca; Hessel, Heloísa Maria
Linguagens e aplicações: Matemática. Ensino Fundamental – Anos Finais – 7º. Ano – Livro do Aluno / Antonio Nicolau Youssef, Clarice Gameiro da Fonseca Pachi e Heloísa Maria Hessel. – São Paulo: Cereja Editora, 2015.
(Coleção Linguagens e Aplicações).
xxx p.: il.

ISBN 978858777997-7 (livro do aluno)
ISBN 978858777998-4 (manual do professor)

1. Matemática. 2. Linguagens da Matemática. 3. Aplicações da Matemática. 4. História da Matemática. 5. Números. 6. Geometria. 7. Álgebra. 8. Tratamento da Informação. 9. Medidas. I. Título. II. Série. III. Matemática: linguagens e aplicações. IV. Números inteiros. V. Ângulos. VI. Números racionais. VI. Razões e proporções. VII. Ângulos e retas. VIII. Quadriláteros. IX. Monômios e polinômios. X. Equações. XI. Áreas de figuras planas. XII. Gráficos e pictogramas. XIII. Youssef, Antonio Nicolau. XIV. Pachi, Clarice Gameiro da Fonseca. XV. Hessel, Heloísa Maria.

CDU 51 CDD 510

Catalogação elaborada por Ruth Simão Paulino

São Paulo, 1ª edição, 2015

Cereja editora

Endereço: Av. Marques de São Vicente, 1011
Barra Funda – São Paulo – SP
CEP: 01139-003
Telefone: (011) 2157-3687
E-mail: editora@cerejaeditora.com.br
www.cerejaeditora.com.br

Apresentação

Caro aluno,

Ao escrever os livros desta coleção, procurei, em todos os momentos, trazer para você conteúdos interessantes, que mostram as relações existentes entre a Matemática e o mundo que nos cerca, além de sua beleza e riqueza histórica.

O principal objetivo do curso de Matemática apresentado nos quatro livros desta coleção é mostrar a você que aprender Matemática é muito mais que saber resolver uma série de problemas e cálculos complicados. É, sobretudo, aprender a utilizar as interessantes ferramentas que ela nos apresenta para que, juntamente com raciocínio e criatividade, você possa solucionar as mais diversas situações concretas onde ela se aplica no mundo que nos cerca.

É importante que você aprenda e domine os principais conceitos aqui apresentados, uma vez que a Matemática será sempre uma poderosa linguagem de estudo e desenvolvimento, seja qual for a área do conhecimento à qual você pretende se dedicar.

Os conceitos são apresentados de forma objetiva, mantendo, no entanto, o rigor necessário para que sua aprendizagem se processe de forma coerente, garantindo que você perceba suas aplicações e possa utilizá-los nos mais diversos contextos de resolução de problemas em sua vida futura como estudante e na vida adulta como profissional.

Observe atentamente as seções que compõem seu livro e faça um bom uso dele, preservando sua integridade, para que outros alunos também possam utilizá-lo.

Bom estudo!

Conheça seu livro

Os conteúdos da coleção estão organizados em cinco eixos temáticos identificados ao longo dos capítulos pelos seguintes ícones:

Números

Geometria

Álgebra

Tratamento da informação

Medidas

Seções

Os capítulos estão organizados pelas seguintes seções, que têm a finalidade de apresentar as diversas linguagens e aplicações do universo da Matemática:

Conversa Inicial

Momento inicial onde procuramos recuperar o que você já sabe sobre o assunto e quais os objetivos específicos do capítulo.

Curiosidade

Informações curiosas sobre os diversos conceitos que você irá estudar.

Para ler

Textos e informações complementares que ilustram e enriquecem sua aprendizagem.

Na prática

Oficinas e atividades nas quais você e seus amigos observam na prática o que aprenderam.

Quando, quem e onde

Os aspectos mais interessantes sobre a história da Matemática e seus criadores.

Conexão

Ao longo dos capítulos, esta seção apresenta aplicações da Matemática nas mais diversas áreas de atividades, assim como nas diversas disciplinas que são estudadas no Ensino Fundamental.

Atividades

Problemas e exercícios de aplicação dos conceitos desenvolvidos no capítulo.

Desafio

Situações que desafiam você a quebrar a cabeça e usar sua criatividade para resolver problemas.

Para estudar

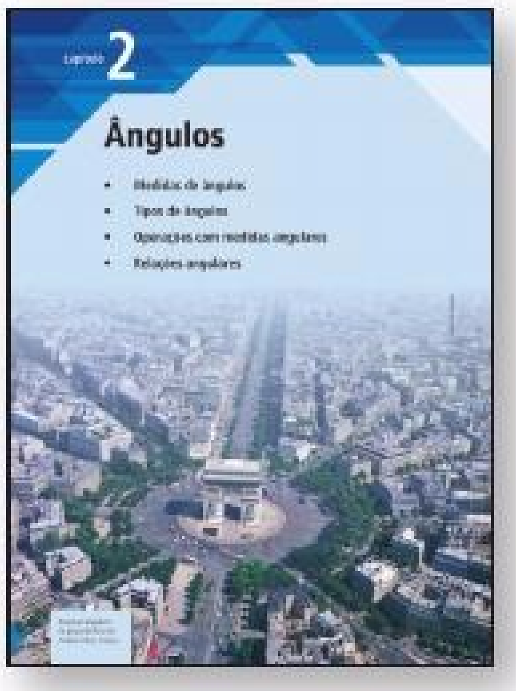
Lista complementar com problemas e exercícios para você estudar em casa.

Resolução das atividades

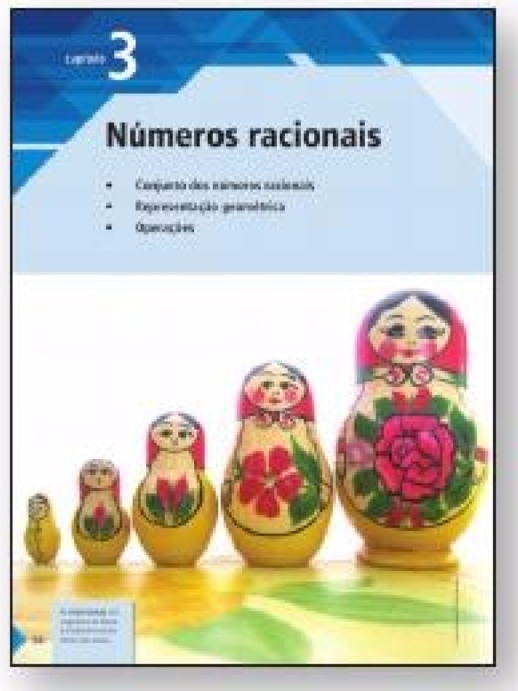
Resolução integral de todas as atividades propostas no livro, para que você possa conferir as respostas e fixar melhor os conceitos envolvidos.

Seu livro do 7º ano é composto de nove capítulos, que tratam dos cinco grandes temas que compõem a coleção: **Números**, **Geometria**, **Álgebra, Tratamento da informação** e **Medidas.**

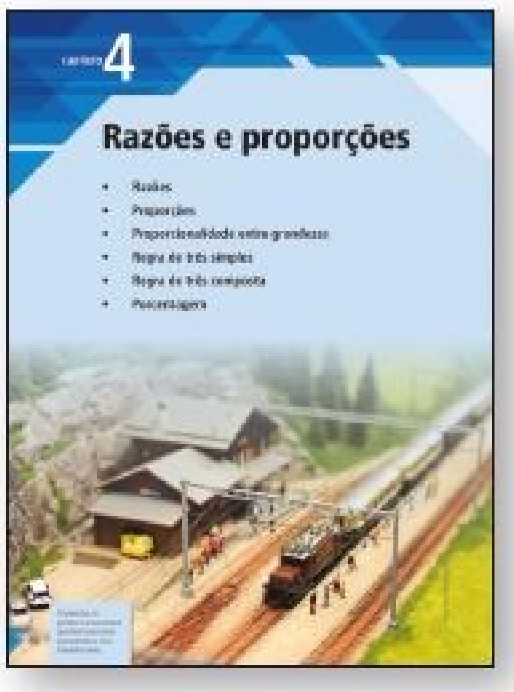
Números inteiros



Ângulos

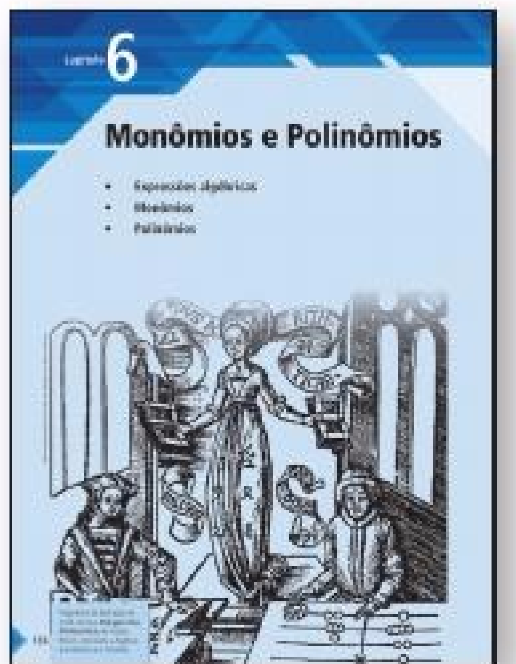


Números racionais

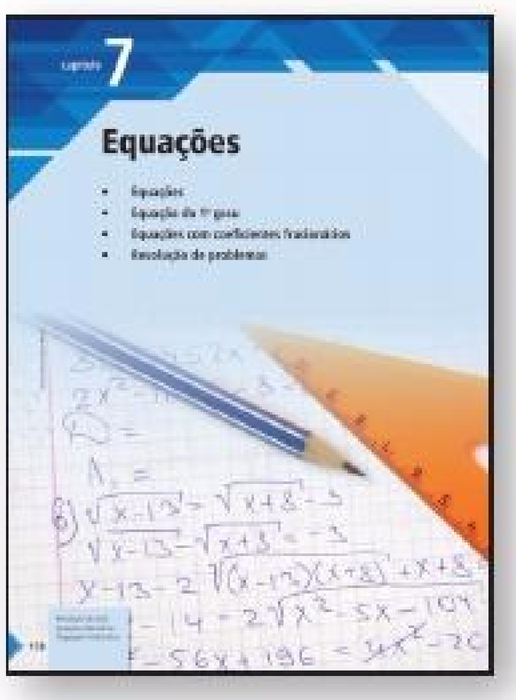


Razões e proporções

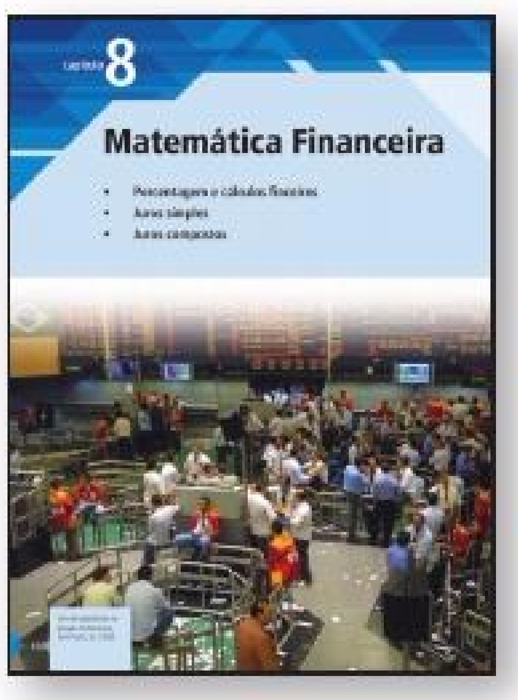
Ângulos e retas



Monômios e Polinômios



Equações



Matemática financeira

Gráficos e pictogramas

Sumário

capítulo 1

Números inteiros

- O conjunto dos números inteiros
- A reta numérica
- Adição
- Subtração
- Multiplicação
- Divisão exata
- Potenciação
- Raiz quadrada
- Expressões numéricas

Daniel Cymbalista/Pulsar Imagens

Termômetro que marca temperaturas negativas.
Canela (RS), 2010.

Conversa Inicial

Na estação de esqui de Bariloche, na Argentina, onde muitos turistas brasileiros vão no inverno para aproveitar a neve, a temperatura chega a **6 graus Celsius abaixo de zero**. É muito frio, não é mesmo? Principalmente para nós, brasileiros, que vivemos num país tropical e estamos acostumados a temperaturas acima de zero.

Professor: Utilize o texto inicial para despertar a percepção do uso dos números inteiros no cotidiano. Solicite aos seus alunos outros exemplos de utilização dos números e escreva no quadro. Faça perguntas como as relacionadas abaixo. Esse tipo de discussão inicial já pode prepará-los para compreender a posição dos números inteiros na reta numérica, os mecanismos de soma e subtração, propriedade comutativa etc.

- Qual lugar é mais quente: um que está a –5°C ou um que está a –2°C?
- Quem está mais feliz: uma pessoa com um saldo de – R$ 200,00 ou uma com um saldo de –R$ 100,00?
- Quanto uma pessoa precisa depositar em sua conta, inicialmente com um saldo de –R$ 200,00, para quitar sua dívida e ficar com um saldo positivo de R$ 300,00?
- Quanto a temperatura de um lugar, inicialmente a –2°C, deve subir para que esse lugar fique a 25°C?


Francis Valadj/SXC

São Carlos de Bariloche – Argentina

Em Bariloche, também existem dias em que a temperatura chega a 6 graus Celsius acima de zero. As duas temperaturas que citamos são representadas pelo mesmo algarismo, porém, a de **6 graus Celsius acima de zero** é indicada por **6° C** e a de **6 graus Celsius abaixo de zero** é indicada por **– 6° C**, que não é um número natural. É um número negativo.

Em outra situação, é comum ouvirmos expressões como "**saldo negativo**" ou mesmo "**resultado negativo de uma subtração**". Nesse casos, para representar os valores numéricos não podemos utilizar os números naturais, pois eles são sempre positivos ou nulos. Observe os exemplos:

a) Dei um cheque de R$ 300,00 e na minha conta só havia R$ 200,00. Fiquei, então, com um saldo negativo de R$ 100,00, pois se eu tinha R$ 200,00 e dei um cheque de R$ 300,00 faltam R$ 100,00.

b) 2 – 5 = ?
A subtração de um número natural de outro nem sempre é um número natural. Nesse caso, não existe um número natural que represente a subtração 2 – 5.

Em casos iguais ao do segundo exemplo, o conjunto dos números naturais não é suficiente para a representação dos valores numéricos que podemos obter. Assim, temos a necessidade de estudar um novo conjunto numérico, chamado de "**conjunto dos números inteiros**" e investigarmos como são feitas as operações que envolvem números negativos.

O conjunto dos números inteiros

Já conhecemos o conjunto dos números naturais, representado pelo símbolo N.

$$N = \{0, 1, 2, 3, ...\}$$

Saliente que, assim como o conjunto N, esse conjunto é ordenado e, por isso, sempre é possível comparar seus elementos, dizendo se são iguais, maiores ou menores. Desta forma, algumas observações podem ser feitas, como:

- qualquer número negativo é menor que zero.
- qualquer número positivo é maior que zero

Podemos imaginar que, para cada número natural diferente de zero, existe um número negativo correspondente: –1, –2, –3, ... Reunindo-se num só conjunto os números naturais e seus c,orrespondentes negativos, obtemos o **conjunto dos números inteiros**, indicado pelo símbolo Z:

$$Z = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

Utilizamos o símbolo (*) para indicar a exclusão do zero. Assim:

$$Z^* = \{..., -3, -2, -1, 1, 2, 3, ...\}$$

Também utilizamos os símbolos (+) e (-) para indicar, respectivamentente, os inteiros **não negativos** e os inteiros **não positivos**. Veja:

inteiros não negativos → $\mathbf{Z_+} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$
inteiros não positivos → $\mathbf{Z_-} = \{..., -3, -2, -1, 0\}$

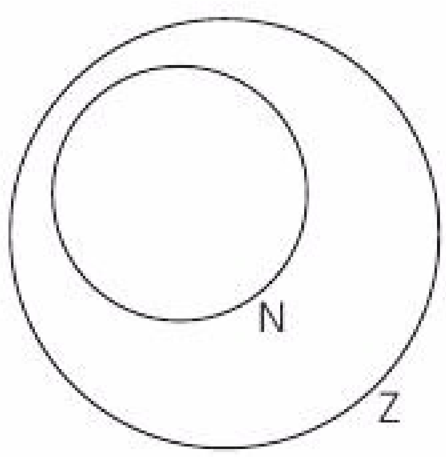
Para representar os **inteiros positivos**, utilizamos $\mathbf{Z^*_+}$ e para representar os **inteiros negativos** utilizamos $\mathbf{Z^*_-}$. Nesses dois casos, eliminamos o zero, pois ele não é positivo nem negativo. É neutro.

Lembrando que os símbolos $\in$ e $\notin$ representam, respectivamente, **pertence** e **não pertence**, podemos escrever:

- $6 \in Z$
- $\frac{2}{3} \notin Z$
- $-6 \in Z$
- $-0{,}5 \notin Z$

Note que todo número natural pertence a Z, pois reunimos os naturais a seus correspondentes negativos. Assim:

$$0 \in Z;\ 1 \in Z;\ 2 \in Z;\ 3 \in Z;\ 4 \in Z \text{ etc.}$$



Portanto, podemos dizer que o conjunto N está contido no conjunto Z. Esse fato é indicado por $N \subset Z$, que significa "N ***está contido*** em Z", e representado pela figura ao lado, que indica que todo número natural é um número inteiro, mas nem todo inteiro é um número natural.

Atividades

Interpretar texto

1. Considere as informações a seguir e represente cada uma usando números positivos, negativos ou nulos.

- O gelo passa para o estado líquido a uma temperatura de 0 grau Celsius. 0° C
- Existem regiões nas montanhas de Bariloche em que os termômetros registram uma temperatura de 18 graus Celsius abaixo de zero. –18° C
- O corpo humano mantém, aproximadamente, uma temperatura de 36 graus Celsius acima de zero. +36° C
- A água ferve a uma temperatura de 100 graus Celsius acima de zero. +100° C

Fabio Colombini

Panela com água fervendo.

2. Leia atentamente cada item a seguir e escreva em seu caderno **V** (verdadeiro) ou **F** (falso) em cada caso.

V a) ( ) $3 \in N$

F b) ( ) $-3 \in N$

F c) ( ) todo número inteiro $\in N$

V d) ( ) $-123 \in Z$

F e) ( ) $\frac{1}{2} \in Z$

F f) ( ) $Z_+^* = \{0, 1, 2, 3, ...\}$

3. Usando números inteiros positivos ou negativos, indique simbolicamente:

a) um saldo de 13 gols a favor. +13 gols

b) uma profundidade de 100 metros. –100m

c) um lucro de R$ 700 000,00. +R$ 700 000,00

d) um crédito de R$ 7200,00. + R$ 7200,00

e) uma temperatura de 23°C abaixo de zero. –23°C

f) 700 m acima do nível do mar. +700 m

g) um saldo de 7 gols contra. –7 gols

4. Uma pessoa tinha R$ 350,00 no banco e deu dois cheques, cada um de R$ 200,00. Esta pessoa ficou com saldo positivo, negativo ou nulo? Qual é o valor do saldo?

Tinha R$ 350,00 deu dois cheques de R$ 200,00
Ficou com saldo negativo no valor de– R$ 50,00

5. Uma equipe de basquete realizou três jogos. Nesses jogos, a equipe marcou 251 pontos e sofreu 240 pontos.

a) O saldo dessa equipe é a favor ou contra? O saldo é a favor.

b) Usando números inteiros positivos ou negativos, escreva esse saldo.
11 pontos

6. Um termômetro está marcando a temperatura de 5 graus positivos. Diga quanto ele marcará se a temperatura:

Ordenar

a) subir 7 graus. 12° C

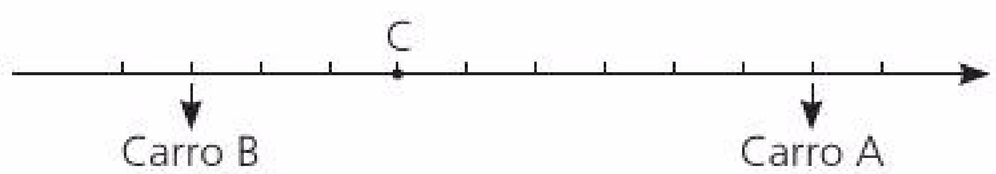
b) descer 8 graus. –3° C

c) descer 5 graus 0° C

d) descer 12 graus. –7° C

e) subir 3 graus e depois descer 8 graus. 0° C

7. A figura a seguir representa uma rodovia e cada intervalo corresponde a 60 km. Ela nos mostra a posição de dois carros em relação a uma cidade C.



Responda, considerando o sentido positivo de C para A, usando números inteiros:

a) Qual a posição do carro A em relação à cidade C?
Carro A está a 360 km a frente da cidade C (+360 km).

b) Qual a posição do carro B em relação à cidade C?
Carro B está a 180 km atrás da cidade C (–180 km).

8. Efetue:

a) 7 – 15 –8

b) 6 – 19 –13

c) 12 – 20 –8

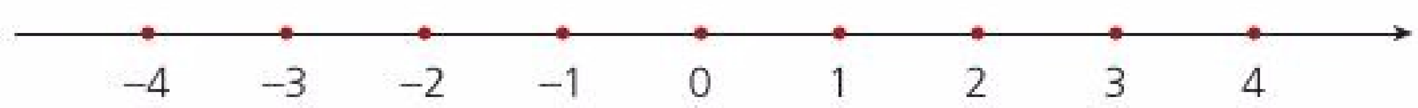
d) 16 – 19 –3

e) 129 – 139 –10

Professor: procure trabalhar bastante com a reta numérica, pois a informação visual é sempre enriquecedora. Destaque que ela não é algo tão fora da realidade, você pode recordar como exemplo, o termômetro, que é uma reta numérica vertical e já foi discutido anteriormente. Utilizando a reta numérica, você pode mostrar, por exemplo, que: –4°C < –1°C, já que –4 está à esquerda de –1 e que a temperatura deve subir 5°C para que um ambiente, que estava inicialmente a –3°C, fique a 2°C:

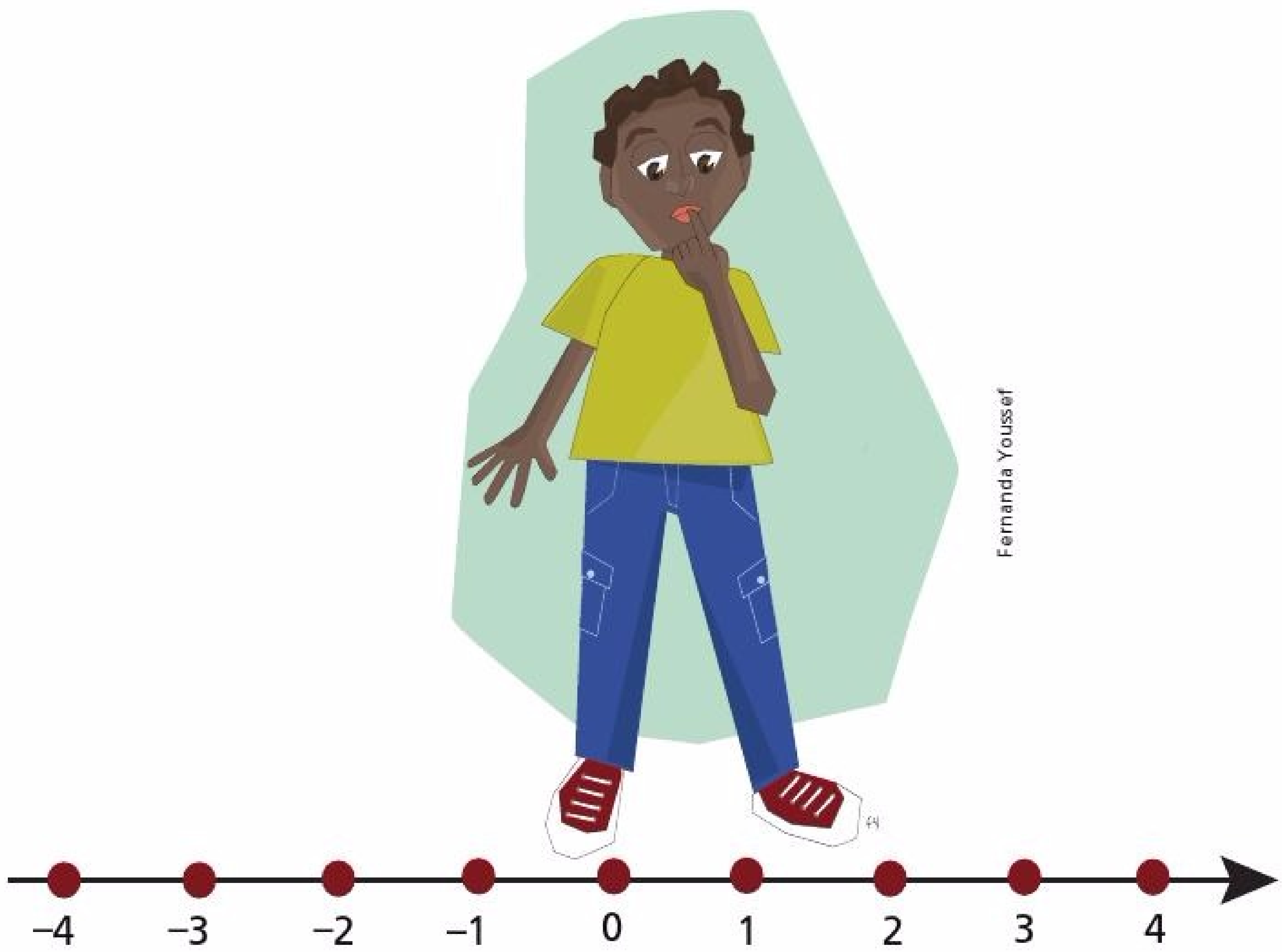
A reta numérica

O conjunto Z pode ser representado numa reta numérica:



Observe que é possível comparar dois números inteiros a partir da posição que ocupam na reta numérica. Assim, um número associado a um ponto mais à direita é sempre maior que um outro associado ao ponto à sua esquerda. Por exemplo:

- $0 > -3$
- $-4 < 1$
- $-2 > -3$

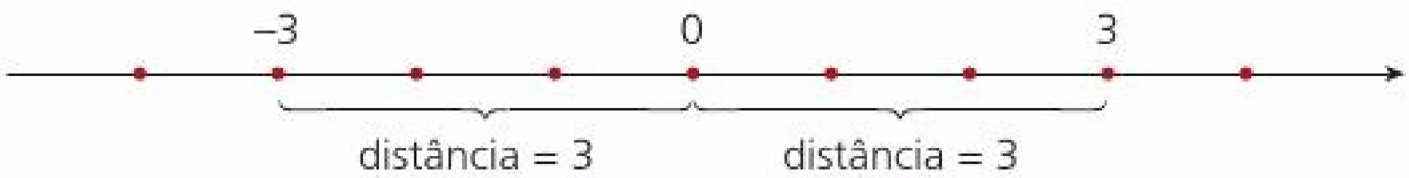


Oposto de um número inteiro

Dizemos que dois números inteiros são opostos quando são representados por pontos que se encontram à mesma distância do zero. Isso equivale a dizer que dois números opostos estão sempre em lados opostos da reta, em relação ao ponto que representa o zero.

Os números inteiros –3 e 3 são opostos. Veja as posições desses números em relação ao zero:

Professor: leia o texto e destaque no quadro que os números inteiros podem ser simétricos, quando os números têm sinais opostos. Comente também que o valor absoluto de um número inteiro é a distância entre a origem e o número.



Quando dois números inteiros são opostos, podem também ser chamados de **simétricos**. Por exemplo:

O simétrico de 4 é –4.

O simétrico de –8 é 8.

O zero é o único número inteiro que é igual ao seu simétrico.

Para ler

Simetria

Quando falamos de simetria entre dois números, entendemos que esses dois números opostos são simétricos em relação ao ponto que representa o zero, que é um ponto de simetria. No entanto, o conceito de simetria pode ser observado de forma mais geral em figuras planas e até em figuras espaciais. Veja os exemplos:

As imagens não são proporcionais entre si.

Peter Rees/Dreamstime

Borboleta

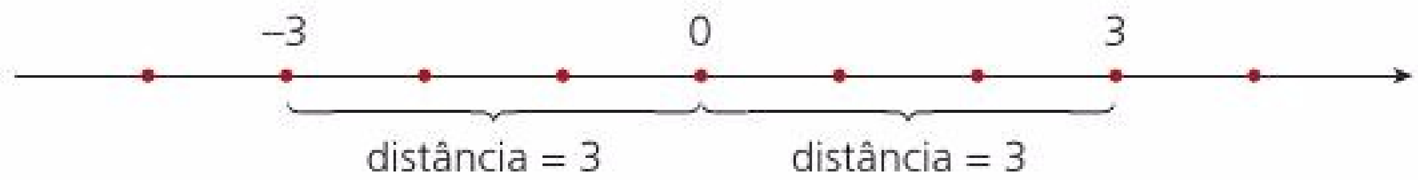
Tomispin/Dreamstime

Violão

A imagem da borboleta tem um eixo que a divide em duas partes simétricas. Esse eixo é chamado de **eixo de simetria**. Observe que a foto do violão também apresenta um eixo de simetria.

Módulo ou valor absoluto de um número inteiro

Módulo ou **valor absoluto** de um número inteiro é a distância desse número até o zero, na reta dos números inteiros. Veja na figura, que o módulo de –3 é igual ao módulo de 3, pois ambos distam 3 do zero.



Para representar o módulo de um número, utilizamos duas barras verticais. Quando escrevemos | **3** |, por exemplo, lemos "**módulo de 3**". Assim:

Fernanda Youssef

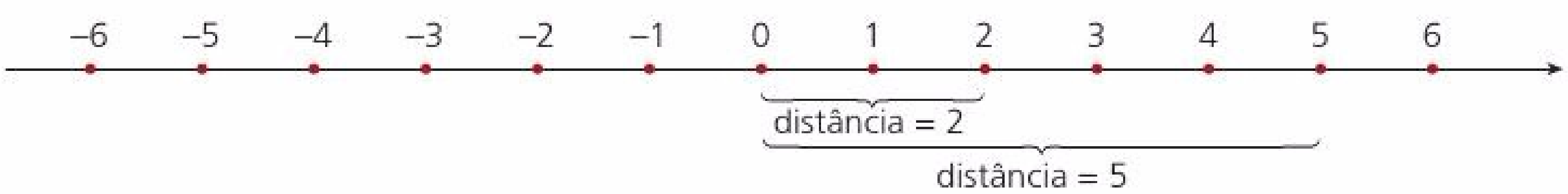
- | 3 | = 3
- | –3 | = 3
- | –7 | = 7
- | 0 | = 0
- | 9 | = 9

Como a distância é sempre um número positivo, o módulo de um número será sempre positivo. O módulo é também um importante elemento na comparação de dois números inteiros.

Se representarmos o conjunto Z em uma reta, podemos verificar que:

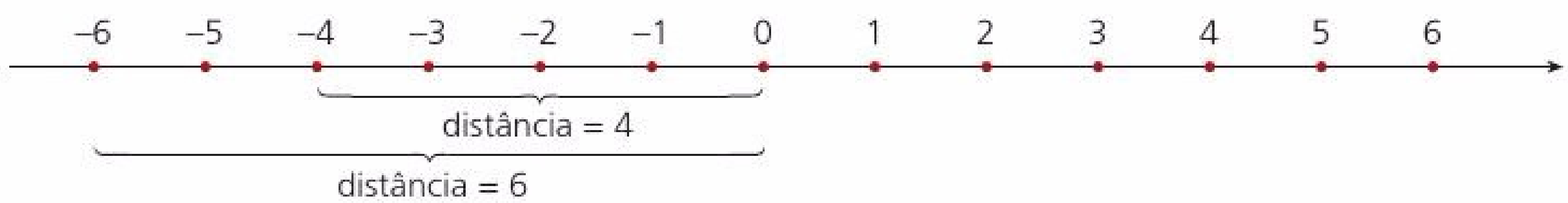
- Entre dois números inteiros positivos, o maior é o que tem maior módulo. Exemplo:

$$5 > 2 \text{ e } |5| > |2|$$



- Entre dois números inteiros negativos, o maior é o que tem menor módulo. Exemplo:

$$-4 > -6 \text{ e } |-4| < |-6|$$



Atividades

9. Copie em seu caderno e assinale quais das sentenças abaixo são verdadeiras:

V a) $5 < 7$ F c) $-4 < -6$ V e) $0 > -8$ V g) $-8 < -7$

V b) $-5 < 7$ F d) $2 < -3$ F f) $0 < -7$ F h) $-9 > -7$

10. Escreva na ordem crescente os números:

$$9, -9, 5, -5, 1, -1 \text{ e } 0$$

$-9, -5, -1, 0, 1, 5, 9$

11. Copie os números da listagem abaixo, ordenando-os do maior para o menor na linha abaixo:

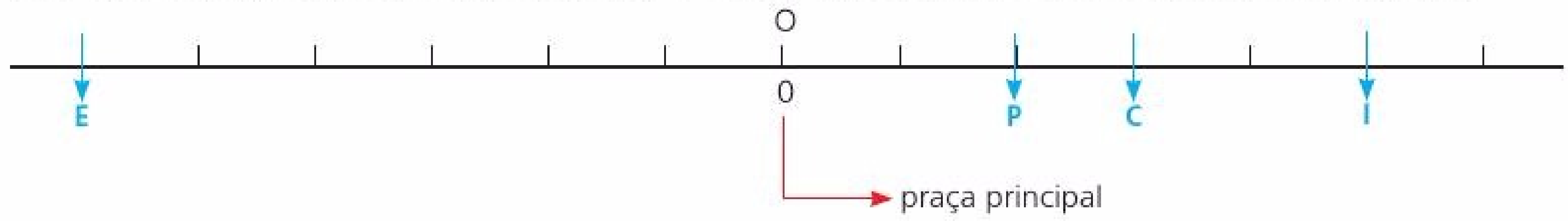
–19	1	11	3	–16	7	–3	8	0	–34	–27	–8	–15

11 8 7 3 1 0 –3 –8 –15 –16 –19 –27 –34

12. Em cada caso, qual é a distância:

a) de –2 até 2; 4 b) de –6 até 0; 6 c) de –17 até –9; 8 d) de –30 até –2. 18

13. A reta numérica a seguir representa a avenida principal de uma cidade. Nela, o ponto O representa a praça principal e cada intervalo representa 1 quarteirão. Nessas condições, escreva a reta em seu caderno e localize a igreja, o clube, a prefeitura e a escola na reta numérica:



- A posição da igreja (ponto I) em relação à praça principal é representada pelo número inteiro +5.
- A posição do clube (ponto C) em relação à praça principal é representada pelo número inteiro –3.
- A posição da prefeitura (ponto P) em relação à praça principal é representada pelo número inteiro +2.
- A posição da escola (ponto E) em relação à praça principal é representada pelo ponto -6.

14. Apresente os opostos de:

a) 5 –5 c) –30 +30

b) –6 +6 d) 56 –56

15. Qual é o módulo de cada um dos seguintes inteiros:

a) 8 8 c) –23 23

b) –9 9 d) 33 33

16. Responda:

a) Qual é o simétrico de –15? +15

b) Qual é o valor absoluto de –15? 15

c) Qual é o simétrico do simétrico de –15? –15

d) Qual é o simétrico do valor absoluto de 18? –18

17. Quais são os números inteiros cujo módulo é 12? 12 e –12

18. Quais são os números inteiros que têm módulo menor que 3? 0, 1 e 2

19. Calcule o valor da expressão

$$|+47| + |-38| - |-80|.$$ 5

Desafio

Analise atentamente as sequências e, a seguir, descubra como cada listagem de números foi organizada e escreva em seu caderno os outros números que podem aparecer em cada uma delas:

a)

−4	−2	0	2						

b)

−1	1	−2	2						

c)

−1	−3	−5							

Adição

Para você compreender melhor como procedemos para realizar a adição de dois números inteiros, vamos imaginar uma competição numa olímpiada escolar.

Nesta competição, os times perdem ou ganham pontos ao final de cada dia de competição, considerando-se o resultado de todos os jogos realizados no dia.

A tabela abaixo representa os pontos ganhos ou perdidos pelas quatro equipes (azul, amarela, verde e branca) nos dois dias em que a olímpiada foi realizada.

Ana Carolina Farias/PMPA

Jovens jogando futebol em quadra esportiva.

Professor: destaque cada ponto do texto no quadro e comente cada etapa dos resultados da Olimpíada Escolar. Explore cada fase das operações e solicite a discussão e participação dos alunos nesse processo.

OLÍMPIADA ESCOLAR – RESULTADOS

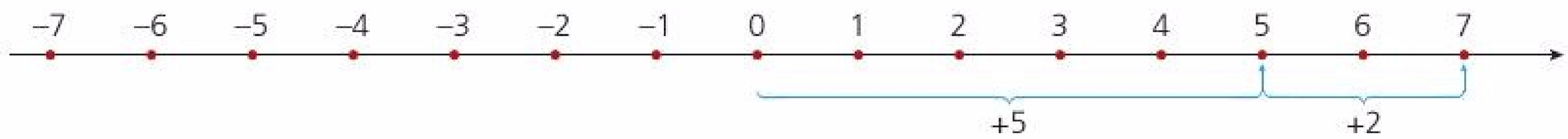
Equipes	Primeiro dia		Segundo dia	
	Ganhou	Perdeu	Ganhou	Perdeu
Azul	5		2	
Amarela		3		2
Verde	5			3
Branca		5	4	

Vamos representar os resultados diários de cada equipe de duas formas: a algébrica, onde somamos os resultados dos dois dias e a geométrica, na qual fazemos as operações, avançando para a direita ou para a esquerda, conforme os sinais dos números, sempre partindo do zero.

Equipe azul:

No primeiro dia ganhou 5 pontos e no segundo ganhou 2 pontos.

- Forma algébrica: (+5) + (+2)
- Forma geométrica:

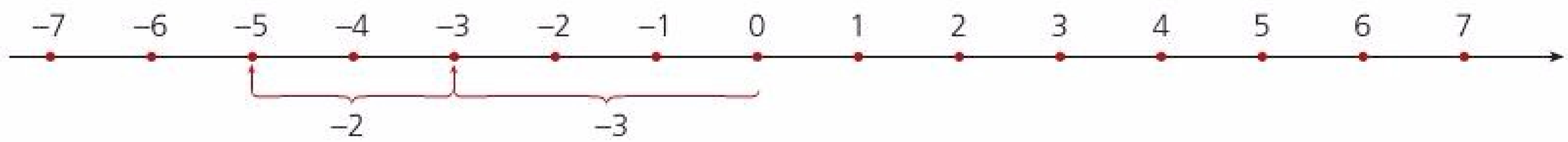


(+5) + (+2) = + 7

Equipe amarela:

No primeiro dia perdeu 3 pontos e no segundo perdeu 2

- Forma algébrica: (–3) + (–2)
- Forma geométrica:

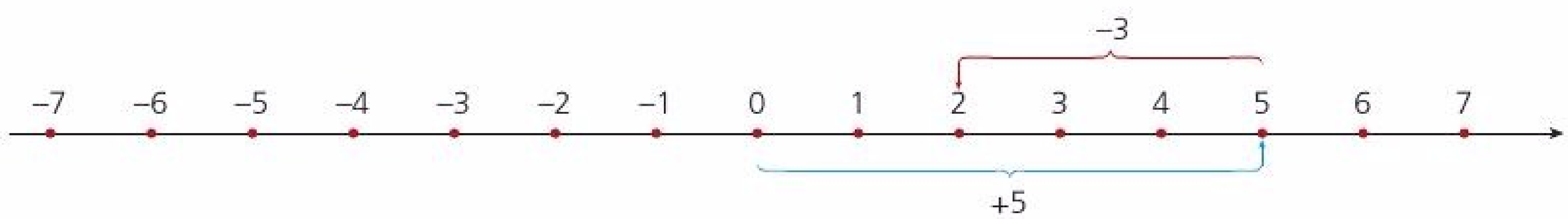


(–3) + (–2) = –5

Equipe verde:

No primeiro dia ganhou 5 pontos e no segundo perdeu 3 pontos

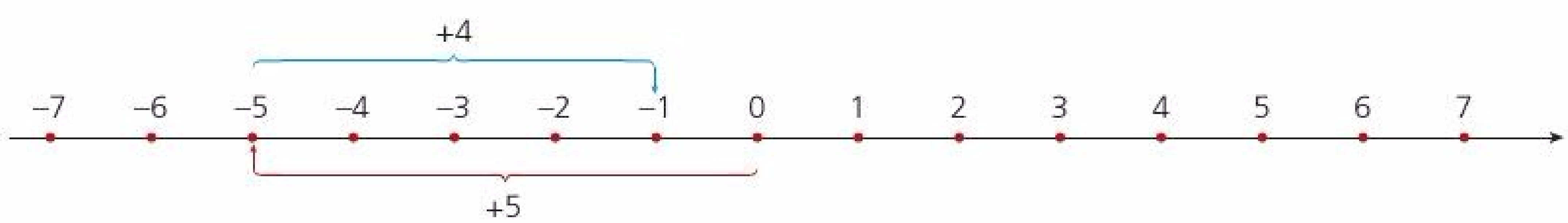
- Forma algébrica: (+5) + (–3)
- Forma geométrica:



(+5) + (–3) = +2Equipe branca:

No primeiro dia perdeu 5 pontos e no segundo ganhou 4 pontos.

- Forma algébrica: (–5) + (+4)
- Forma geométrica:



(–5) + (+4) = –1

Veja que a equipe azul venceu as olimpíadas, pois acumulou 7 pontos ao final. Agora, observe bem as quatro adições de números inteiros que fizemos para calcular o resultado final:

- para a equipe azul adicionamos dois números inteiros de mesmo sinal (+);
- para a equipe amarela também adicionamos dois inteiros, porém, ambos negativos;
- paras as equipes verde e branca, adicionamos números inteiros de sinais diferentes.

Vamos então, estabelecer uma regra para a adição de números inteiros:

a) Se dois números inteiros têm o mesmo sinal, sua soma será a soma dos módulos com o sinal dos dois números;
b) Se dois números inteiros têm sinais diferentes, sua soma será a diferença entre seus módulos, com o sinal do número de maior módulo.

Professor: destaque a soma de dois números de mesmo sinal e a soma dos números de sinais diferentes. Explore o texto no quadro e crie mais exemplos se achar conveniente. Estimule a discussão e participação dos alunos.

Acompanhe os exemplos:

- $(-3) + (-2) = -5$
- $(-7) + (+5) = -2$
- $(+50) + (+70) = +120$
- $(+17) + (-9) = +6$

Agora que você já sabe como agir diante de uma adição de números inteiros, podemos simplificar a notação que utilizamos, lembrando que:

- O sinal de (+) na frente de um número positivo é desnecessário;
- Quando temos o sinal de (+) na frente de um número negativo, prevalece o sinal negativo.

Os exemplos que vimos há pouco poderiam ser escritos da seguinte forma:

- $(-3) + (-2) = -5 \rightarrow -3 - 2 = -5$
- $(-7) + (+5) = -2 \rightarrow -7 + 5 = -2$
- $(+50) + (+70) = +120 \rightarrow 50 + 70 = 120$
- $(+17) + (-9) = +6 \rightarrow 17 - 9 = 6$

Veja nas novas formas de escrever que algumas adições de números inteiros podem ser representadas como subtrações de números naturais. É o caso, por exemplo, de $17 - 9 = 6$.

Atividades

20. Efetue as adições:

a) $7 + (-7)$ 0
b) $3 + (-7)$ –4
c) $(-12) + (-2)$ –14
d) $10 + (-9)$ 1
e) $(-8) + 11$ 3
f) $9 + 6$ 15
g) $0 + (-3)$ –3
h) $(-7) + 0$ –7

21. Efetue as adições:

a) $-2 + 3$ 1
b) $-6 + (-4)$ –10
c) $-8 + 5$ –3
d) $-2 + 2$ 0
e) $-2 + (-2)$ –4
f) $-6 + 13$ 7
g) $-12 + (-8)$ –20
h) $-7 + (-18)$ –25
i) $-17 + 32$ 15
j) $-17 + (-32)$ –49

22. Faça, agora, a seguintes adições (lembre-se de que você pode cancelar os opostos, cuja soma é zero):

a) $-5 + (-5) + (-4)$ –14
b) $-5 + 5 + (-4)$ –4
c) $13 + 13 + (-13)$ 13
d) $-13 + 13 + (-13)$ –13
e) $-1 + 1 + (-1) + 1$ 0
f) $1 + (-6) + (-10) + 15$ 0
g) $-[3 + (-5) + (2 - 9)]$ +9
h) $[-2 + 4 - (-2) - 7 + (-8)]$ –11

Interpretar texto

23. Considerando que **lucros** são números positivos e **prejuízos** são números negativos, resolva o problema a seguir:
Um cinema teve um prejuízo de 40 mil reais na festa de lançamento de um filme, no início do mês. No restante do mês, acumulou um prejuízo de mais 8 mil reais nas vendas de ingresso, com exceção do último fim de semana, quando conseguiu um lucro de 9 mil reais. Qual foi o resultado no fim deste mês? O cinema teve prejuízo de 39 mil

24. Em cada caso, ache o valor da incógnita x. Para isso, procure um número inteiro x que satisfaça cada uma das igualdades.

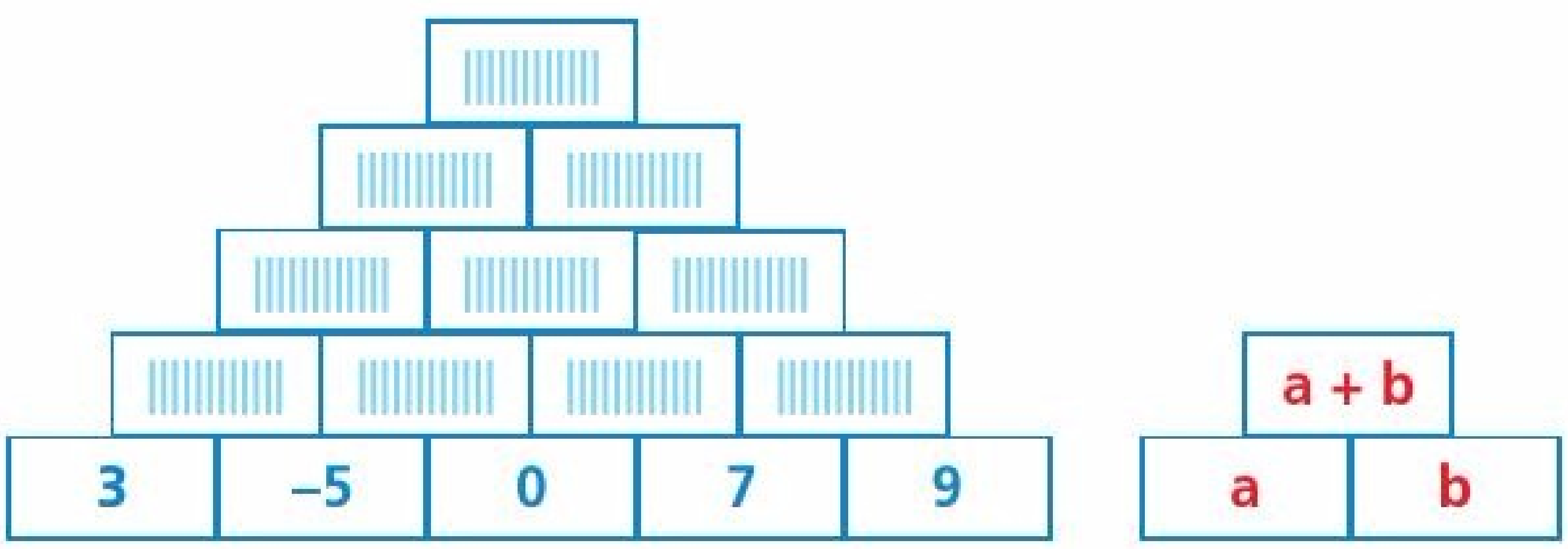
a) $11 + x = 0$ –11
b) $-15 + x = 0$ 11
c) $-7 + x = -14$ –7
d) $11 + x = 12$ 1
e) $11 + x = 10$ –1
f) $11 + x = -2$ 13

25. Efetue as seguintes adições:

a) $789 + (-435)$ 354
b) $1\,890 + (-2\,100)$ –210
c) $-435 + (-1\,890)$ –2 325
d) $-789 + 1\,890$ 1 101
e) $789 + (-1\,890)$ –1 101

Desafio

Copie a pirâmide abaixo em seu caderno e complete as lacunas partindo da base para o topo, de acordo com a regra descrita ao lado:

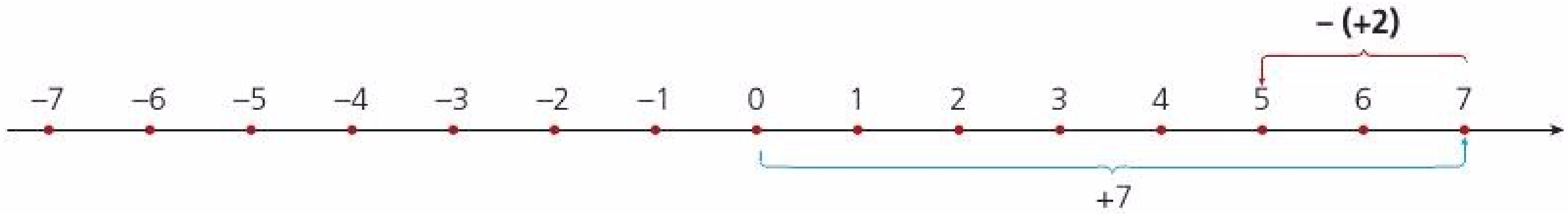


Professor: trabalhe com subtrações na reta numérica. Elas são úteis para que, futuramente, o aluno entenda o sinal negativo nas multiplicações como "o oposto de" ou "o contrário de". Você pode usar contas mistas, com adições e subtrações, para que o aluno treine.

Subtração

Você já sabe que fazer uma subtração é o mesmo que "tirar" uma quantidade de outra. Vamos, então, fazer o mesmo que fizemos na adição de números inteiros, utilizando a forma geométrica.

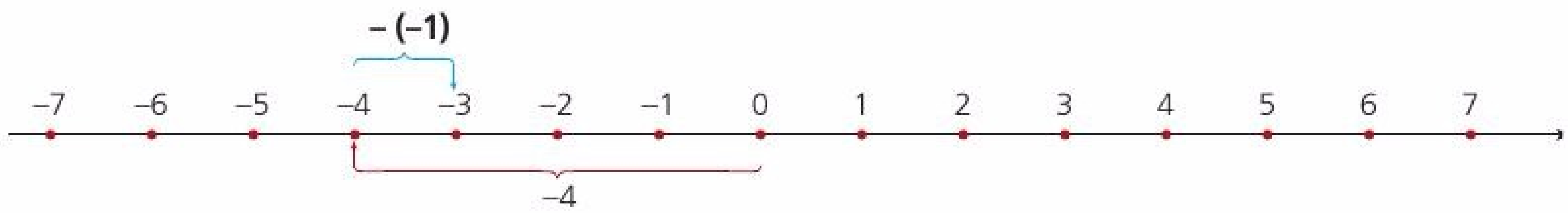
- Vamos efetuar (+7) – (+2).



Neste caso, obtemos (+7) – (+2) = + 5

- Vamos, agora, efetuar (–4) – (–1).

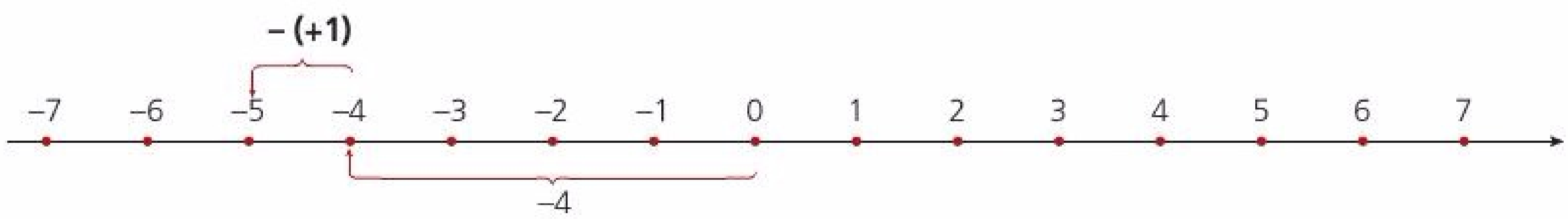
Partimos do zero e vamos ao –4. Em seguida, voltamos 1, pois a conta pede que se retire –1. Em outras palavras, podemos dizer que subtrair (–1) é o mesmo que adicionar 1, ou então que subtrair um número negativo é o mesmo que adicionar o valor absoluto desse número.



Assim, a subtração fica:

$$(-4) - (-1) = -4 + 1 = -3$$

- Vamos, agora, efetuar (–4) – (+1) utilizando a reta numérica.



Veja que $(-4) - (+1) = -4 - 1 = -5$. Também podemos escrever que:

$$(-4) - (+1) = (-4) + (-1) = -4 - 1 = -5$$

Nesta subtração, você pode perceber que subtrair 1 é a mesma operação que somar –1. Podemos dizer também que subtrair –2 é o mesmo que somar 2 e que subtrair 1 é o mesmo que somar –1. Isso nos permite afirmar que:

> Sendo **a** e **b** dois números inteiros quaisquer, efetuar **a** – **b** é somar o número **a** com o oposto de **b**.

Agora que já sabemos fazer uma subtração de números inteiros, podemos simplificar a notação que utilizamos:

- O sinal de (+) na frente de um número positivo é desnecessário, pois a – (+b) é o mesmo que a – b.
- Quando temos o sinal de (–) na frente de um número negativo, podemos trocar os dois pelo sinal positivo (+), assim, a – (–b) é o mesmo que a + b.

Atividades

26. Transforme cada subtração dada em uma adição de inteiros, e a seguir calcule o resultado.

a) 12 – 15 –3
b) (–1) – (–10) +9
c) 18 – (–4) 22
d) (–10) – 5 –15
e) 15 – 6 9
f) 0 – (–7) 7
g) 0 – 7 –7

27. Calcule:

a) –5 – 7 –12
b) –9 – 8 –17
c) –10 – 21 –31
d) –5 – (–4) 4
e) –11 – (–15) 4
f) –21 – (–8) –13

28. Em certo jogo realizado em sala de aula, havia cartelas marcadas com números inteiros. Bruno convidou alguns amigos para brincar com ele. Cada amigo sorteava uma cartela com um número que representava sua pontuação e, a seguir, verificava-se qual a diferença encontrada entre os valores da sua cartela e o valor da cartela de cada amigo. Como Bruno é organizado, foi comparando sua situação com a dos amigos e foi fazendo um registro. Observe a tabela com as informações da pontuação obtida no jogo.

1ª rodada	Bruno	Matheus
carta	+15	+7
2ª rodada	Bruno	Antônio
carta	+7	+15
3ª rodada	Bruno	Leandro
carta	+8	–11

Em seu caderno, complete as frases a seguir, mostrando a situação de Bruno em cada rodada:

Na 1ª rodada

a) Bruno tirou ||||||||| pontos. 15
b) Registro: (+15) – (7) = ||||||||| 15 – 7 =
c) Ele fez ||||||||| pontos ||||||||| que Matheus (a mais/a menos). 8 a mais

Na 2ª rodada

a) Bruno fez ||||||||| pontos. 7
b) Registro: (+7) – (15) = ||||||||| 7 – 15 = –8
c) Ele fez ||||||||| pontos ||||||||| que Antônio (a mais/a menos). 8 a menos

Na 3ª rodada

a) Bruno fez ||||||||| pontos. 8

b) Registro: (+8) – (-11) = ||||||||| 8 + 11 = 19

c) Ele fez ||||||||| pontos ||||||||| que Leandro (a mais/a menos). 19 a mais

29. Efetue as seguintes expressões numéricas:

a) 7 – (4 – 8) 11

b) –2 – (–13 + 8) +3

c) 1 – [1 – (2 – 2)] 0

d) 1 – [1 – (2 – 4)] –2

e) 0 – [–5 – (–7 – 10)] –12

30. Considerando o térreo como andar zero, o primeiro subsolo como –1 e o segundo como –2, responda: Ordenar

a) quantos andares sobe uma pessoa que vai do andar –2 ao andar 12? 14

b) represente a resposta do item anterior com uma subtração. 12 – (–2) = 14

31. Quanto aumenta a temperatura de um termômetro quando: Aplicar

a) passa de 3 para 7 graus 4 graus

b) passa de –7 para –6 graus 1 grau

c) passa de –9 para 6 graus 15 graus

32. Efetue:

a) –12 + 18 + (–20) – 14 –28

b) –16 – 12 – 30 – (–14) –44

c) 13 + (–17) – (–15) + (+17) 28

d) –13 – (–19) – 11 + (–17) –22

e) –15 + 11 – (–17) – (+13) 0

f) –28 + 22 + (–22) – (–24) –4

Desafio

Um pequeno comerciante de doces de um bairro constatou que, no mês de fevereiro, havia R$ 2 000,00 em seu caixa. No mês de março ele teve um lucro de R$ 5 000,00. Em abril ele teve um prejuízo de R$ 3 000,00. Em maio, o lucro foi de R$ 2 500,00. Em junho não houve nem lucro nem prejuízo. Em julho o prejuízo foi muito grande: R$ 10 000,00. Em agosto, o lucro foi de R$ 6 000,00.

a) Em seu caderno, complete a tabela a seguir para mostrar a movimentação do dinheiro descrito na situação problema anterior no período de fevereiro a agosto.

	Lucro ou Prejuízo	Total em Caixa
Fevereiro	—	2 000,00
Março	5 000,00	7 000,00
Abril	|||||||||	|||||||||
Maio	|||||||||	|||||||||
Junho	|||||||||	|||||||||
Julho	|||||||||	|||||||||
Agosto	|||||||||	|||||||||

b) Pense e responda:

De acordo com as informações observadas, você acredita que a empresa teve seu caixa com prejuízo ou lucro?

Propriedades da adição e da subtração

A adição, no conjunto dos números inteiros, admite as propriedades comutativa, associativa e a da existência do elemento neutro. Veja os exemplos a seguir.

- **Comutativa**

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{4 + (-6)} &= -2\\ \mathbf{(-6) + 4} &= -2\end{aligned}\right\} \mathbf{4 + (-6) = (-6) + 4}$$

- **Associativa**

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{[(-2) + 3] + (-6)} &= 1 + (-6) = -5\\ \mathbf{(-2) + [3 + (-6)]} &= (-2) + (-3) = -5\end{aligned}\right\} \mathbf{[(-2) + 3] + (-6) = (-2) + [3 + (-6)]}$$

- **Elemento neutro**

$$\left.\begin{aligned}(-13) + \mathbf{0} &= -13\\ \mathbf{0} + (-13) &= -13\end{aligned}\right\} (-13) + \mathbf{0} = \mathbf{0} + (-13)$$

A adição no conjunto dos inteiros apresenta também a propriedade da existência do elemento oposto, ou simétrico.

Todo número inteiro, somado ao seu simétrico, resulta zero.

- **Propriedade da subtração**

A subtração em Z não tem a propriedade comutativa, nem a associativa. Possui apenas a propriedade do **fechamento**, que não é válida para os números naturais no caso da subtração. Veja os exemplos:

- **A subtração de inteiros não admite a propriedade comutativa.**

$$\left.\begin{aligned}5 - 3 &= 2\\ 3 - 5 &= -2\end{aligned}\right\} 5 - 3 \neq 3 - 5$$

- **A subtração de inteiros não admite a propriedade associativa.**

$$\left.\begin{aligned}[4 - 2] - (-1) &= 2 - (-1) = 3\\ 4 - [2 - (-1)] &= 4 - 3 = 1\end{aligned}\right\} [4 - 2] - (-1) \neq 4 - [2 - (-1)]$$

- **Propriedade do fechamento**

Quando trabalhamos no conjunto dos naturais, vimos que não era possível efetuar uma subtração quando o minuendo era menor que o subtraendo.

Assim, por exemplo, no conjunto dos naturais não existe 13 – 18. Já no conjunto dos números inteiros, qualquer subtração de inteiros sempre resulta em um número inteiro.

Por exemplo: 13 – 18 = –5.

Quando uma operação é feita com números de um determinado conjunto, e o resultado é também um número desse conjunto, dizemos que essa operação admite a **propriedade do fechamento** nesse conjunto. Podemos dizer, então, que a subtração admite a propriedade do fechamento no conjunto dos números inteiros:

Se **a** e **b** são números inteiros, então a – b será um número inteiro.

• Relação entre adição e subtração de inteiros

Considerando-se o conjunto dos números inteiros, podemos dizer que adição e subtração são operações inversas. Veja os exemplos:

a) A partir de 13, somando-se 4 obtém-se 17.

13 + 4 = 17

b) Partindo-se de 17 e subtraindo-se 4 obtemos 13.

17 – 4 = 13

Esses exemplos mostram que ao se somar 4 ao número inteiro 13 e depois subtraindo 4 do resultado, obtemos o mesmo número 13.

Por essa razão, dizemos que adição e subtração são operações inversas. De maneira geral, se **a** e **b** são dois números inteiros, podemos escrever:

- se **a + b = c** então **c – b = a**
- se **a – b = c** então **c + b = a**

Essa relação entre adição e subtração será muito importante em seus estudos de matemática.

Ela ajudará a resolver pequenos problemas como o do exemplo a seguir.

Que número inteiro devemos somar a 18 para obtermos 25? Vamos representar o número por ★. Dessa forma, nosso problema pode ser escrito assim:

$$★ + 18 = 25$$

Como a operação inversa de somar 18 é subtrair 18, teremos:

$$★ = 25 - 18 \rightarrow ★ = 7$$

Em matemática, quando queremos encontrar um valor desconhecido, costumamos utilizar a letra **x**, simbolizando uma **incógnita** (valor desconhecido). Assim, utilizando-se **x** no lugar de ★, nosso problema fica:

$$x + 18 = 25 \rightarrow x = 25 - 18 \rightarrow x = 7$$

Fernanda Youssef

Adição algébrica

Toda expressão numérica com adições e subtrações é chamada de **adição algébrica**. Vamos utilizar o que aprendemos sobre adição e subtração de inteiros para encontrar um processo de resolução de adições algébricas.

Você já sabe que subtrair 3, por exemplo, é o mesmo que somar (–3):

$$1 - 3 = -2 \text{ é o mesmo que } 1 + (-3) = -2$$

E que subtrair (–3), por exemplo, é o mesmo que somar 3:

$$5 - (-3) = 8 \text{ equivale a } 5 + 3 = 8$$

Essa característica de poder transformar qualquer subtração de inteiros numa adição nos permite estabelecer um processo de resolução de expressões numéricas.

Uma expressão numérica com adições e subtrações de inteiros pode ser transformada em outra, que tenha apenas adições. Por exemplo:

$$5 + 3 - 8 - 4 - 11 + 9 = 5 + 3 + (-8) + (-4) + (-11) + 9$$

Vamos ao passo-a-passo necessário para resolver a expressão numérica:

$$5 + 3 - 8 - 4 - 11 + 9 =$$

Professor: não deixe de enfatizar a transformação do exemplo do livro: $5 + 3 - 8 - 4 - 11 + 9 = 5 + 3 + (-8) + (-4) + (-11) + 9$ Normalmente fazemos a transformação contrária, mas, quando você ensinar álgebra e equações, será útil que o aluno veja o primeiro lado da igualdade acima como uma soma na qual os sinais de + e – são dos números que vêm a seguir.

1º passo:

Transformamos a expressão em uma adição:

$$5 + 3 - 8 - 4 - 11 + 9 = 5 + 3 + (-8) + (-4) + (-11) + 9$$

2º passo:

Agrupamos parcelas positivas e parcelas negativas:

$$5 + 3 - 8 - 4 - 11 + 9 = \underbrace{5 + 3 + 9}_{} + \underbrace{(-8) + (-4) + (-11)}_{}$$

3º passo:

Somamos as parcelas positivas e as negativas:

$$5 + 3 - 8 - 4 - 11 + 9 = \underbrace{5 + 3 + 9}_{17} + \underbrace{(-8) + (-4) + (-11)}_{-23}$$

$$5 + 3 - 8 - 4 - 11 + 9 = 17 + (-23) = -6$$

Como você já sabe o que fazer com os parênteses e os sinais de menos, uma forma mais simplificada de resolver a expressão numérica é:

$$5 + 3 - 8 - 4 - 11 + 9 = 5 + 3 + 9 - 8 - 4 - 11$$

$$5 + 3 - 8 - 4 - 11 + 9 = 17 - 23 = -6$$

Podemos também utilizar alguns recursos práticos durante o cálculo. Veja o exemplo a seguir, onde a expressão contém inteiros opostos:

$$8 - 7 + 11 - 18 + 7 + 12 - 11 + 6 - 11 =$$

Antes de tudo, podemos cancelar as parcelas opostas:

$$8 - \cancel{7} + \cancel{11} - 18 + \cancel{7} + 12 - \cancel{11} + 6 - 11 =$$

em seguida temos:

$$8 - 18 + 12 + 6 - 11 = \underbrace{8 + 12 + 6} - 18 - 11 =$$

$$= 26 - 29 = -3$$

Atividades

33. Efetue as adições algébricas:

a) $2 - 4 - 7 + 8 - 9 - 22 + 16 + 13$ –3

b) $-13 + 5 + 22 - 7 + 15 + 18 - 27$ 13

34. Num jogo, cada jogador sorteou 5 fichas. A ordem do sorteio está indicada no quadro a seguir.

Paulo	+ 2 – 5 + 3 – 1 + 5
Jorge	– 3 – 4 + 6 + 1 – 1
Márcio	+ 3 – 3 – 5 + 6 – 1
Luís	+ 2 + 2 + 2 – 4 – 3

De acordo com os dados mostrados anteriormente, assinale em seu caderno **V** (verdadeiro) ou **F** (falso):

F a) Paulo totalizou – 4 pontos.

F b) Jorge terminou sem nenhuma pontuação.

V c) Márcio terminou o jogo com 1 ponto.

V d) Luís terminou o jogo com –1 ponto.

35. Efetue as adições algébricas:

a) $115 - 321 + 73 + 330 - 228 - 116$ –147

b) $-712 + 51 + 63 - 54 - 51 - 9 + 20$ –692

c) $15 - 41 - 12 - 21 - 36 - 40$ –135

d) $-6 - 7 - 8 - 9 - 10 - 11 - 12 - 13$ –76

36. Que número inteiro deve ser colocado no lugar de ★ para tornar as sentenças verdadeiras?

a) ★ $- 15 = -21$ –6

b) ★ $+ 15 = -21$ –36

c) $-36 +$ ★ $= 26$ 62

d) $-36 +$ ★ $= -26$ 10

37. Determine o número inteiro que deve ser colocado no lugar de **x** para tornar as sentenças verdadeiras.

a) $x + (-17) = -13$ 4

b) $x - (-26) = 12$ –4

Multiplicação

Para entender o que ocorre com a multiplicação de números inteiros, você deve se lembrar do conceito de multiplicação de números naturais. Basicamente, uma multiplicação de um número natural **a** por outro **b** representa uma soma de **a** parcelas de **b**. Por exemplo:

- $5 \cdot 7 = 7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 35$
- $3 \cdot 12 = 12 + 12 + 12 = 36$

Observe o que acontece quando aplicamos esse conceito quando um dos fatores for negativo:

$$3 \cdot (-5) = (-5) + (-5) + (-5) = -15$$

Veja que obtivemos o valor do produto de um inteiro positivo (3) por um inteiro negativo (–5):

$$3 \cdot (-5) = -15$$

Como a multiplicação admite a propriedade comutativa, podemos também escrever:

$$3 \cdot (-5) = (-5) \cdot 3 = -\ 15$$

A multiplicação de dois números inteiros de sinais diferentes resulta sempre um produto negativo.

Sabemos também que a multiplicação de dois números inteiros positivos resulta um produto positivo. Vamos investigar agora a multiplicação de dois números negativos. Observe o exemplo:

$$(-3) \cdot (-5)$$

Como (–3) pode ser escrito como –(+3), teremos:

$$(-3) \cdot (-5) = -\ (+3) \cdot (-5) = -\ (-15)$$

Como –(–15) é o oposto de (–15), a multiplicação desses dois inteiros negativos será:

$$(-3) \cdot (-5) = 15$$

Note que a multiplicação de dois inteiros negativos resultou um produto positivo.

De uma maneira geral, a regra prática para se multiplicar dois números inteiros quaisquer é:

- Multiplicamos os módulos dos dois números inteiros;
- O produto será **positivo** se os dois números tiverem **sinais iguais**, e **negativo** se os dois números tiverem sinais **diferentes**.

!

Professor: não se esqueça de enfatizar que o aluno DEVE escrever entre parênteses o número negativo que vem após o sinal de multiplicação.
CERTO: $3 \cdot (-5)$
ERRADO: $3 \cdot -5$
Tal procedimento evita que multiplicações sejam equivocadamente transformadas em subtrações, por exemplo, que $3 \cdot -5$ vire $3 - 5$.

Veja outros exemplos:

- $(-3) \cdot 8$.

$$\left.\begin{array}{l}\textbf{módulo: } 3 \cdot 8 = 24\\ \textit{Sinal}: (-) \cdot (+) = (-)\end{array}\right\}(-3) \cdot 8 = -24$$

- $(-12) \cdot (-5)$.

$$\left.\begin{array}{l}\textbf{módulo: } 12 \cdot 5 = 60\\ \textit{Sinal}: (-) \cdot (-) = (+)\end{array}\right\}(-12) \cdot (-5) = 60$$

- $(-7) \cdot (-3) \cdot (-5)$.

$$\left.\begin{array}{l}\textbf{módulo: } 7 \cdot 3 \cdot 5 = 105\\ \textit{Sinal}: \underbrace{(-) \cdot (-)}_{(+)} \cdot (-) = (+) \cdot (-) = (-)\end{array}\right\}(-7) \cdot (-3) \cdot (-5) = (+21) \cdot (-5) = -105$$

> Se tivermos expressões numéricas envolvendo adições, subtrações e multiplicações de números inteiros, vale a pena lembrar que as **multiplicações devem sempre ser efetuadas antes das adições e subtrações.**

Divisão exata

Assim como fizemos nos números naturais, vamos nos preocupar aqui apenas com as **divisões exatas** entre números inteiros.

Como a divisão pode ser considerada como a operação inversa da multiplicação, as regras de sinais serão as mesmas. Veja alguns exemplos:

- $35 : 7$

Nesse caso, procuramos o número inteiro que, multiplicado por 7 resulte o produto 35. Representando por **x** esta incógnita, escrevemos:

$x \cdot 7 = 35 \rightarrow x = 35 : 7 \rightarrow x = 5$

- $48 : (-8)$

Para realizar a divisão $48 : (-8)$ tomamos por base a operação inversa:

$x \cdot (-8) = 48 \rightarrow 48 : (-8) = -6$

A regra prática para a divisão exata de dois números inteiros é:

> - Dividimos os módulos dos números inteiros;
> - O quociente será **positivo** se os números tiverem sinais **iguais**, e **negativo** se tiverem sinais diferentes.

Professor: enfatize que, assim como no caso das multiplicações, números negativos após os sinais de divisões devem ficar entre parênteses:
CERTO: 48 : (–5)
ERRADO: 48 : –5

Atividades

38. Em cada caso, escreva as adições em forma de multiplicação e dê os seus resultados:

a) $7 + 7 + 7$ $3 \cdot 7 = 21$

b) $9 + 9 + 9 + 9$ $4 \cdot 9 = 36$

c) $(-6) + (-6) + (-6)$ $3 \cdot (-6) = -18$

d) $(-8) + (-8) + (-8) + (-8)$ $4 \cdot (-8) = -32$

39. Efetue as multiplicações.

a) $4 \cdot 9$ 36

b) $4 \cdot (-9)$ -36

c) $(-4) \cdot 9$ -36

d) $(-4) \cdot (-9)$ 36

e) $(-2) \cdot (-2)$ 4

f) $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$ -8

40. Leia com atenção cada uma das afirmações a seguir e complete de forma correta a frase:

a) Quando multiplicamos um número inteiro positivo por outro número inteiro positivo, obtemos um número ____. positivo

b) Quando dividimos um número inteiro positivo por um número inteiro negativo, obtemos um ____. negativo

c) Quando multiplicamos um número inteiro negativo por outro número inteiro positivo, obtemos um número ____. negativo

d) Quando dividimos um número inteiro negativo por um número inteiro negativo, obtemos um ____. positivo

41. Calcule o valor das expressões:

a) $20 - 5 \cdot (-4)$ 40

b) $-15 - 3 \cdot (-5)$ 0

c) $3 \cdot (-8) - 4 \cdot (-7)$ 4

d) $100 - 3 \cdot 5 + 7 \cdot (-8)$ 29

e) $3 \cdot (-7 - 2)$ -27

f) $(-5) \cdot (4 - 9)$ 25

g) $(-4) \cdot (10 - 2 \cdot 6)$ 8

h) $(-8) \cdot (4 - 5) + 3 \cdot (8 - 10)$ 2

42. Efetue as divisões:

a) $36 : 4$ 9

b) $36 : (-4)$ -9

c) $(-36) : 4$ -9

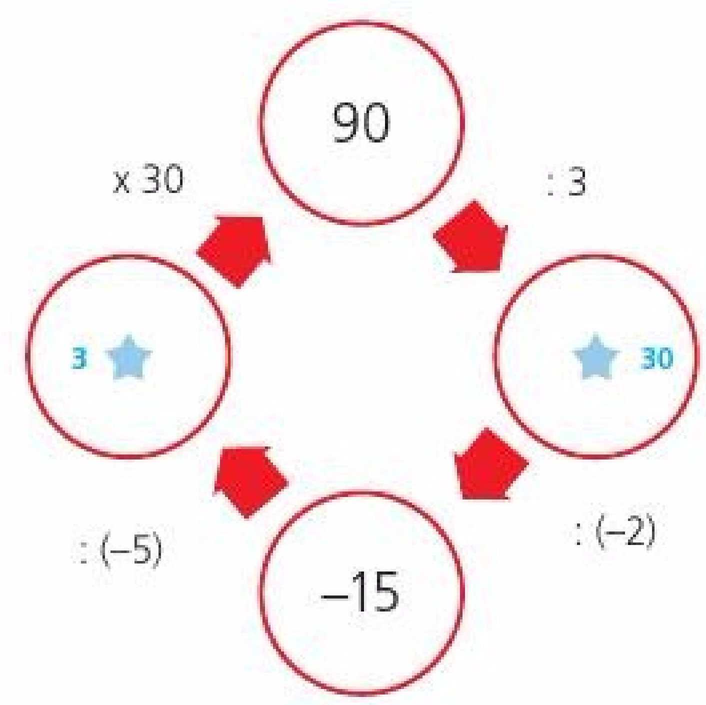
d) $(-36) : (-4)$ 9

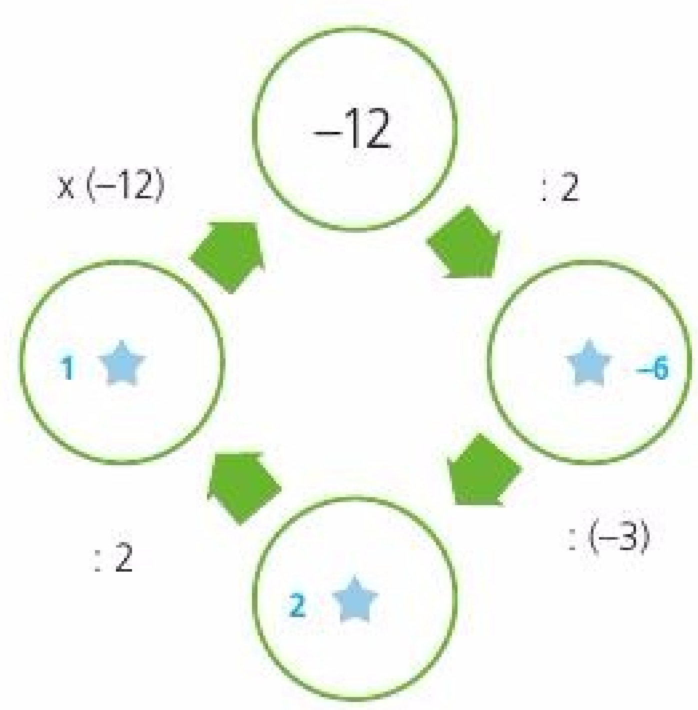
e) $[27 : (-3)] : 3$ -3

f) $[125 : (-5)] : (-5)]$ 5

g) $[(-64) : (-4)] : (-4)$ -4

43. Reproduza o esquema a seguir em seu caderno e complete cada espaço de acordo com o resultado correto da operação:





44. O jogo a seguir consiste em guardar a ficha que corresponde a uma operação na caixa correta. Quantas fichas devem ser guardadas em cada uma das caixas?

a) (–1) : (+2)	e) (+3) : 0	i) (+17) : (–17)
b) (–4) : (–8)	f) (–6) : 0	j) (+28) : (–1)
c) (+3) : (–13)	g) (–200) : (+14)	k) (–23) : (–17)
d) (–8) : (–5)	h) 0 : (–3)	l) (+7) : (–13)

Não existe o quociente.	A divisão é exata e o quociente é um número inteiro.	O quociente não é um número inteiro.
Caixa A	**Caixa B**	**Caixa C**
Caixa laranja: E e F	Caixa verde: A, B, C, D, G, K e L	Caixa azul: H, I e J

45. Encontre o valor de **x**:

a) x : (–17) = 3 –51

b) (–12) · x = 84 –7

c) (–90) : x = 6 –15

46. Calcule o valor das expressões seguintes.

a) 11 – 100 : (–10) 21

b) –13 + (–800) : 80 –23

c) 5 – 2 · [(–3) · (–2 – 6) : 4 + 15] –37

Propriedades da multiplicação

A multiplicação de inteiros admite as propriedades do fechamento, comutativa, associativa, existência do elemento neutro e distributiva. Observe essas propriedades nos exemplos a seguir.

- **Fechamento**

$7 \cdot (-3) = -21 \rightarrow 7 \in Z, (-3) \in Z$ e $(-21) \in Z$

- **Comutativa**

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{(-5) \cdot (-14)} = 70 \\ \mathbf{(-14) \cdot (-5)} = 70 \end{array}\right\} \mathbf{(-5) \cdot (-14) = (-14) \cdot (-5)}$$

- **Associativa**

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{[2 \cdot (-3)] \cdot 5} = (-6) \cdot 5 = -30 \\ \mathbf{2 \cdot [(-3) \cdot 5]} = 2 \cdot (-15) = -30 \end{array}\right\} \mathbf{[2 \cdot (-3)] \cdot 5 = 2 \cdot [(-3) \cdot 5]}$$

- **Existência do elemento neutro**

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{1}\cdot(-9)=-9\\(-9)\cdot\mathbf{1}=-9\end{array}\right\}\ \mathbf{1}\cdot(-9)=(-9)\cdot\mathbf{1}$$

Da mesma forma que no conjunto dos Naturais, o 1 é o elemento neutro da multiplicação no conjunto dos números inteiros.

- **Distributiva**

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{(-3)\cdot[7+(-10)]}=(-3)\cdot(-3)=9\\\mathbf{(-3)\cdot 7+(-3)\cdot(-10)}=-21+30=9\end{array}\right\}\ \mathbf{(-3)\cdot[7+(-10)]=(-3)\cdot 7+(-3)\cdot(-10)}$$

Propriedades da divisão

A divisão entre dois números inteiros não admite as propriedades do fechamento, comutativa e associativa. Veja os exemplos:

- **A divisão em Z não admite a propriedade do fechamento**

Se dividirmos dois números inteiros e a divisão não for exata, o quociente não será um número inteiro. Um exemplo disso é quando fazemos (–17) : 2.

- **A divisão em Z não admite a propriedade comutativa**

$6 : (-3) \neq (-3) : 6$

- **A divisão em Z não admite propriedade associativa**

$$\left.\begin{array}{l}[(-48):6]:(-2)=(-8):(-2)=4\\(-48):[6:(-2)]=(-48):(-3)=16\end{array}\right\}\ 4\neq 16$$

Como você viu, **a divisão é a operação inversa da multiplicação**. Assim:

Multiplicando-se 5 por –2, obtém-se –10:

$$5\cdot(-2)=-10$$

Dividindo-se –10 por –2, obtém-se 5:

$$(-10):(-2)=5$$

Veja que multiplicamos 5 por –2 e, em seguida, dividimos o produto por –2, obtendo novamente o número 5.

De maneira geral, esta relação entre a multiplicação e a divisão de inteiros pode ser escrita da seguinte maneira:

Se **a**, **b** e **c** são números inteiros com b ≠ 0, temos:
se **c · b = a** então **a : b = c**
se **a : b = c** então **c · b = a**

Professor: leia o texto e escreva no quadro os exemplos, explicando detalhadamente cada situação. As propriedades da multiplicação são importantes para resolver problemas que utilizam multiplicação algébrica. Se achar necessário, explore com mais exemplos.

Fernanda Youssef

Veja a aplicação desse conceito de operação inversa na resolução do seguinte problema:

- Multiplicando-se um número inteiro por 11, obtivemos –264. Qual é esse número?

  Vamos chamar esse número que procuramos de **incógnita x**:

$$x \cdot 11 = -264 \rightarrow x = -264 : 11$$

$$x = -24$$

Atividade

47. Encontre o valor de **x**:

a) $x : 16 = (-8)$ −128
b) $x \cdot (-7) = -35$ 5
c) $x : (-12) = 84$ −1 008
d) $x \cdot 17 = -51$ −3
e) $x \cdot 1 = -13$ −13
f) $10 : x = 10$ 1
g) $x \cdot (-7) = -7$ 1

Potenciação

O cálculo de potências de números inteiros, com expoentes inteiros maiores ou iguais a 1, se faz da mesma forma que o cálculo de potências de números naturais.

> Para quaisquer números inteiros **a** e **n**, com $n \geq 1$, a potência $\mathbf{a^n}$, de base **a** e expoente **n** será igual ao produto de **n** fatores iguais a **a**. Ou seja: $a^n = a.a.a.a....a$ (n fatores)

No caso dos números inteiros, devemos levar em consideração o sinal da base e respeitar as regras de sinais que estudamos na multiplicação. Veja os exemplos:

- $(-4)^3 = (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) = -64$
- $(-6)^2 = (-6) \cdot (-6) = 36$

Assim, como ocorria com os números naturais, as potências de números inteiros com expoentes 1 serão sempre iguais à base:

> Para qualquer número inteiro **a**, teremos $\mathbf{a^1 = a}$

Observações importantes

a) Quando a base de uma potência é um número negativo, o resultado será positivo se o expoente for um número par, e negativo se for ímpar. Observe os exemplos:

$(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = 4$

$(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$

$(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$

b) Sempre que a base da potência for negativa, devemos escrevê-la entre parênteses, caso contrário, o sinal de (–) será atribuído à potência de base positiva. Observe a diferença entre as potências a seguir:

$(-5)^2 = (-5) \cdot (-5) = 25$

$-5^2 = -(5^2) = -25$

Logo, $(-5)^2 \neq -5^2$

Professor: o aluno comumente comete este erro: $-5^2 = 25$ porque número negativo ao quadrado dá um número positivo. Enfatize que a potência é feita antes da multiplicação e, no caso, o "menos" troca o sinal do resultado da potência.

c) Se ocorrer que o expoente de uma potência, cuja base é um número inteiro diferente de zero, mantém-se a definição de potência com expoente zero:

Para todo número inteiro, **a**, com $a \neq 0$, define-se $\mathbf{a^0 = 1}$

Multiplicação de potências de mesma base

Da mesma forma que fizemos com os números naturais, para multiplicar potências de mesma base, mantemos a base e somamos os expoentes. Assim, se **a** é um número inteiro diferente de zero e **m** e **n** dois números naturais, tem-se:

$$\mathbf{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$$

Observe o exemplo:

$$\left.\begin{aligned} 3^2 &= 3 \cdot 3 \\ 3^3 &= 3 \cdot 3 \cdot 3 \end{aligned}\right\} \; 3^2 \cdot 3^3 = \underbrace{(3 \cdot 3)}_{\text{2 fatores}} \cdot \underbrace{(3 \cdot 3 \cdot 3)}_{\text{3 fatores}} = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{\text{2 + 3 fatores}} = 3^5$$

Veja agora um exemplo com base negativa:

$$(-2)^4 \cdot (-2)^3 = \underbrace{[(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)]}_{\text{4 fatores}} \cdot \underbrace{[(-2) \cdot (-2) \cdot (-2)]}_{\text{3 fatores}} = (-2)^7$$

Divisão de potências de mesma base

Para dividir potências de mesma base, mantemos a base e subtraímos os expoentes. Assim, para um número inteiro **a**, diferente de zero, e dois números naturais **m** e **n**, com m ≥ n, teremos:

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

Observe os exemplos:

- $6^5 : 6^3 = 6^{5-3} = 6^2$
- $(-2)^9 : (-2)^4 = (-2)^{9-5} = (-2)^4$

Potência de potência

Para elevar uma potência a um expoente, mantemos a base e multiplicamos os expoentes. Sendo **a** um número diferente de zero e **m** e **n** dois números naturais, temos:

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Veja nos exemplos, que esta regra nada mais é do que a aplicação da multiplicação de potências de mesma base.

- $(3^5)^3 = \underbrace{3^5 \cdot 3^5 \cdot 3^5}_{3\ vezes} = 3^{5+5+5} = 3^{15}$ ou então $(3^5)^3 = 3^{5 \cdot 3} = 3^{15}$
- $[(-5)^2]^4 = \underbrace{(-5)^2 \cdot (-5)^2 \cdot (-5)^2 \cdot (-5)^2}_{4\ vezes} = (-5)^{2+2+2+2} = (-5)^8$ ou $[(-5)^2]^4 = (-5)^{2 \cdot 4} = 5^8$

Potência de um produto

Quando temos um produto elevado a um expoente, esse expoente deve ser atribuído a cada um dos fatores. Assim, sendo **a** e **b** números inteiros diferentes de zero e **n** um número natural, temos:

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

Exemplos:

- $(5 \cdot 7)^3 = \underbrace{(5 \cdot 7) \cdot (5 \cdot 7) \cdot (5 \cdot 7)}_{3\ vezes} = \underbrace{(5 \cdot 5 \cdot 5)}_{5^3} \cdot \underbrace{(7 \cdot 7 \cdot 7)}_{7^3}$

Assim, podemos fazer diretamente $(5 \cdot 7)^3 = 5^3 \cdot 7^3$

- $[(-6) \cdot 5]^2 = \underbrace{[(-6) \cdot 5] \cdot [(-6) \cdot 5]}_{2\ vezes} = \underbrace{[(-6) \cdot (-6)]}_{(-6)^2} \cdot \underbrace{(5 \cdot 5)}_{(5)^2}$

Fazendo a atribuição do expoente diretamente aos fatores, temos $[(-6) \cdot 5]^2 = (-6)^2 \cdot 5^2$

Raiz quadrada

Já estudamos, no conjunto dos números naturais, que o cálculo de uma raiz quadrada é a operação inversa de elevar esse número ao quadrado. Por exemplo:

7 elevado ao quadrado é $7^2 = 49$
raiz quadrada de 49 é $\sqrt{49} = 7$

Porém, se fizermos o mesmo cálculo no conjunto dos números inteiros, verificaremos que existem dois números que satisfazem essa operação:

$$7^2 = 49 \text{ e } (-7)^2 = 49$$

Para evitar esse duplo resultado, convenciona-se que a raiz quadrada de um número será sempre o valor positivo ou a **raiz positiva**. Assim, no exemplo dado, $\sqrt{49} = 7$

Observações importantes

- Dizemos que um número inteiro é um **quadrado perfeito** quando ele é o resultado de uma potenciação de expoente 2. Veja os exemplos:

  $4 = 2^2 \rightarrow$ 4 é um quadrado perfeito

  $9 = 3^2 \rightarrow$ 9 é um quadrado perfeito

  $25 = 5^2 \rightarrow$ 25 é um quadrado perfeito

  $144 = 12^2 \rightarrow$ 144 é um quadrado perfeito

- Quando o radicando não for um quadrado perfeito, não existirá a raiz quadrada no conjunto Z. Considere, por exemplo $\sqrt{13}$. O número 13 não é o quadrado de nenhum número inteiro. Por isso, dizemos que, em Z, não é possível obter $\sqrt{13}$.

- Quando o radicando for um número negativo, não existirá a raiz quadrada, pois não há nenhum número que elevado ao quadrado resulte um número negativo. Veja, por exemplo, que não existe $\sqrt{-9}$ pois não há nenhum número inteiro que elevado ao quadrado resulte -9. Veja que $3^2 = 9$ e $(-3)^2 = 9$.

Fernanda Youssef

Professor: peça ao aluno para calcular uma raiz de um número negativo na calculadora. A mensagem de erro o ajudará a se lembrar que essa operação é impossível, pois um erro comum é fazer –4 = –2 (ERRADO!!!)

Expressões numéricas

Para efetuar expressões numéricas envolvendo adições, subtrações, multiplicações, divisões, potências e raízes quadradas, devemos respeitar a seguinte ordem:

- as potências e raízes quadradas são efetuadas antes das multiplicações e divisões;
- as multiplicações e divisões devem ser realizadas antes das adições e subtrações.

Além disso, devem ser respeitados os parênteses, colchetes e chaves, nessa ordem.

Acompanhe os exemplos:

a) $-5 + 3 \cdot \underbrace{(-2)^3} + 5 \cdot \underbrace{\sqrt{16}} =$

$= -5 + \underbrace{3 \cdot (-8)} + \underbrace{5 \cdot 4} =$

$= -5 - 24 + 20 = -9$

b) $[13 + 16 : (\underbrace{1^5} - \underbrace{\sqrt{25}})] : 9 =$

$= [13 + 16 : \underbrace{(1 - 5)}] : 9 =$

$= [13 + \underbrace{16 : (-4)}] : 9 =$

$= \underbrace{[13 - 4]} : 9 =$

$= 9 : 9 = 1$

Fernanda Youssef

Professor: é conveniente que o aluno desenvolva uma distinção visual entre multiplicações (e divisões) e somas (e subtrações). Isso pode ser útil quandoo aluno for simplificar expressões algébricas, pois um erro comum é fazer a simplificação abaixo:

$$\frac{2 + 3 \cdot \cancel{5}}{\cancel{5}}$$

c) $[-3 + 2 - (5^2 - 1) + \sqrt{25}] : 2 =$
$= [-3 + 2 - (25 - 1) + 5] : 2 =$
$= [-3 + 2 - 24 + 5] : 2 =$
$= [2 + 5 - 3 - 24] : 2 =$
$= [7 - 27] : 2 =$
$= -20 : 2 = -10$

Atividades

48. Calcule:

a) $(-2)^3$ -8

b) $(-2)^5$ -32

c) $(-1)^4$ 1

d) $(-4)^0$ 1

e) $(-4)^1$ -4

49. Dê o valor das potências abaixo.

a) $(-5)^2$ 25

b) -5^2 -25

c) $(-2)^2$ 4

d) -2^4 -16

50. Se existir, determine a raiz quadrada positiva dos seguintes inteiros:

a) 16 4

b) 25 5

c) 1 1

d) -16 não existe

51. Efetue:

a) $-5 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot \sqrt{4}$ 17

b) $-6 + 2 \cdot (-2)^3 + 5 \cdot 7^0$ -17

c) $\sqrt{100} + 3 \cdot (-3)^3 - 2^1$ -73

d) $[-7 + 14 : (5 - \sqrt{49})] : 7$ -2

e) $[-13 + 13 \cdot (-1 - 3 \cdot 2^2)] : 14$ -13

f) $-5 - [(-5)^2 - (-2 - \sqrt{9}) \cdot 5] : 10$ -10

52. Escreva cada expressão abaixo utilizando apenas uma potência.

a) $(-3)^{10} \cdot (-3)^{20}$ $(-3)^{30}$

b) $2^{10} \cdot 2^{20} \cdot 2^{30}$ 2^{60}

c) $(-5)^{50} : (-5)^{20}$ $(-50)^{30}$

d) $2^{40} \cdot 2^{50} : 2^{70}$ 2^{20}

53. Diga se são positivos ou negativos os resultados de:

a) $(-3)^2$ positivo

b) $(-3)^3$ negativo

c) $(-3)^{71}$ negativo

d) $(-3)^{40} \cdot (-3)^{51} \cdot (-3)^{33}$ positivo

54. Aplique as propriedades das potências e dê os resultados das expressões:

a) $(7^{10})^5 : 7^{48}$ 49

b) $(2 \cdot 3)^8 : 6^8$ 1

c) $(5^2 \cdot 2)^3 \cdot 2^3$ $15\,625$

d) $(6^2)^3 : (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7)^0$ $46\,656$

55. Dê os resultados de:

a) $12^7 \cdot 12^8 \div 12^{13}$ 12^2

b) $(4^7)^3 \div (4^2)^5$ 4^{11}

c) $[(-3)^{12} \div (-3)^6] \div (-3)^3$ -3^3

d) $(-2)^{10} \div [(-2)^4 \div (-2)^3]$ -2^9

56. Escreva o valor de cada expressão a seguir utilizando uma única potência de 3.

a) $3 \cdot 9 \cdot 81$ 3^7

b) $(9)^3 \cdot 3^5$ 3^{11}

c) $9^{10} \div 3^{10}$ 3^{10}

d) $(9)^3 \cdot 3^5$ 3^{11}

e) $3^2 \cdot 9^2 \div 3^4$ 3^6

f) $(3 \cdot 9)^3 \cdot 3^5$ 3^{14}

57. Simplifique ao máximo cada expressão.

a) $(2^3 \cdot 3)^4 \cdot 3^8$ 6^{12}

b) $(2^2 \cdot 3^3)^5 \cdot 2^5$ 6^{15}

c) $(2 \cdot 3^2 \cdot 5)^{10} \cdot 2^{10} \cdot 5^{10}$ 30^{20}

d) $(2^4 \cdot 5^2)^8 \div (5^4)^4$ 2^{32}

58. Considere as expressão 2^{3^2} e $(2^3)^2$.

a) Calcule 2^{3^2}. 512

b) Calcule $(2^3)^2$. 64

c) Quem é maior: 2^{3^2} ou $(2^3)^2$? $2^{3^2} > (2^3)^2$

Para estudar

59. Um termômetro graduado para marcar temperaturas positivas e negativas, está marcando a temperatura de +3 graus.

Quanto irá marcar se a temperatura do local onde ele está instalado:

a) subir 4 graus.

b) descer 3 graus.

c) descer 9 graus.

d) descer 11 graus.

Ordenar

60. Uma conta corrente com cheque especial está com saldo atual de –R$ 650,00 no banco. Qual será o novo saldo se alguém:

a) depositar R$ 400,00?

b) Retirar R$ 150,00?

c) retirar R$ 150,00, e depois retirar mais R$ 225,00?

61. Lembrando que os sinais < e > significam, respectivamente, menor e maior, diga quais sentenças a seguir são verdadeiras e quais são falsas?

a) $53 < 57$

b) $-15 < 7$

c) $-15 < -7$

d) $5 < -7$

62. Responda:

a) Qual é o simétrico do simétrico de –15?

b) Qual é o simétrico do módulo de 1?

63. Quais são os números inteiros que têm módulo menor que 4?

64. Faça agora estas adições:

a) $-5 + (-5) + (-4)$

b) $13 + 13 + (-13)$

c) $-13 + 13 + (-13)$

d) $1 + (-6) + (-10) + 15$

65. Nas expressões numéricas, primeiro efetuamos os cálculos dentro dos parênteses e, depois, os cálculos dentro dos colchetes. Efetue:

a) $-2 - (-13 + 8)$

b) $1 - [1 - (2 - 2)]$

c) $0 - [-5 - (-7 - 10)]$

66. No lugar de ░░░ coloque = ou ≠:

a) $5 + (7 - 10)$ ░░░ $5 + 7 - 10$

b) $-6 - (2 - 7)$ ░░░ $-6 - 2 + 7$

c) $-7 - (-3 + 5)$ ░░░ $-7 + 3 - 5$

d) $6 + (-8 - 12)$ ░░░ $6 + 8 + 12$

67. Em cada uma das seguintes adições encontre, por tentativas, o valor da parcela desconhecida representada por **x**.

a) $11 + x = 0$

b) $-7 + x = -14$

c) $11 + x = 10$

d) $x + 3 = 1$

68. Responda e justifique as questões a respeito de uma conta bancária. Argumemtar

a) O saldo bancário de uma pessoa era de 8 000 reais, e, depois de uma operação realizada no caixa eletrônico, ele passou a ser de –1 200. A operação foi um depósito ou uma retirada? Em qualquer dos casos, qual seria o valor?

b) No dia seguinte, a pessoa teve seu salário depositado e o saldo passou a ser de 3800 reais. Qual o valor do salário depositado?

69. Quanto vale ▼?

a) $-10 + \blacktriangledown = 0$

b) $-12 + \blacktriangledown = -12$

c) $-13 + 33 = \blacktriangledown + (-13)$

d) $(200 + 52) + (-1) = (▼ + 200) + (-1)$

e) $(-278) - (-256) = (-78) - ▼$

f) $(-385) - (-381) = (-5) - ▼$

70. Efetue as multiplicações.

a) $3 \cdot 9$

b) $3 \cdot (-9)$

c) $(-3) \cdot 9$

d) $(-3) \cdot (-9)$

e) $(-1) \cdot (-1)$

f) $(-1) \cdot (-1) \cdot (-1)$

g) $3 \cdot (-71) \cdot 0$

h) $(-5) \cdot 93 \cdot 1$

i) $3 \cdot 0 \cdot (-71)$

j) $(-10) \cdot (-10) \cdot 11$

71. Calcule o valor das expressões:

a) $20 - 5 \cdot (-4)$

b) $3 \cdot (-8) - 4 \cdot (-7)$

c) $100 - 3 \cdot 5 + 7 \cdot (-8)$

d) $3 \cdot (-7 - 2)$

e) $(-8) \cdot (4 - 5) + 3 \cdot (8 - 10)$

72. Efetue as divisões:

a) $72 \div (-9)$

b) $(-63) \div (-7)$

c) $0 \div (-50)$

d) $(-81) \div (-9)$

e) $(+49) \div (+7)$

f) $(-48) \div 8$

73. Calcule o valor das expressões numéricas:

a) $(3 - 2 \cdot 9) \div 5$

b) $(3 - 2 \cdot 9) \div (-5) \div (-3)$

c) $(7 - 2 \cdot 14) \div (-21) - (5 - 2) \div 3$

d) $[(7 - 2 \cdot 14) \div (-21) - (5 - 2)] \div 2$

e) $[4 - 2 \cdot (3 - 7)] \div (-2) - 5$

f) $1 - [7 - (4 - 3 \cdot 2) \cdot (-1 - 1)] \cdot 5$

74. Diga se são verdadeiras ou falsas as afirmações a seguir.

a) Uma potência de base negativa e expoente par resulta em um número negativo.

b) Se o expoente for ímpar, uma potência de base negativa resulta em um número negativo.

Argumemtar

75. Considerando potências de bases negativas, calcule as potências de base –2 e expoentes 0, 1, 2, 3, 4 e 5, observe o sinal do resultado e, em seguida, responda e justifique:

a) O número $(-2)^{200}$ é negativo ou positivo?

b) O número $(-2)^{201}$ é negativo ou positivo?

c) O número $(-2)^{201} - (-2)^{200}$ é negativo ou positivo?

76. Calcule as potências de base –3 a seguir:

$(-3)^1$; $(-3)^2$; (-3^3); $(-3)^4$; $(-3)^5$ e $(-3)^6$

Em seguida, escreva essas potências na ordem crescente de seus valores, utilizando o sinal de menor (<). Ordenar

77. Quando um número tem raiz quadrada em Z ele é chamado de **quadrado perfeito** O 16, por exemplo, é um quadrado perfeito pois $\sqrt{16} = 4$.

a) Há quatro quadrados perfeitos entre 0 e 25. Quais são eles?

b) Há dois quadrados perfeitos maiores que 100 e menores que 150. Quais são eles?

78. Efetue:

a) $2 \cdot [10 - (3^2 - 4 \cdot 5) - \sqrt{9}\,] \div 18$

b) $42 \cdot [4 \cdot (2^5 - 4 \cdot \sqrt{49}) - 1] \div 63$

c) $\{44 - 42 \cdot [2 \cdot (2^4 - 4 \cdot \sqrt{25}) - 1] \div 3\}$

79. Calcule:

a) $[(390\,625) \div 5] \div 5$

b) $(625)^2$

c) $(-3\,125) \div 125$

d) $78\,125 \div 15\,625$

e) $(5^3)^2 \cdot 25$

f) $3\,125 \cdot 125 \div 625$

Resolução das atividades

1. 0° C

– 18° C

+ 36° C

+ 100° C

2. a) (**V**) 3 ∈ N.

b) (**F**) –3 ∈ N. Não, –3 pertence a Z

c) (**F**) todo número inteiro ∈ N. Não, apenas os inteiros positivos

d) (**V**) –123 ∈ Z.

e) (**F**) $\frac{1}{2}$ ∈ Z. Os números representados por frações não estão nesse conjunto.

f) (**F**) Z^*_+ = {0, 1, 2, 3, ...}. Errado, pois o zero não deve estar nesse conjunto

3. a) +13 gols

b) –100m

c) +R$ 700 000,00

d) + R$ 7 200,00

e) –23°C

f) +700 m

g) –7 gols

4. Tinha R$ 350,00

deu dois cheques de R$ 200,00

Ficou com saldo negativo no valor de – R$ 50,00

5. a) O saldo é a favor.

b) 251 – 240 = 11 pontos

6. a) 12° C

b) – 3° C

c) 0° C

d) – 7° C

e) 0° C

7. a) Carro A está a 360 km a frente da cidade C (+360 km).

b) Carro B está a 180 km atrás da cidade C (–180 km).

8. a) – 8

b) – 13

c) – 8

d) – 3

e) – 10

9. a) V

b) V

c) F

d) F

e) V

f) F

g) V

h) F

10. – 9, – 5, – 1, 0, 1, 5, 9

11.

–19	1	11	3	–16	7	–3	8	0	–34	–27	–8	–15
11	**8**	**7**	**3**	**1**	**0**	**–3**	**–8**	**–15**	**–16**	**–19**	**–27**	**–34**

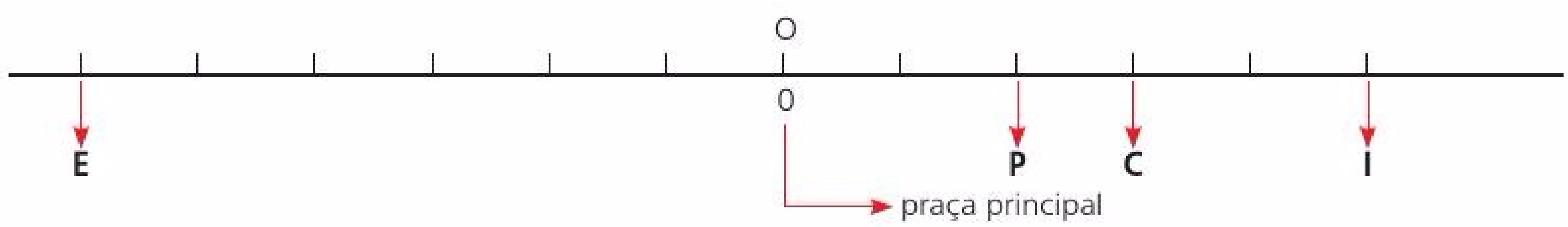
12. a) 4

b) 6

c) 8s

d) 18

13.



14. a) – 5
b) + 6
c) + 30
d) – 56

15. a) 8
b) 9
c) 23
d) 33

16. a) + 15
b) 15
c) – 15
d) – 18

17. 12 e –12, pois |12| = 12 e |–12| = 12

18. 0, 1 e 2

19. 47 + 38 – 80 = 5

20. a) 0
b) – 4
c) – 14
d) 1
e) 3
f) 15
g) – 3
h) – 7

21. a) 1
b) – 10
c) – 3
d) 0
e) – 4
f) 7
g) – 20
h) – 25
i) 15
j) – 49

22. a) – 14
b) – 4
c) 13
d) – 13
e) 0
f) 0
g) + 9
h) – 11

23. – 40 000 – 8 000 + 9 000 = – 39 000
Prejuizo de 39 mil

24. a) – 11
b) 11
c) – 7
d) 1
e) – 1
f) – 13

25. a) 354
b) – 210
c) – 2 325
d) 1 101
e) – 1 101

26. a) – 3
b) + 9
c) 22
d) – 15
e) 9
f) 7
g) – 7

27. a) – 12
b) – 17
c) – 31
d) 4
e) 4
f) – 13

28. **Na 1ª rodada**

a) Bruno tirou **15** pontos.
b) Registro: (+15) – (7) = **15 – 7 = 8**
c) Ele fez **8** pontos **a mais** que Matheus (a mais/a menos).

Na 2ª rodada

a) Bruno fez **7** pontos.
b) Registro: (+7) – (15) = **7 – 15 = –8**
c) Ele fez **8** pontos **a menos** que Antônio (a mais/a menos).

Na 3ª rodada

a) Bruno fez **8** pontos.
b) Registro: (+8) – (–11) = **8 + 11 = 19**
c) Ele fez **19** pontos **a mais** que Leandro (a mais/a menos).

29. a) 11
b) + 3
c) 0
d) – 2
e) – 12

30. a) 14
b) 12 – (– 2) = 14

31. a) 4 graus
b) 1 grau
c) 15 graus

32. a) – 28
b) – 44
c) 28
d) – 22
e) 0
f) – 4

33. a) – 3
b) 13

34. a) (F) + 2 – 5 + 3 – 1 + 5 = 4
b) (F) – 3 – 4 + 6 + 1 – 1 = –1
c) (F) + 3 – 3 – 5 + 6 – 1 = 0
d) (V) +2 + 2 + 1 – 4 – 3 = –1

35. a) – 147 c) – 135
b) – 692 d) – 76

36. a) – 6 c) 62
b) – 36 d) 10

37. a) 4 b) – 4

38. a) $3 \cdot 7 = 21$ c) $3 \cdot (-6) = -18$
b) $4 \cdot 9 = 36$ d) $4 \cdot (-8) = -32$

39. a) 36 d) 36
b) – 36 e) 4
c) – 36 f) – 8

40. a) positivo c) negativo
b) negativo d) positivo

41. a) 40 e) – 27
b) 0 f) 25
c) 4 g) 8
d) 29 h) 2

42. a) 9 e) – 3
b) – 9 f) 5
c) – 9 g) – 4
d) 9

43.

44. Caixa laranja: E e F

Caixa verde: A, B, C, D, G, K e L

Caixa azul: H, I e J

45. a) – 51 c) – 15
b) – 7

46. a) 21 c) – 37
b) – 23

47. a) – 128 e) – 13
b) 5 f) 1
c) – 1 008 g) 1
d) – 3

48. a) – 8 d) 1
b) – 32 e) – 4
c) 1

49. a) 25 c) 4
b) – 25 d) – 16

50. a) 4 c) 1
b) 5 d) não existe

51. a) 17 d) – 2
b) – 17 e) – 13
c) – 73 f) – 10

52. a) $(-3)^{30} = 3^{30}$
b) 2^{60}
c) $(-5)^{30} = 5^{30}$
d) 2^{20}

53. a) positivo
b) negativo
c) negativo
d) positivo

54. a) $7^2 = 49$
b) 1
c) 15625
d) 46656

55. a) $12^{15} : 12^{13} = 12^2$
b) $4^{21} : 4^{10} = 4^{11}$
c) $3^6 : (-3)^3 = -3^3$
d) $2^{10} : (-2) = -2^9$

56. a) $3 \cdot 3^2 \cdot 3^4 = 3^7$
b) $3^6 \cdot 3^5 = 3^{11}$
c) $3^{20} : 3^{10} = 3^{10}$
d) $3^6 \cdot 3^5 = 3^{11}$
e) $3^2 \cdot 3^4 = 3^6$
f) $3^9 \cdot 3^5 = 3^{14}$

57. a) $2^{12} \cdot 3^4 \cdot 3^8 = 2^{12} \cdot 3^{12} = (2 \cdot 3)^{12} = 61^2$
b) $(2^2 \cdot 2^3 \cdot 2)^5 = (2^3 \cdot 3^3)^5 = (2 \cdot 3)^{15} = 6^{15}$
c) $(2^{10} \cdot 2^{10} \cdot 3^{20} \cdot 5^{10} \cdot 5^{10}) = 2^{20} \cdot 3^{20} \cdot 5^{20} =$
$= (2 + 3 + 5)^{20} = 30^{20}$
d) $(2^{32} \cdot 5^{16}) \cdot 5^{16} = 2^{32}$

58. a) $2^{3^2} = 2^9 = 512$
b) $(2^3)^2 = 8^2 = 64$
c) $2^{3^2} > (2^3)^2$

Respostas da seção Para estudar

59. a) 7 graus
b) zero graus
c) –6 graus
d) –8 graus

60. a) –R$ 250,00
b) –R$ 800,00
c) –R$ 1 025,00

61. a) V
b) V
c) V
d) F

62. a) 15
b) –1

63. São –3, –2, –1, 0, 1, 2 e 3

64. a) –14
b) 13
c) –13
d) 0

65. a) 3
b) 0
c) –22

66. a) =
b) =
c) =
d) ≠

67. a) $x = -11$
b) $x = -7$
c) $x = -1$
d) $x = 2$

68. a) Foi uma retirada de R$ 9 200,00.
b) O salário é R$ 5 000,00.

69. a) 10
b) 0
c) 33
d) 52
e) –456
f) –761

70. a) 27
b) –27
c) –27
d) 27
e) 1
f) –1
g) 0
h) –465
i) 0
j) 1100

71. a) 40
b) 4
c) 29
d) –27
e) 2

72. a) –8
b) 9
c) 0
d) 9
e) 7
f) –6

73. a) –3
b) –1
c) 0
d) –1
e) –11
f) –29

74. a) F
d) V

75. a) positivo
b) negativo
c) negativo, pois $|(-2)^{201}| > |(-2)^{200}|$

76. $(-3)^5 < (-3)^3 < (-3)^1 < (-3)^2 < (-3)^4 < (-3)^6$

77. a) 0, 4, 9 e 16
b) 121 e 144

78. a) 2
b) 10
c) 140

79. a) 15625
b) 390625
c) –25
d) 5
e) 390 625
f) 625

capítulo 2

Ângulos

- Medidas de ângulos
- Tipos de ângulos
- Operações com medidas angulares
- Relações angulares

Taxi/Getty Images

Esquinas angulares na praça do Arco do Triunfo, Paris, França.

Conversa Inicial

"Não é o ângulo reto que me atrai, nem a linha reta, dura, inflexível, criada pelo homem. O que me atrai é a curva livre e sensual, a curva que encontro nas montanhas do meu país, no curso sinuoso dos seus rios, nas ondas do mar. De curvas é feito todo o Universo, ..."

Oscar Niemyer

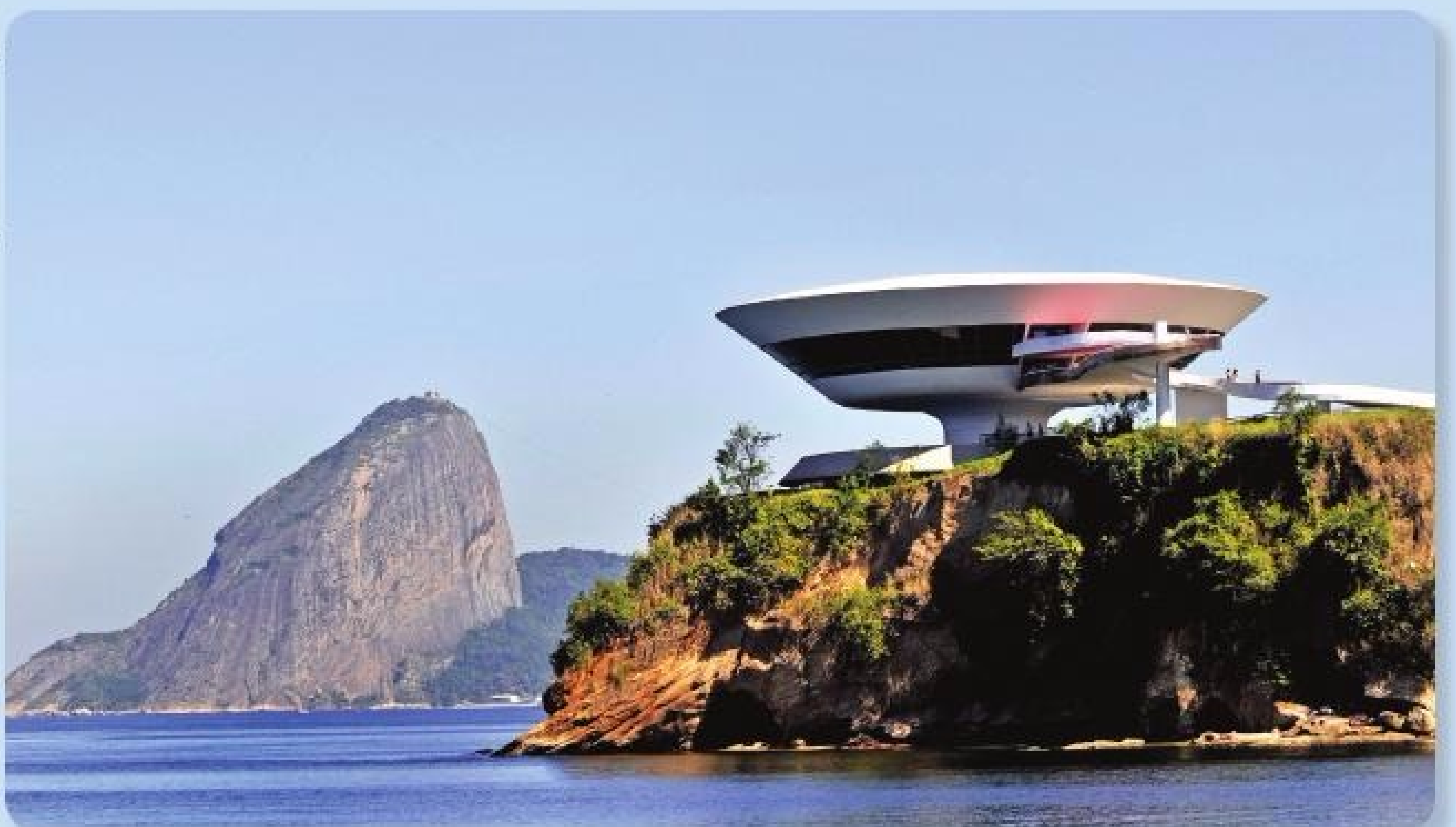
Ricardo Stuckert/Palácio Planalto

Oscar Niemeyer (1907-2012)

O depoimento acima é de Oscar Niemeyer, o grande arquiteto brasileiro, falecido em 2012 aos 104 anos e que tem seus trabalhos espalhados por todo o mundo. Dentre as obras de arte arquitetônicas projetadas por Niemeyer, destaca-se a deslumbrante arquitetura dos diversos edifícios da capital de nosso país, Brasília.

Lendo suas palavras, percebemos nitidamente a inspiração de Niemeyer na natureza de nosso país e nas formas que encontra no Universo. No entanto, quando Niemeyer menciona o ângulo reto, deixa claro que ele é uma criação humana. De fato, as formas geométricas, e mesmo aquelas que encontramos na natureza, só podem ser descritas com base em uma linguagem criada pelo homem. Em outras palavras, só temos dimensão da sinuosidade, das inclinações e das posições das formas porque temos as referências retilíneas, entre elas o ângulo reto.

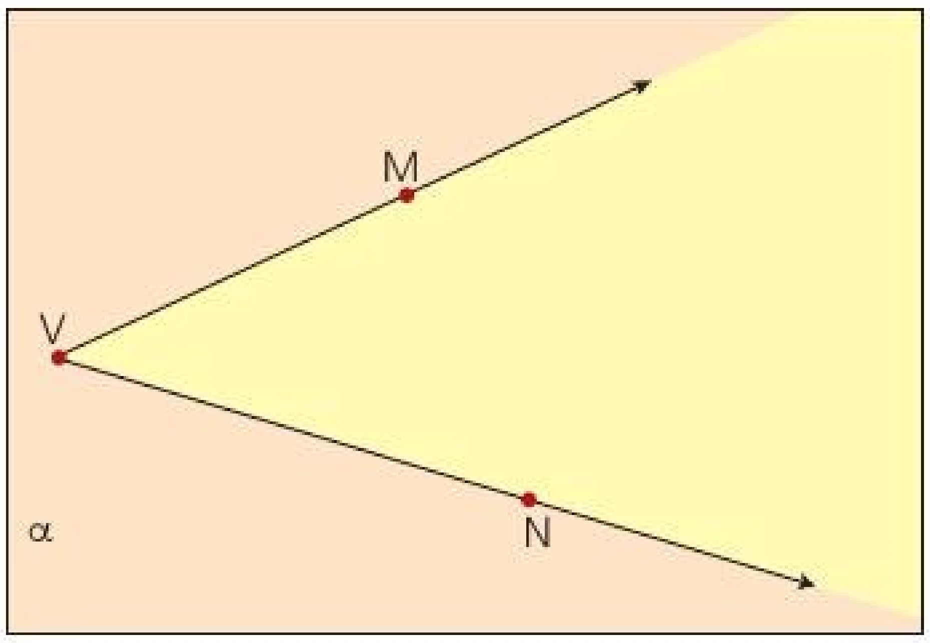
Ismar Ingber/Pulsar Imagens



Museu de Arte Contemporânea, Niterói, (RJ), projetado por Oscar Niemeyer. Ao fundo o morro do Pão de Açúcar na cidade do Rio de Janeiro.

Imagine a Geometria como uma grande linguagem de representação da natureza, que nos oferece diversas maneiras de medirmos espaços e formas. Ela nos permite projetar, construir e interferir no meio em que vivemos. Por isso é fundamental que estudemos os elementos angulares como o ângulo reto, os demais tipos de ângulos, as relações entre eles e suas medidas.

Medidas de ângulos



Antes de estudarmos mais aprofundadamente as formas de se medir ângulos, é interessante que recordemos o conceito de ângulo.

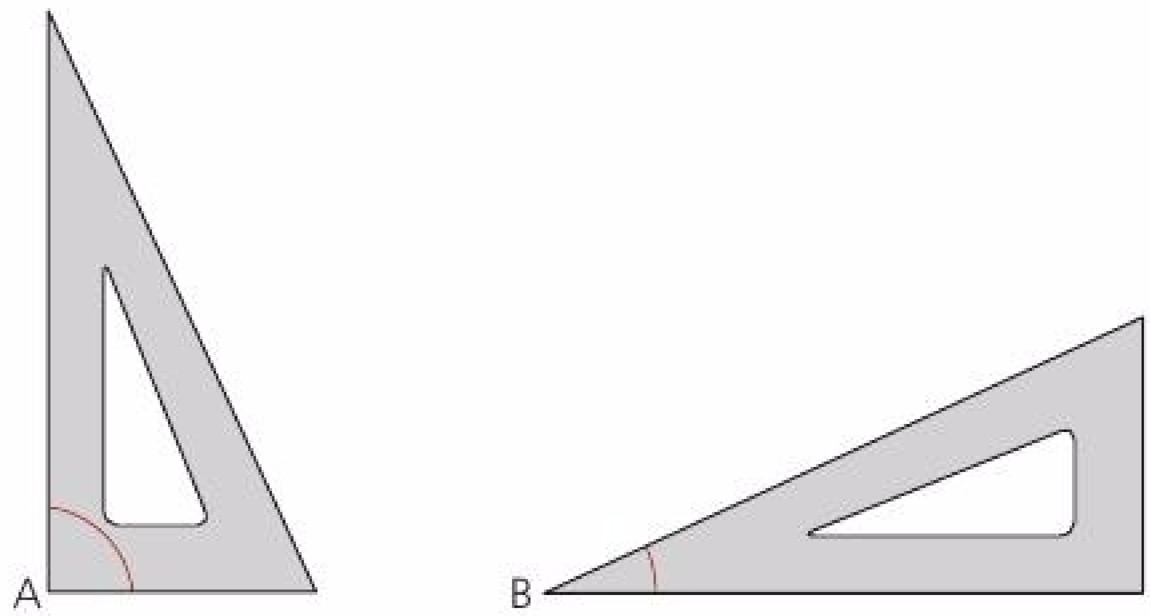
Considere duas semirretas de origem comum V.

Um ângulo é uma **região** do plano, limitada por duas semirretas de mesma origem.

Os lados do ângulo representado na figura são $\overrightarrow{VM}$ e $\overrightarrow{VN}$ e seu vértice é **V**.

Indicamos esse ângulo por $M\hat{V}N$, $N\hat{V}M$ ou simplesmente $\hat{V}$.

Quando medimos um ângulo, procuramos, na realidade, medir sua abertura. Compare, por exemplo, as aberturas dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$, de um dos esquadros que você utiliza em seus estudos:



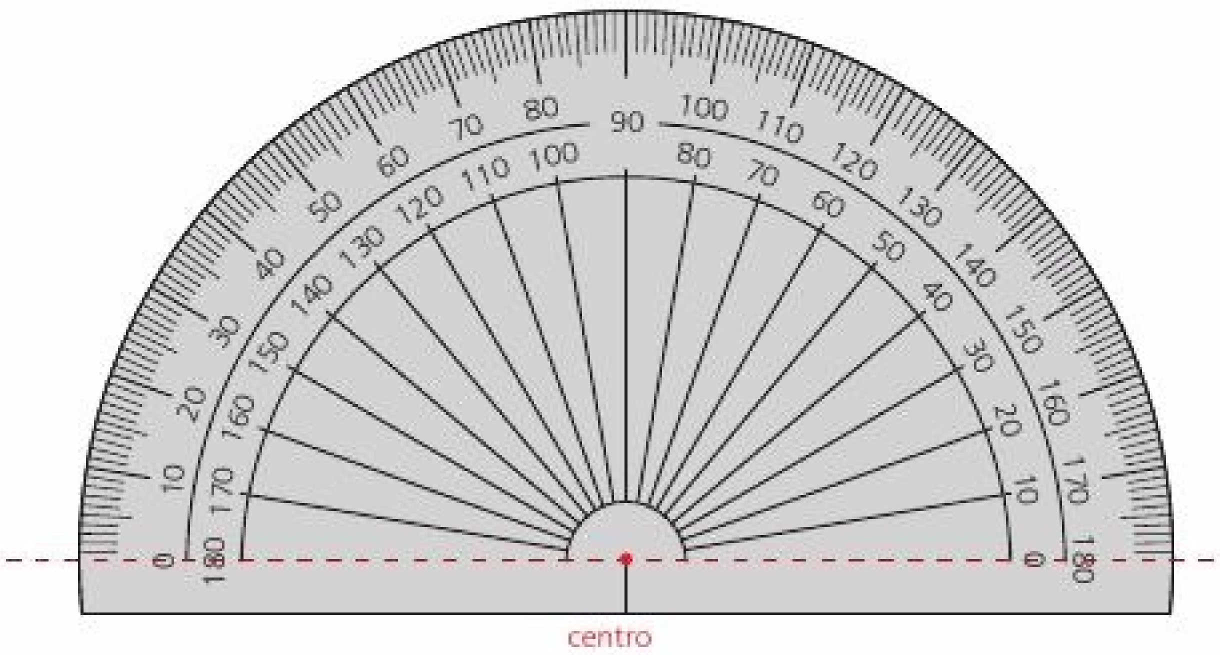
Professor, a unidade de medida grau é uma palavra que vem do latim: *gradus*, e significa degrau.

A maior abertura de um ângulo é uma volta completa à qual foi atribuído o valor de 360º (trezentos e sessenta graus). Como um ângulo de uma volta contém dois ângulos rasos, cada um deles mede 180º.

Dividindo-se o ângulo de meia-volta em 180 partes de mesmo tamanho, cada uma delas será de 1º (1 grau), que é a unidade de medida de ângulos.

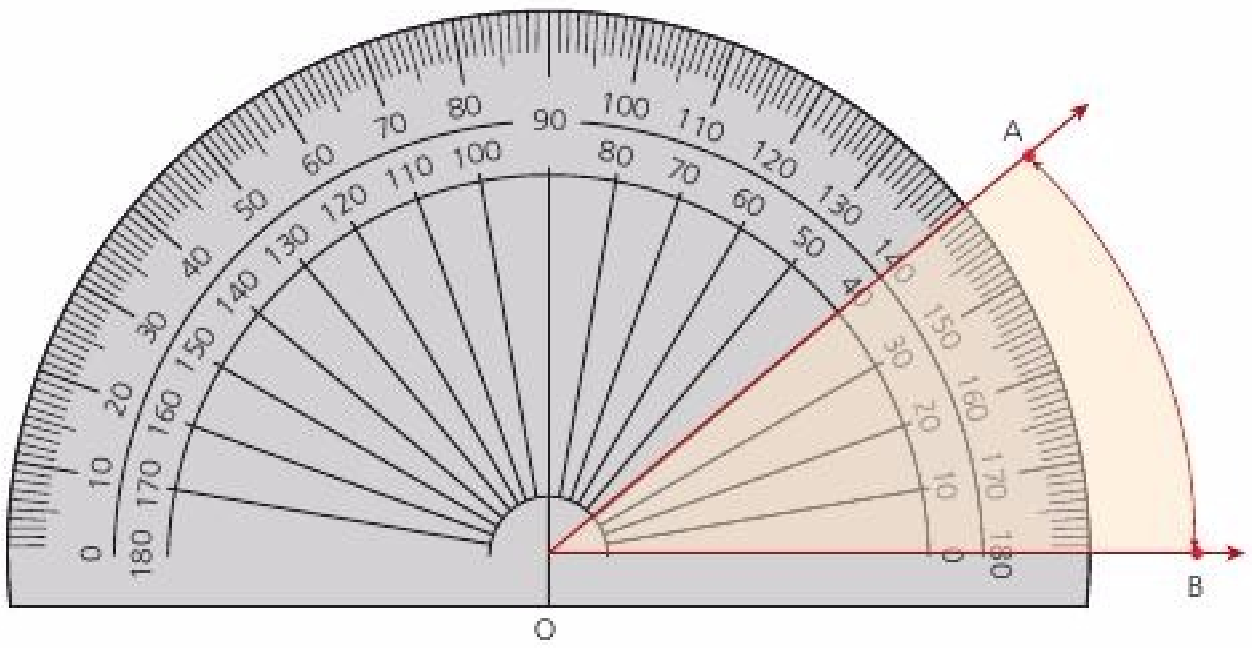
O ângulo de 360º é denominado de **ângulo de uma volta** e o de 180º é chamado de **ângulo de meia-volta** ou **ângulo raso**.

A medida de ângulos é realizada utilizando-se um instrumento chamado **transferidor**, que apresenta um ângulo de meia-volta, graduado de 0 a 180°.



Para medir um ângulo, o centro do transferidor deve estar sobre o vértice e os lados do ângulo devem interceptar a escala do transferidor.

Professor, converse com os alunos sobre a importância de utilizar material adequado para trabalhar com medidas de ângulos. As precisões de medida só podem ser alcançadas utilizando corretamente o compasso, a régua, o transferidor e esquadro.



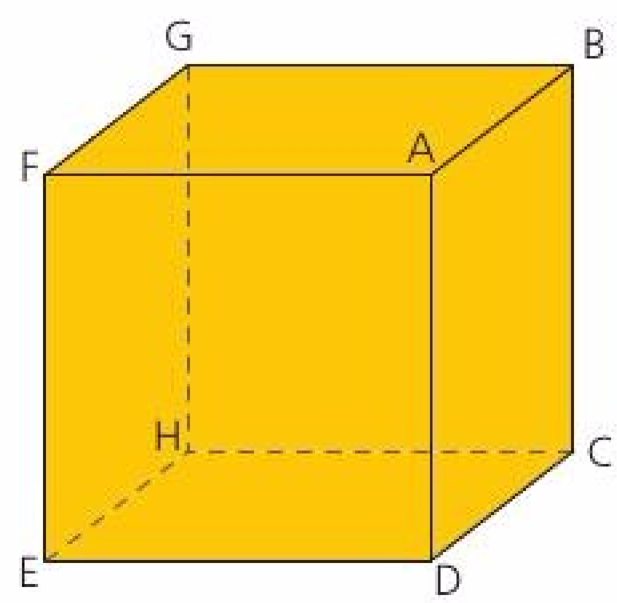
O ângulo AÔB mede 40°.

Tipos de ângulos

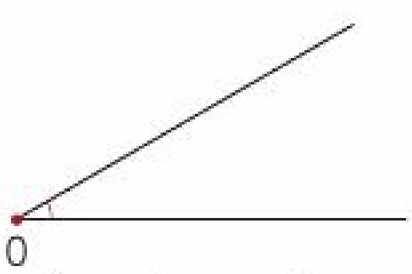
Você já aprendeu a classificação de ângulo. Vamos recordá-la.

Os ângulos são classificados utilizando-se como referência o ângulo de **90°**, que é chamado de **ângulo reto**.

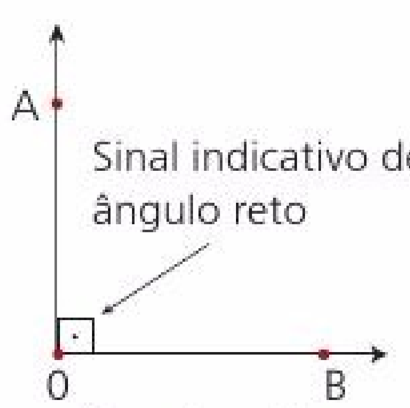
O ângulo reto pode ser observado ao seu redor. Ele está, por exemplo, em cada um dos cantos de uma sala ou nas 6 faces de um cubo, que possuem 4 ângulos retos cada uma.



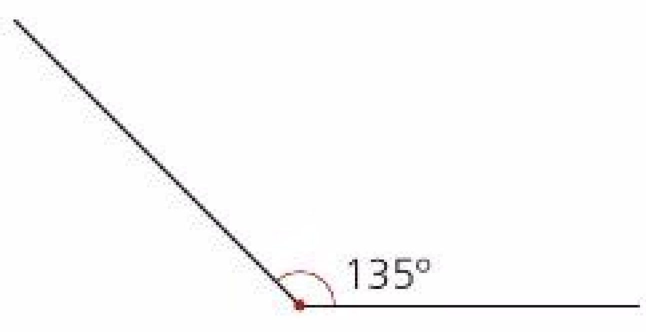
Os ângulos menores que o reto são chamados de **ângulos agudos**, e os maiores que o reto, de **ângulos obtusos**. Observe as representações de ângulos a seguir:



Ângulo agudo



Ângulo reto



Ângulo obtuso

Atividades

Professor, as atividades estão elaboradas com base na interpretação dos enunciados e buscam avaliar o entendimento dos alunos sobre os principais tópicos do conteúdo.

Construir figuras

1. Utilizando os esquadros de (30°, 60° e 90°) e (45°, 45° e 90°), desenhe em seu caderno os seguintes ângulos:

a) 150°
$90° + 60° = 150°$

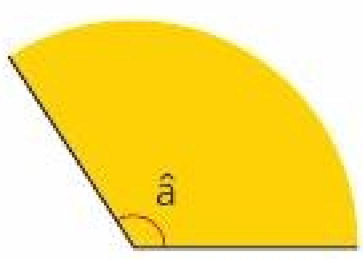
b) 210°
$90° + 60° + 60° = 210°$

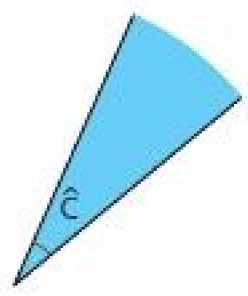
c) 255°
$90° + 60° + 60° + 45° = 255°$

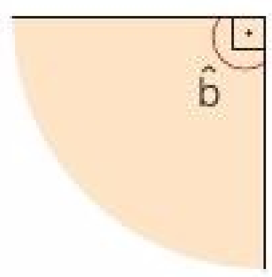
d) 300°
$90° + 60° + 60° + 45° + 45° = 300°$

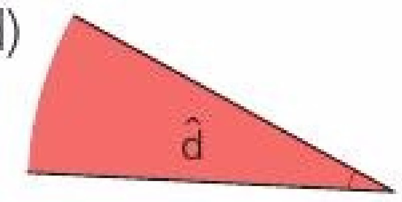
2. Os ângulos abaixo têm as seguintes medidas:

$a = 120°$, $b = 90°$, $c = 20°$, $d = 30°$

a) 

c) 

b) 

d) 

Classifique os seguintes ângulos:

a) $x = b + d$ obtuso

b) $y = a - c$ reto

c) $z = b + c - d$ agudo

d) $k = a - b + c + d$ agudo

3. Com o auxílio de um transferidor, construa em seu caderno os ângulos de medidas:

a) 55°

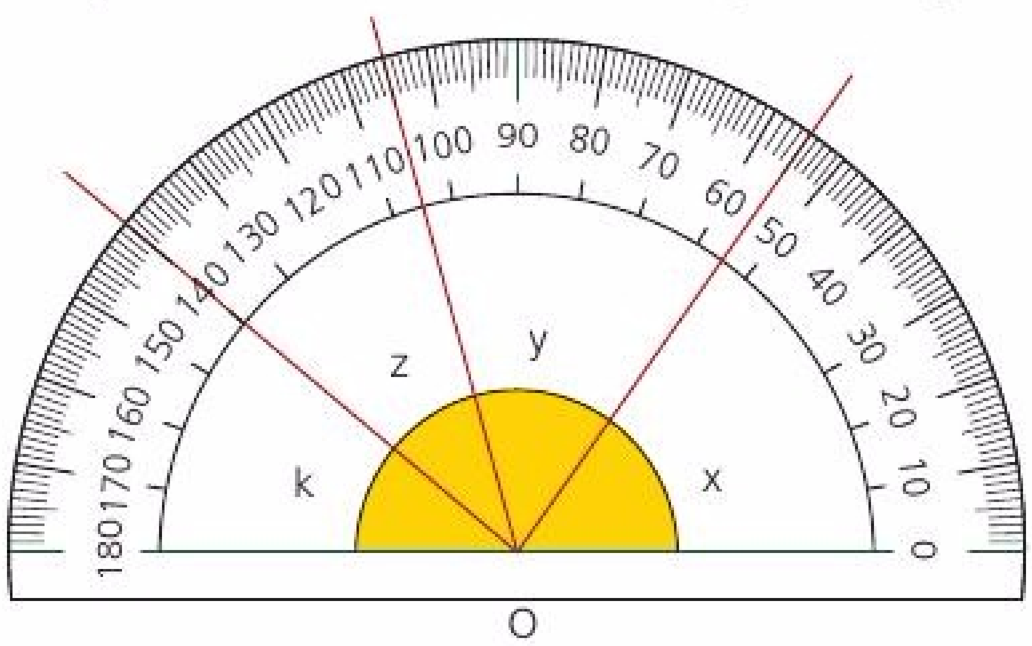
b) 130°

c) 10°

d) 12°

Construção no caderno

4. Observe o valor das medidas dos ângulos **x**, **y**, **z** e **k** no transferidor da figura a seguir.



Determine o valor de:

a) $A = z + y - x$ $A = 30°$

b) $B = (x + y) - (x + k)$ $B = 10°$

5. Considere os ângulos **A** e **B** obtidos na atividade anterior. Responda e justifique:

Argumentar

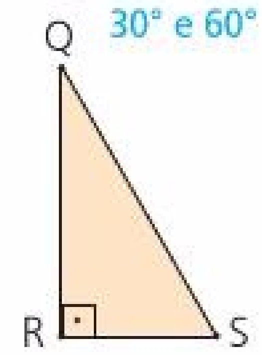
a) A é agudo?
Agudo, pois é menor que 90°.

b) B é obtuso?
Agudo, pois é menor que 90°.

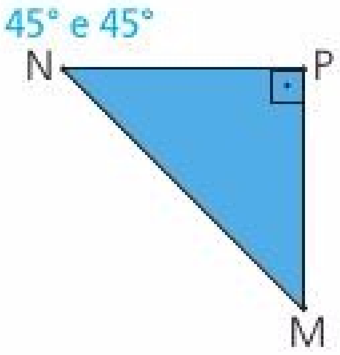
c) A + B é agudo ou obtuso?
Agudo, pois é menor que 90°.

6. Utilize o transferidor para medir os ângulos internos de cada um dos triângulos retângulos:

a) 30° e 60°



b) 45° e 45°



7. Diga se a afirmativa a seguir é verdadeira ou falsa e justifique sua resposta.

Um ângulo de uma volta completa numa circunferência equivale a quatro ângulos retos.

Argumentar

Verdadeira, pois $4 \cdot 90° = 360°$.

8. Observe os horários registrados nos relógios a seguir e escreva, para cada um deles, qual é o menor ângulo formado pelos ponteiros.

a) 60°

b) 120°

Submúltiplos do grau

Como a escala de um transferidor é contínua, a medida de um ângulo pode ser fracionária. Ela pode ser, por exemplo 17,5°, metade do ângulo de 37°.

Quando escrevemos 17,5°, estamos utilizando a forma decimal de notação para uma medida. Porém, essa mesma medida pode ser expressa utilizando os submúltiplos do grau, que são o **minuto** (') e o **segundo** ('').

1 **grau** contém 60 **minutos**. → $1^\circ = 60'$
1 **minuto** contém 60 **segundos**. → $1' = 60''$

Vamos escrever a medida 17,5° utilizando os submúltiplos do grau:

$$0{,}5^\circ = 0{,}5 \cdot 60' = 30'$$

$$17{,}5^\circ = 17^\circ + 0{,}5^\circ = 17^\circ 30'$$

Observe que 17,5° é igual a 17 graus e 30 minutos.

Professor, o sistema de numeração sexagesimal (base 60) é fundamental na utilização da medida de 360°. Esse valor indica que a circunferência está dividida em 360 partes, valor aproximado dos 365 dias de um ano.

É possível converter uma medida em graus, minutos e segundos para a forma decimal. Veja, por exemplo, como podemos escrever 24°45' na forma de um número decimal.

Se 60 minutos correspondem a 1 grau, 45 minutos corresponderão a $\frac{45}{60}$ do grau.

$$45' = \frac{45}{60} \text{ do grau} = \frac{3}{4} \text{ do grau} = 0{,}75^\circ$$

Assim, temos:

$$24^\circ 45' = 24^\circ + 0{,}75^\circ = 24{,}75^\circ \text{ (que é um número decimal)}$$

Operações com medidas angulares

Já vimos que o sistema de medidas que utiliza graus, minutos e segundos não é decimal. Por causa disso, devemos ter atenção especial na realização de operações com essas medidas, que estão escritas utilizando-se múltiplos de 60.

Observe nos exemplos a seguir como fazemos as operações com medidas de ângulos:

- Vamos fazer a soma de 12°25'12'' com 3°50'51''.

Primeiramente, somamos segundos com segundos, minutos com minutos e graus com graus.

$$\begin{array}{r} 12^\circ 25' 12'' \\ +\ 3^\circ 50' 51'' \\ \hline 15^\circ 75' 63'' \end{array}$$

Veja que tanto o número de minutos quanto o de segundos ultrapassa 60. Precisamos, então, “passar” múltiplos de 60 segundos para os minutos e múltiplos de 60 minutos para os graus.

$$\begin{array}{r} 12^\circ 25' 12'' \\ +\ 3^\circ 50' 51'' \\ \hline 15^\circ 75' \mathbf{63''} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r} 12^\circ 25' 12'' \\ +\ 3^\circ 50' 51'' \\ \hline 15^\circ \mathbf{76' 03''} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r} 12^\circ 25' 12'' \\ +\ 3^\circ 50' 51'' \\ \hline \mathbf{16^\circ 16' 03''} \end{array}$$

vai 1' 60'' + 3'' **vai 1°** 60' + 16'

• Vamos, agora, efetuar a subtração $8^\circ 18' 07'' - 3^\circ 25' 10''$.

Aqui, vamos subtrair segundos de segundos, minutos de minutos e graus de graus. Como 07'' é menor que 10'', vamos, inicialmente ajustar o minuendo, “emprestando” segundos dos minutos, sempre lembrando que 1' = 60''. Tiramos 1 minuto dos 18 minutos e passamos 60 segundos para a casa dos segundos. Ficamos, então com 17 minutos e 07'' + 60''.

$$8^\circ 18' 07'' - 3^\circ 25' 10'' \rightarrow 8^\circ 17' 67'' - 3^\circ 25' 10''$$

18' − 1' **Emprestamos 60''**

Observe que, agora, temos o mesmo problema com 17' e 25'. Vamos então tomar emprestados 60 minutos da casa dos graus. Ficamos com 7° e, na casa dos minutos, com 77'.

$$8^\circ 17' 67'' - 3^\circ 25' 10'' \rightarrow 7^\circ 77' 67'' - 3^\circ 25' 10''$$

8° − 1° **Emprestamos 60'**

Agora que já fizemos os empréstimos, podemos efetuar a subtração:

$$\begin{array}{r} 7^\circ\ 77'\ 67'' \\ -\ 3^\circ\ 25'\ 10'' \\ \hline 4^\circ\ 52'\ 57'' \end{array}$$

• Acompanhe como fazemos para multiplicar $4^\circ 09' 15''$ por 5.

Multiplicamos isoladamente graus, minutos e segundos por 5:

$$\begin{array}{r} 4^\circ \\ \times\ 5 \\ \hline 20^\circ \end{array} \qquad \begin{array}{r} 09' \\ \times\ 5 \\ \hline 45' \end{array} \qquad \begin{array}{r} 15'' \\ \times\ 5 \\ \hline 75'' \end{array}$$

Temos então $20^\circ 45' 75''$. Como nesse resultado temos 75'' (mais de 60 segundos), vamos passar múltiplos de 60'' para minutos e manter o excesso na casa dos segundos.

Passamos 60'' para a casa dos minutos, aumentando 1' em 45' que obtivemos na multiplicação, permanecendo na casa dos segundos o excesso de 15''.

Assim, $(4^\circ 09' 15'') \cdot 5 = 20^\circ 46' 15''$

- Vamos fazer a divisão de 27°34′15″ por 5.

Inicialmente, dividimos os graus:

$$\begin{array}{r|l} 27^\circ & 5 \\ \cline{2-2} 25^\circ & 5^\circ \\ \hline 2^\circ & \end{array}$$

Note que temos o resto 2°, que correspondem a 120′. Esses 120′ serão adicionados aos 34′ que estão na casa dos minutos: 2° = 120′

120′ 27° 34′ 15″ → 27°154′15″

adicionar

120′

Professor, é bom lembrar que quando minuto e segundo expressam tempo, seus símbolos são min e s, respectivamente, por isso não podemos expressar 8h 20′ 30″ quando a grandeza for tempo e sim 8h 20min 30s.

O passo seguinte é fazer a divisão dos minutos:

$$\begin{array}{r|l} 154' & 5 \\ \cline{2-2} 150' & 30' \\ \hline 04' & \end{array}$$

O resto da divisão dos minutos por 5 é 4′, que correspondem a 240″. Esses 240″ se somarão aos 15″ que tínhamos inicialmente.

4′ = 240″

240″ 27° 34′ 15″ → 27°34′255″

adicionar

240″

A divisão de 255″por 5 resulta em 51″.

O resultado da divisão de 27°34′15″ por 5 é (27°34′15″) : 5 = 5°30′51″.

Atividades

9. Escreva por extenso a medida dos ângulos

a) 43°21′48″ quarenta e três graus, vinte e um minutos e quarenta e oito segundos.

b) 27°01′13″ vinte e sete graus, um minuto e treze segundos.

10. Um ângulo equivalente a 1 volta equivale a quantos:

a) Graus 360°

b) Minutos 21 600′

c) Segundos 1 296 000″

11. Os ângulos a seguir estão escritos na forma decimal. Converta-os para graus, minutos e segundos:

a) 4,5° 4° 30′

b) 32,6° 32° 36′

c) 45,25° 45° 15′

12. Efetue:

a) 8°45′ + 12°15′ 21°

b) 17°22′15″ + 43°11′50″ 60° 34′ 05″

c) 90° – 22°30′ 67° 30′

d) 45°32′ – 45°30′59″ 1′ 1″

e) 7 · (5°10′) 36° 10′

f) 12°40′36″ : 2 6° 28′ 18″

g) 4 x (8°12′ 31″) 32° 50′ 4″

h) 3°35′ : 2 1° 47′ 30′

Professor, peça aos alunos para fazerem triângulos equiláteros com cartolina e assim compor o hexágono regular. Comprove a soma dos ângulos internos e faça observações sobre os ângulos externos. Deixe esse material afixado na sala de aula para utilizar como consulta.

Curiosidade

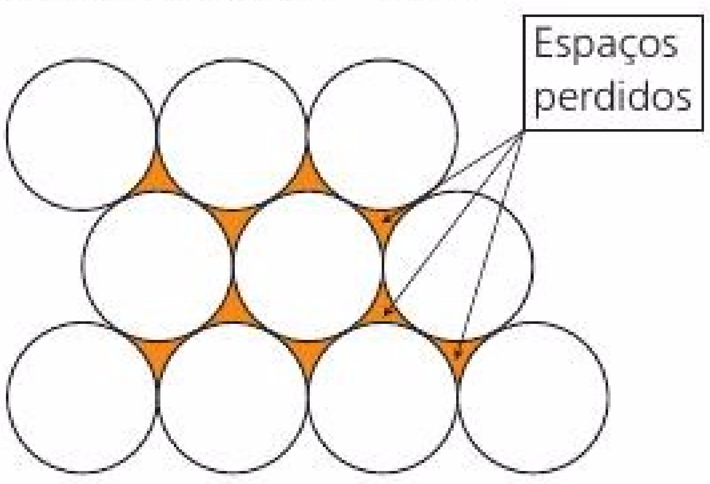
A sabedoria das abelhas

As abelhas organizam suas colmeias utilizando o formato de hexágonos para os favos de mel. Há séculos, sabemos que elas constroem as colmeias dessa forma para poder armazenar a maior quantidade de mel possível com o menor gasto de cera.

Alguns matemáticos dedicaram-se a comprovar este fato a partir das propriedades geométricas das figuras planas e provaram matematicamente a eficiência dos hexágonos em relação a qualquer forma curva, como, circunferências, por exemplo, que apresentam perda de espaços quando colocadas lado a lado.

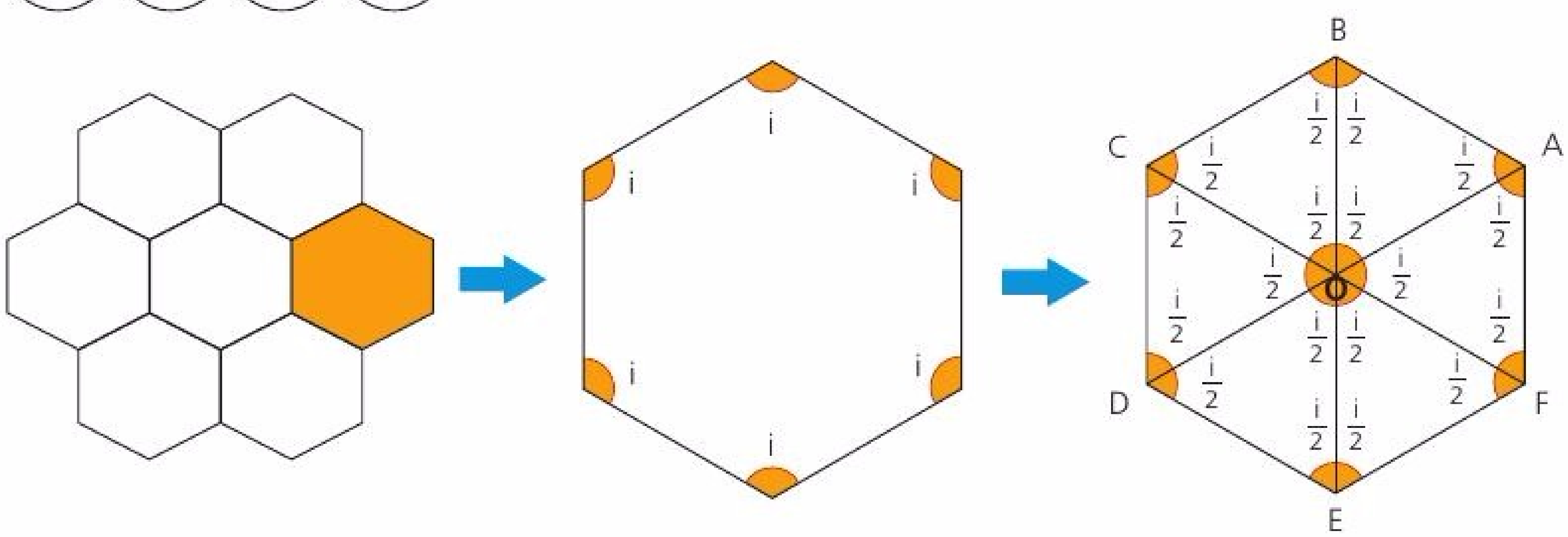
Irochka/Dreamstime

Fonte: <www.uff.br/sintoniamatematica/matematicaenatureza>. Acesso em 10 abr. 2015.



Da geometria hexagonal dos favos de mel, vamos destacar um hexágono regular e calcular o valor de seu ângulo interno **i**. Lembre-se: um hexágono regular é um polígono de seis lados iguais e seis ângulos internos iguais.

Para calcular a medida do ângulo interno **i** do hexágono regular **ABCDEF**, traçamos as diagonais, que se cruzam no ponto **O**, determinando seis triângulos equiláteros, cujos ângulos internos serão $\frac{i}{2}$.



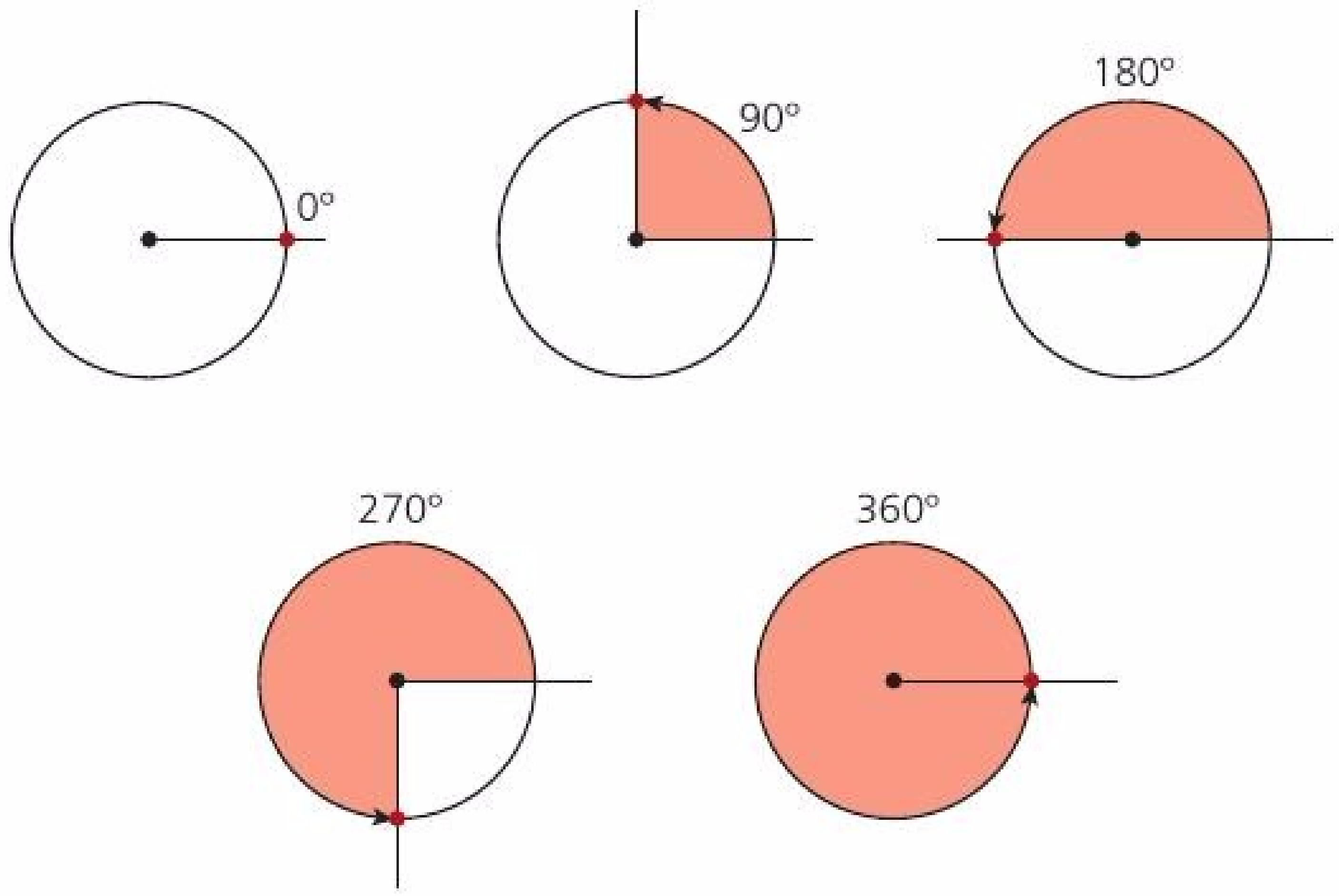
Assim, no centro da figura temos seis ângulos de medida $\frac{i}{2}$, com vértice comum em **O**. Note que esses seis ângulos formam um ângulo de uma volta. Logo:

$$6\left(\frac{i}{2}\right) = 360^\circ \rightarrow 3i = 360^\circ \rightarrow i = 120^\circ$$

Como cada ângulo interno do hexágono regular mede 120º, os ângulos internos de cada um dos triângulos equiláteros medem 60º.

Relações angulares

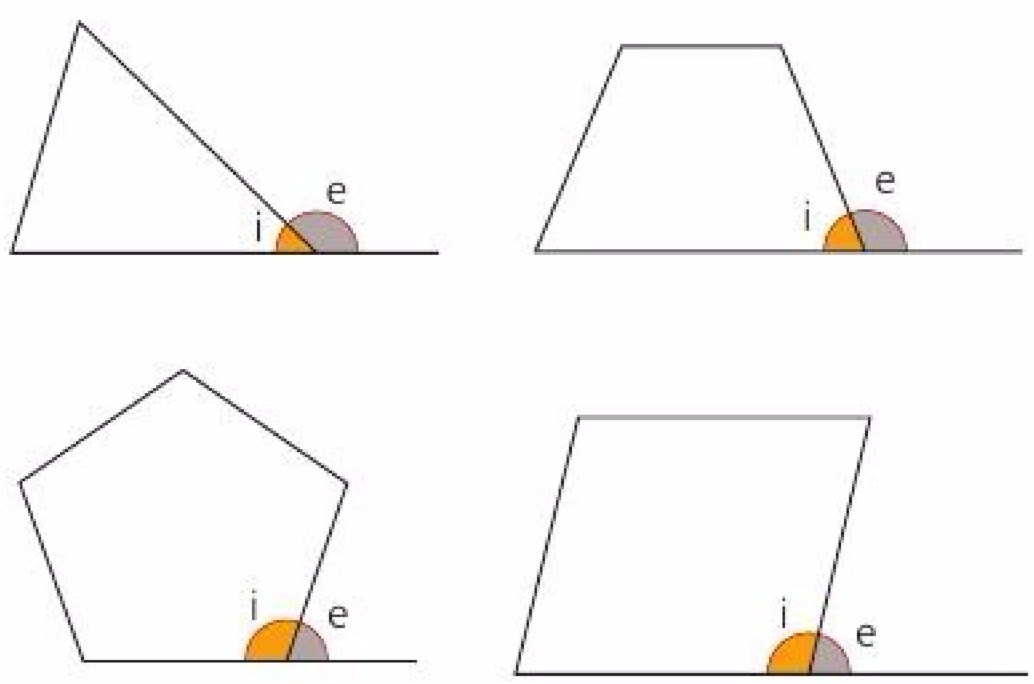
Já vimos que o ângulo de 360° é chamado de ângulo de uma volta e que o ângulo de 180° é denominado ângulo raso. Assim, se tivermos uma circunferência dividida em quatro partes, teremos os ângulo de 0°, 90° (reto), 180° (raso), 270° e 360° (uma volta).



Vamos investigar as relações existentes entre dois ângulos, dependendo da posição de um em relação ao outro.

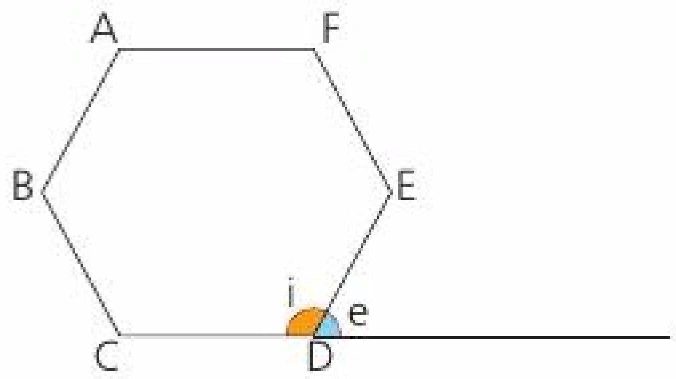
Ângulos suplementares

Quando dois ângulos têm a soma de suas medidas igual a 180°, são chamados de **ângulos suplementares** e cada um será o suplemento do outro. Por isso, podemos dizer que em qualquer polígono, o ângulo interno é o suplemento do ângulo externo.



i + **e** = 180° → **i** e **e** são ângulos suplementares.

Sabendo que cada ângulo interno do hexágono regular mede 120°, podemos calcular a medida do ângulo externo **e** de um hexágono regular. Para isso, prolongamos o lado $\overline{CD}$:



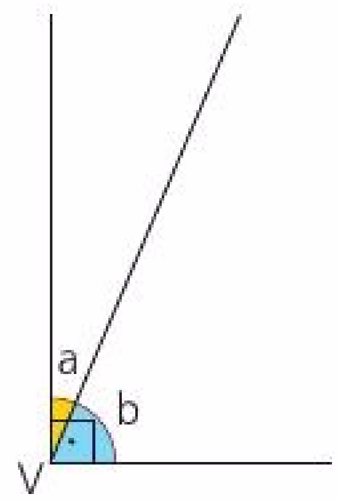
Professor, quando dois ângulos têm a soma de suas medidas igual a 360°, são chamados de ângulos replementares e cada um será o replemento do outro.

Como o ângulo interno i é igual a 120° e i + e = 180°, temos:

$$i + e = 180° \rightarrow 120° + e = 180° \rightarrow e = 60°$$

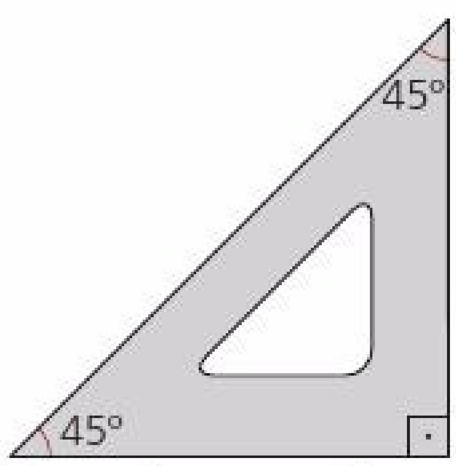
Ângulos complementares

Quando dois ângulos adjacentes têm soma igual a 90° eles serão chamados de **ângulos complementares.** Observe dois ângulos complementares na figura a seguir.

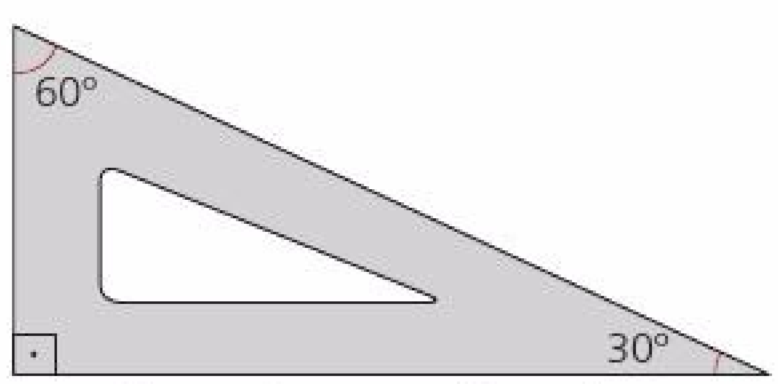


a + **b** = 90° → **a** e **b** são ângulos complementares.

Os ângulos de 60° e 30° são exemplos de ângulos complementares, pois somam 90°. Note que os ângulos de 60°, 30° e 90° estão presentes num dos esquadros que utilizamos em nossas aulas e os ângulos de 45°, 45° e 90° estão presentes no outro esquadro. Observe também que os dois esquadros têm a forma de triângulos retângulos, pois ambos têm ângulos de 90°.



Esquadro com ângulos de 90°, 45° e 45°



Esquadro com ângulos de 90°, 60° e 30°

A soma dos ângulos internos em cada esquadro é 180º.

$$45^\circ + 45^\circ + 90^\circ = 60^\circ + 30^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

De maneira geral, **em qualquer triângulo a soma dos ângulos internos é 180º**. Existem diversas maneiras de se constatar essa característica dos triângulos. Podemos fazer isso a partir das relações entre os ângulos internos e externos ou de forma prática, como na atividade a seguir.

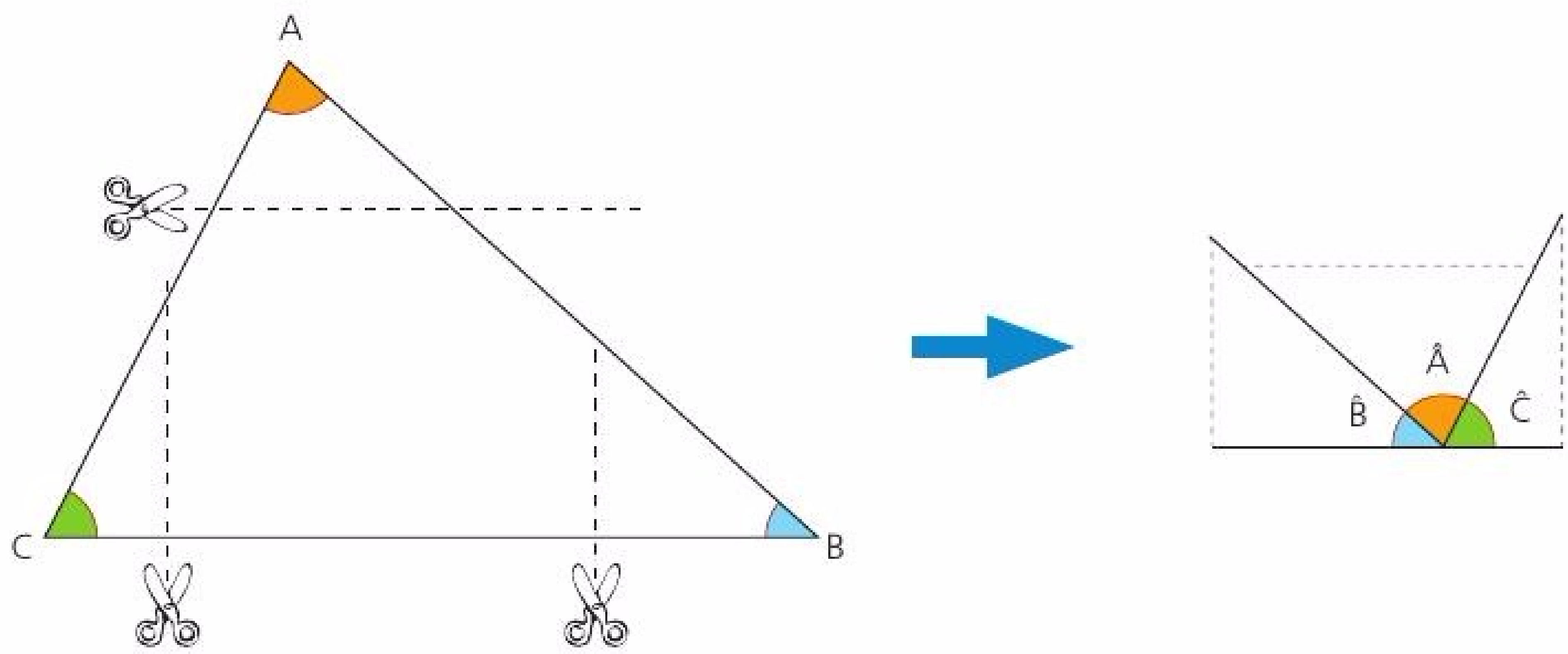
Na prática

Atividade prática

Soma dos ângulos internos de um triângulo

Vamos verificar se a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a um ângulo raso, ou seja, se ela é igual a 180º. Para isso, siga os seguintes procedimentos:

- Desenhe um triângulo qualquer em uma folha em branco.
- Recorte cada um dos ângulos internos deste triângulo e faça coincidir os três vértices A, B e C, conforme a figura abaixo.



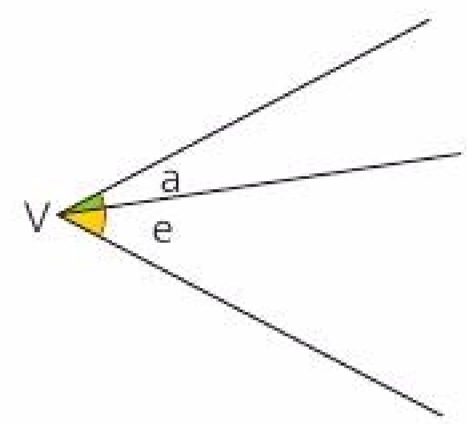
- Em seguida, responda:

Qual a soma dos três ângulos internos do triângulo?

Compare o seu triângulo com o de alguns colegas. Existe alguma variação na soma dos ângulos internos em função do tipo de triângulo desenhado por você e por seus colegas?

Ângulo adjacentes

Chamamos de **ângulos adjacentes** qualquer par de ângulos que têm um lado comum, ou seja, estão lado a lado e têm o vértice V comum.



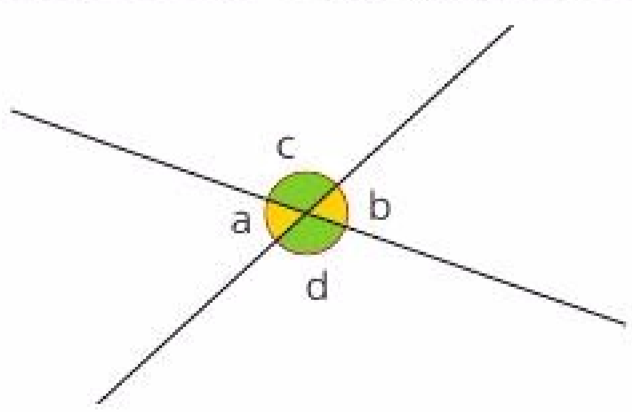
a e **e** são **ângulos adjacentes** pois têm um lado comum.

Ângulos opostos pelo vértice

Veja, agora, o que ocorre quando dois ângulos têm lados que são prolongamentos dos lados do outro.

Observe na figura a seguir que os lados do ângulo **a** são prolongamentos dos lados do ângulo **b**.

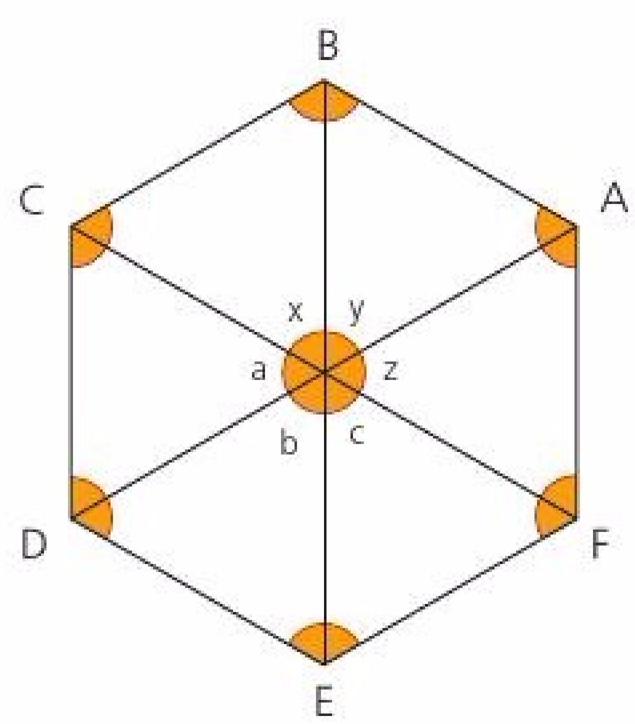
Esses ângulos são chamados **opostos pelo vértice.** Note na figura a seguir que **a** e **c** são suplementares e o mesmo ocorre com **c** e **b**.



$$\left.\begin{aligned} \mathbf{a + c = 180^\circ} \\ \mathbf{c + b = 180^\circ} \end{aligned}\right\} \rightarrow \mathbf{a + c = c + b} \rightarrow \mathbf{a = b}$$

De maneira análoga, podemos provar que **c = d**. De forma geral, podemos dizer que:

Dois ângulos opostos pelo vértice são iguais.



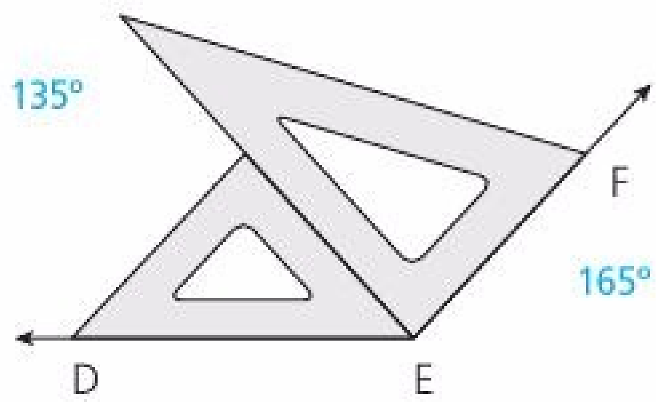
Observe no hexágono regular **ABCDEF** os seguintes pares de ângulos opostos pelo vértice, que medem 60º:

- $x = c = 60^\circ$
- $y = b = 60^\circ$
- $z = a = 60^\circ$

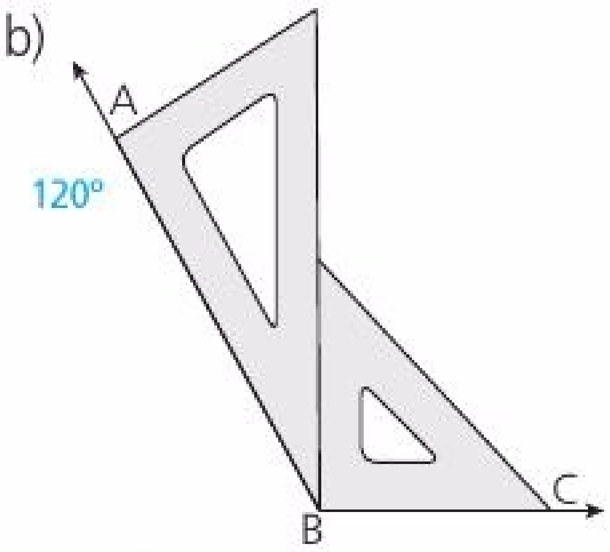
Atividades

13. Sem o auxílio do transferidor, escreva a medida dos ângulos de vértices E, B e O, considerando que os esquadros são de 30°, 60° e 90° e de 90°, 45° e 45°.

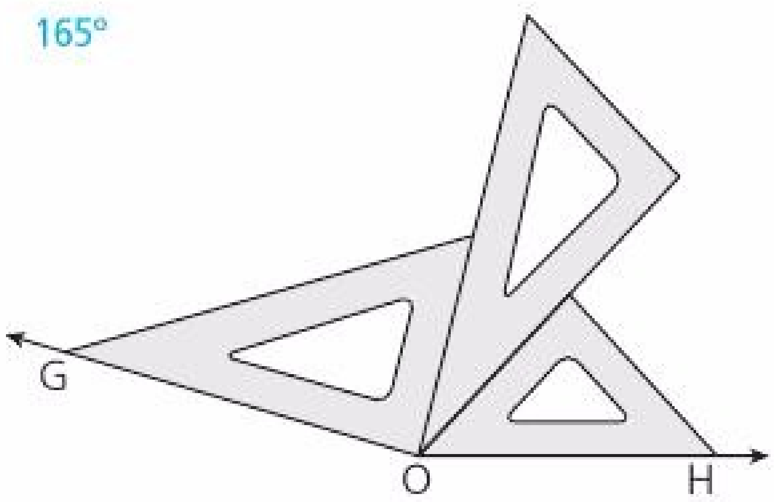
a)



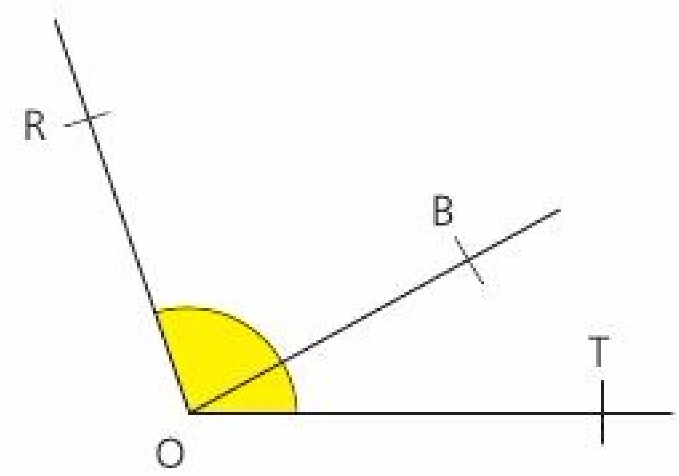
b)



c)



14. Observe os ângulos a seguir e responda:



a) Os ângulos RÔB e BÔT são adjacentes? Por quê? Sim são adjacentes. Eles apresentam um lado em comum, estão lado a lado e têm o vértice O em comum.

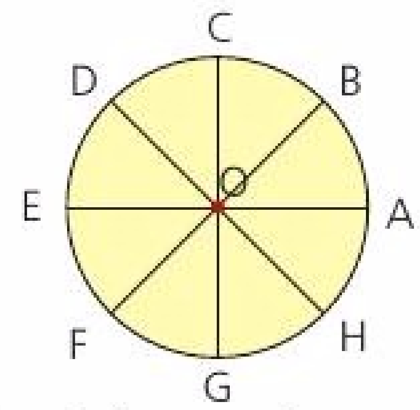
b) Os ângulos RÔT e BÔT são adjacentes? Por quê? Não, porque não estão lado a lado, ou seja, possuem pontos internos comuns.

15. Sem usar o transferidor, dê a medida dos ângulos abaixo, sabendo que a circunferência foi dividida em 8 partes iguais.

a) Med (AÔB) = 45°

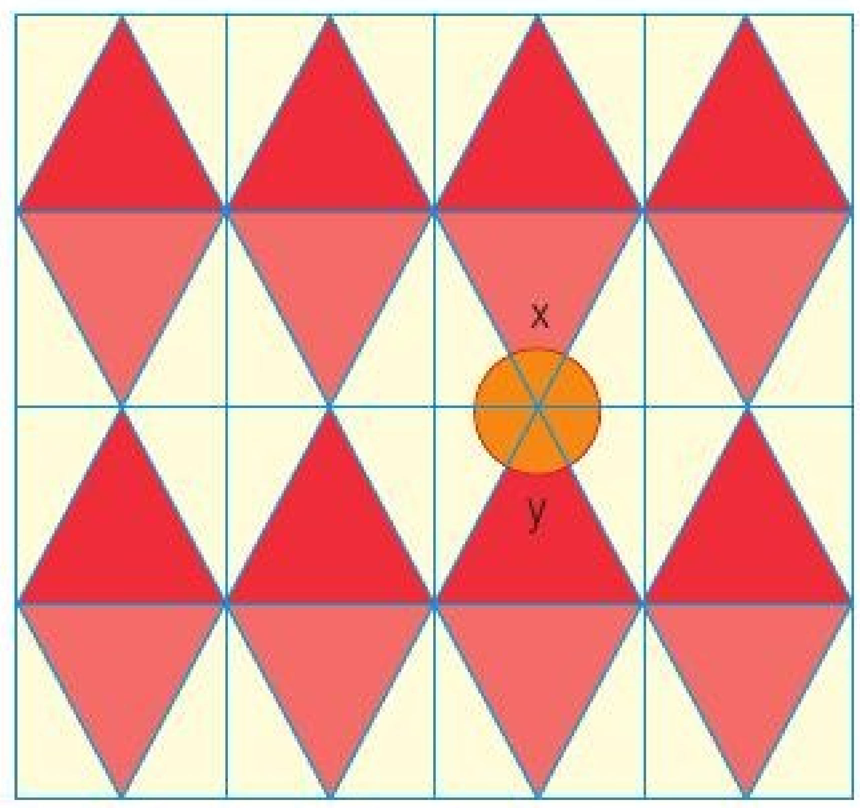
b) Med (HÔB) = 90°

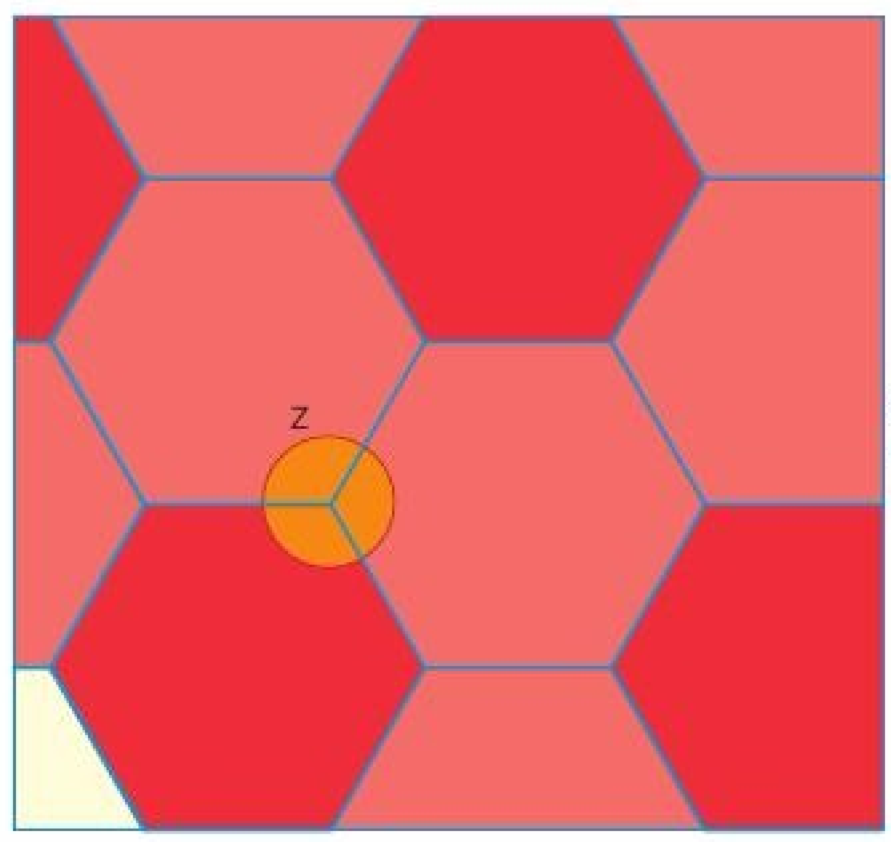
c) Med (CÔF) = 135°



Interpretar figura

16. A seguir são apresentados dois mosaicos. O primeiro é formado por triângulos equiláteros e o segundo por hexágonos regulares.





Cálculo mental

Sem utilizar nenhum instrumento, responda:

a) Como podemos classificar os ângulos **x** e **y**? $\hat{x}$ = agudo $\hat{y}$ = agudo

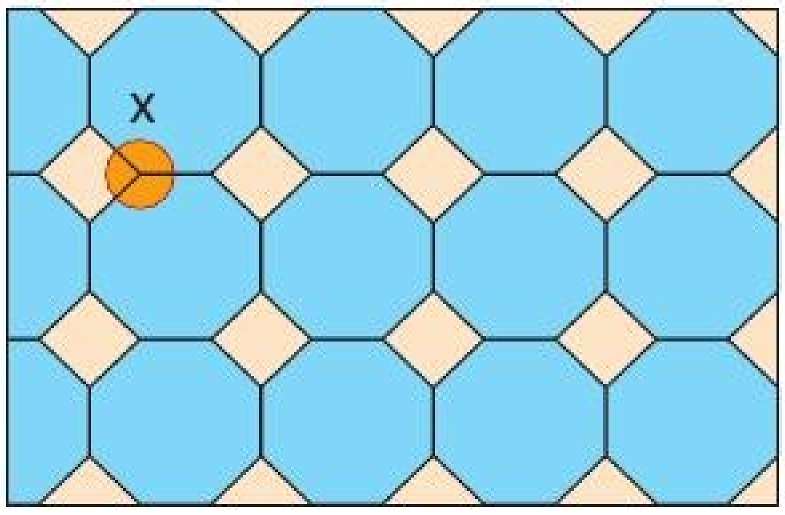
b) Qual o valor de x? $\hat{x}$ = 60°

c) Qual o valor de z? $\hat{z}$ = 120°

d) Qual o valor da soma x + z? 180°

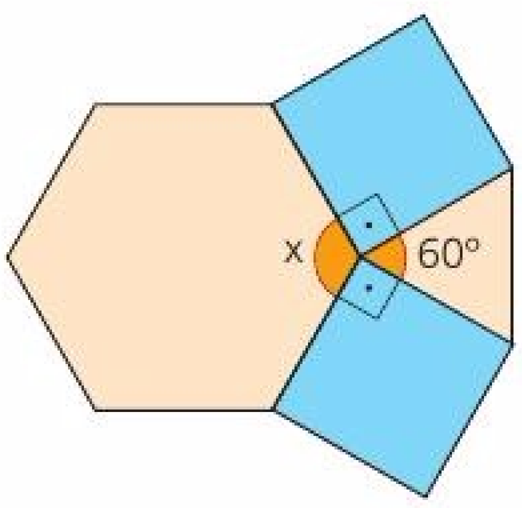
e) Qual a medida de 2x + y – z? 60°

17. O mosaico abaixo é formado por quadrados e octógnos regulares. Interpretar figura

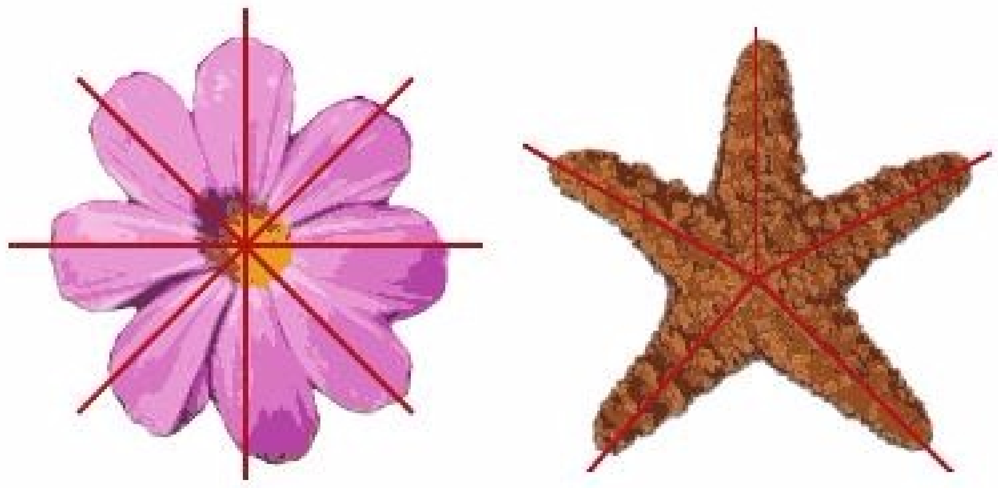


Determine o valor do ângulo interno x do octógono regular. x = 135°

18. A figura a seguir é formada por dois quadrados, um triângulo equilátero e um hexágono. Determine a medida do ângulo x. x = 120°



19. Ao traçarmos linhas que se cruzam no centro de uma flor e dividem suas pétalas ao meio, conforme mostra a figura, obtemos 8 ângulos aproximadamente iguais. Se fizermos o mesmo com uma estrela do mar, também obteremos 5 ângulos iguais.



Calcule o valor de cada ângulo determinado na flor e na estrela do mar. Flor 360° : 8 = 45° Estrela 360° : 5 = 72°

20. Copie em seu caderno e classifique em verdadeira ou falsa cada uma das afirmações. Justifique sua resposta.

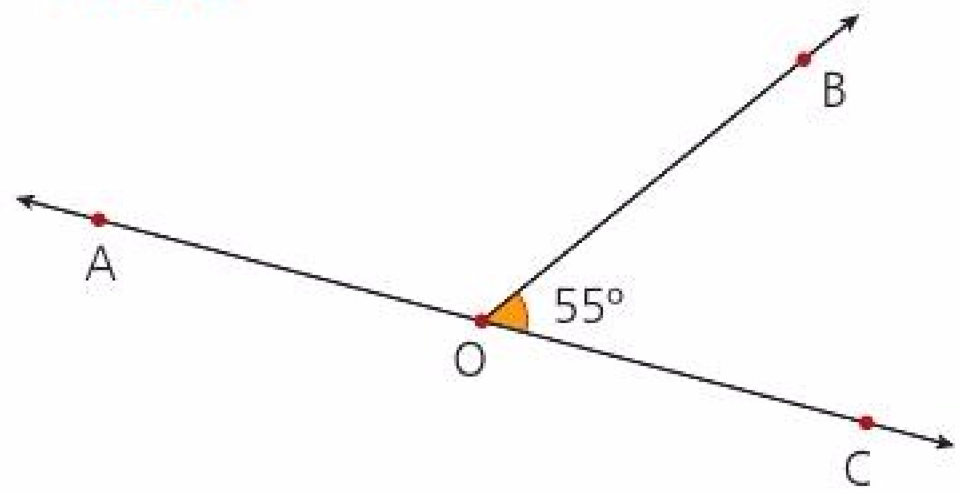
V a) Dois ângulos adjacentes e suplementares formam um ângulo raso.

V b) O suplemento de um ângulo reto é um ângulo reto.

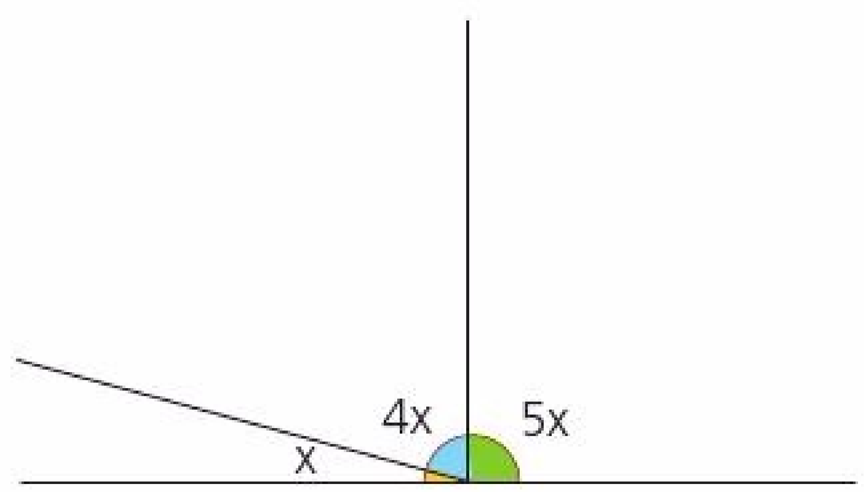
F c) Dois ângulos agudos podem ser suplementares.

V d) O suplemento do ângulo raso é o ângulo nulo. Argumentar

21. Determine o valor do ângulo AÔB na figura. AÔB = 125°



22. Calcule a medida dos três ângulos desta figura: 18°, 72°, 90°

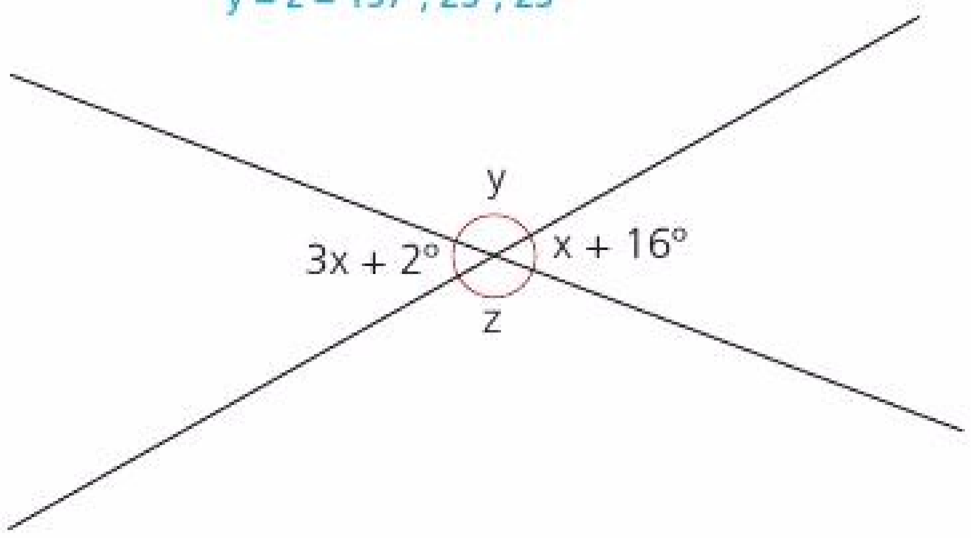


23. Copie em seu caderno e classifique em verdadeira ou falsa cada uma das afirmações. Justifique sua resposta. Argumentar

F a) Dois ângulos adjacentes são sempre suplementares.

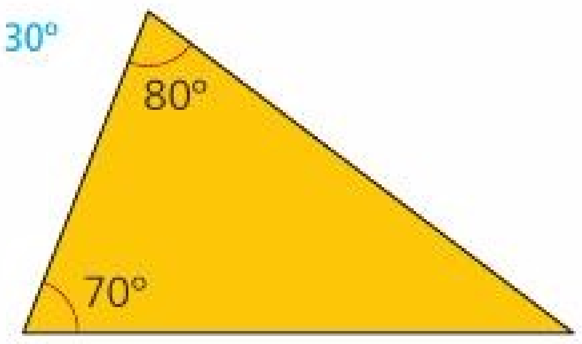
V b) Dois ângulos agudos opostos pelo vértice nunca são suplementares.

24. Determine **x**, **y** e **z** e o valor dos ângulos da figura: $x = 7°$
$y = z = 157°, 23°, 23°$

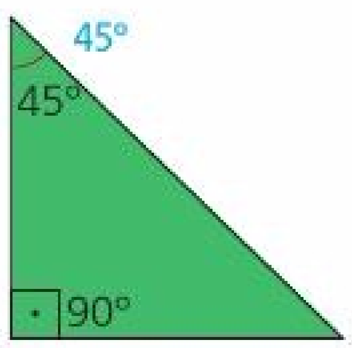


25. Nos triângulos a seguir, estão marcadas as medidas de dois ângulos internos. Calcule mentalmente a medida do terceiro ângulo interno.

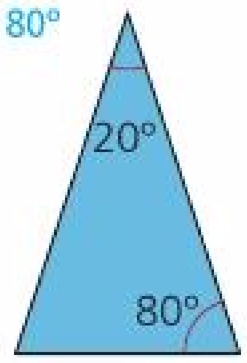
a) 30°



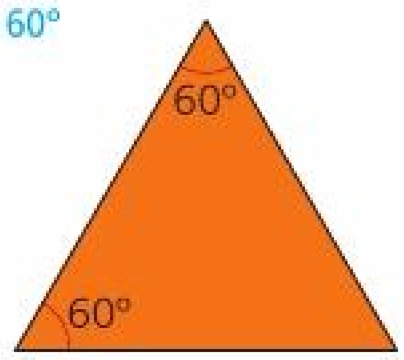
b) 45°



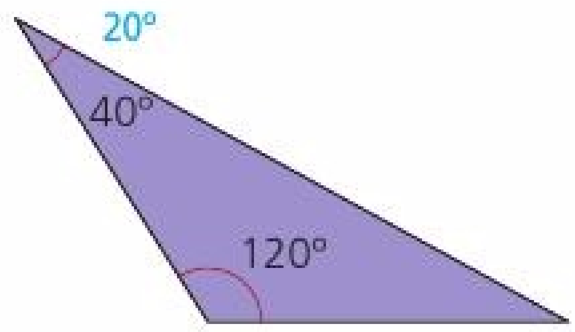
c) 80°



d) 60°



e) 20°



26. Qual é o complemento do suplemento de 145°? $90° - (180° - 145°) = 55°$

27. Calcule a terça parte do complemento de 33°. $\frac{1}{4} \cdot (90° - 33°) = 19°$

Para ler

Modernismo

O Modernismo foi um movimento artístico e cultural que se iniciou na Europa e chegou ao Brasil por volta de 1920. Na arquitetura, teve seu estilo difundido durante o século XX por grandes arquitetos como Oscar Niemeyer e Lúcio Costa, mas foi o arquiteto russo Gregori Warchavchik quem projetou as primeiras edificações em arquitetura modernista, a partir de 1929, em São Paulo.

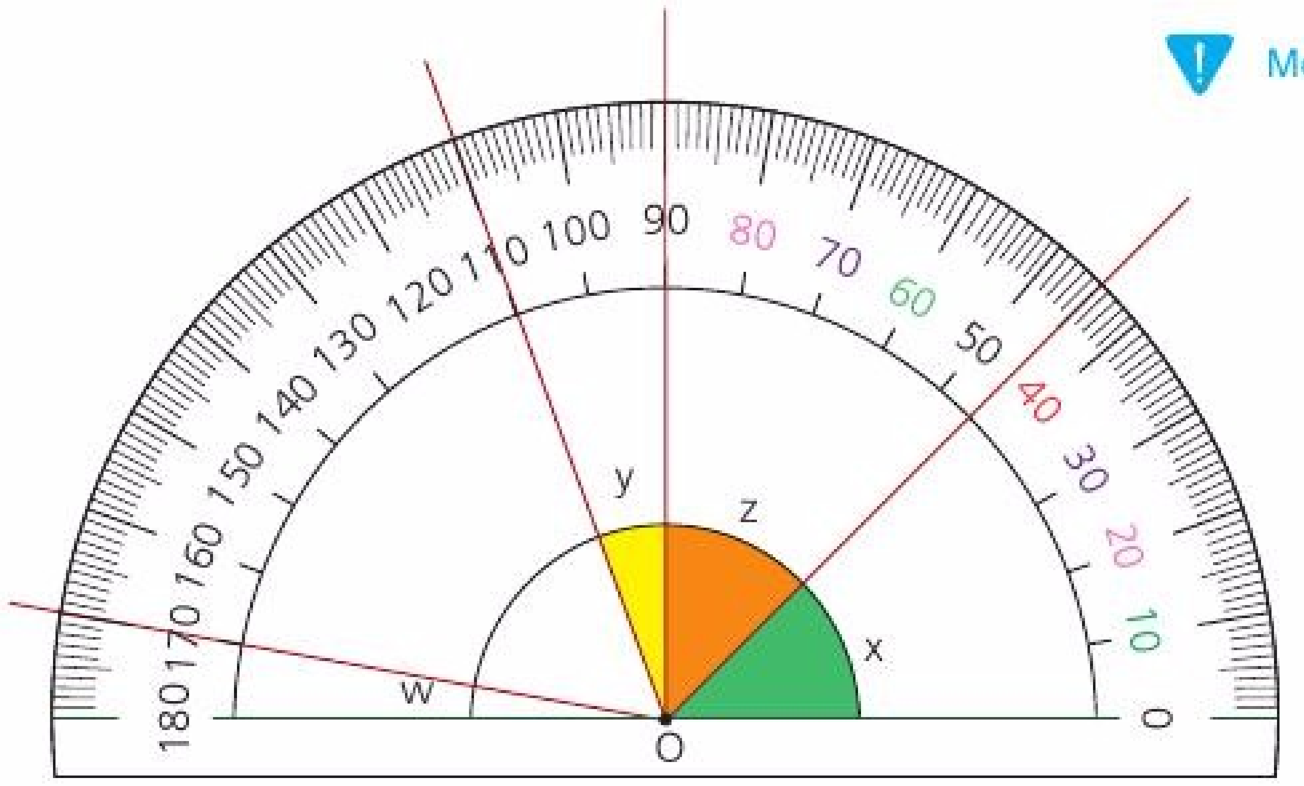
Fábio Colombini

Casa de arquitetura modernista na rua Itápolis, São Paulo (SP).

Para estudar

28. Utilize o transferidor para registrar, em graus, as medidas dos ângulos **x**, **y**, **z** e **w**.

Medir com instrumento



29. Considere um ângulo raso e seus lados. Classifique como verdadeira ou falsa cada uma das afirmações a seguir.

a) Os lados do ângulo raso são duas semirretas.

b) Eles estão contidos em uma mesma reta.

c) Os lados são coincidentes.

Argumentar

30. Considere, agora, um ângulo nulo. Copie em seu caderno e assinale verdadeira (V) ou falsa (F) para as afirmações a seguir.

a) Os lados do ângulo nulo são duas semirretas.

b) Eles estão contidos em uma mesma reta.

c) Os lados são coincidentes.

31. Apesar de expressas em graus, as medidas angulares abaixo estão no sistema decimal. Escreva cada uma utilizando graus, minutos e segundos.

a) 35,5°

b) 13,25°

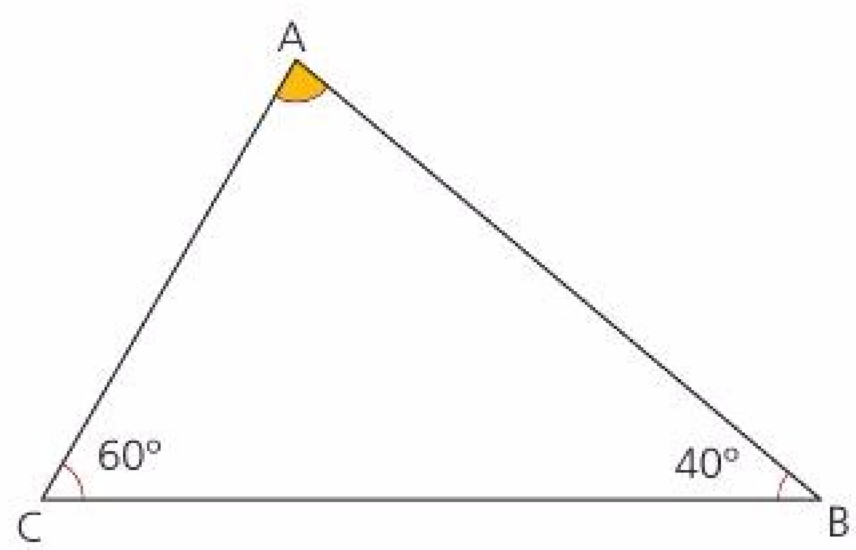
c) 2,75°

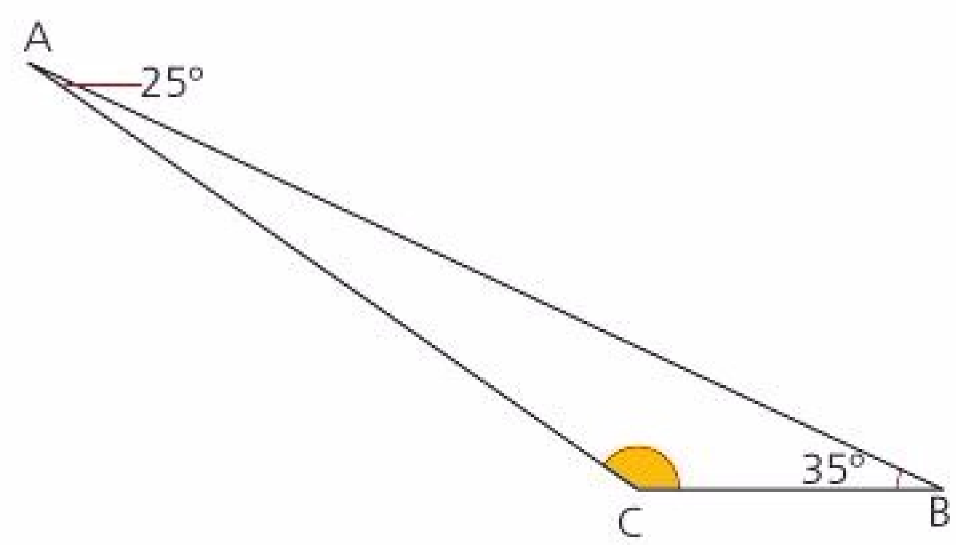
d) 23,1°

32. Utilize seu tranferidor e meça o maior ângulo dos triângulos a seguir.

a) Quanto eles medem?

b) Confira a soma dos ângulos internos dos dois triângulos.





33. A quanto equivalem 7200'' em:

a) minutos

b) graus

34. Uma reta $\overleftrightarrow{AB}$ encontra uma outra reta $\overleftrightarrow{CD}$ num ponto M. Faça um desenho em seu caderno representando esta situação em cada uma das hipóteses a seguir.

a) O ângulo entre as retas é 90°

b) O ângulo entre as retas é 60°

c) O ângulo entre as retas é 45°

Construir figura

35. Escreva na forma decimal:

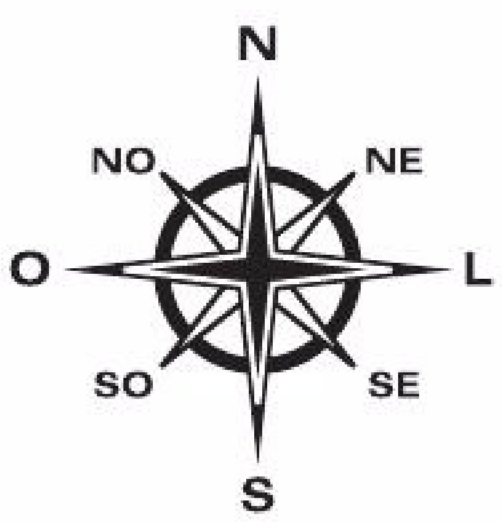
a) $22^\circ 30'$ b) $45^\circ 12'$

36. Diga quanto mede o maior e o menor ângulo formado pelos ponteiros do relógio quando este marcar:

a) às 15 h c) às 21 h

b) às 16 h d) às 6 h

37. A rosa dos ventos, ou rosa dos rumos, indica os pontos cardeais em todos os mapas que você encontra nos livros de Geografia. Basicamente, ela mostra 8 ângulos agudos entre as principais direções indicadas.



Interpretar figura

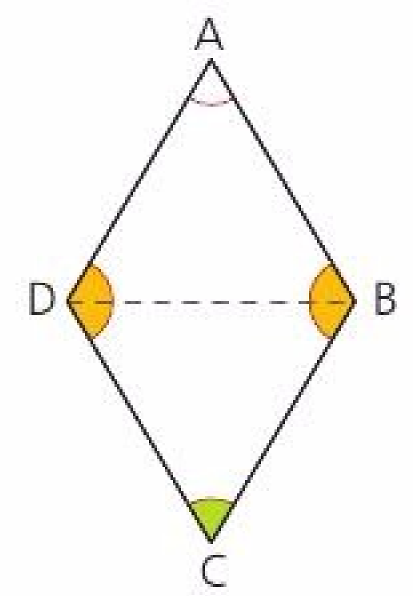
Responda:

a) Qual é a medida do ângulo formado entre as direções NE-SO (Nordeste--Sudoeste) e L-O (Leste-Oeste)?

b) Qual o maior ângulo formado entre as direções N-S (Norte-Sul) e NE-SO (Nordeste-Sudoeste)

c) Qual é a direção perpendicular à reta Nordeste-Sudoeste?

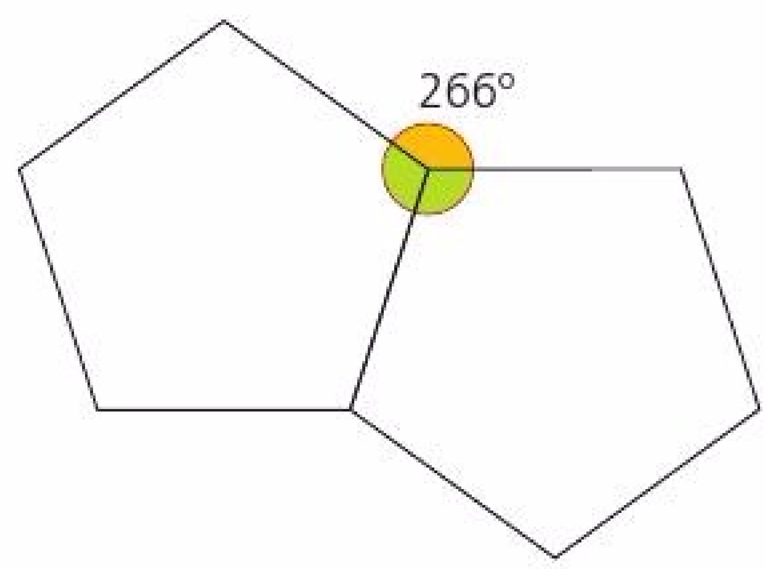
38. O losango da figura pode ser dividido em dois triângulos equiláteros, ABD e DBC. Lembrando que os ângulos internos do triângulo equilátero medem 60°, quais são as medidas dos ângulos internos do losango?



39. É possível existir um triângulo com dois ângulos retos? Justifique sua resposta.

Argumentar

40. Dois pentágonos regulares têm um lado em comum, como mostra a figura a seguir. Considerando o ângulo de 266° indicado na figura, calcule o valor do ângulo interno do pentágono regular.



41. Efetue:

a) $90^\circ - 22^\circ 30'$

b) $45^\circ 32' - 45^\circ 30' 59''$

c) $5 \cdot 2^\circ 30'$

d) $8 \cdot 2^\circ 1' 30''$

e) $3^\circ 35' \div 2$

f) $2^\circ 30' 30'' \cdot 3$

Resolução das atividades

1. a) $90° + 60° = 150°$

b) $90° + 60° + 60° = 210°$

c) $90° + 60° + 60° + 45° = 255°$

d) $90° + 60° + 60° + 45° + 45° = 300°$

2. a) obtuso

b) reto

c) agudo

d) agudo

3. Construção no caderno

4. a) $A = 35° + 50° - 55° = 30°$

b) $B = 105° - 95° = 10°$

5. a) Agudo, pois é menor que 90°.

b) Agudo, pois é menor que 90°.

c) Agudo, pois é menor que 90°.

6. a) 30° e 60°

b) 45° e 45°

7. Verdadeira, pois $4 \cdot 90° = 360°$.

8. a) 60°

b) 120°

9. a) quarenta e três graus, vinte e um minutos e quarenta e oito segundos.

b) vinte e sete graus, um minuto e treze segundos.

10. a) 360°

b) 21 600′

c) 1 296 000″

11. a) 4° 30′

b) 32° 36′

c) 45° 15′

12. a) 21°

b) 60° 34′ 05″

c) 67° 30′

d) 1′ 1″

e) 36° 10′

f) 6° 28′ 18″

g) 32° 50′ 4″

h) 1° 47′ 30″

13. a) 135°

b) 120°

c) 165°

14. a) Sim são adjacentes. Eles apresentam um lado em comum, estão lado a lado e têm o vértice O em comum.

b) Não, porque não estão lado a lado, ou seja, possuem pontos internos comuns.

15. a) 45°

b) 90°

c) 135°

16. a) $\hat{x}$ = agudo

b) $\hat{y}$ = agudo

c) $\hat{x} = 60°$

d) $\hat{z} = 120°$

e) 180°

f) 60°

17. $2x + 90 = 360°$

$2x = 270°$

$x = 135°$

18. $360 - 90 - 90 - 60 = 120$

$x = 120°$

19. Flor $360° : 8 = 45°$

Estrela $360° : 5 = 72°$

20. a) V

b) V

c) F

d) V

21. $180° - 55° = 125° \rightarrow A\hat{O}B = 125°$

22. $x + 4x + 5x = 180°$

$10x = 180°$

$x = 18°$

$18°, 72°, 90°$

23. a) F (podem ser dois agudos)

b) V (nunca somam 180°)

24. $y = z$

$3x + 2° = x + 16°$

$2x = 14$

$x = 7$

$y = z = 157°$

Os outros dois ângulos são iguai a 23°.

25. a) 30°

b) 45°

c) 80°

d) 60°

e) 20°

26. $90° - (180° - 145°) = 55°$

27 $\frac{1}{4} \cdot (90° - 33°) = 19°$

Respostas da seção Para estudar

28. $x = 45°$ $z = 45°$

$y = 20°$ $w = 10°$

29. a) V

b) V

c) F

30. a) V

b) V

c) V

31. a) 35°30′ c) 2°45′

b) 13°15′ d) 23°06′

32. a) 80° e 120°

b) ambas são 180°

33. a) 120 minutos

b) 2 graus

34. Composição no caderno

35. a) 22,5°

b) 45,2°

36. a) 90° c) 90°

b) 120° d) 180°

37. a) 45°

b) 315°

c) NO-SE

38. 60°, 60°, 120°, 120°

39. Não, pois não seria possível “fechar” o triângulo.

40. O ângulo interno do pentágono é 72°.

41. a) 67°30′

b) 1′01′′

c) 7°30′

d) 16°14′

e) 1°47′30′′

f) 5°01′

capítulo 3

Números racionais

- Conjunto dos números racionais
- Representação geométrica
- Operações

Lionel Valenti/PhotoXpress

As *matrioskas* são originárias da Rússia e encaixam-se umas dentro das outras.

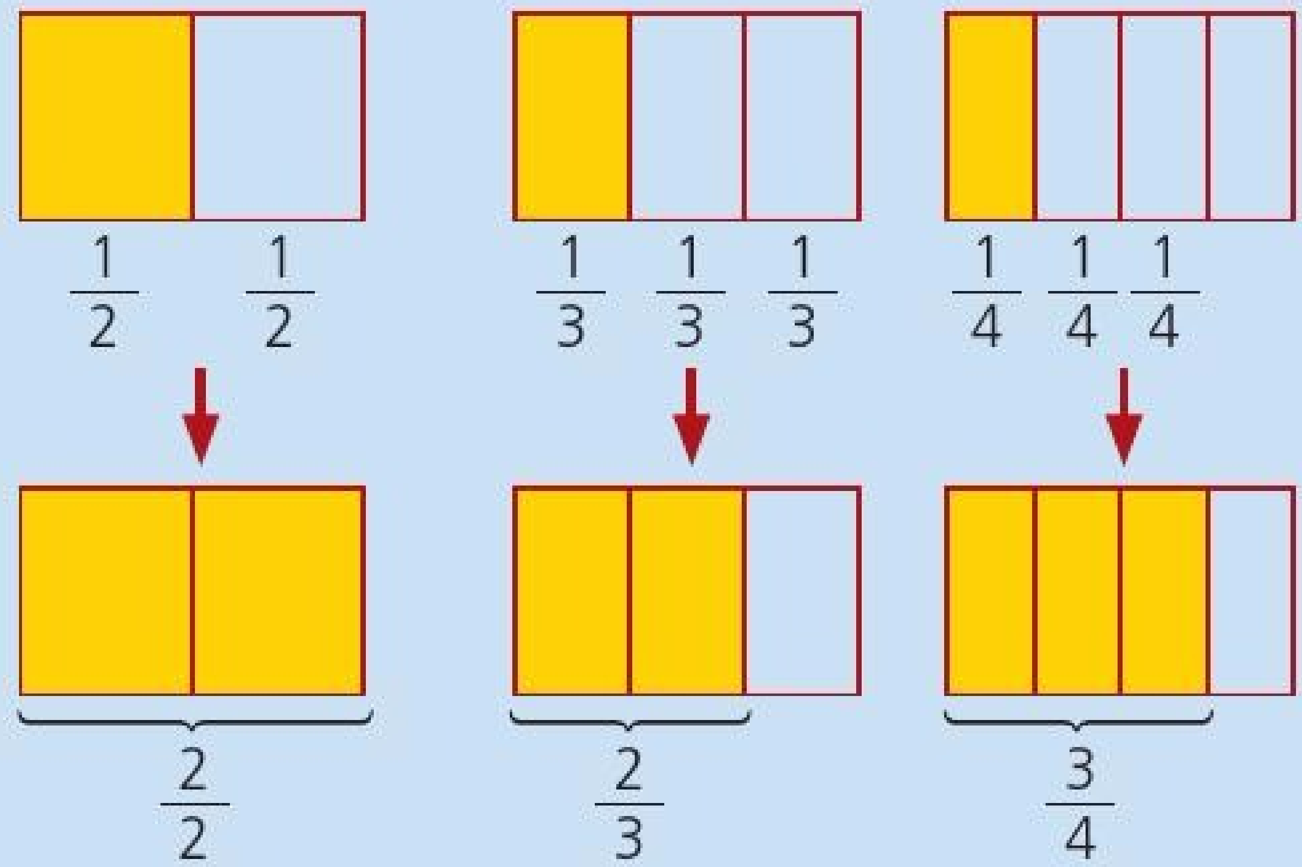
Conversa Inicial

Até este momento, já estudamos os números naturais e os inteiros. Compreendemos as principais características do conjunto **N** dos números naturais e do conjunto **Z** dos números inteiros. Já vimos que nem sempre obtemos um número natural quando subtraímos um natural do outro. Vimos também que nem sempre obtemos números inteiros ao dividirmos dois números inteiros.

Precisamos, portanto, estudar novos números e estabelecer um novo universo numérico, representado por um novo conjunto.

Quando estudamos frações, preocupamo-nos inicialmente em entendê-las como parte de um inteiro. Tínhamos em mente a operação de divisão de um inteiro em partes, de tal forma que uma fração significava uma ou mais partes desse inteiro.

Veja a seguir divisão de um retângulo, que estamos considerando um inteiro, em duas partes, em três partes e em quatro partes e como escrevemos algumas frações a partir dessas partes.



Professor: Comente que desde tempos remotos os homens utilizaram frações como razões, ou seja, divisão entre duas grandezas expressas por números. Já por volta de 1800 a. C., os egípcios interpretavam as frações como uma parte da unidade e utilizavam apenas as frações de numerador 1.

A partir da fração $\frac{1}{2}$, podemos considerar duas dessas frações e obter $\frac{2}{2}$, que é igual a 1, um número inteiro. Porém, quando tomamos duas frações de $\frac{1}{3}$ ou três frações de $\frac{1}{4}$, obtemos, respectivamente $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$, que não são números inteiros. Você já sabe calcular esses valores. Realizando a divisão indicada nessas frações, obteremos dois valores que não são inteiros:

$$\frac{2}{3} = 0{,}6666\ \ldots \quad \text{e} \quad \frac{3}{4} = 0{,}75$$

Vamos ver o que acontece se tomarmos, por exemplo, 5 partes de $\frac{1}{4}$ e 9 partes de $\frac{1}{3}$. Teremos:

$$\frac{5}{4} = 1{,}25 \quad \text{e} \quad \frac{9}{3} = 3$$

Como você pode ver, se olharmos as frações como números, encontraremos a possibilidade de escrever todos os números inteiros e também números que não são inteiros. Entender os tipos de números que as frações podem representar, quais as propriedades das operações feitas com esses números e como eles podem ser representados na reta numérica é nosso objetivo nesse capítulo.

Conjunto dos números racionais

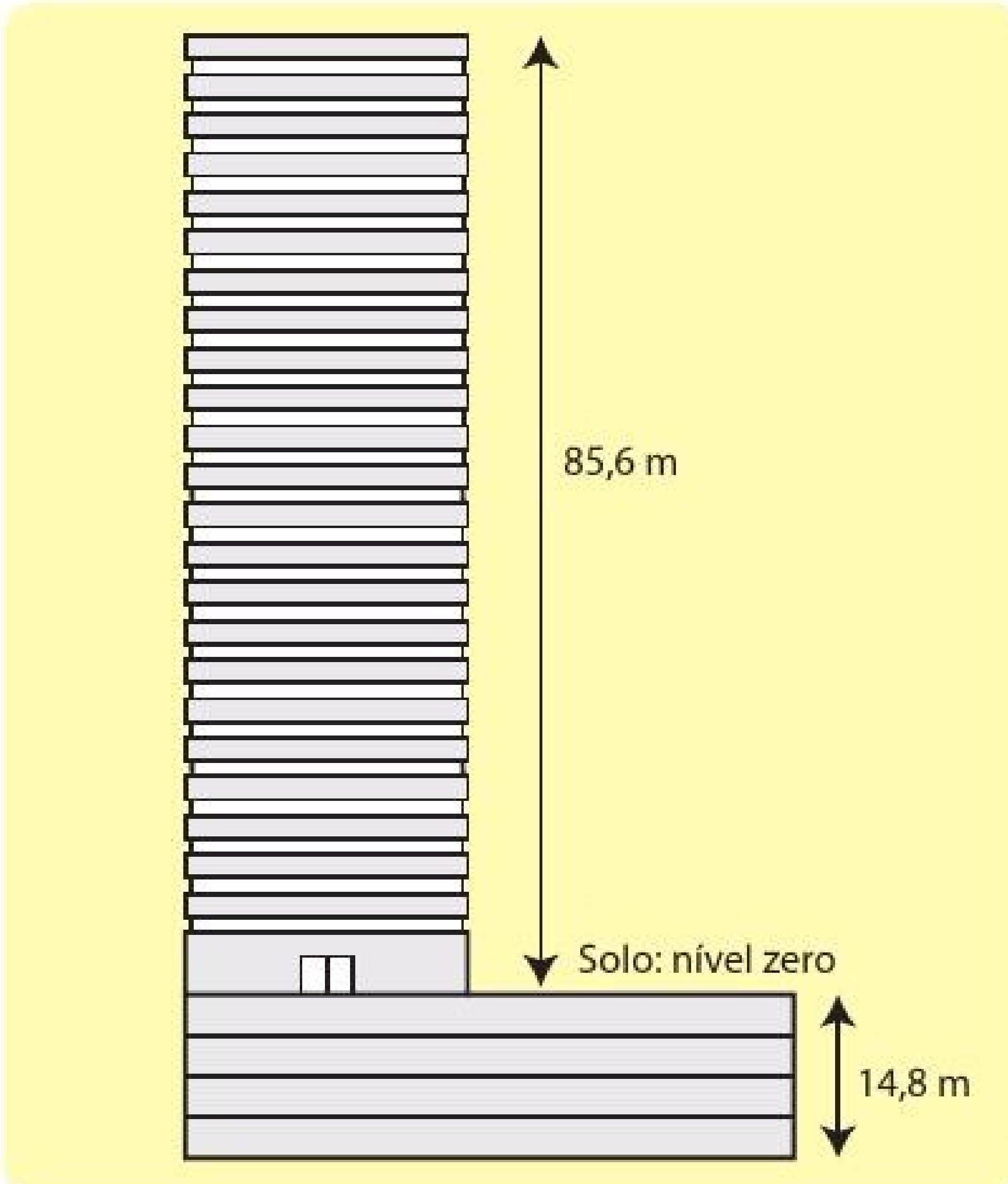
Antes de aprender o que são números racionais, é interessante rever o conceito de número decimal escrito na forma de fração.

Números decimais

Os números decimais são uma forma de representação de frações e são bastante utilizados em nosso dia a dia. É o que acontece quando desejamos representar quantias em dinheiro.

Não é comum, por exemplo, alguém dizer $\frac{3}{4}$ de 1 real. Dizemos 0,75 do real ou 75 **centavos** de real. A fração $\frac{3}{4}$ e o número decimal 0,75 são iguais e representam um mesmo número racional.

Assim como os números inteiros, um número racional pode ser positivo ou negativo. Podemos dizer, por exemplo, que o ponto mais elevado de uma cidade é o último andar de um prédio de 85,6 metros de altura e que seu estacionamento tem quatro pisos que atingem 14,8 m abaixo do solo, ou seja, estão a – 14,8 m, se considerarmos que o solo está no nível zero.



Atividades

1. Em seu caderno, escreva na forma decimal os seguintes valores em reais:

a) $\frac{1}{4}$ de real R$ 0,25

b) $\frac{3}{4}$ de real R$ 0,75

c) $\frac{7}{10}$ de real R$ 0,70

d) $\frac{4}{5}$ de real R$ 0,80

2. Utilizando sua calculadora, complete com =(igual), <(menor que) ou >(maior que):

a) $\frac{13}{27}$ = $\frac{159}{330}$

b) $\frac{1}{3}$ > $\frac{6}{20}$

c) $\frac{23}{35}$ < $\frac{24}{36}$

d) $\frac{245}{259}$ = $\frac{35}{37}$

3. Coloque cada sequência a seguir em ordem crescente.

a) $-0{,}4\ ;\ \frac{12}{50}\ ;\ -2{,}11\ ;\ \frac{39}{40}$ $-2{,}11;\ -0{,}4;\ \frac{12}{50};\ \frac{39}{40}$

b) $\frac{141}{150}\ ;\ -4{,}334\ ;\ 0{,}3\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ -0{,}99$

$-4{,}334;\ -0{,}99;\ 0{,}3;\ \frac{1}{2};\ \frac{141}{150}$

O conjunto dos números racionais

O conjunto dos números racionais é o conjunto dos números que podem ser representados por uma expressão decimal finita ou periódica. Por exemplo, $\frac{3}{8}$ é um número racional e é o mesmo que 0,375. Da mesma forma, uma dízima periódica como $\frac{1}{9}$ é um número racional e é igual a 0,111 111....

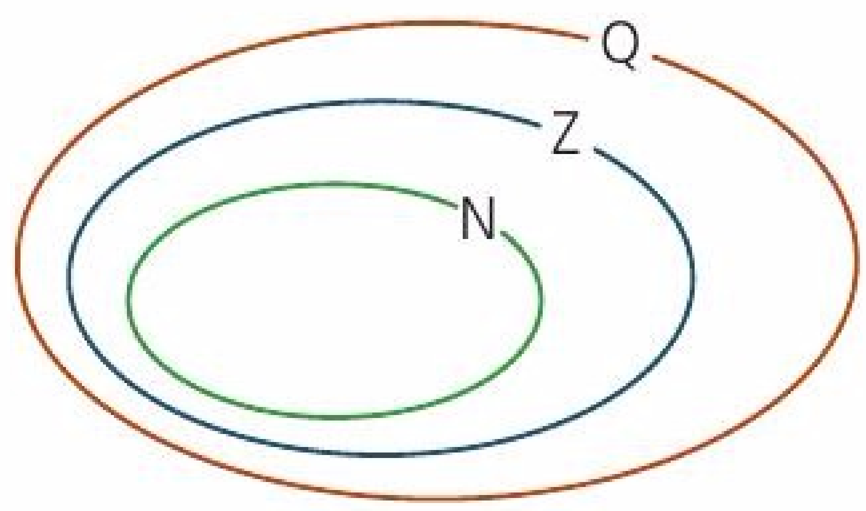
De forma geral, podemos escrever que o conjunto Q dos número racionais é formado por números que podem ser escritos na forma de uma fração, com numerador e denominador inteiros, sendo este último diferente de zero.

$$\mathbf{Q} = \left\{ \mathbf{x} \, / \, \mathbf{x} = \frac{p}{q}; \, \mathbf{p} \in \mathbf{Z}, \, \mathbf{q} \in \mathbf{Z}^* \right\}$$

(o símbolo **/** significa "tal que")

A letra **Q**, utilizada para representar o conjunto dos racionais, é a primeira letra da palavra quociente.

Note que todo número inteiro é também um número racional, pois pode ser expresso na forma $\frac{\mathbf{p}}{\mathbf{1}}$ ($\mathbf{p} \in \mathbf{Z}$), pois $\frac{\mathbf{p}}{\mathbf{1}} = p$. Isso nos permite dizer que $Z \subset Q$.



Da mesma forma que fizemos com os inteiros, podemos também utilizar os símbolos de exclusão para o conjunto dos números racionais. Assim:

$\mathbf{Q}_+$ = Conjunto dos números racionais não negativos

$\mathbf{Q}_-$ = Conjunto dos números racionais não positivos

$\mathbf{Q}^*$ = Conjunto dos números racionais não nulos (exclui-se o zero)

Os números racionais podem ser representados na forma de fração, na forma decimal finita ou infinita quando for uma dízima periódica. Eles podem também ser representados na forma de número misto.

Observe os exemplos:

- Vamos escrever o decimal 2,35 na forma **fracionária**:

$$2{,}35 = \frac{235}{100} = \frac{47}{20}$$

Fernanda Youssef

- Vamos escrever a fração $-\frac{8}{5}$ na forma **decimal**.

Dividimos 8 por 5 e colocamos o sinal – no resultado:

$$\begin{array}{r|l} 8 & 5 \\ \cline{2-2} 0 & 1{,}6 \end{array} \rightarrow \frac{8}{5} = -1{,}6$$

- Vamos escrever a fração $\frac{11}{4}$ na forma **mista**.

Fazemos isso através da divisão de 11 por 4, com quociente inteiro:

$$\begin{array}{r|l} 11 & 4 \\ \cline{2-2} 3 & 2 \end{array} \rightarrow \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$$

- Vamos determinar a **fração geratriz** de uma **dízima periódica simples**.

A fração geratriz é a fração que dá origem à dízima periódica. Vamos, através de exemplos aprender como a determinamos. Suponha que precisemos determinar a fração geratriz de 3,777...

a) Inicialmente, escrevemos $x = 3{,}777...$

b) Em seguida, multiplicamos os dois membros da igualdade por 10, pois o período da dízima tem apenas um algarismo (7):

$$x = 3{,}777 \rightarrow 10x = 37{,}777...$$

c) Por fim, subtraimos a primeira igualdade da segunda e obtemos a fração geratriz:

$$10x - x = (37{,}777...) - (3{,}\ 777...) \rightarrow 9x = 34 \rightarrow x = \frac{34}{9}$$

- Veja, também como determinamos a fração geratriz da dízima 2,535353..., ou $2{,}\overline{53}$.

Como o período 53 tem dois algarismos, escrevemos $x = 2{,}5353...$ e multiplicamos os dois membros da igualdde por 100:

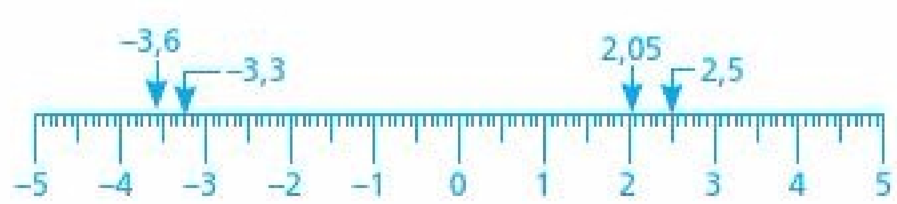
$$\left.\begin{array}{r} x = 2{,}5353... \\ 100x = 253{,}53... \end{array}\right\} \rightarrow 99x = 251 \rightarrow x = \frac{251}{99}$$

Para uma dízima como 5,125125..., ou $5{,}\overline{125}$, teríamos:

$$\left.\begin{array}{r} x = 5{,}125125... \\ 1\,000x = 5\,125{,}125... \end{array}\right\} \rightarrow 999x = 5\,120 \rightarrow x = \frac{5\,120}{999}$$

Mais adiante você irá aprender a encontrar a fração geratriz de outro tipo de dízima.

Professor: com o auxilio de uma régua milimetrada, peça aos alunos para desenharem uma reta numérica e localizarem nela pontos como –3,3, –3,6, 2,5, 2,05. Isso auxiliará os alunos nas atividades em que precisam identificar qual o maior ou o menor número de uma lista.

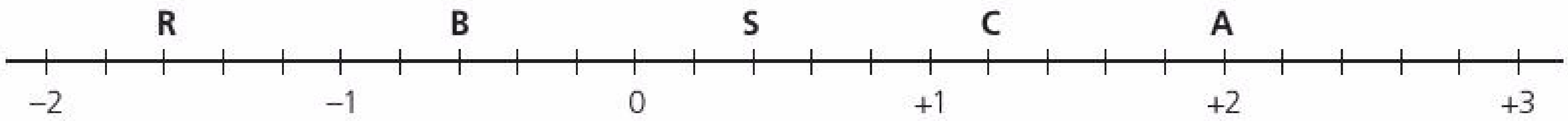


Atividades

4. Verifique se os números 183; –4; 2,72; $\frac{8}{5}$; –0,23 pertencem a N, Z ou Q.

$183 \in \mathbb{N}$ e $183 \in \mathbb{Z}$
$-4 \in \mathbb{Z}$
$2{,}72 \in \mathbb{Q}$
$\frac{8}{5} \in \mathbb{Q}$
$-0{,}23 \in \mathbb{Q}$

5. Observando a reta numérica a seguir, escreva o número racional relativo que corresponde cada ponto:



a) ao ponto A 2 b) ao ponto B $-\frac{3}{5}$ c) ao ponto S $\frac{2}{5}$ d) ao ponto C $\frac{6}{5}$ e) ao ponto R $-\frac{8}{5}$

6. Determine a fração que gera a dízima em cada caso:

a) 5,333... $\frac{48}{9}$ b) 2,31555... $\frac{2084}{900}$

7. Responda:

a) A temperatura de 0 graus Celsius é mais alta ou mais baixa que a de –10,6 graus? mais alta

b) A temperatura de –10,6 graus Celsius é mais alta ou mais baixa que a de –10,8 graus? mais alta

8. Escreva cada um dos números racionais na forma de uma fração irredutível.

Lembre-se: uma fração é irredutível se não existir nenhum divisor comum ao numerador e ao denominador, exceto o 1.

a) –0,03 $-\frac{3}{100}$ c) 1,4 $\frac{7}{5}$ e) 7,3 $\frac{73}{10}$
b) 0,5 $\frac{1}{2}$ d) –3 -3 f) 2,25 $\frac{9}{4}$

9. Determine os números racionais que resultam das divisões a seguir:

a) (–2) : (+9) $-\frac{2}{9}$ e) (+12) : (+13) $\frac{12}{13}$
b) (–4) : (–2) 2 f) (–28) : (+7) -4
c) (–14) : (–11) $\frac{14}{11}$ g) (+6) : (–6) -1
d) (+8) : (–13) $-\frac{8}{13}$ h) (+14) : (–11) $-\frac{14}{11}$

10. Em cada divisão dada, o resultado é um número racional. Diga se esse número racional é positivo, negativo ou nulo:

a) (+2) : (–7) negativo d) (+7) : (+3) positivo
b) (–11) : (–12) positivo e) 0 : (–2) nulo
c) (–5) : (+8) negativo f) (+3) : (–2) negativo

11. Escreva em seu caderno cada um dos números racionais a seguir na forma decimal:

a) $-\frac{20}{50}$ $-0{,}4$ b) $-\frac{30}{12}$ $-2{,}5$ c) $\frac{1}{8}$ $0{,}125$ d) $-\frac{3}{2}$ $-1{,}5$

12. Efetue estas divisões e apresente o resultado na forma decimal:

a) (–4) : (+5) $-0{,}8$ c) (–13) : (–2) $6{,}5$
b) (–3) : (–2) $+1{,}5$ d) (–5) : (+4) $-1{,}25$

13. Escreva na forma mista:

a) $\frac{5}{4}$ $1\frac{1}{4}$ b) $-\frac{5}{4}$ $-1\frac{1}{4}$ c) $-\frac{15}{4}$ $-3\frac{3}{4}$ d) $-\frac{26}{4}$ $-6\frac{1}{2}$

14. Ache a fração geratriz das dízimas:

a) 0,3333... $\frac{1}{3}$ c) 2,332332... $\frac{2330}{999}$
b) 8,121212... $\frac{804}{99}$ d) 4,11111... $\frac{37}{9}$

15. Escreva o números a seguir na forma de uma fração com denominador 2:

a) –0,5 $-\frac{1}{2}$ d) +1 $\frac{2}{2}$
b) –3,5 $-\frac{7}{2}$ e) 0 $\frac{0}{2}$
c) +4,5 $\frac{9}{2}$ f) –21,5 $-\frac{43}{2}$

16. Escreva os números dados na forma de uma fração $\frac{p}{q}$, com $q \neq 0$. Lembre-se de que a fração $\frac{p}{q}$ deve ser irredutível.

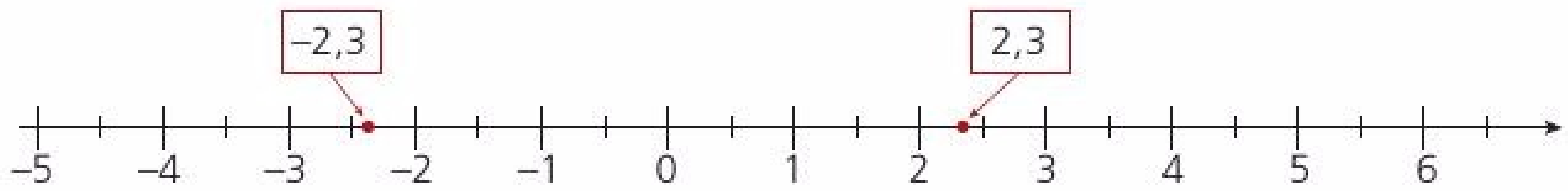
a) –4,4 $-\frac{22}{5}$ e) 0 $-\frac{1}{25}$
b) +5,5 $\frac{11}{2}$ d) –0,04 0
c) –2 -2 f) +2,375 $\frac{19}{8}$

Representação geométrica

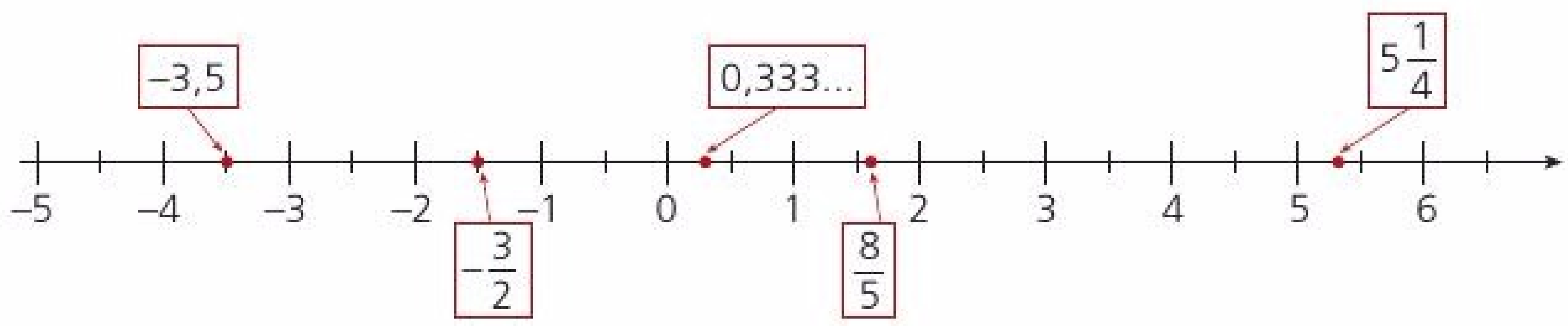
Quando representamos os conjuntos dos números naturais e dos inteiros, utilizamos a reta numérica. Para esses conjuntos, não existiam números associados aos pontos situados entre dois inteiros.

No caso dos racionais, diversos pontos situados entre dois inteiros podem representar números racionais.

Veja as representações dos racionais –2,3 e 2,3.



Observe, agora, as representações de outros números racionais na reta numérica:

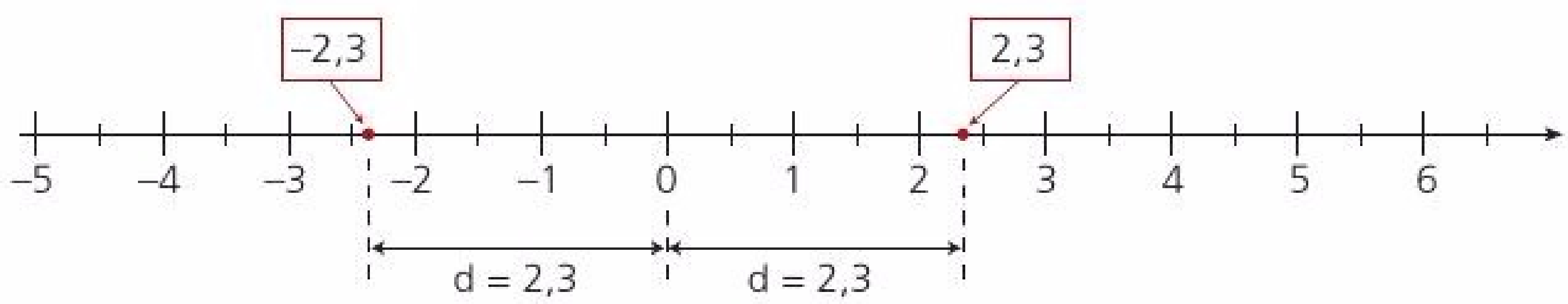


Professor: escreva no quadro cada parte do texto e destaque as representações dos racionais, a simetria e o valor absoluto de um número racional.

Números como 2,3 e -2,3, são **simétricos** em relação ao zero. Em outras palavras, estão em lados opostos na reta numérica, a uma mesma distância do ponto correspondente ao zero.

Dois números racionais são chamados de **opostos** quando os pontos que os representam na reta são simétricos em relação ao zero. O oposto também é chamado de **simétrico**. Por exemplo, o simétrico de $-\frac{7}{9}$ é $\frac{7}{9}$.

A distância **d** de um número racional até o zero é chamada de **módulo do número racional**. Por exemplo, o módulo de –2,3 é igual ao módulo de 2,3.



Como distância é sempre um número positivo, o **módulo**, ou **valor absoluto** de um número racional será sempre positivo. Da mesma forma que fizemos com número inteiros, representamos o módulo de um número racional por duas barras. Veja os exemplos:

- $|25{,}45| = 25{,}45$
- $\left|-\dfrac{5}{3}\right| = \dfrac{5}{3}$
- $|0| = 0$

Operações

Para realizar operações com racionais, valem os mesmos procedimentos operacionais que utilizamos nas operações com frações e também com números decimais. Os exemplos a seguir mostram as operações de adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação.

Professor: Escreva no quadro os exemplos do texto e enfatize as operações de adição e subtração de racionais. Destaque a necessidade de reduzir as frações ao mesmo denominador.

Adição e subtração de racionais

Para essas operações são fundamentais os conceitos de módulo e de redução de frações ao mesmo denominador.

- Observe a soma de $-3{,}25$ com $-4{,}9$.

Como os dois números têm o mesmo sinal, somamos seus módulos e mantemos o sinal, da mesma forma que fizemos com números inteiros:

$$-3{,}25 + (-4{,}9) = -(3{,}25 + 4{,}9) = -8{,}15$$

- Veja agora a subtração $3{,}42 - (-2{,}78)$.

$$3{,}42 - (-2{,}78) = 3{,}42 + 2{,}78 = 6{,}2$$

- Vamos agora efetuar $-\dfrac{1}{30} + \dfrac{5}{4}$.

Como o mmc $(30,4) = 60$, temos:

$$-\frac{1}{30} + \frac{5}{4} = -\frac{2}{60} + \frac{75}{60} =$$

$$-\frac{1}{30} + \frac{5}{4} = \frac{-2 + 75}{60} = \frac{73}{60}$$

Fernanda Youssef

Atividades

Aplicação

17. Um cliente de um banco tem um limite de cheque especial igual a R$ 2 000,00. O extrato de sua conta indica um saldo devedor de R$ 260,00. Responda no caderno:

a) Quanto tem ainda disponível em seu limite do cheque especial? R$ 1 740,00

b) Caso desconte R$ 385,00, qual será o novo saldo? devedor de R$ 645,00

c) Supondo que tenha descontado R$ 385,00 e, no dia seguinte, depositado o valor de R$ 915,00, qual será seu novo saldo? saldo positivo de R$ 270,00

18. Efetue:

a) $5 + (-0{,}1)$ $4{,}9$

b) $5 + (-9{,}75)$ $-4{,}75$

c) $-8{,}8 - 0{,}008$ $-8{,}808$

d) $-\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5}$ $-\dfrac{1}{20}$

e) $-2 + \left(-\dfrac{5}{17}\right)$ $-\dfrac{39}{17}$

f) $\dfrac{1}{3} - 1$ $-\dfrac{2}{3}$

19. Efetue as seguintes expressões:

a) $\left(\dfrac{5}{9} - \dfrac{11}{18}\right) - \left(-\dfrac{7}{4} - \dfrac{5}{36}\right)$ $\dfrac{11}{6}$

b) $-\dfrac{2}{5} - \left[-\dfrac{17}{15} - \left(2 + \dfrac{7}{10}\right)\right] - \dfrac{5}{4}$ $\dfrac{131}{60}$

c) $21{,}71 + (5{,}3 - 21{,}4) - [3{,}9 - (52{,}3 - 19{,}25)]$ $34{,}76$

d) $23{,}3 - \{44{,}57 - [12{,}8 - (2{,}7 - 8+4)] - 2{,}3\}$ $-4{,}87$

Multiplicação e divisão de racionais

Observe agora os procedimentos que utilizamos para multiplicar ou dividir números racionais.

- Vamos calcular $3{,}5 \cdot (-1{,}6)$.

Multiplicamos os módulos (3,5 e 1,6) e colocamos o sinal negativo. Temos, então: $3{,}5 \cdot (-1{,}6) = -5{,}6$

- Vamos agora efetuar o produto $\left(-\dfrac{6}{25}\right) \cdot \left(-\dfrac{10}{21}\right)$

Como os números têm o mesmo sinal, multiplicamos os módulos, fazemos as simplificações possíveis e colocamos o sinal positivo no produto obtido:

$$\frac{6}{25} \cdot \frac{10}{21} = \frac{\overset{2}{\cancel{6}}}{\underset{5}{\cancel{25}}} \cdot \frac{\overset{2}{\cancel{10}}}{\underset{7}{\cancel{21}}} = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{7} = \frac{4}{35} \rightarrow \left(-\frac{6}{25}\right) \cdot \left(-\frac{10}{21}\right) = +\frac{4}{35}$$

- Observe a divisão $\dfrac{3}{25} : \left(-\dfrac{2}{15}\right)$

Esse quociente é negativo. Por isso, colocamos o sinal **–** e, a seguir, efetuamos a divisão dos módulos:

$$\frac{3}{25} : \left(-\frac{2}{15}\right) = -\left(\frac{3}{25} : \frac{2}{15}\right) = -\left(\frac{3}{\underset{5}{\cancel{25}}} \cdot \frac{\overset{3}{\cancel{15}}}{2}\right) = -\frac{9}{10}$$

Lembre-se que dividir uma fração pela outra é o mesmo que multiplicar a primeira pelo inverso da segunda.

Atividades

20. Efetue as operações:

a) $(-1) \cdot 9{,}29$ $-9{,}29$

b) $(-6) \cdot 3{,}18$ $-19{,}08$

c) $0{,}3 \cdot 0{,}02$ $0{,}006$

d) $32{,}7 : (-10)$ $-3{,}27$

e) $(-11{,}28) : 0{,}2$ $-56{,}4$

f) $8{,}8 : 0{,}001$ 8800

21. Efetue as multiplicações:

a) $\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{5}{4}\right)$ $-\frac{5}{6}$

b) $\left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$ $\frac{3}{10}$

c) $\frac{4}{15} \cdot \frac{5}{8}$ $\frac{1}{6}$

d) $(-2) \cdot \frac{3}{10}$ $-\frac{3}{5}$

22. Efetue as divisões:

a) $\frac{1}{3} : \frac{1}{2}$ $\frac{1}{3} : \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{1} = \frac{2}{3}$

b) $\left(-\frac{1}{3}\right) : \left(-\frac{7}{3}\right)$ $\left(-\frac{1}{3}\right) : \left(-\frac{7}{3}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{7} = \frac{1}{7}$

23. Efetue as divisões:

a) $\left(-\frac{81}{25}\right) : \left(-\frac{9}{5}\right)$ $\frac{9}{5} = 1\frac{4}{5}$

b) $\left(\frac{1}{3} : \frac{1}{2}\right) : \frac{2}{3}$ 1

Potências com bases racionais

Em qualquer potenciação com expoente zero ou 1 e base racional diferente de zero, vale a definição:

> Para todo número racional não nulo **a**, define-se $\mathbf{a^0 = 1}$ e para todo número racional **a**, define-se $\mathbf{a^1 = a}$.

Por exemplo:

- $\left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$
- $(-0{,}25)^0 = 1$
- $\left(-\frac{23}{11}\right)^1 = -\frac{23}{11}$
- $4{,}4^1 = 4{,}4$

Para potências com bases racionais e expoentes inteiros e maiores que 1 vale a definição:

> Para qualquer racional **a** e qualquer inteiro **n** > 1, define-se:
> $$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots a}_{\text{n fatores}}$$

Por exemplo:

- $\left(-\frac{1}{3}\right)^3 = \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1 \cdot 1 \cdot 1}{3 \cdot 3 \cdot 3} = -\frac{1}{27}$
- $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{16}{81}$

Pode ocorrer, também, que encontremos uma potência com base racional e expoente negativo. Para entender como proceder nesse caso, vamos, antes, estudar o que acontece com as potências de 2. Analise o quadro a seguir:

Expoentes **diminuem** ← | → Expoentes **aumentam**

2^{-3}	2^{-2}	2^{-1}	2^0	2^1	2^2	2^3
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

← O resultado vai sendo **dividido** por 2 | O resultado vai sendo **multiplicado** por 2 →

Observe que, quando os expoentes crescem de 1 em 1, os resultados são multiplicados por 2, pois a base é dois. Ao contrário, quando os expoentes decrescem de 1 em 1, vão sendo divididos por 2.

Veja os valores das potências de 2 com expoentes negativos:

- $2^{-1} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2^1}$
- $2^{-2} = \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2^2}$
- $2^{-3} = \dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{2^3}$

Uma forma de generalizar o que observamos no exemplo com potência de 2 é dizer que uma potência de expoente negativo é igual ao inverso da mesma potência com o expoente positivo. Assim:

> Para qualquer racional não nulo **a** e qualquer inteiro **n**, define-se
>
> $$\mathbf{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

Observe outros exemplos:

- $3^{-4} = \dfrac{1}{3^4} = -\dfrac{1}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = -\dfrac{1}{81}$
- $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{2}{3}\right)^2} = \dfrac{1}{\dfrac{4}{9}} = \dfrac{9}{4}$

Raiz quadrada em Q

Já vimos que extrair uma raiz quadrada é a operação inversa de se elevar um número ao quadrado. No conjunto dos racionais, vamos considerar apenas as raízes quadradas positivas, pois neste conjunto dois números opostos, como, por exemplo, $\frac{2}{3}$ e $-\frac{2}{3}$, elevados ao quadrado resultam um mesmo valor, $\frac{4}{9}$.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \quad \text{e} \quad \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

Também aqui, podem ocorrer situações em que a raiz quadrada pode não existir no conjunto Q. Como exemplo, considere $\sqrt{\frac{1}{3}}$.

Dizemos que $\sqrt{\frac{1}{3}} \notin$ Q, pois é possível demonstrar que não existe número racional que, elevado ao quadrado, resulte $\frac{1}{3}$.

Atividades

24. Em seru caderno, calcule:

a) $\left(-\frac{3}{2}\right)^2$ $\frac{9}{4}$ b) $\left(\frac{4}{3}\right)^3$ $\frac{64}{27}$ c) $\left(\frac{1}{2}\right)^4$ $\frac{1}{16}$

25. Calcule:

a) $2{,}3^2$ 5,29
b) $(-1{,}1)^2$ 1,21
c) $(-2{,}1)^3$ −10,1871
d) $0{,}1^4$ 0,0001
e) $8{,}22^0$ 1
f) $22{,}2^1$ 22,2

26. Calcule e dê a resposta na forma decimal:

a) 10^{-3} $\frac{1}{1000}$
b) 10^{-4} $\frac{1}{10000}$
c) $\left(-\frac{3}{7}\right)^{-2}$ $\frac{49}{9}$
d) $\left(-\frac{3}{2}\right)^{-3}$ $-\frac{8}{27}$

27. Calcule as seguintes potências:

a) 3^3 27
b) 3^2 9
c) 3^1 3
d) 3^0 1
e) 3^{-1} $\frac{1}{3}$
f) 3^{-2} $\frac{1}{9}$

28. Use as propriedades da potenciação para calcular cada expressão:

a) $\left(\frac{8}{33}\right)^2 : \left(\frac{8}{33}\right)^{-3}$ $\frac{33}{8}$
b) $\left(\frac{17}{5}\right)^{-2} : \left(\frac{17}{5}\right)^{-1}$ $\frac{125}{4913}$
c) $\left(\frac{14}{19}\right)^2 : \left(\frac{14}{19}\right)^{-1}$ $\frac{14}{19}$
d) $\left(-\frac{21}{40}\right)^{-2} : \left(-\frac{21}{40}\right)^{-5}$ $\left(\frac{40}{21}\right)^5$

29. Calcule:

a) $\sqrt{\frac{16}{49}}$ $\frac{4}{7}$
b) $-\sqrt{\frac{1}{4}}$ $-\frac{1}{2}$
c) $\sqrt{\frac{81}{100}}$ $\frac{9}{10}$
d) $-\sqrt{\frac{1}{4}}$ $-\frac{1}{2}$
e) $\sqrt{\frac{144}{169}}$ $\frac{12}{13}$
f) $-\sqrt{\frac{9}{121}}$ $-\frac{3}{11}$

30. Calcule:

a) $\sqrt{1{,}44}$ 1,2
b) $\sqrt{1{,}69}$ 1,3
c) $\sqrt{33{,}64}$ 5,8
d) $\sqrt{42{,}25}$ 6,5

Faça estimativas

31. Calcule, sem a calculadora, o valor de $\sqrt{17}$, com aproximação de duas casas decimais.

$4 \cdot 4 = 16$ $4{,}1 \cdot 4{,}1 = 16{,}81$
$4{,}11 \cdot 4{,}11 \cong 16{,}89$ $4{,}12 \cdot 4{,}12 \cong 16{,}97$ (boa aproximação)
$\sqrt{17} \cong 4{,}12$

Radioatividade

A **radioatividade** é um fenômeno que ocorre no núcleo do átomo de alguns elementos químicos, que o faz emitir radiações. Um elemento químico é radioativo quando o seu núcleo é **instável** e, emitindo **radiações**, sofre alterações.

O que define um elemento químico são algumas partículas existentes no núcleo do átomo do elemento, que são os **prótons** e os **nêutrons**. Quando dizemos que um elemento químico é o Urânio, por exemplo, estamos nos referindo a uma quantidade de prótons que existe nos átomos de Urânio. Todo elemento químico que tiver aquela quantidade de prótons será Urânio. Porém, existem átomos de Urânio que têm quantidades diferentes de nêutrons. Continuam sendo Urânio, mas são chamados de **isótopos** do Urânio e têm características radioativas diferentes.

Quando um elemento químico radioativo emite radiações, dizemos que ocorre um **decaimento radioativo**, que consiste na diminuição da massa da amostra do elemento. O tempo necessário para que a quantidade de material radioativo se reduza à metade é chamado de **meia-vida do elemento**. A tabela ao lado mostra alguns exemplos de meias-vidas de isótopos radioativos.

Elemento	Isótopo	Meia vida
polônio	214	0,001 s
	218	3 min
	210	138 dias
potássio	42	12,4 horas
iodo	131	8 dias
cobalto	60	5,27 anos
urânio	235	710 milhões de anos
	238	4,5 bilhões de anos
carbono	14	5 730 anos

Observe a seguir o caso do isótopo Iodo 131. Sua meia vida é de 8 dias. Isso quer dizer que, em oito dias, teremos $\frac{1}{2}$ (metade) da amostra inicial, em 16 dias teremos $\frac{1}{4}$ (metade da metade), em 32 dias $\frac{1}{8}$, decaindo indefinidamente .

$$\begin{array}{cccccccccc}
1, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{4}, & \frac{1}{8}, & \frac{1}{16}, & \frac{1}{32}, & \frac{1}{64}, & \frac{1}{128}, & \frac{1}{256}, & \frac{1}{512} \ldots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
2^{0}, & 2^{-1}, & 2^{-2}, & 2^{-3}, & 2^{-4}, & 2^{-5}, & 2^{-6}, & 2^{-7}, & 2^{-8}, & 2^{-9},
\end{array}$$

Uma amostra de material radioativo decai numa sequência de potências de base 2, com expoentes negativos. Com $2^0 = 1$, temos um valor inicial. Depois, a amostra decai para $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ e assim por diante.

Esse raciocínio vale para todos os elementos radioativos. O que muda de um para outro é o tempo que decorre entre cada meia-vida.

Para estudar

32. Escreva em ordem crescente as sequências de números racionais. Utilize para isso o símbolo (>).

Ordenar

a) $0{,}3; \frac{11}{50}; 2{,}03; \frac{39}{40}$

b) $\frac{162}{51}; 3{,}0003; \frac{1}{3}; 2{,}99$

33. Escreva os números racionais a seguir na forma de fração, simplificando-a o máximo possível.

a) $-0{,}05$ c) $-1{,}8$

b) $0{,}7$ d) -6

34. Escreva cada um dos números racionais na forma decimal:

a) $-\frac{2}{5}$ c) $\frac{1}{16}$

b) $-\frac{15}{6}$ d) $-\frac{6}{8}$

35. Efetue as divisões e apresente o resultado na forma decimal:

a) $(-4) \div (+5)$ c) $(-13) \div (-2)$

b) $(-3) \div (-2)$ d) $(-5) \div (+4)$

36. Escreva cada um dos números a seguir como uma fração com denominador 10.

a) $-0{,}23$ c) $-7{,}4$

b) $5{,}2$ d) $12{,}3$

37. Dos dois números dados, qual é o maior:

a) $-9{,}2$ ou $8{,}7$? c) $8{,}2$ ou $-8{,}7$?

b) $-\frac{1}{9}$ ou $\frac{5}{9}$? d) $-\frac{2}{9}$ ou $-\frac{3}{7}$?

38. Efetue:

a) $2 + (-0{,}2)$ c) $-5 + (3{,}75)$

b) $-2 + \left(-\frac{8}{15}\right)$ d) $-\frac{1}{4} - \frac{3}{5}$

39. Efetue:

a) $\left(\frac{5}{12} - \frac{13}{8}\right) - \left(-\frac{7}{6} - \frac{1}{18}\right)$

b) $-\frac{2}{5} - \left[-\frac{13}{5} - \left(2 + \frac{7}{2}\right)\right] - \frac{5}{6}$

c) $\frac{1}{225} - \left[\frac{1}{15} - \left(-\frac{2}{45} + \frac{18}{75}\right)\right]$

d) $\frac{16}{5} - \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{2}{15} - \frac{1}{3}\right) + \frac{3}{5}\right] + \frac{3}{4}$

40. Efetue as multiplicações:

a) $(-6) \cdot 3{,}18$ c) $4{,}15 \cdot (-2{,}6)$

b) $0{,}02 \cdot (-3{,}5)$ d) $\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{5}{4}\right)$

41. Calcule o valor das expressões:

a) $\frac{1}{25} - \frac{2}{7} \cdot \left(4 + \frac{2}{3} \div 5\right) \cdot \frac{1}{31}$

b) $\frac{1}{30} - \frac{2}{5} \cdot \left[2 + \frac{2}{3} \div \left(-\frac{4}{5}\right)\right]$

c) $1 - \left(-\frac{5}{7}\right) \div \left[\left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) \div \frac{4}{25}\right]$

42. Calcule:

a) $\left(-\frac{2}{5}\right)^2$ c) $\left(\frac{7}{2}\right)^3$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ d) $\left(-\frac{8}{11}\right)^1$

43. Efetue:

a) $\left(-\sqrt{\frac{16}{36}} + \sqrt{\frac{1}{81}}\right) \div \left(\sqrt{\frac{25}{16}} - \sqrt{\frac{4}{49}}\right)$

b) $-\sqrt{\frac{16}{25}} + \sqrt{\frac{1}{64}} \div \sqrt{\frac{25}{36}} - \sqrt{\frac{4}{9}}$

c) $64 \cdot \left(2 - \sqrt{\frac{1}{64}} \cdot 2\right)^2$

d) $2 \cdot \sqrt{\left(1 - \sqrt{\frac{1}{16}} \cdot 3\right)}$

Resolução das atividades propostas

1. a) R\$ 0,25
b) R\$ 0,75
c) R\$ 0,70
d) R\$ 0,80
e) R\$ 7,83

2. a) $=$
b) $>$
c) $<$
d) $=$

3. a) $-2{,}11; -0{,}4; \frac{12}{50}; \frac{39}{40}$
b) $-4{,}334; -0{,}99; 0{,}3; \frac{1}{2}; \frac{141}{150}$

4. $183 \in \mathbb{N}$ e $183 \in \mathbb{Z}$
$-4 \in \mathbb{Z}$
$2{,}72 \in \mathbb{Q}$
$\frac{8}{5} \in \mathbb{Q}$
$-0{,}23 \in \mathbb{Q}$

5. a) 2
b) $-\frac{3}{5}$
c) $\frac{2}{5}$
d) $\frac{6}{5}$
e) $-\frac{8}{5}$

6. a) $\frac{48}{9}$
b) $\frac{2\,084}{900}$

7. a) mais alta
b) mais alta

8. a) $-\frac{3}{100}$
b) $\frac{1}{2}$
c) $\frac{7}{5}$
d) -3
e) $\frac{73}{10}$
f) $\frac{9}{4}$

9. a) $-\frac{2}{9}$
b) 2
c) $\frac{14}{11}$
d) $-\frac{8}{13}$
e) $\frac{12}{13}$
f) -4
g) -1
h) $-\frac{14}{11}$

10. a) negativo
b) positivo
c) negativo

d) positivo
e) nulo
f) negativo

11. a) $-0{,}4$
b) $-2{,}5$
c) $0{,}125$
d) $-1{,}5$

12. a) $-0{,}8$
b) $+1{,}5$
c) $6{,}5$
d) $-1{,}25$

13. a) $1\frac{1}{4}$

b) $-1\frac{1}{4}$

c) $-3\frac{3}{4}$

d) $-6\frac{1}{2}$

14. a) $\begin{array}{r} 10x = 3{,}333... \\ x = 0{,}333... \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 9x = 3 \\ x = \frac{1}{3} \end{array}$

b) $\begin{array}{r} 100x = 812{,}1212... \\ x = 8{,}1212... \end{array} \rightarrow x = \frac{804}{99}$

c) $100x = 2\,332{,}332332...$
$x = 2{,}332332...$
$999x = 2\,330 \rightarrow x = \frac{2\,330}{999}$

d) $10x = 41{,}111...$
$x = 4{,}111...$
$9x = 37 \rightarrow x = \frac{37}{9}$

15. a) $-\frac{1}{2}$

b) $-\frac{7}{2}$

c) $\frac{9}{2}$

d) $\frac{2}{2}$

e) $\frac{0}{2}$

f) $-\frac{43}{2}$

16. a) $-\frac{22}{5}$

b) $\frac{11}{2}$

c) -2

d) $-\frac{1}{25}$

e) 0

f) $\frac{19}{8}$

17. a) R$ 1 740,00

b) devedor R$ 645,00

c) saldo positivo de R$ 270,00

18. a) 4,9

b) – 4,75

c) – 8,808

d) $-\frac{1}{20}$

e) $-\frac{39}{17}$

f) $-\frac{2}{3}$

19. a) $\frac{11}{6}$

b) $\frac{131}{60}$

c) 34,76

d) – 4,87

20. a) – 9,29

b) – 19,08

c) 0,006

d) – 3,27

e) – 56,4

f) 8 800

21. a) $-\frac{5}{6}$

b) $\frac{3}{10}$

c) $\frac{1}{6}$

d) $-\frac{3}{5}$

22. a) $\frac{1}{3} : \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{1} = \frac{2}{3}$

b) $\left(-\frac{1}{3}\right) : \left(-\frac{7}{3}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{7} = \frac{1}{7}$

23. a) $\frac{9}{5} = 1\frac{4}{5}$

b) 1

24. a) $\frac{9}{4}$

b) $\frac{64}{27}$

c) $\frac{1}{16}$

25. a) 5,29

b) 1,21

c) – 10,1871

d) 0,0001

e) 1

f) 22,2

26. a) $\frac{1}{1\,000}$

b) $\frac{1}{10\,000}$

c) $\frac{49}{9}$

d) $-\frac{8}{27}$

27. a) 27

b) 9

c) 3

d) 1

e) $\frac{1}{3}$

f) $\frac{1}{9}$

28. a) $\frac{33}{8}$

b) $\frac{125}{4\,913}$

c) $\frac{14}{19}$

d) $\left(\frac{40}{21}\right)^5$

29. a) $\frac{4}{7}$

b) $-\frac{1}{2}$

e) $\frac{12}{13}$

c) $\frac{9}{10}$

d) $-\frac{1}{2}$

f) $-\frac{3}{11}$

30. a) 1,2

b) 1,3

c) 5,8

d) 6,5

31. Fazendo tentativas:

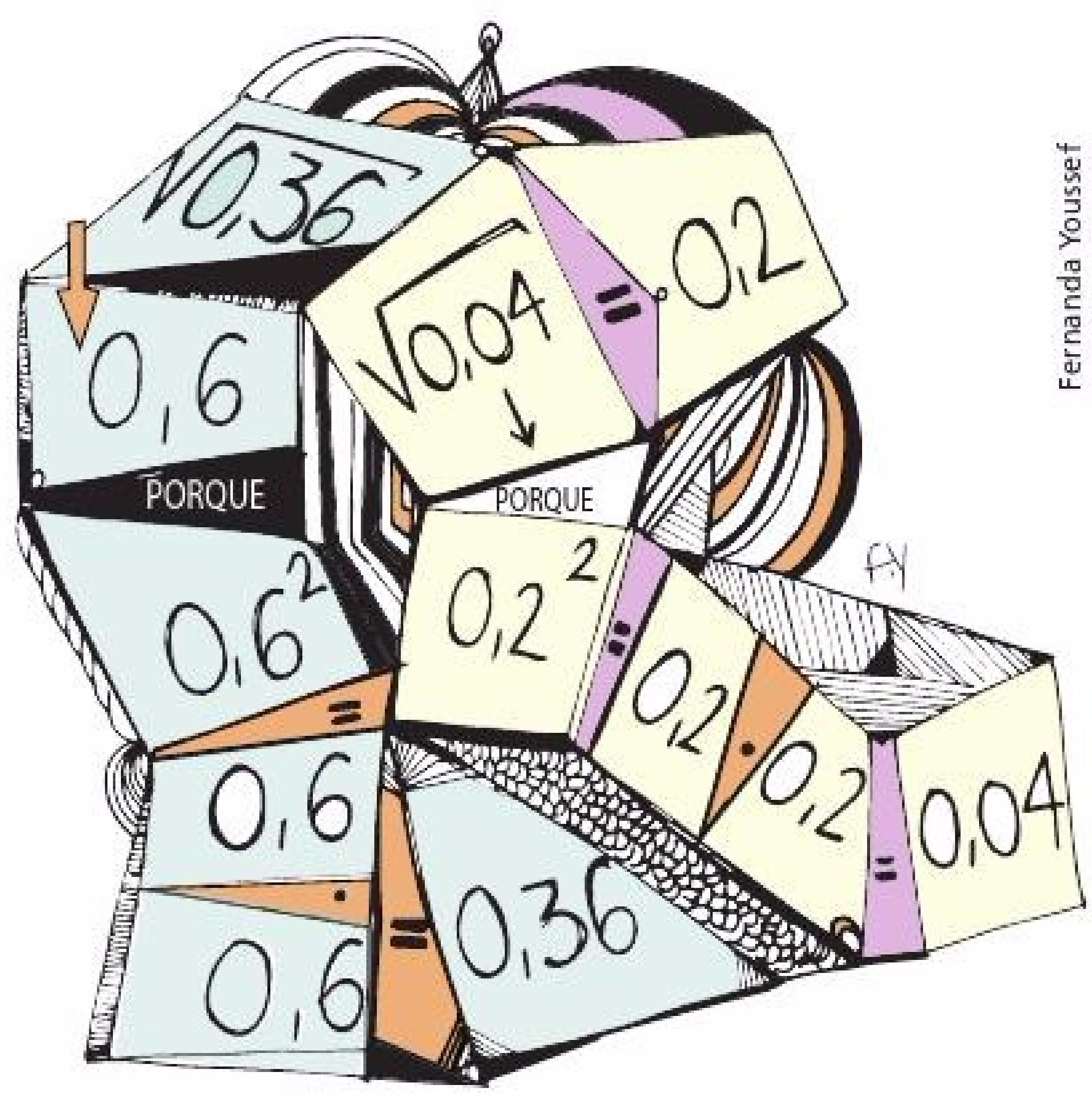
$4 \cdot 4 = 16$

$4{,}1 \cdot 4{,}1 = 16{,}81$

$4{,}11 \cdot 4{,}11 \cong 16{,}89$

$4{,}12 \cdot 4{,}12 \cong 16{,}97$ (boa aproximação)

$\sqrt{17} \cong 4{,}12$



Fernanda Youssef

Respostas da seção Para estudar

32. a) $\frac{11}{50} < 0{,}3 < \frac{39}{40} < 2{,}03$

b) $\frac{1}{3} < 2{,}999 < 3{,}0003 < \frac{162}{51}$

33. a) $-\frac{5}{100} = -\frac{1}{20}$

b) $\frac{7}{10}$

c) $-\frac{18}{10} = \frac{9}{5}$

d) $-\frac{6}{1}$

34. a) $-0{,}4$

b) $-2{,}5$

c) $0{,}0625$

d) $-0{,}75$

35. a) $-0{,}8$

b) $1{,}5$

c) $6{,}5$

d) $-1{,}25$

36. a) $-\frac{2{,}3}{10}$

b) $\frac{52}{10}$

c) $-\frac{74}{10}$

d) $\frac{123}{10}$

37. a) $8{,}7 > -9{,}2$

b) $\frac{5}{9} > -\frac{1}{9}$

c) $8{,}2 > -8{,}7$

d) $-\frac{2}{9} > -\frac{3}{7}$

38. a) $1{,}8$

b) $-\frac{38}{15}$

c) $-1{,}25$

d) $-\frac{17}{12}$

39. a) $\frac{1}{72}$

b) $\frac{43}{15}$

c) 0

d) $\frac{-43}{20}$

40. a) $-19{,}08$

b) $-0{,}07$

c) $-8{,}964$

d) $-\frac{10}{12} = -\frac{5}{6}$

41. a) $\frac{16}{525}$

b) $-\frac{13}{30}$

c) $\frac{2}{7}$

42. a) $-\frac{4}{25}$

b) $\frac{1}{8}$

c) $\frac{343}{8}$

d) $-\frac{8}{11}$

43. a) $\frac{140}{243}$

b) $-\frac{89}{120}$

c) 96

d) 1

capítulo 4

Razões e proporções

- Razões
- Proporções
- Proporcionalidade entre grandezas
- Regra de três simples
- Regra de três composta
- Porcentagem

Steve Mann/Dreamstime

As pessoas, os prédios e a locomotiva guardam proporções equivalentes a seus tamanhos reais.

Conversa Inicial

Em nosso cotidiano, estamos acostumados a usar expressões como "**o dobro de**", "**metade de**", "**o triplo de**" etc. Quando usamos expressões assim, estamos comparando grandezas, valores, medidas ou quantidades.

Sabemos que comparar grandezas é uma forma tradicional de medi-las. Afinal, medir alguma coisa é comparar o que medimos com algo cuja medida conhecemos, não é mesmo? Porém, como fazer para comparar duas grandezas entre si? Qual é o procedimento para estabelecermos relações entre duas grandezas? É possível fazer previsões entre o comportamento de grandezas comparando-as entre si?

A construção de maquetes, o desenho de mapas e os modelos, tão importantes no desenvolvimento de projetos, só é possível graças ao conceito de **escala**. A maquete do prédio e a do estádio do Maracanã, o mapa do Brasil e o aeromodelo estão em escala.

Se em um aeromodelo, por exemplo, a escala é de 1 : 30 (lê-se um para trinta), isso quer dizer que cada 1 cm no aeromodelo representa 30 cm na situação real, ou seja, as medidas do avião real serão 30 vezes a do aeromodelo. Estudaremos nesse capítulo esse e outros conceitos de grande aplicação em nosso cotidiano.


Celso Ávila/XpressBrasil/Folhapress

Maquete do estádio do Maracanã, Rio de Janeiro, RJ.


Július Fabián/SXC

Aeromodelo de um avião monomotor.

Cinthia Yamasaki

Mapa político do Brasil.


Easaab/PhotoXpress

Maquete de um prédio de apartamentos.

Razões

Suponha que você esteja diante de um edifício de 48 m de altura e, em frente a esse edifício exista uma árvore de 3 m de altura. Se desejarmos comparar a altura do edifício com a altura da árvore, fazemos uma divisão: $\mathbf{48m : 3m = \frac{48m}{3m} = 16}$.

Observe que obtivemos um número sem unidade de medida. Esse número traduz "quantas vezes" o edifício é mais alto que a árvore: 16 vezes.

Poderíamos, também, fazer a divisão inversa: $\mathbf{3m : 48\,m = \frac{3m}{48m} = \frac{1}{16}}$. Nesse caso, estamos fazendo a mesma comparação e podemos dizer que a altura da árvore é igual a do edifício dividida por 16.

Quando comparamos duas grandezas através de uma divisão, estamos determinando a **razão** entre elas. O termo **razão** significa divisão e vem do latim *ratio* (rateio). No caso da árvore e do edifício, 16 e $\frac{1}{16}$ são chamadas razões inversas.

Em linguagem matemática, podemos dizer:

Professor: leia os textos e escreva no quadro os principais pontos sobre o tema. Explore os exemplos em sala de aula. Destaque a diferença entre razão e razão inversa. Essa ideia é muito importante para o entendimento de situações problema muito aplicadas no cotidiano.

> Para dois racionais **a e b,** com **b ≠ 0,** a razão de **a** para **b** é o quociente da divisão $\mathbf{\frac{a}{b}}$.

Sendo assim, podemos indicar uma razão de três maneiras diferentes:

- Pela fração $\mathbf{\frac{a}{b}}$
- Pela indicação da divisão **a : b**
- Pelo quociente da divisão

Exemplos:

- a razão de 3 para 48 pode ser indicada por 3 : 48 ou $\frac{3}{48} = \frac{1}{16}$ ou por 0,0625
- a razão de 25 para 2 pode ser indicada por 25 : 2 ou $\frac{25}{2}$ ou por 12,5

Razões inversas

Quando escrevemos uma razão, a **ordem** em que ela é calculada determina seu valor. Por exemplo, se desejarmos calcular a razão entre as populações de uma cidade A, com 4 500 000 habitantes e de uma cidade B com 3 000 000 fazemos:

$$\frac{pop.A}{pop.B} = \frac{45\cancel{00\,000}}{30\cancel{00\,000}} = \frac{\cancel{45}^{15}}{\cancel{30}_{10}} = \frac{\cancel{15}^{3}}{\cancel{10}_{2}} = \frac{3}{2}$$

A razão inversa será:

$$\frac{pop.B}{pop.A} = \frac{3\,0\cancel{00\,000}}{4\,5\cancel{00\,000}} = \frac{\cancel{30}^{10}}{\cancel{45}_{15}} = \frac{\cancel{10}^{2}}{\cancel{15}_{3}} = \frac{2}{3}$$

O produto de uma razão pela razão inversa será sempre 1, pois ao calcularmos uma razão inversa, estamos invertendo numerador e denominador da razão direta. Veja o exemplo:

$$\mathbf{\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = 1}$$

Acompanhe a seguir algumas situações onde aplicamos o cálculo de razões.

- Um trabalhador executa um serviço muito pesado. Por essa razão, seu contrato de trabalho estabelece que a razão entre as horas de trabalho e de descanso é de $\frac{4}{5}$. Isso significa que a cada 4 horas trabalhadas, ele tem direito a 5 horas de descanso. Se num determinado dia ele trabalhou 8 horas, a quantas horas de descanso terá direito?

  Vamos chamar de **x** a quantidade de horas de descanso a que ele tem direito. Tendo trabalhado o dobro, ou seja, 8 horas, ele deverá descansar o dobro, ou seja, 10 horas. Assim, a razão $\frac{4}{5}$ será mantida, pois:

$$\mathbf{\frac{4}{5} = \frac{8}{10}}$$

  O trabalhador acumulou o direito de descansar 10 horas.

- Um pacote de comida para cães contém 3,5 kg de ração e custa R$ 32,00. Na mesma loja, um pacote de 10 kg da mesma marca de ração custa R$ 81,90. Qual é mais vantajoso para o comprador?
  Vamos calcular, primeiramente a razão entre as quantidades de ração no pacote maior e no pacote menor:

Aplicação

$$\mathbf{\frac{10{,}0}{3{,}5} \cong 2{,}85}$$ ($\cong$ significa aproximadamente)

Agora, vamos ver a razão entre os preços:

$$\mathbf{\frac{81{,}90}{32{,}00} \cong 2{,}55}$$

Veja que o pacote maior custa 2,55 vezes o preço do outro, porém, contém 2,85 o peso de ração do pacote menor. Assim, se o consumidor tiver disponibilidade para pagar o preço pedido pela loja, é relativamente mais vantajoso comprar o pacote de 10 kg.

Atividades

1. Escreva em seu caderno, na forma de uma fração irredutível, a razão entre:

a) 28 e 35 $\frac{4}{5}$

b) 2,5 e 7,5 $\frac{1}{3}$

2. A razão entre a quantidade de livros que um brasileiro lê por ano e a que um alemão lê é de $\frac{2}{13}$. Se um alemão lê, em média, 8 livros por ano, quantos livros lê um brasileiro? x = 1,2 livros

3. Para cada R$5,00 de seu salário, um trabalhador gasta R$ 0,75 com alimentação. Se o gasto com alimentação num determinado mês foi R$ 128,00, qual é o salário do trabalhador? salário R$ 853,33

4. Qual é a população de uma cidade, sabendo-se que a razão entre esta população e a do Brasil é $\frac{2}{191}$ e que o último censo, em 2010, indicou que temos 191 milhões de habitantes em nosso país? 2 milhões (população)

5. Dê a razão inversa de:

a) $\frac{5}{7}$ $1\frac{2}{5}$ b) $\frac{13}{5}$ $\frac{5}{13}$

6. Duas marcas A e B de sabão em pó têm embalagens com 550 g e 600 g respectivamente. O preço do sabão A é R$ 8,90 e do B, R$ 9,10. Aplicação

a) Qual é a razão entre os preços de A e B? $\frac{89}{91}$

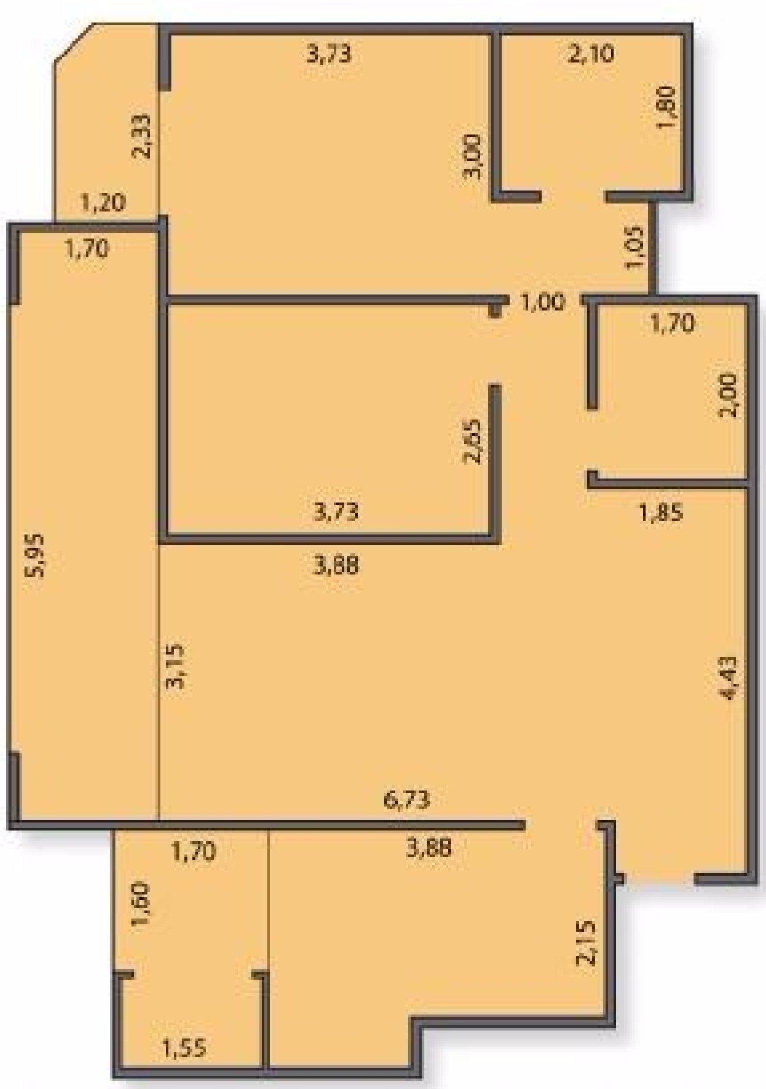
b) Qual é a razão entre as quantidades de A e B em cada embalagem. $\frac{11}{12}$

Professor: você pode propor como desafio a seus alunos, que calculem a distância real entre algumas das capitais brasileiras, utilizando um Atlas Geográfico.

Escalas

Uma das mais importantes aplicações do conceito de **razão** é a possibilidade de criarmos mapas, plantas de arquitetura e objetos em **escala**.

Escala de um desenho ou objeto é a razão entre o comprimento de qualquer dimensão do desenho ou objeto e o comprimento da dimensão real correspondente, sempre medidos na mesma unidade.



Se numa planta de apartamento tivermos, por exemplo, a escala de 1 : 400 (devemos ler: 1 para 400), isso significa que a medida em centímetros que obtivermos em qualquer dimensão do desenho, deverá ser multiplicada por 400 para chegarmos à medida da dimensão real.

Se medirmos uma parede na planta com uma régua e encontrarmos 1,5 cm, podemos calcular a dimensão real **x** da parede, a partir da escala 1:400.

Como a cada 1 cm corresponde 400 na dimensão real, basta multiplicar 1,5 cm por 400:

$$x = 1{,}5 \cdot 400 \rightarrow x = 600\ cm \rightarrow x = 6\ m$$

Se um aeromodelo de bimotor estiver na escala 1 : 60 e a sua envergadura (distância que vai da ponta de uma asa à ponta da outra) for de 15 cm, podemos calcular a envergadura do avião real multiplicando 15 cm por 60:

$$\frac{15\ cm}{x} = \frac{1}{60} \rightarrow x = 900\ cm \rightarrow x = 9\ m$$

Atividades

7. Um protótipo foi desenhado na escala 1 : 100. Qual será o comprimento desse protótipo se o modelo em tamanho real tem um comprimento igual a 4,00 m?
Aplicação mede 4 cm

8. Qual é escala da planta de um terreno no qual um comprimento de 48 metros foi representado no papel por um segmento de 2,4 dm? escala 1 : 200

9. Uma piscina de um condomínio tem o comprimento de 10 metros e a largura de 7 metros. Que escala foi utilizada se ela está desenhada na planta com 8 cm de comprimento? escala 1 : 125


Phartisan/Dreamstime

10. Qual deve ser a escala de uma planta de uma parede de 17,5 m, que está representada por um segmento de 0,35 dm?
escala 1 : 500

11. A distância entre duas cidades é de 150 km e está representada em um mapa por 10 cm. Determine a escala desse mapa.
escala 1 : 1 500 000

12. Numa planta elaborada na escala de 1 : 25 a sala de jantar está com as seguintes dimensões: 12,6 cm e 17,4 cm. Calcule, em metros quadrados, a área real da sala.
área 13,7025 m²

13. Em um mapa de escala 1 : 4 500 000, a distância entre duas cidades é de 4 cm. Qual será a escala de outro mapa, no qual estas mesmas cidades distem 2 cm entre si? escala 1 : 9 00 000

14. Num desenho cuja escala é 1 : 500, tem-se um comprimento de 9 cm, que na realidade mede 45 metros. Calcule, em centímetros, o mesmo comprimento do desenho numa escala 1 : 200. mede 22,5 cm Interpretar texto

15. Numa planta na escala 1 : 1 000, que dimensões em metros devem ser atribuídas a um compartimento que, na planta, mede 0,5 dm por 60 mm? 50 m e 60 m

16. Num mapa, uma rua mede 7,2 cm. Calcule o comprimento natural da rua, sabendo-se que o mapa foi desenhado na escala de 1 : 250. 1 800 m

17. Sabe-se que um terreno tem largura de 300 m. Para representá-la numa planta, obteve-se 6 cm. Que escala foi utilizada nesta planta? escala 1 : 5 000

Proporções

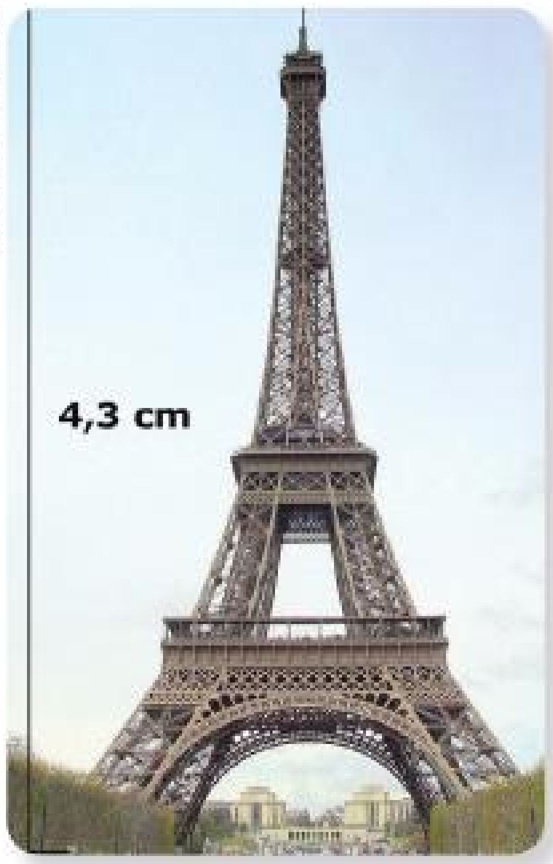
A torre Eiffel, edificada em Paris no ano de 1889, é um dos monumentos mais conhecidos do mundo. Contando a antena em seu topo, ela tem 324,0 m de altura e 124,5 m em sua base.

A razão entre a altura e a base da torre Eiffel é $\frac{324,0}{124,5} = 2,6$.

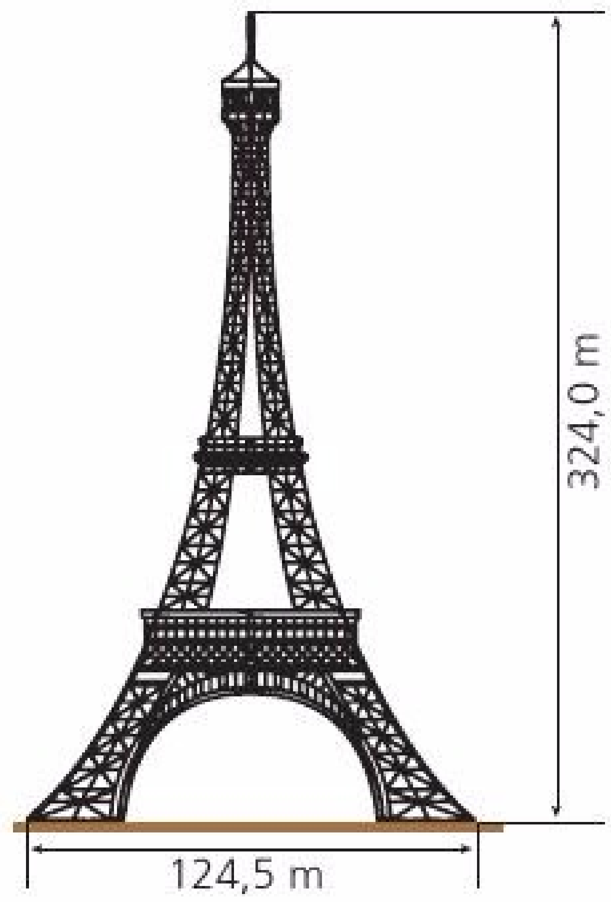
Se tirarmos uma fotografia frontal da torre Eiffel e nessa foto a altura da torre medir 4,3 cm, podemos verificar, com o uso de régua, que a base dessa torre será de 1,65 cm. Isso porque, se a foto não for distorcida, a razão 2,6 entre a altura e a base da torre Eiffel deverá ser mantida na foto.

Professor: peça aos alunos que levem para a sala de aula uma foto de pessoa com altura real previamente conhecida. Eles deverão calcular a razão entre a altura real dessa pessoa e a da foto e, em seguida devem estimar dimensões reais de outros objetos que possam ser visíveis nas fotos. Converse com o(s) professor(es) de Artes e de História sobre a possibilidade de uma atividade interdisciplinar.

Peter Russell/SXC



Torre Eiffel, Paris, França.



$$\frac{324,0}{124,5} = \frac{4,3}{1,65} = 2,6$$

Quando temos uma igualdade de razões, temos uma proporção.

> **Proporção** é uma igualdade entre duas razões. A proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ deve ser lida da seguinte maneira: **"a está para b assim como c está para d"**.

Veja alguns exemplos de proporção:

- $\frac{2}{3} = \frac{200}{300} \rightarrow$ 2 está para 3 assim como 200 está para 300
- $\frac{18}{54} = \frac{6}{18} \rightarrow$ 18 está para 54 assim como 6 está para 18

Observe que no último exemplo, 54 é o triplo de 18, e 18 é o triplo de 6. Essa proporção poderia ser lida assim: *18 está para seu triplo assim como 6 está para 18 que é seu triplo.*

Em uma proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, **a** e **d** são chamados de **extremos** e **b** e **c** são chamados de **meios**. Em qualquer proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios.

Essa propriedade é a **propriedade fundamental das proporções**.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

Como essa propriedade deve existir em toda proporção, podemos utilizá-la para verificar se certos números são ou não proporcionais. Exemplos:

- 6 e 10 são proporcionais a 15 e 25, isto é, $\frac{6}{10} = \frac{15}{25} \rightarrow \underbrace{6 \cdot 25}_{150} = \underbrace{10 \cdot 15}_{150}$.
- 4 e 9 são proporcionais a 12 e 27, isto é, $\frac{4}{9} = \frac{12}{27} \rightarrow \underbrace{4 \cdot 27}_{108} = \underbrace{9 \cdot 12}_{108}$.

A propriedade fundamental das proporções é extremamente útil nas mais diversas situações do cotidiano. Veja a seguir alguns exemplos em que sua aplicação nos permite resolver alguns problemas práticos:

Aplicação

- Perguntando a um ajudante de pedreiro, em uma obra, qual é a "receita" para se fazer uma boa massa de cimento, ele respondeu:

  "Eu misturo 1 parte de cimento para 6 de areia média e água suficiente para formar a massa".

Thana Thaweeskulchai/ Dreamstime

Pedreiro preparando massa.

  Assim, se ele colocar 24 medidas de areia, deverá adicionar 4 de cimento, pois:

$$\frac{4}{24} = \frac{1}{6}$$

- Numa refinaria, de acordo com a legislação vigente, é permitido misturar álcool anidro (etanol) à gasolina em quantidades proporcionais a 1 e 4. Dispondo de uma produção de 158 000 litros de álcool, quantos litros de gasolina deverão ser misturados para se atender à legislação?

  Vamos indicar por **x** a quantidade necessária de litros de gasolina. Assim, utilizando a propriedade fundamental das proporções, temos:

$$\frac{158\,000}{x} = \frac{1}{4} \rightarrow x = 632\,000 \text{ litros}$$

Mirek Hejnicki/ PhotoXpress

Refinaria Alberto Pasqualim, Canoas, RS.

Atividades

18. Identifique como verdadeira ou falsa cada uma das seguintes proporções

a) $\frac{6}{8} = \frac{9}{12}$ V

b) $\frac{8}{20} = \frac{14}{35}$ V

c) $\frac{5}{6} = \frac{8}{10}$ F

d) $\frac{3}{7} = \frac{4}{8}$ F

19. Que número deve ser colocado no lugar de $\square$ para verificar as proporções?

a) $\frac{15}{5} = \frac{\square}{10}$ 30

b) $\frac{5}{11} = \frac{15}{\square}$ 33

c) $\frac{0{,}02}{0{,}03} = \frac{\square}{3}$ 2

d) $\frac{1}{5} = \frac{\square}{8}$ $\frac{8}{5}$

Aplicação

20. Para fazer um determinado refresco, misturamos o suco concentrado com água, na proporção de 2 para 6. Se utilizarmos meio copo de suco concentrado, quantos copos de água devemos adicionar?
1,5 copos de água

21. Responda e justifique cada pergunta:

a) 1 e 9 são proporcionais a 10 e 90?
sim

b) 7,5 e 4 são proporcionais a 30 e 16?
sim

c) 17,5 está para 6 assim como 175 está para 600?
não

Argumentar

Proporcionalidade entre grandezas

Você já aprendeu que grandeza é tudo aquilo que pode ser medido ou quantificado, como, por exemplo, área e volume.

Considerando o conceito de proporcionalidade, duas grandezas distintas podem ser classificadas em diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais, a partir da relação existente entre elas.

Grandezas diretamente proporcionais

Duas grandezas são chamadas de **diretamente proporcionais** quando a variação de uma provoca a variação da outra na mesma razão, ou seja, se uma dobra a outra dobra, se uma triplica a outra triplica, se uma é dividida em duas partes iguais a outra também é dividida da mesma forma.

Observe o exemplo:

Se três cadernos custam R$ 8,00, o preço de seis cadernos custará R$ 16,00. Ao dobrarmos o número de cadernos, o preço também dobrará. Se comprarmos o triplo de cadernos, pagaremos o triplo do preço.

Professor: Leia o texto, escreva no quadro os principais pontos do textos e destaque que quando a variação de uma grandeza provoca uma variação em outra grandeza, dizemos que essas grandezas se relacionam. Como por exemplo, distância percorrida por um automóvel e a quantidade de combustível gasto ou a velocidade média e o tempo gasto para se fazer um determinado percurso. A variação em uma grandeza causa a variação na outra. De acordo com a relação entre essas duas grandezas, elas podem ser classificadas em grandezas diretamente proporcionais ou grandezas inversamente proporcionais.

Enfim, quanto mais cadernos comprarmos, maior será o preço pago.

Cadernos	R$
3	8,00
6	16,00
12	32,00
24	64,00

Observe também que as grandezas mantêm entre si uma razão constante:

$\frac{8}{3} = \frac{16}{6} = \frac{32}{12} = \frac{64}{24}$ porque a razão será sempre 2,66.

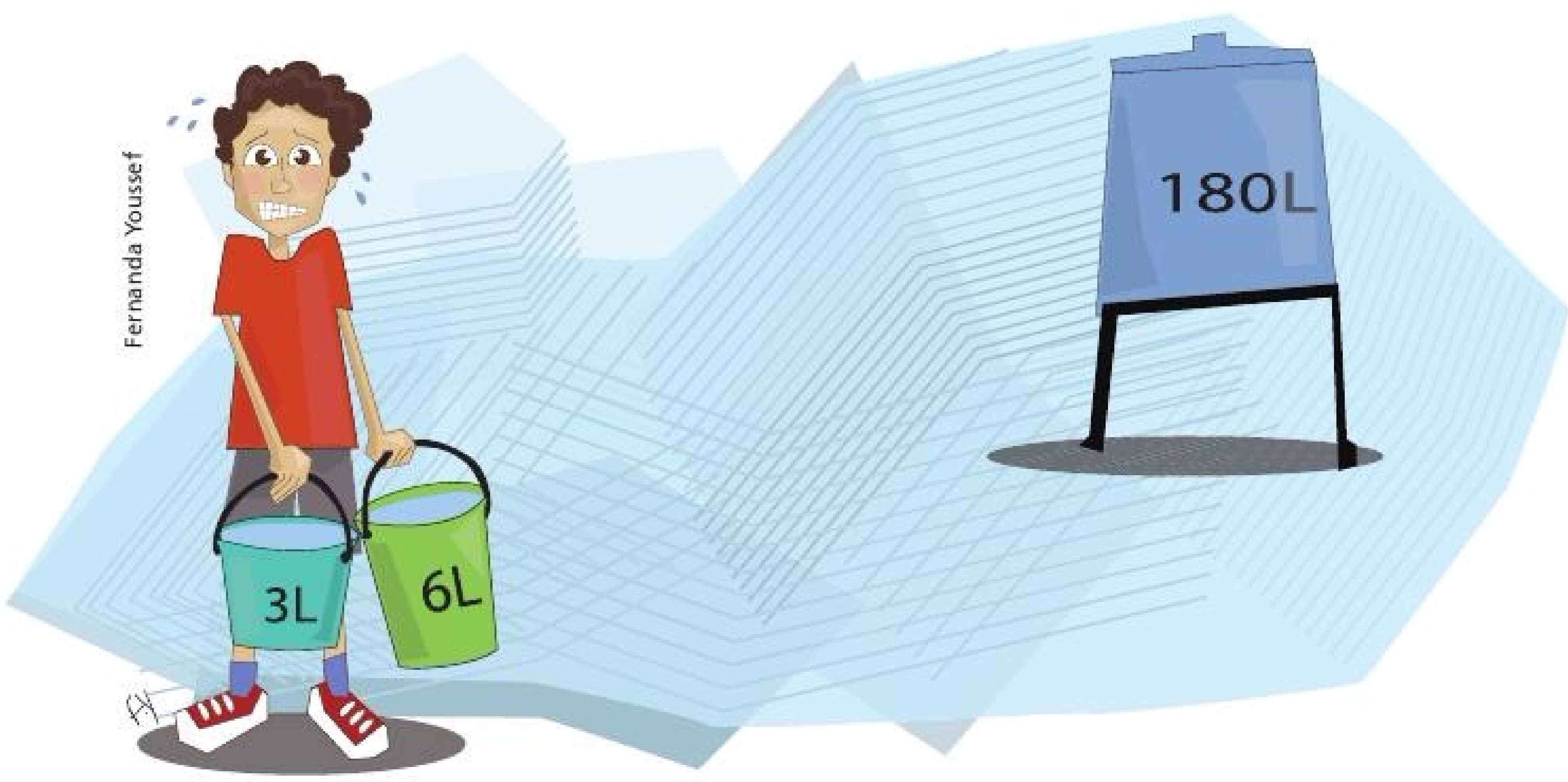
Grandezas inversamente proporcionais

Duas grandezas são chamadas de **inversamente proporcionais** quando a variação de uma provoca a variação da outra na razão inversa. Assim, se dobramos uma das grandezas a outra fica dividida por 2, se triplicamos, a outra fica divida por três e assim sucessivamente. Velocidade e tempo, por exemplo, são grandezas inversamente proporcionais, pois quanto maior a velocidade de um objeto móvel, menor será o tempo gasto por ele num certo trajeto. Veja um outro exemplo:

Para encher um reservatório de água de 180 litros, utilizando baldes de 3 litros, você utilizará 60 baldes. Caso utilize baldes de 6 litros, precisará de 30 baldes para encher o mesmo reservatório.

Observe na tabela que, se uma variável duplica, a outra cai pela metade.

litros por balde	baldes utilizados
3	60
6	30



Atividades

22. Na tabela estão a distância percorrida numa viagem entre São Paulo e Rio de Janeiro e o consumo de gasolina do automóvel. Interpretar tabela

distância percorrida (km)	gasolina (litros)
220	20
330	30
440	40

a) Quando a distância passa de 220 para 440 km, ela varia em que razão? Nesse caso, o consumo de gasolina varia em que razão? Essas duas razões são iguais?
$\frac{1}{2}$; o consumo tem a razão $\frac{1}{2}$ sim; são iguais

b) Quando a distância passa de 220 km para 330 km, ela varia em que razão? Nesse caso, o consumo varia em que razão? Essas duas razões são iguais?
$\frac{2}{3}$; o consumo tem a razão $\frac{2}{3}$ sim; são iguais

c) Neste caso, o consumo de combustível é direta ou inversamente proporcional à distância percorrida? diretamente proporcional

23. Esta tabela relaciona o número de pintores com o tempo necessário para eles pintarem um edifício:

número de pintores	tempo (dias)
8	9
16	4,5
24	3

O número de pintores é direta ou inversamente proporcional ao tempo gasto no serviço? Justifique.
Inversamente proporcional, pois aumentando-se o número de pintores, diminuímos o tempo gasto no serviço.

Argumentar

24. O tempo necessário para encher um tanque de água é direta ou inversamente proporcional ao volume de água que sai da torneira? Justifique. inversamente proporcional

25. Duas grandezas A e B relacionam-se segundo os dados da tabela: Estabelecer relação

grandeza A	grandeza B
12	300
36	100
48	75

As grandezas A e B são direta ou inversamente proporcionais? Justifique sua resposta. inversamente proporcional porque quando A aumenta B diminui.

26. Num sorteio beneficente o preço de um número é R$10,00. Argumentar

a) Kátia comprou o dobro de números que Vivian. Ela terá o dobro de chance de ser sorteada? Justifique. sim

b) Nesse sorteio, quem gastou R$ 60,00 tem mais chance do que quem gastou R$ 40,00? Justifique. sim

27. Ao repartir um bolo de aniversário numa festa, toma-se o cuidado de cortar fatias iguais para os convidados.

a) Se há 15 convidados, que fração do bolo cada um receberá? $\frac{1}{15}$

b) Havendo 30 pessoas, que fração do bolo cada uma receberá? $\frac{1}{30}$

c) A quantidade de bolo que cada uma recebe e o número de pessoas são grandezas direta ou inversamente proporcionais? inversamente proporcional.

Conexão

Professor: essa leitura é muito interessante e desperta curiosidade nos alunos. Para enriquecê-la ainda mais, você pode pedir aos seus alunos que levem para a sala de aula um instrumento de corda, como por exemplo, um violão. Com ele será possível testar as variações de comprimento e freqüência numa das cordas do instrumento.

A escala musical

A música é uma das mais belas manifestações do espírito humano. Apesar das diferenças entre um *show* de *rock* e a apresentação de uma orquestra sinfônica, ambos têm a mesma base: **a escala musical.** Além da beleza das músicas que pode produzir, a sequência **dó, ré, mi fá, sol, lá, si,** guarda dentro de si interessantes relações matemáticas, associadas ao som característico de cada nota musical. Os pitagóricos (membros da escola de Pitágoras) foram os primeiros a estabelecer essas associações.

Sergey Kolodnikov/Dreamstime

O som do violão é produzido pela vibração de suas cordas.

Um som acústico é produzido por objetos em vibração como, por exemplo, as hastes de um diapasão, o diafragma de um alto-falante ou ainda uma corda esticada e depois dedilhada. Essa corda vibra e produz um som. A sensação que nossos ouvidos têm desse som depende do número de vibrações da corda por segundo.

O número de vibrações por segundo chama-se frequência. A escala musical nada mais é que um conjunto de frequências que identificam as diversas notas musicais.

Ulici Adrian/SXC

O diapasão é um instrumento metálico em forma de forquilha, que serve para afinar instrumentos e vozes através da vibração de um som musical.

Uma corda que vibre 256 vezes por segundo produz uma nota que se chama dó. Os pitagóricos descobriram que se dividirmos a corda ao meio, a nova corda passará a vibrar duas vezes mais depressa, mas a nota produzida também será um dó, porém com uma frequência de 512 vibrações por segundo. Se dividirmos novamente ao meio, teremos novamente um dó, agora vibrando 1 024 vezes por segundo. Se tivermos uma corda idêntica à original, porém com o dobro do comprimento, também teremos um dó que, nesse caso, vibrará 128 vezes por segundo.

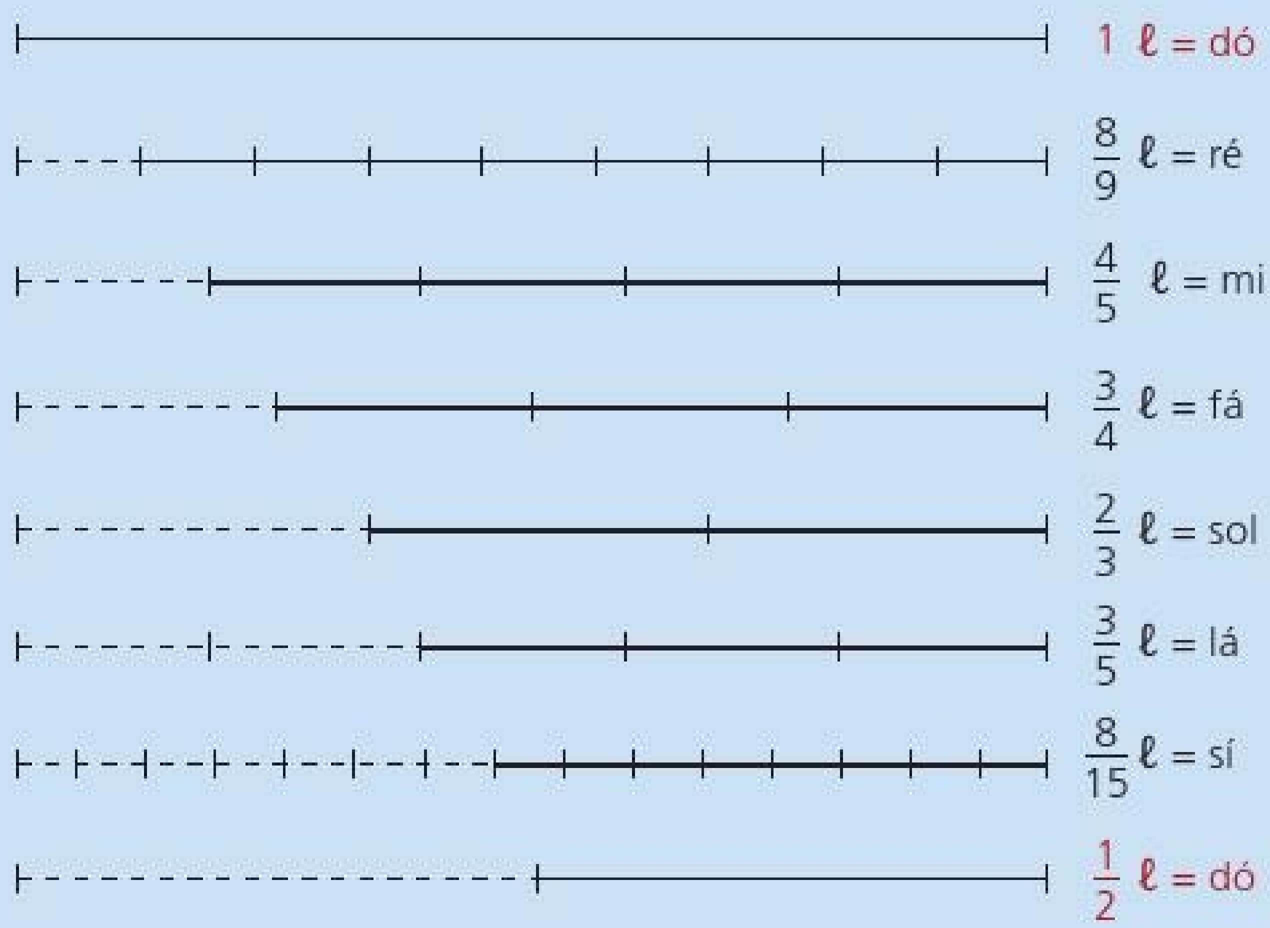
Orquestra Sinfônica Brasileira, Rio de Janeiro, RJ.

Franco Giovanella/SXC

Observe que a frequência de vibração de uma corda é **inversamente proporcional ao seu comprimento**. Em outras palavras: se o comprimento da corda cai pela metade, a frequência dobra e, se for duplicado, ela cai pela metade.

Entre duas notas **dó** consecutivas temos todas as outras notas musicais. Esse conjunto de notas entre um **dó** e outro é a escala musical. A partir de uma corda de comprimento ℓ, podemos obter todas as notas de uma escala musical. Supondo que essa corda de comprimento ℓ produza um **dó**, as demais notas são obtidas a partir das seguintes frações da corda original:

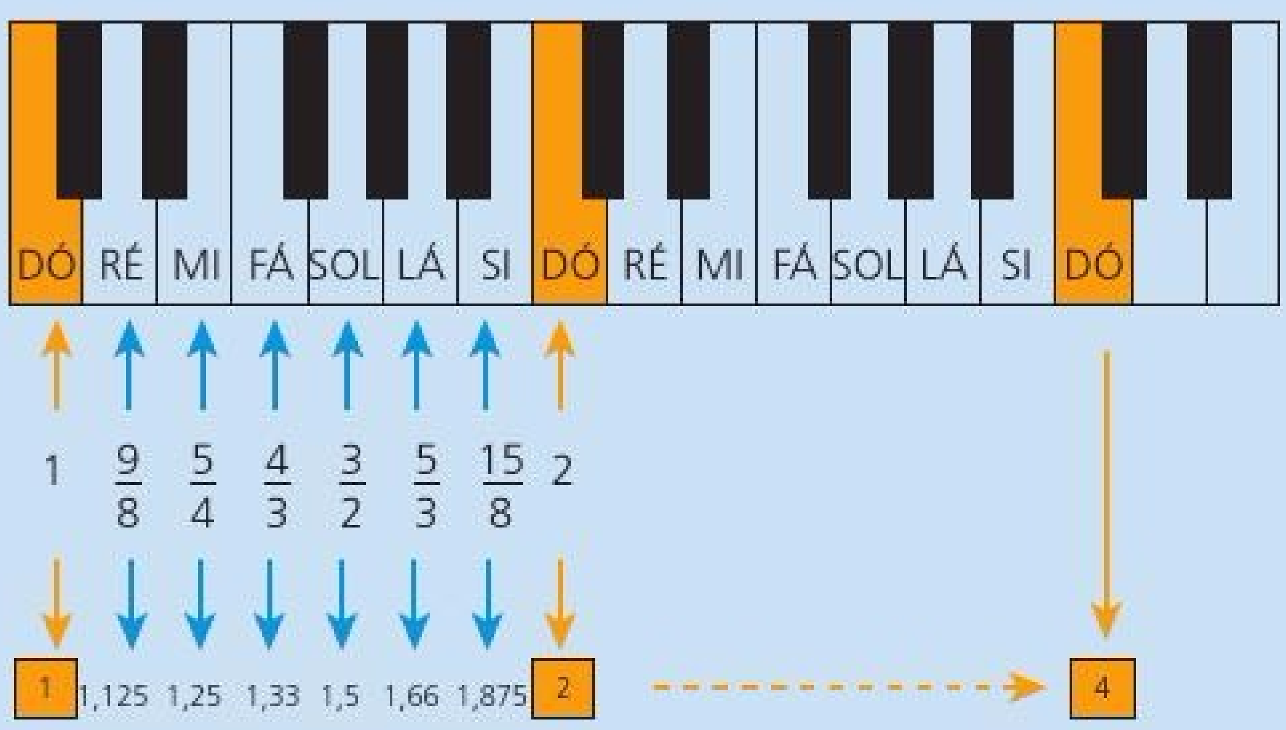
$$1,\ \frac{8}{9},\ \frac{4}{5},\frac{3}{4},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{5},\ \frac{8}{15},\ \frac{1}{2}$$



Como já sabemos a frequência é inversamente proporcional ao comprimento da corda. Considerando, então, a frequência do **dó** inicial com valor 1, as frequências das demais notas dessa escalas serão proporcionais a:

$$1,\ \frac{9}{8},\ \frac{5}{4},\frac{4}{3},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{3},\ \frac{15}{8},\ \frac{1}{2},\ 2$$

No teclado de um piano, essa proporcionalidade significa que, partindo-se de um **dó**, o **ré** seguinte tem frequência igual **1,125** maior que o do **dó**, o **mi** 1,25, o **fá** 1,33, o **sol** 1,5, **lá** 1,66 e o **si** 1,875. O próximo **dó** vibrará o dobro do primeiro, sendo, portanto mais agudo, e o seguinte mais agudo ainda, vibrando quatro vezes mais que o primeiro.



Regra de três simples

O que denominamos de **regra de três simples** é o processo de resolução de problemas envolvendo grandezas diretamente proporcionais ou grandezas inversamente proporcionais, através da aplicação da propriedade fundamental das proporções.

Vamos estudar como fazer a aplicação da propriedade nos dois casos, utilizando dois exemplos:

1. Suponha uma indústria montadora de automóveis na qual existam apenas dois turnos de funcionamento em sua linha de montagem.

Ricardo Stuckert/PR

Carro em linha de indústria automobilística, Betim, MG.

Se a fábrica ampliar o número de turnos para três, o número de unidades montadas por dia também irá aumentar. Nesse caso, estamos lidando com duas grandezas diretamente proporcionais, pois quando **uma aumenta** a **outra também aumenta**. Utilizaremos setas no **mesmo sentido** para indicar que as grandezas são **diretamente proporcionais**, ou seja: se uma aumenta a outra também aumenta.

Se com dois turnos a linha produz 128 automóveis por dia, com 3 turnos quantos produzirá? Dispondo a situação numa tabela, temos:

Turnos	Carros montados
2	128
3	x

$$\frac{2}{3} = \frac{128}{x} \rightarrow 2 \cdot x = 3 \cdot 128$$

$$2x = 384 \rightarrow x = 192$$

Passando a operar em três turnos, a fábrica montará 192 automóveis por dia.

2. Suponha agora outra situação vivida, numa obra de pavimentação que dispunha de duas máquinas com capacidade de realizar o asfaltamento em 120 dias.

Joe Zlomek/SXC

Operários trabalhando em pavimentação de rodovia.

Se aumentarmos o número de máquinas, evidentemente o serviço será realizado mais rapidamente. Portanto, o tempo gasto no asfaltamento é inversamente proporcional ao número de máquinas utilizadas. Colocando-se um máquina a mais, quanto tempo será gasto no asfaltamento?

Dispondo a situação numa tabela, temos:

número de máquinas	tempo (dias)
2	120
3	x

As setas em **sentido contrário** indicam que as grandezas são **inversamente proporcionais**, ou seja: se uma aumenta, a outra diminui.

Como o número de máquinas e o tempo de asfaltamento variam em razões inversas, fazemos:

$$\frac{2}{3} = \frac{x}{120} \rightarrow 3 \cdot x = 2 \cdot 120 \rightarrow 3x = 240 \rightarrow x = 80$$

Observe que o trabalho realizado por 2 máquinas em 120 dias, será realizado por 3 máquinas num prazo de 80 dias.

O processo que utilizamos nos dois exemplos anteriores deve ser utilizado na resolução de **problemas de regra de três simples** e pode ser resumido da seguinte forma:

- Montamos uma tabela contendo as grandezas descritas no problema e o valor a ser calculado;
- Identificamos se as grandezas são diretamente ou inversamente proporcionais;
- No caso de serem diretamente proporcionais, mantém-se a proporção indicada na tabela e calcula-se o que se pede;
- Caso as grandezas sejam inversamente proporcionais, monta-se a proporção com uma das razões invertidas e calcula-se o que se pede.

Atividades

28. Se um motorista percorre 140 km e outro, com a mesma velocidade, leva o dobro do tempo para percorrer outro percurso, qual será a distância percorrida pelo segundo? 280 km

Interpretar textos

29. Uma senhora leva 18 dias para fazer uma blusa em tricô, trabalhando um certo número de horas por dia. Sua vizinha, trabalhando o triplo de horas por dia, demorará quantos dias para tricotar a mesma blusa? 6 dias

Júlia Freeman Woolpert/SXC

Pessoa fazendo tricô.

30. Responda:

a) Vou percorrer uma distância dando passos de mesmo tamanho. O número de passos que darei é direta ou inversamente proporcional ao comprimento dos meus passos? inversamente proporcional

b) Alguns pedreiros vão construir um muro. O tempo da construção é direta ou inversamente proporcional ao número de pedreiros? inversamente proporcional

31. Para um carregamento de areia, foram necessárias 30 viagens de caminhões com capacidade de 5 m^3 cada um. Se o transporte fosse feito em caminhões de 6 m^3 de capacidade, quantas viagens seriam necessárias? 25 viagens

32. Um elevador admite a carga máxima de 7 adultos, com 80 kg cada um. Quantos jovens de 56 kg este elevador acomoda? 10 pessoas

33. Um relógio apresenta o seguinte defeito: a cada 48 horas atrasa 16 segundos. Quanto irá atrasar ao fim de uma semana? 56 segundos

34. Uma indústria montadora de motocicletas produz 3 600 motos de um determinado modelo, operando sua linha de montagem durante oito horas por dia. Quantas motos do mesmo modelo irá produzir se reduzir sua operação para seis horas por dia? 2 700 motos

35. Responda em seu caderno:

a) Tirei 6,0 em uma prova que valia 8 pontos. Qual seria minha nota se a prova valesse 10? 7,5

b) Uma prova, de nota máxima 10, tinha 15 questões de igual valor. Eu acertei só 9 questões. Que nota tirei? 6

36. Com a velocidade constante de 100 km/h um carro percorreu 500 km. Durante esse mesmo tempo, um outro carro, viajando a 120 km/h, que distância percorrerá? 600 km

37. Com 100 kg de trigo, fabricam-se 65 kg de farinha. Com quantos quilogramas de trigo são fabricados 260 kg de farinha? 400 kg de trigo

38. Cinco torneiras idênticas enchem um tanque em 6 horas. Em quanto tempo três dessas torneiras encheriam o mesmo tanque? 10 horas

39. Em uma linha de montagem, 4 robôs fazem o serviço de solda em 12 horas. Em quanto tempo 6 desses robôs, nas mesmas condições, fariam o mesmo serviço? 8 horas

Rainer Plendl/Dreamstime

Robôs em linha de montagem.

40. Uma impressora industrial pode imprimir 8 000 páginas por hora ou 4 000 páginas por hora, só que na velocidade mais baixa ela é mais econômica. Essa máquina fez certo serviço em 7 horas e meia, na velocidade mais alta. Em quanto tempo ela faria o mesmo serviço, trabalhando na velocidade mais baixa? 15 horas

Moreno Soppelsa/Dreamstime

Rotativa operando em indústria gráfica.

Regra de três composta

Nem sempre os problemas que temos que resolver envolvem apenas duas grandezas. Quando um problema de proporcionalidade envolve três ou mais grandezas, estamos lidando com uma situação em precisamos resolver uma **regra de três composta**.

Esse nome é dado pelo fato de que esses problemas devem ser resolvidos com a aplicação de mais de uma regra de três simples, compondo as proporcionalidades existentes entre as grandezas..

Entenda o processo de resolução de problemas com regras de três compostas a partir dos exemplos a seguir.

Observe atentamente a utilização das setas que indicam as proporcionalidades entre as grandezas.

1. Em 8 horas, 20 caminhões descarregam 160 m³ de areia. Quantos caminhões são necessários para descarregar 125 m³ em 5 horas?

Inicialmente, montamos a tabela contendo as grandezas de mesma espécie em cada coluna e as correspondências entre as grandezas nas linhas.

Hugo Maes/Dreamstime

Caminhão basculante descarregando areia.

Professor: destaque que na regra de três composta ocorrem três ou mais grandezas relacionadas entre si. Saliente que nesse caso, em apenas uma grandeza é dado um valor conhecido e para as demais grandezas são dados dois valores. Na resolução desse tipo de situação-problema, utiliza-se um método semelhante ao utilizado na resolução de regras de três simples.

Horas	Caminhões	Volume
8	20	160
5	x	125

Em seguida, identificamos as relações existentes entre as grandezas, em relação àquela onde está o valor de **x** que queremos calcular. Para isso, colocamos uma seta para baixo, ou para cima, na coluna onde está o **x**. Neste caso, escolhemos colocar seta para baixo:

Horas	Caminhões	Volume
8	20 ↓	160
5	x	125

Observe que:

a) **Aumentando** o número de horas de trabalho, podemos **diminuir** o número de caminhões. Portanto, as grandezas **horas** e **caminhões** são *inversamente proporcionais*. Por isso, colocamos uma seta invertida na primeira coluna.

Horas	Caminhões	Volume
8 ↑	20 ↓	160
5	x	125

b) **Aumentando** o volume de areia, devemos **aumentar** o número de caminhões. Portanto, as grandezas **volume** e **caminhões** são *diretamente proporcionais*. Para representar essa relação, colocamos na coluna **volume** uma seta no mesmo sentido daquela que colocamos na coluna **caminhões**.

Horas	Caminhões	Volume
8	20	160
5	x	125

Para calcular **x**, igualamos a razão que contém o termo em **x**, com o produto das outras razões, colocando todas as setas no mesmo sentido. Nesse caso, trocamos o sentido dos valores das horas:

Horas	Caminhões	Volume
5	20	160
8	x	125

$$\frac{20}{x} = \frac{5}{8} \cdot \frac{160}{125} \rightarrow \frac{20}{x} = \frac{800}{1\,000}$$

$$\frac{20}{x} = \frac{800}{1\,000} \rightarrow x = \frac{20 \cdot 1\,000}{800}$$

$$x = 25 \text{ caminhões}$$

2. Numa fábrica de fogões, 8 trabalhadores montam 20 fogões em 5 dias. Quantos fogões, 4 trabalhadores produzirão em 16 dias?

trabalhadores	fogões	dias
8	20	5
4	x	16

Aumentando o número de trabalhadores, a produção de fogões **aumenta**. Portanto, são grandezas *diretamente proporcionais*. **Aumentando** o número de dias, a produção de fogões **aumenta**. Temos novamente duas grandezas diretamente proporcionais. Observe na tabela que não será necessário inverter nenhuma razão. Logo:

$$\frac{20}{x} = \frac{8}{4} \cdot \frac{5}{16} \rightarrow \frac{20}{x} = \frac{40}{64}$$

$$x = \frac{20 \cdot 64}{40} \rightarrow x = \frac{1\,280}{40}$$

$$x = 32 \text{ fogões}$$

Atividades

41. Em 5 dias, funcionando 16 horas por dia, uma máquina produz 2 000 peças. Quantas peças ela produz em 8 dias, funcionando 12 horas por dia? 2 400 peças

42. Uma pessoa tomou 2 banhos de chuveiro por dia, de 10 minutos cada, gastando 400 litros de água. No mês seguinte, resolveu tomar apenas 1 banho de 15 minutos por dia, no mesmo chuveiro. Quantos litros de água gastou? 300 litros de água

43. Dois carregadores levam caixas de um armazém para outro. Um deles leva 3 caixas por vez e demora 2 minutos em cada viagem. Um outro, leva 7 caixas por vez e demora 5 minutos por viagem. Enquanto este último leva 140 caixas, quantas leva o primeiro? 200 caixas

44. Num parque de diversões, as pessoas formaram uma fila para embarcar na montanha-russa. Em cada carrinho iam 5 pessoas e saíam carrinhos de 40 em 40 segundos. A fila acabou em 12 minutos. Calcule em quanto tempo a fila acabaria se em cada carrinho fossem 6 pessoas e as partidas ocorressem de 20 em 20 segundos. 5 minutos

Porcentagem

O cálculo com porcentagens baseia-se na ideia de transformar os denominadores das frações em 100. Em outras palavras, as porcentagens são razões especiais, nas quais os denominadores são sempre iguais a 100.

Porcentagem é qualquer razão $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$, na qual o denominador **b** é igual a 100.

Para simbolizar uma razão com denominador 100, utilizamos o símbolo **%**, que se lê **por cento**. O termo *por cento* significa *em cada 100*. Exemplos:

- $43\% = \frac{43}{100}$ (quarenta e três por cento)
- $50\% = \frac{50}{100}$ (cinquenta por cento)
- $150\% = \frac{150}{100}$ (cento e cinquenta por cento)

Professor: Destaque que utilizar o conceito de porcentagem é comparar duas razões em uma proporção direta, em que uma das razões tem consequente igual a 100 e, entre os outros três termos, um é desconhecido. Na verdade, resolver um problema de porcentagem é partir de uma regra de três.

O uso de porcentagens para quantificar grandezas é bastante conveniente, uma vez que se trata de uma razão com denominador 100, o que simplifica significativamente os cálculos. A aplicação de porcentagens baseia-se também na propriedade fundamental das proporções, a mesma que aplicamos na resolução de problemas com regras de três. Observe alguns exemplos:

1. Qual o valor de 45% de 5 600?

Esse cálculo pode ser feito de três formas diferentes:

- Através de uma regra de três simples:
  Chamamos 5 600 de 100% e calculamos o equivalente a 45%:

porcentagem	valor
100	5 600
45	x

$$\frac{100}{45} = \frac{5\,600}{x} \rightarrow 100 \cdot x = 45 \cdot 5\,600 \rightarrow x = \frac{45 \cdot 5\,600}{100} \rightarrow x = 2\,520$$

- Podemos também multiplicar 45%, que é igual a $\frac{45}{100}$, por 5 600:

$$45\% \text{ de } 5\,600 = \frac{45}{100} \text{ de } 5\,600 = \frac{45}{100} \cdot 5\,600 = \frac{45 \cdot 56\cancel{00}}{1\cancel{00}} = 2\,520$$

- Como $45\% = \frac{45}{100} = 0{,}45$, podemos multiplicar a forma decimal por 5 600:

$$45\% \text{ de } 5\,600 = 0{,}45 \cdot 5\,600 = 2\,520.$$

Muitos cálculos de porcentagem podem ser feitos mentalmente por você. Observe as seguintes porcentagens:

- $10\% = \frac{10}{100} = \frac{1}{10} = 0{,}1$

  Assim, para calcular 10% de um valor, basta dividi-lo por 10. Veja os exemplos:

  a) 10% de 563 é 56,3

  b) 10% de 0,85 é 0,085

- $25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} = 0{,}25$

  Assim, para calcular 25% de um valor, basta dividi-lo por 4. Acompanhe:

  a) 25% de 16 é 4

  b) 25% de 3 600 é 900

  c) 25% de 30 é 7,5

- $50\% = \frac{50}{100} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

Para calcular 50% de um valor, basta dividi-lo por 2. Veja os exemplos:

a) 50% de 27 é 13,5

b) 50% de 7 000 é 3 500

c) 50% de 184,4 é 92,2

2. O número 434 corresponde a que porcentagem de 2 800?

Da mesma forma que no exemplo anterior, podemos fazer esse cálculo de três maneiras:

- Através de uma regra de três onde 2 800 representa 100%.

porcentagem	valor
x	434
100	2 800

$$\frac{x}{100} = \frac{434}{2\,800} \rightarrow x \cdot 2\,800 = 434 \cdot 100 \rightarrow x = \frac{43\,400}{2\,800} \rightarrow$$

$$\rightarrow x = 15{,}5\%$$

- Fazendo com que 434 seja igual x% de 2 800.

$$434 = x\% \text{ de } 2\,800 \rightarrow 434 = \frac{x}{100} \cdot 2\,800 \rightarrow x = 15{,}5\%$$

- Calculando diretamente a razão $\frac{434}{2\,800}$ e multiplicando o resultado por 100:

$$\frac{434}{2\,800} = 0{,}155 \rightarrow x = 0{,}155 \cdot 100 \rightarrow x = 15{,}5\%$$

3. Qual o valor de 340% de 1 600?

Apesar de termos uma porcentagem maior que 100%, montamos a regra de três da mesma maneira que as anteriores:

porcentagem	valor
340	x
100	1 600

$$\frac{340}{100} = \frac{x}{1\,600} \rightarrow x \cdot 100 = 340 \cdot 1\,600$$

$$x = \frac{340 \cdot 1\,600}{100} \rightarrow x = 5\,440$$

Atividades

45. Em seu caderno, substitua o símbolo ▼ em cada situação a seguir:

a) um aumento de R$ 3,00 sobre um preço de R$ 30,00 é proporcional a um aumento de ▼ sobre o preço é de R$ 120,00. R$ 12,00

b) um aumento de R$ 10,00 sobre o preço de R$ 50,00 é proporcional a um aumento de ▼ sobre o preço é de R$ 100,00. R$ 20,00

c) um aumento de R$ 60,00 sobre o preço de R$ 200,00 é proporcional a um aumento de ▼ sobre o preço de R$ 100,00. R$ 30,00

46. Escreva na forma decimal:

a) 3% 0,03

b) 19,5% 0,195

c) 83% 0,83

d) 100% 1,00

47. Calcule mentalmente:

Cálculo mental

a) 10% de 1 840 184

b) 25% de 4 000 1 000

c) 5% de 10 000 500

d) 75% de 40 000 30 000

48. Numa pequena empresa, dois sócios têm 40% da renda líquida cada um e o terceiro 20%. Quanto receberá cada sócio se a empresa teve renda líquida de R$ 1 240,00? Dois sócios receberiam R$ 496,00 cada um deles e o terceiro receberia R$ 248,00

49. A maioria dos bares e restaurantes adiciona na conta uma certa quantia a título de serviço. Quando não o fazem, os garçons calculam rapidamente esse serviço, dividindo o valor da conta por 10. Explique: por que os garçons fazem esse cálculo? Porque eles calculam 10% do serviço.

50. Usando a calculadora, observe que um aumento de R$ 11,00 num preço de R$ 50,00 é um aumento de 22%. Agora, use a calculadora e descubra a quantos por cento corresponde:

a) um aumento de R$ 6,00 sobre o preço de R$ 30,00 20%

b) um aumento de R$ 8,00 sobre o preço de R$ 16,00 50%

c) um aumento de R$ 16,00 sobre o preço de R$ 32,00 50%

51. Responda:

a) 31% de um certo número é 2 015. Qual é o número? 6 500

b) Calculei 1% de um número e obtive 99. Qual é o número? 9 900

c) 18% de que número vai resultar em 270? 1 500

52. Em cada caso, são dados dois números. O primeiro é uma certa porcentagem do segundo. Calcule essa porcentagem.

a) 4 200 e 7 000 60%

b) 340 e 1 000 34%

c) 78 e 2 600 3%

d) 3 240 e 4 500 72%

53. Escreva na forma de número decimal:

a) 8,6% 0,086

b) 49,3% 0,493

c) 46,72% 0,4672

d) 121% 1,21

e) 450% 4,50

f) 312,5% 3,125

54. Escreva como porcentagem:

a) 0,085 8,5 %

b) 0,286 28,6 %

c) 0,335 33,5 %

d) 0,900 90 %

e) 1,15 115 %

f) 3,20 320 %

55. Calcule:

a) 9,4% de 15000 1410

b) 75,8% de 15000 11370

c) 312% de 15000 46800

d) 1% de 30000 300

e) 18,5% de 100000 18500

56. Num jogo de vôlei, Jacqueline fez 84 bloqueios e acertou 62. Por outro lado, Natália subiu em 62 bloqueios e acertou 29.

a) Calcule a porcentagem de acertos de cada uma. Jacqueline 73,8% Natália 46,8%

b) Quem teve a maior porcentagem de acertos? Jacqueline

57. Numa sala em que 75% dos alunos são meninos, estudam apenas 7 meninas. Quantos alunos tem a turma? 28 alunos

58. Recebi R$ 36,00 de comissão na venda do *skate* do meu amigo. Essa comissão foi 15% do preço do *skate*. Calcule por quanto ele vendeu a *skate*. R$ 240,00

59. Um funcionário recebeu um reajuste salarial de 7%. Passado mais um ano, recebeu novamente 7% de reajuste salarial sobre seu último salário. Calcule a porcentagem de aumento que o funcionário teve no segundo ano, em relação ao salário de dois anos atrás. 14,49 %

Na prática

Nesta oficina, você irá desenvolver mosaicos numa folha de papel quadriculado, usando sua criatividade e fazendo cálculos de porcentagens.

Material necessário:

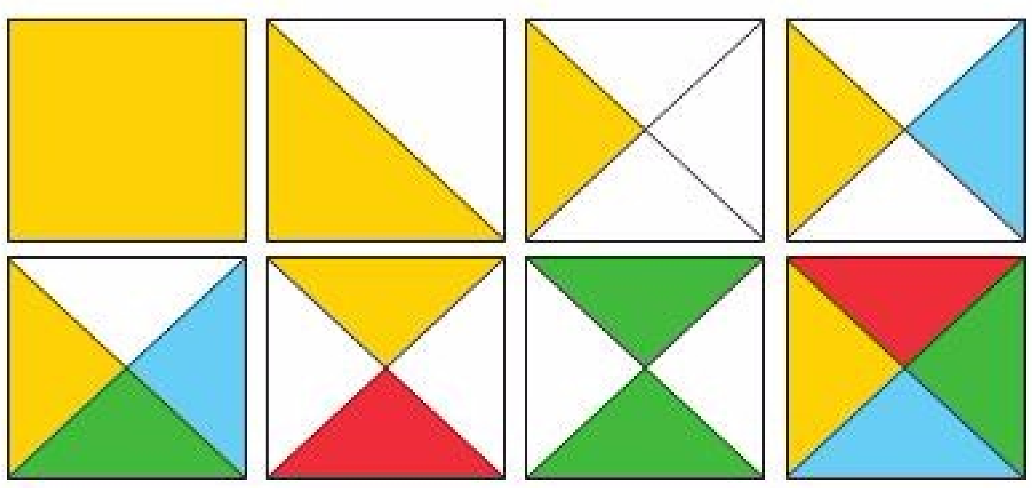
- Uma malha de papel quadriculado;
- Pelo menos 4 lápis ou canetas de cores diferentes
- Régua

Professor: essa atividade é interessante e, em geral, os alunos se envolvem pode ser um bom momento para propor parceria com o(s) professor(es) de artes. Se achar interessante, proponha exposições em sua escola de forma a valorizar os trabalhos desenvolvidos na oficina.

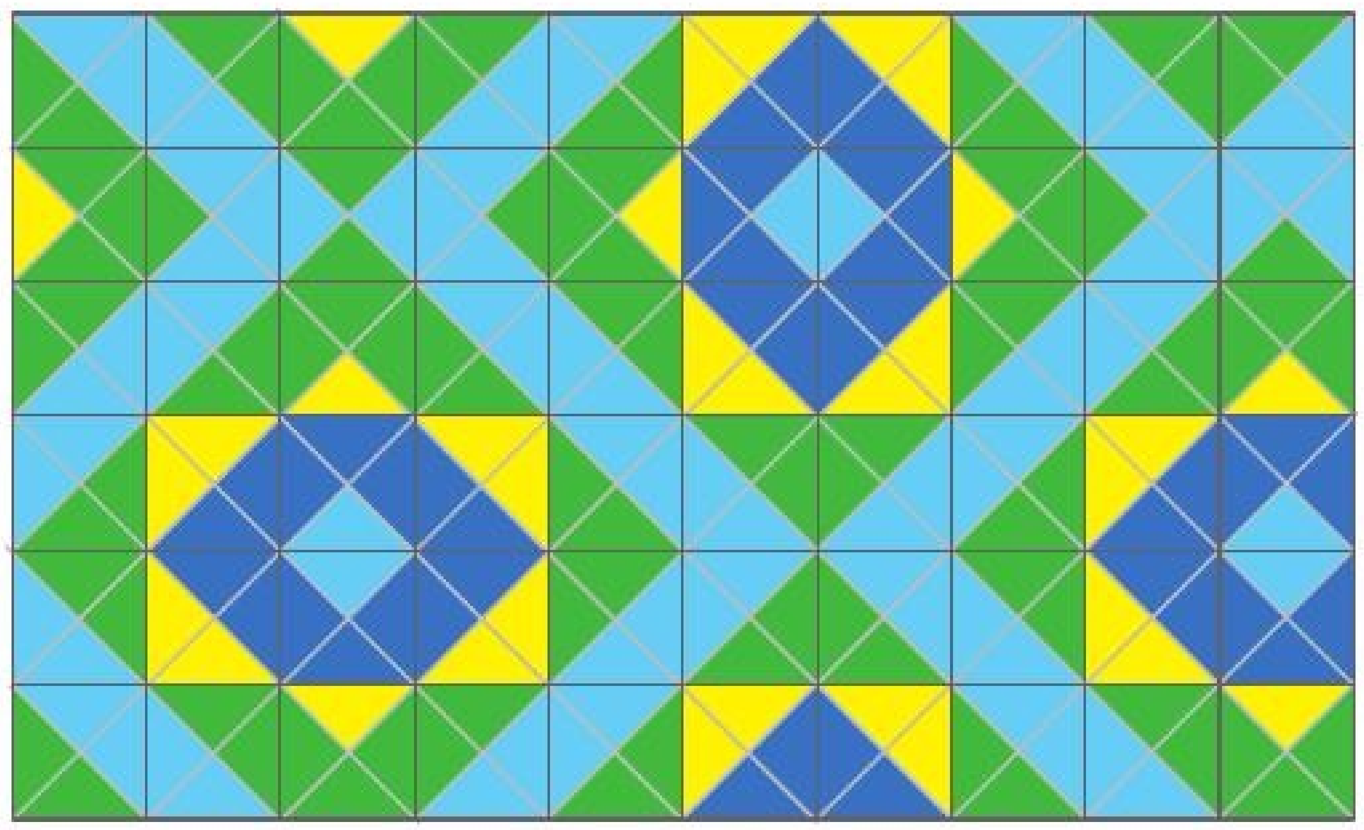
Procedimento:

1. Selecione na malha de papel quadriculado uma área com 100 quadradinhos.

2. Você poderá pintar quadradinhos inteiros, pela metade ou divididos em quatro partes, sempre através das diagonais. Para traçar as diagonais, utilize a régua. Veja um exemplo de divisão dos quadradinhos.



3. Faça o mosaico que melhor representar uma ideia interessante para você. Veja um exemplo de preenchimento com quatro cores na região de uma malha quadriculada com 60 quadradinhos:



4. Depois de pronto o mosaico, organize em seu caderno uma tabela onde você deverá marcar quantos quadradinhos de 1 cm de lado foram pintados de cada cor.

	cor 1	cor 2	cor 3	cor 4	total
QUADRADINHOS PINTADOS					

Lembre-se, você deve contar as metades e as quartas partes que pintou de uma mesma cor e somá-las. Não se preocupe se, por exemplo, você se deparar com 23,25 quadradinhos de uma mesma cor. Isso significa que você pintou 23 quadradinhos inteiros e mais um quarto de um quadradinho com aquela cor.

5. Na mesma tabela, preencha a coluna total, somando as quantidades de quadradinhos pintados.

A partir dos dados da tabela e, se sentir necessidade, utilizando sua calculadora, responda as seguintes questões:

a) Quantos quadradinhos (em branco) você tinha no início da oficina?

b) Quantos quadradinhos foram pintados?

c) Qual a porcentagem final de quadradinhos pintados?

d) Em relação ao total de quadradinhos iniciais, qual a porcentagem de quadradinhos pintados com cada cor?

e) Em relação ao total de quadradinhos pintados, qual a porcentagem de quadradinhos pintados com cada cor?

Por fim, compare seu mosaico com o de alguns de seus colegas. Discuta com eles as impressões visuais de profundidade, contrastes e simetrias que eles oferecem.

Para ler

Censo demográfico

Vaner Casaes/AGECOM

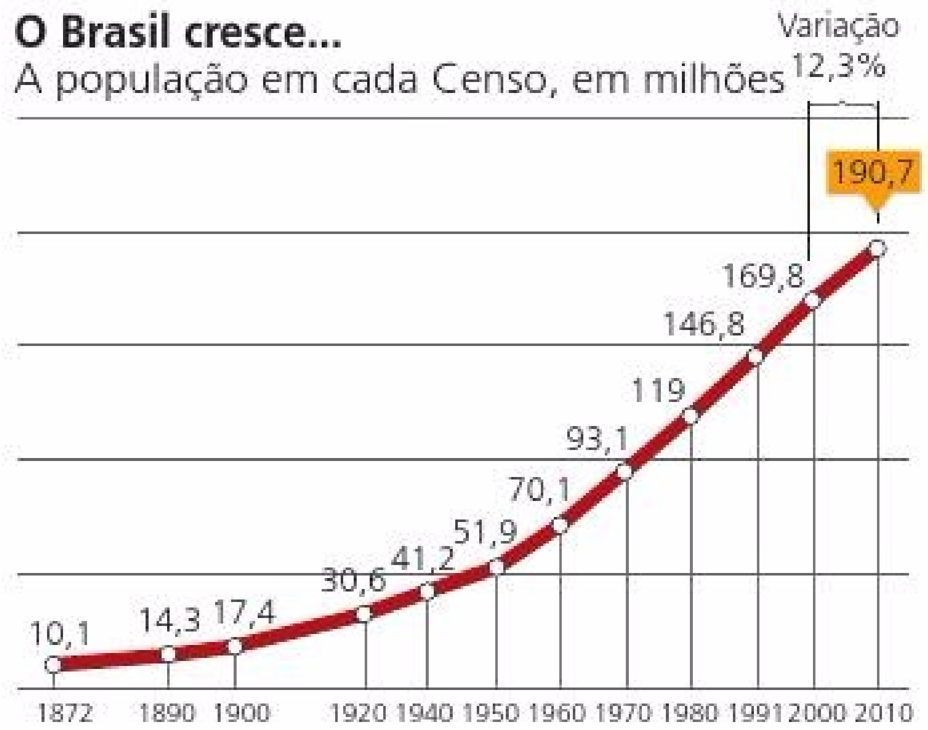
Recenseador do IBGE atuando no Censo 2010.

Em 2010, o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (**IBGE**) realizou o Censo 2010. Foram visitadOs 58 milhões de domicílios nos 5.565 municípios do Brasil.

Por meio dos dados do Censo é possível retratar, em todos os níveis geográficos, a população e suas condições de vida, respondendo perguntas sobre a quantidade de habitantes, onde vivem, onde trabalham, qual sua renda e condições associadas à qualidade de vida, reunindo, assim, a maior quantidade possível de informações sobre nosso País.

Desta forma, é possível acompanhar sua evolução, planejar seu desenvolvimento e decidir sobre os investimentos em educação, saúde, transportes etc.

Conhecendo bem nosso País e nossa população, podemos também medir nossos índices de qualidade de vida e desenvolvimento, compará-los com os de outros países, formular metas de melhorias e verificar em que medida estamos cumprindo acordos internacionais que o Brasil assinou, como os relativos ao aquecimento global, desmatamento, mortalidade infantil, escolaridade etc.



Fonte: *folhadigital* – caderno cotidiano – 5 dez. 2010 – p. C10

Entre os resultados do Censo 2010, destaca-se a quantidade de habitantes do Brasil: **190.732.694** pessoas de todas as idades, conforme podemos observar no gráfico acima (evolução da população brasileira desde 1872), publicado no jornal Folha de S.P, edição de 5 de dezembro de 2010, caderno Cotidiano, p.C10.

Para estabelecer taxas comparativas com dados do censo anterior, o IBGE utiliza porcentagens. No caso do gráfico publicado no jornal, há a indicação de que a população brasileira cresceu 12,3% nos últimos 10 anos, passando de 169,8 milhões para 190,7 milhões. Em outras palavras, houve um aumento de 20,9 milhões de habitantes.

Se o jornal publicasse apenas o número 20,9 milhões, poderíamos perguntar: é muito ou pouco? Foi maior ou menor que em outras décadas? Porém, como a variação é dada em porcentagem, podemos fazer comparações precisas com outras décadas e verificar se o crescimento é maior ou menor em relação ao que ocorre em outros países.

Para estudar

60. Escreva a razão entre:

a) 28 e 35
b) 2,5 e 7,5
c) 3 e 4
d) 0,3 e 0,4

61. A razão entre o que tenho e o que Marina tem é de $\frac{3}{4}$. Se eu tenho R$ 240,00. Quanto Marina tem?

62. No orçamento de uma cidade, a cada R$ 1 000,00 são destinados R$ 400,00 para Educação. Se em um ano foram aplicados R$ 4108 000 000,00 em Educação, qual foi o orçamento da cidade neste mesmo ano?

63. Dê a razão inversa de:

a) $\frac{6}{7}$
b) $\frac{11}{9}$

64. Eu tenho R$ 150,00. Calcule quanto tem meu irmão, sabendo que:

a) a razão entre o que eu tenho e o que ele tem é de $\frac{2}{3}$
b) a razão entre o que ele tem e o que eu tenho é de $\frac{2}{3}$

65. Para cada 2 litros de uma determinada cor de tinta, mistura-se 0,5 kg de pigmento branco para se obter uma determinada tonalidade de código SVN-13. Tendo utilizado 4,5 kg de pigmento, quantos litros da tinta SVN-13 foram obtidos?

66. Segundo dados do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), do total de brasileiros residentes no campo, um em cada quatro encontra-se em extrema pobreza. Considerando que o mesmo IBGE indica que 29,83 milhões de brasileiros residem no campo, quantos são os que se encontram em extrema miséria?

67. O texto a seguir foi extraído do Portal da Saúde, do Ministério da Saúde:

> Os dados do Censo 2010, divulgados nesta sexta-feira, pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) destaca que a mortalidade infantil no Brasil reduziu praticamente pela metade (47%) na última década. Em 2000, 29,7 a cada mil crianças nascidas vivas não completavam o primeiro ano de vida. Em 2010, o índice reduziu para 15,6/1 000.

Disponível em: < http://portalsaude.saude.gov.br/portalsaude/noticia/4908/162/brasil-reduz-taxa-de-%3Cbr%3Emortalidade-infantil-em-47.html>. Acesso em: 15 abr. 2015.

Com base no último índice de mortalidade infantil medido pelo Censo, responda:

a) Quantas crianças morrem antes de completar 1 ano de vida para um total de 12 250 nascidas vivas?
b) Se nos EUA a taxa de mortalidade infantil medida em 2010 foi de 6,06 mortes a cada 1 000 nascidas vivas, determine a razão entre a mortalidade infantil brasileira e a americana.

68. A minha sala de aula tem 6 m de comprimento. Fiz um desenho com uma planta na escala 1 : 75. Nessa planta, quantos centímetros mede minha sala de aula?

69. Um vagão está desenhado numa escala 1 : 200. No desenho, ele tem 4,5 cm de comprimento. Qual é seu comprimento real?

70. Cinco torneiras abertas ao máximo, e idênticas, enchem um tanque em 8 horas. Em quanto tempo três dessas torneiras encheriam o mesmo tanque?

71. Verifique quais das proporções a seguir estão corretas.

a) $\frac{6}{8} = \frac{9}{12}$

b) $\frac{4}{10} = \frac{14}{35}$

c) $\frac{5}{6} = \frac{8}{10}$

d) $\frac{3,5}{7} = \frac{4}{8}$

72. O comprimento e a largura de uma sala são proporcionais a 4 e 3. O comprimento é 10 m. Qual é a largura?

73. Responda: Interpretar texto

a) Se 2 e 8 são proporcionais a 10 e x, qual é o valor de x?

b) Se 3 e 26 são proporcionais a k e 78, qual é o valor de k?

c) Se m está para 6 assim como 7 está para 2, qual é o valor de m?

d) Se 40 está para y assim como 10 está para 8, qual é o valor de y?

74. Viajando durante um certo tempo à velocidade constante de 80 km/h, percorri 600 km. Se nesse mesmo tempo, eu tivesse viajado a 110 km/h, que distância eu teria percorrido?

75. Certo número de trabalhadores, trabalhando um certo número de horas por dia, faz um serviço em 40 dias.

Responda: Interpretar texto

a) O dobro do número de trabalhadores, trabalhando o mesmo número de horas por dia, faria o serviço em quantos dias?

b) O mesmo número de trabalhadores, trabalhando o quadrúplo do número de horas por dia, faria o serviço em quantos dias?

76. Escreva na forma de número decimal:

a) 3,6%

b) 19,4%

c) 1%

d) 16,72%

77. Escreva como porcentagem:

a) 0,015

b) 0,236

c) 0,91

d) 0,55

78. Calcule:

a) 9,4% de 10 000;

b) 75,8% de 12 000;

c) 412% de 20 000.

79 Responda:

a) 30% de um certo número é 1 800. Qual é o número?

b) Calculei 2% de um número e obtive 104. Qual é o número?

c) 18% de que número resulta 1 800?

80. Dados do Censo 2010 indicam que 15,6% da população brasileira reside em áreas rurais. Quantos são esses brasileiros se nossa população foi estimada em aproximadamente 190 milhões de habitantes.

Griszka Niewiadomski/SXC

O IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística) estima que, em 2015 a população atingiu cerca de 205 milhões de habitantes e que, em 2020, será de 210 milhões.

Resolução das atividades

1. a) $\frac{4}{5}$

b) $\frac{1}{3}$

2. $\frac{2}{13} = \frac{x}{8}$ $x = 1{,}2$ livros

3. $\frac{5}{0{,}75} = \frac{x}{128}$ $x = 853{,}33$

salário R$ 853,33

4. 2 milhões (população)

5. a) $1\,\frac{2}{5}$

b) $\frac{5}{13}$

6. a) $\frac{89}{91}$

b) $\frac{11}{12}$

7. Se a escala é de 1 : 100

4 m = 400 cm : 100 = 4 cm

mede 4 cm

8. escala 1 : 200

9. escala 1 : 125

10 m = 1 000 cm

1 000 : 8 = 125

10. escala 1 : 500

11. escala 1 : 1 500 000

12. área 13,7025 m^2

13. escala 1 : 2 250 000

14. mede 22,5 cm

15. 50 m e 60 m

16. 180 m

17. escala 1 : 5 000

18. a) V, pois $6 \cdot 12 = 9 \cdot 8$

b) V, pois $8 \cdot 35 = 20 \cdot 14$

c) F, pois $5 \cdot 10 \neq 6 \cdot 8$

d) F, pois $3 \cdot 8 = 7 \cdot 4$

19. a) $30 \rightarrow 150 = 5 \cdot \square \rightarrow \square = 30$

b) $33 \rightarrow 5 \cdot \square = 165 \rightarrow \square = 33$

c) $2 \rightarrow 0{,}06 = 0{,}03 \cdot \square \rightarrow \square = 2$

d) $\frac{8}{5} \rightarrow 8 = 5 \cdot \square \rightarrow \square = \frac{8}{5}$

20. 1,5 copos de água

21. a) sim, pois a razão entre 1 e 10 é a mesma que entre 9 e 10.

b) sim, pois a razão entre 7,5 e 30 é a mesma que entre 4 e 16.

c) Não. Pois a razão entre 17,5 e 175 é diferente que a razão entre 6 e 600.

22. a) $\frac{1}{2}$; o consumo tem a razão $\frac{1}{2}$;

sim são iguais

b) $\frac{2}{3}$; o consumo tem a razão $\frac{2}{3}$;

sim são iguais

c) diretamente proporcional

23. inversamente proporcional

24. inversamente proporcional

25. inversamente proporcional porque quando A aumenta B diminui.

26. a) sim

b) sim

27. a) $\frac{1}{15}$

b) $\frac{1}{30}$

c) inversamente proporcional, pois quanto maior o número de pessoas, menor a fatia de bolo.

28. Com a mesma velocidade e o dobro do tempo, esse motorista percorrera o dobro do primeiro 280 km

29.

dias	horas por dia
18	n
x	3n

Como as grandezas são inversamente proporcionais, fazemos:

$\frac{18}{x} = \frac{3n}{n} \rightarrow 18x = x \rightarrow x = 6$ dias

30. a) inversamente proporcional

b) inversamente proporcional

31.

nº de viagens	capacidade dos caminhões
30	5 m^3
x	6 m^3

Como as grandezas são inversamente proporcionais, fazemos:

$\frac{30}{x} = \frac{6}{5} \rightarrow x = \frac{30 \cdot 5}{6} \rightarrow x = 25$ viagens

32.

adultos	peso de cada um
7	80 kg
x	56 kg

Como as grandezas são inversamente proporcionais:

$\frac{7}{x} = \frac{56}{80} \rightarrow x = \frac{7 \cdot 80}{56} \rightarrow x = 10$ kg

33. 1 semana = 7 dias

48 horas = 2 dias

dias	ataso
2	16 s
7	x s

$\frac{2}{7} = \frac{16}{x} \rightarrow x = \frac{7 \cdot 16}{2} \rightarrow x = 56$ s

34.

motos produzidas	horas por dia
3600	8
x	6

$\frac{3600}{x} = \frac{8}{16} \rightarrow x = \frac{6 \cdot 3600}{8} \rightarrow x = 2700$ motos

35. a)

6	8
x	10

$\frac{6}{x} = \frac{8}{10} \rightarrow x = \frac{60}{8} \rightarrow x = 7{,}5$

b)

15	10
9	x

$x = \frac{9 \cdot 10}{15} \rightarrow x = 6{,}0$

36.

velocidade	distância percorrida
100 km/h	500 km
120 km/h	x

$\frac{100}{120} = \frac{500}{x} \rightarrow x = \frac{500 \cdot 120}{100} \rightarrow x = 600$ km

37. $\frac{100}{65} - \frac{x}{260}$ $x = 400$ kg de trigo

38.

5 torneiras	6 horas
3 torneiras	x

As grandezas são inversamente proporcionais:

$\frac{5}{3} = \frac{x}{6} \rightarrow x = \frac{30}{3} = 10$

x = 10 horas

39.

4 robos	12 horas
6 robos	x

As grandezas são inversamente proporcionais:

$\frac{4}{6} = \frac{x}{12} \rightarrow x = \frac{48}{6} = 8$

x = 8 horas

40.

páginas por horas	horas
8000	7,5
4000	x

$$\frac{8000}{4000} = \frac{x}{7{,}5} \rightarrow x = \frac{7{,}5 \cdot 8000}{4000} \rightarrow x = 15 \text{ horas}$$

41.

dias	h/dia	peças
5	16	2000
8	12	x

$$\frac{2000}{x} = \frac{5}{8} \cdot \frac{16}{12} \rightarrow x = \frac{2000 \cdot 8 \cdot 12}{5 \cdot 16} \rightarrow x = 2400 \text{ peças}$$

42.

banhos	tempo	litros
2	10	400
1	15	x

$$\frac{400}{x} = \frac{10}{15} \cdot \frac{2}{1} \rightarrow x = \frac{400 \cdot 15}{2 \cdot 10} \rightarrow x = 300 \text{ L}$$

43.

caixas	tempo	total
3	2	x
7	5	140

$$\frac{x}{140} = \frac{3}{7} \cdot \frac{5}{2} \rightarrow x = \frac{140 \cdot 3 \cdot 5}{7 \cdot 2} \rightarrow x = 200$$

44.

pessoa/carro	intervalo	tempo
5	40	12
6	20	x

$$\frac{12}{x} = \frac{40}{20} \cdot \frac{6}{5} \rightarrow x = \frac{12 \cdot 20 \cdot 5}{40 \cdot 6} \rightarrow x = 5 \text{ minutos}$$

45. a) $\frac{3}{30} = \frac{\blacktriangledown}{120} \rightarrow \blacktriangledown = \text{R\$ } 12{,}00$

b) $\frac{10}{50} = \frac{\blacktriangledown}{100} \rightarrow \blacktriangledown = \text{R\$ } 20{,}00$

c) $\frac{60}{200} = \frac{\blacktriangledown}{100} \rightarrow \blacktriangledown = \text{R\$ } 30{,}00$

46. a) 0,03
b) 0,195
c) 0,83
d) 1,00

47. a) 184
b) 1000
c) 500
d) 30 000

48. 40% de R$ 1 240 $\rightarrow$ R$ 496,00
20% de R$ 1240 = R$ 248,00
dois sócios receberiam R$ 496,00 cada um deles e o terceiro receberia R$ 248,00

49. Porque eles calculam 10% do serviço, ou seja $\frac{1}{10}$ do valor da conta.

50. a) 20% b) 50% c) 50%

51. a) $0{,}31 \cdot N = 2\,015 \rightarrow N = \frac{2\,015}{0{,}31} = 6\,500$

b) $0{,}01 \cdot N = 99 \rightarrow N = \frac{99}{0{,}01} = 9\,900$

c) $0{,}18 \cdot N = 270 \rightarrow N = \frac{270}{0{,}18} = 1\,500$

52. a) $\frac{4\,200}{7\,000} = 0{,}6$ $\rightarrow$ a porcentagem é 60%

b) $\frac{340}{1\,000} = 0{,}34$ $\rightarrow$ a porcentagem é 34%

c) $\frac{78}{2\,600} = 0{,}03$ $\rightarrow$ a porcentagem é 3%

d) $\frac{3\,240}{4\,500} = 0{,}72$ $\rightarrow$ a porcentagem é 72%

53. a) 0,086
b) 0,493
c) 0,4672
d) 1,21
e) 4,50
f) 3,125

54. a) 8,5 %
b) 28,6 %
c) 33,5 %
d) 90 %
e) 115 %
f) 320 %

55. a) $0{,}094 \cdot 15\,000 = 1\,410$
b) $0{,}758 \cdot 15\,000 = 11\,370$
c) $3{,}12 \cdot 15\,000 = 46\,800$
d) $0{,}01 \cdot 30\,000 = 300$
e) $0{,}185 \cdot 100\,000 = 18\,500$

56. a) Jacqueline $\rightarrow \frac{62}{84} = 73{,}8\%$

Natália $\rightarrow \frac{29}{62} = 46{,}8\%$

b) Jacqueline

57. Se 75% são meninos, as 7 meninas são 25% dos alunos.

$0{,}25 \cdot \text{total} = 7 \rightarrow \text{total} = 28$ alunos.

58. 15% do preço P = R$ 36,00

$0{,}15 \cdot P = 36 \rightarrow P =$ R$ 240,00

59. Salário original = S

1º aumento de 7% → 1º salário = $1{,}07 \cdot \$$

2º aumento de 7% → 2º salário =

$= 1{,}07 \cdot 1{,}07 \cdot S = 1{,}1449\ S$

Logo, em relação ao salário original S, o aumento final foi de 14,49%.

Respostas da seção Para estudar

60. a) $\frac{28}{35}$ c) $\frac{3}{4}$

b) $\frac{2{,}5}{7{,}5}$ d) $\frac{0{,}3}{0{,}4}$

61. R$ 320,00

62. R$ 10 000 000,00

63. a) $\frac{7}{6}$ b) $\frac{9}{11}$

64. a) R$ 225,00

b) R$ 100,00

65. x = 18 litros

66. x ≅ 7,46 milhões

67. a) x = 1911

b) $\frac{15{,}6}{6{,}06} \cong 2{,}6$ (mais que o dobro da brasileira)

68. x = 8 cm

69. 9 metros

70. x = 13,3 horas

71. a) V c) V

b) F d) V

72. 7,5 m

73. a) x = 40 c) m = 21

b) k = 9 d) y = 32

74. d = 825 km

75. a) 20 dias

b) 10 dias

76. a) 0,036 c) 0,01

b) 0,194 d) 0,1672

77. a) 1,5% c) 91%

b) 23,6% d) 55%

78. a) 940

b) 9 096

c) 82 400

79. a) 6 000

b) 5 200

c) 10 000

80. 37 240 000 habitantes

capítulo 5

Ângulos e retas

- **Bissetriz de um ângulo**
- **Posições relativas entre duas retas**
- **Ângulos formados por paralelas e uma transversal**

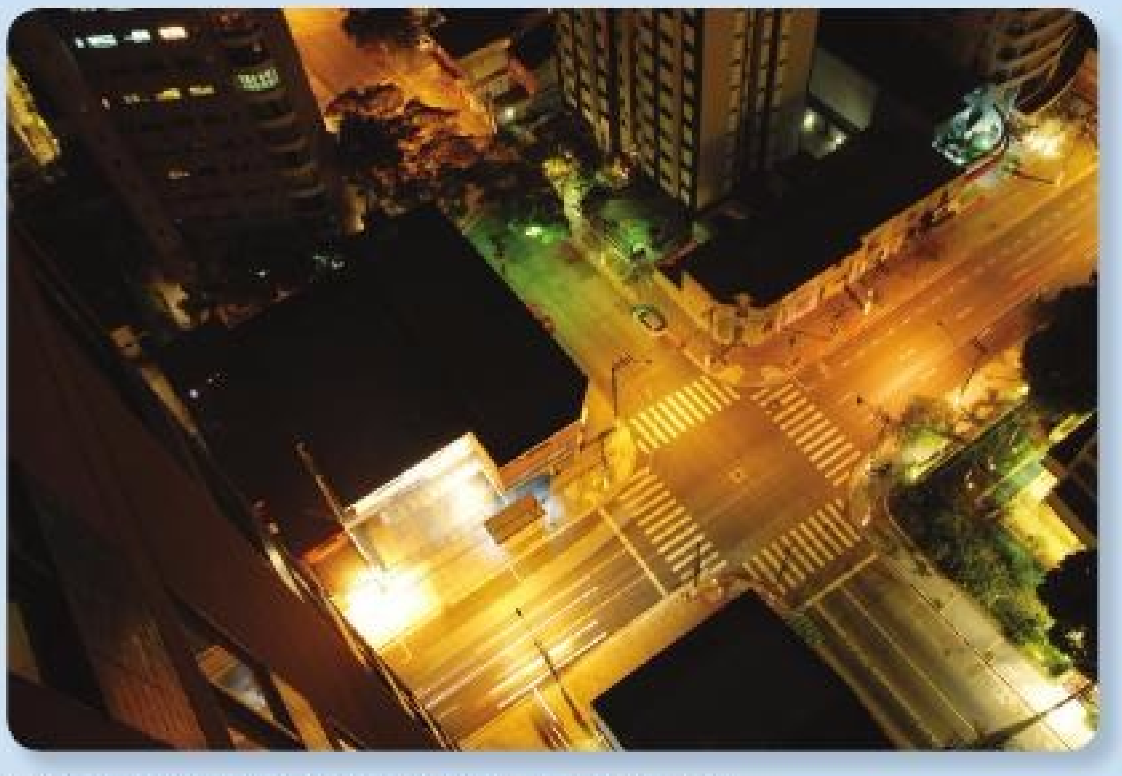
As pequenas estradas de acesso ao interior do canavial sugerem paralelas e transversais.

Fabio Colombini

Conversa Inicial

Vamos continuar o estudo dos ângulos. Nesse momento, verificaremos como as posições das semirretas que os determinam interferem nas relações existentes entre eles. Em outras palavras, precisamos saber como variam as medidas de dois ângulos, dependendo da posição que um ocupa em relação ao outro.

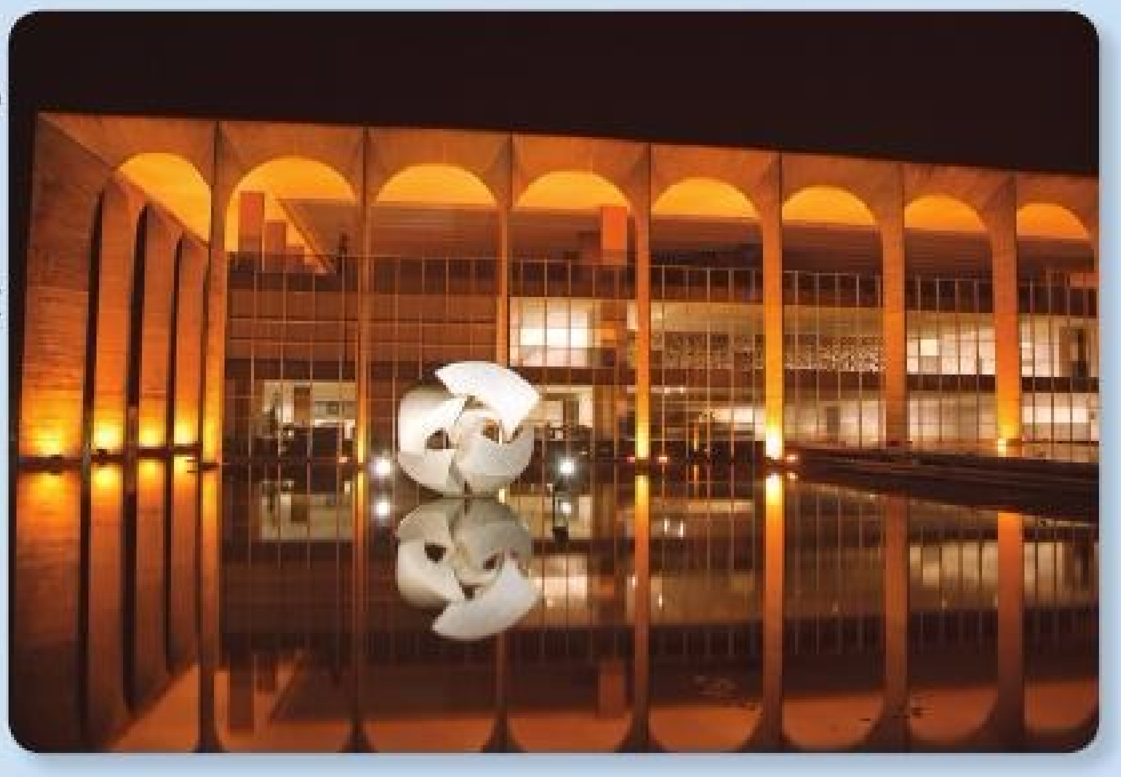
Os ângulos, muitas vezes sem percebermos, estão presentes em nosso cotidiano, como, por exemplo, nos cruzamentos de ruas, nas formas geométricas planas e espaciais e nas representações de plantas de terrenos, prédios, casas e construções civis.


Felipe Lopez/Opção Brasil Imagens

Cruzamento na cidade de São Paulo, SP, 2011.


Javier Larrea/Age Fotostock/Grupo Keystone

Casas cubo, do arquiteto Piet Blom, Rotterdam, Holanda, 2010.


Marcos André/Opção Brasil Imagens

Palácio do Itamaraty, Brasília, DF, 2010.


Tomasz Hyla/Dreamstime

Os raios laser indicam infinitas direções.

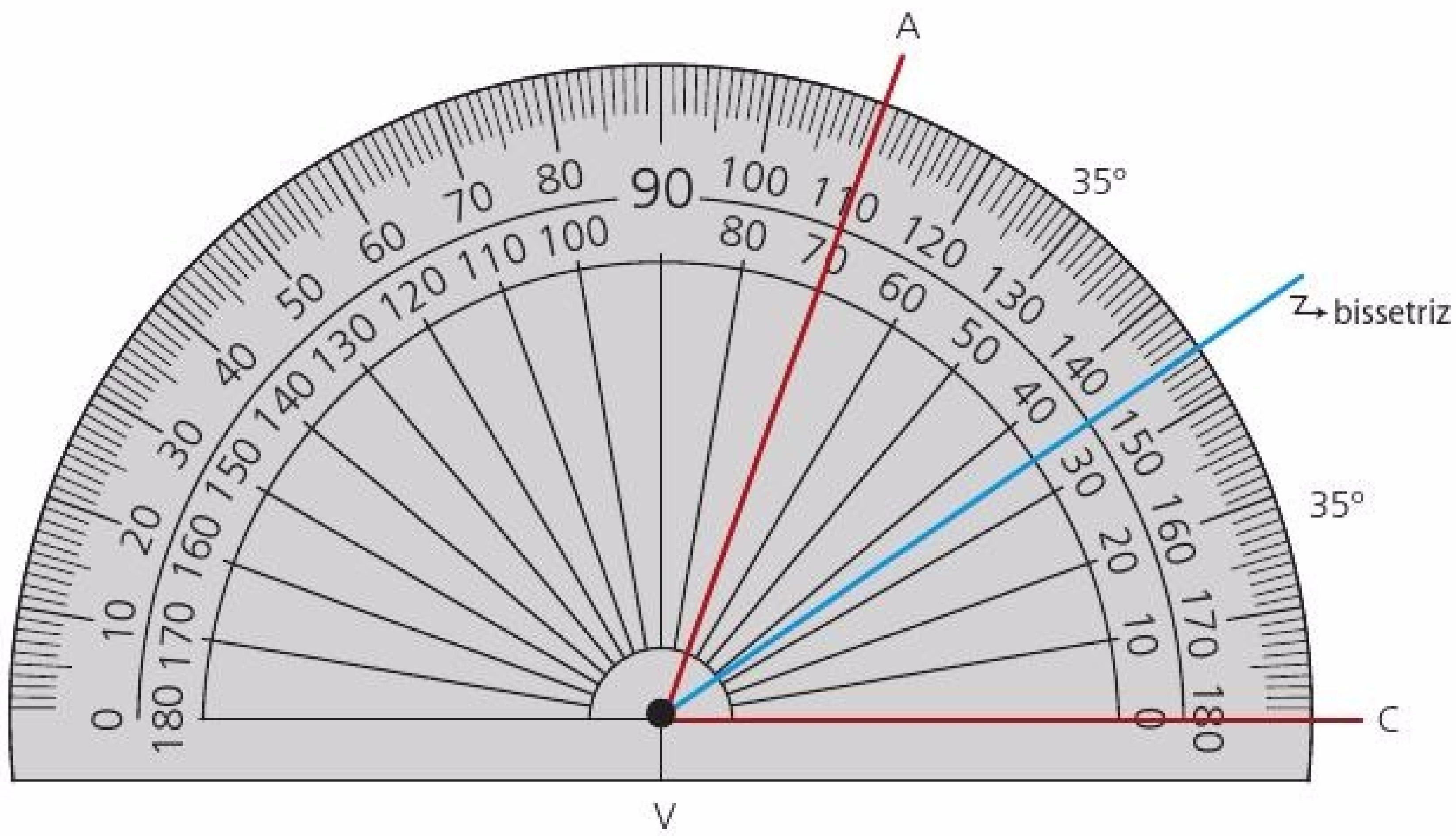
Qual é a importância de conceitos como paralelismo, perpendicularidade, posições de retas no plano e as relações estabelecidas entre os diversos ângulos formados quando retas se cruzam, para analisar figuras e até mesmo para construí-las?

Vamos obter a resposta a essa pergunta no capítulo que iniciamos agora.

Bissetriz de um ângulo

Denomina-se **bissetriz de um ângulo** a semirreta interna a este ângulo, com origem em seu vértice e que divide o ângulo em dois ângulos iguais.

Observe os exemplos a seguir e procure medir os dois ângulos formados pela bissetriz com o seu transferidor, como mostra a ilustração. Ela representa a medida dos dois ângulos formados pela bissetriz do ângulo de 70º.

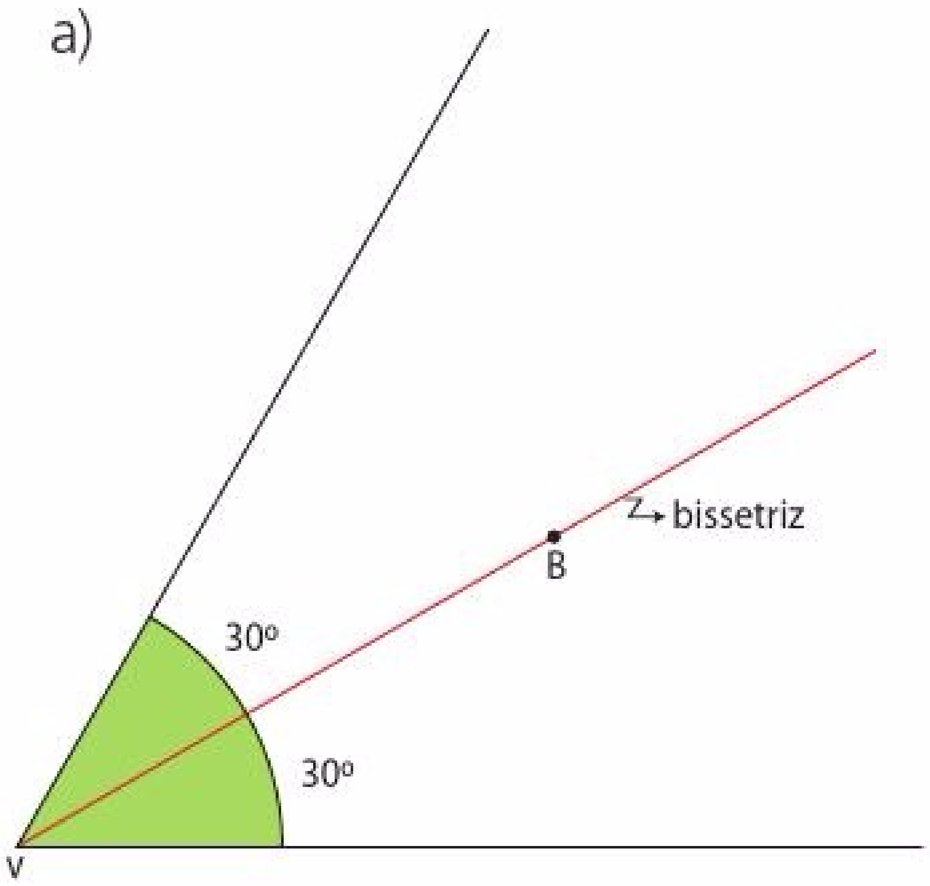


A bissetriz divide o ângulo $A\hat{V}C$ em dois ângulos iguais

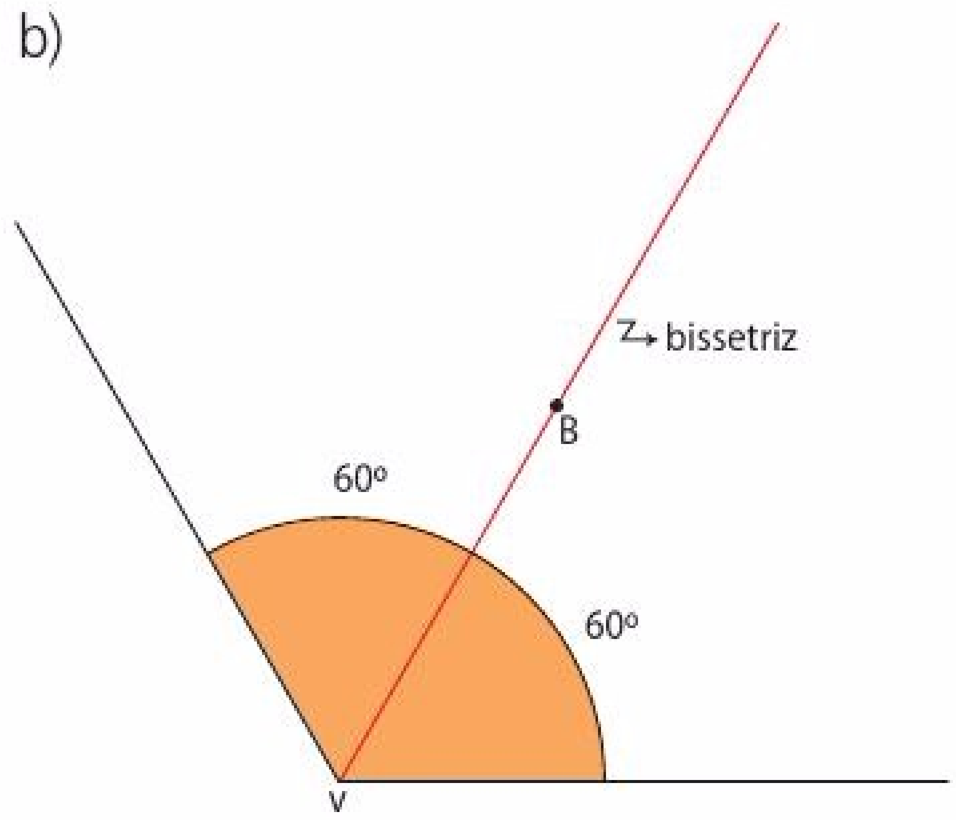
Professor, oriente os alunos a ajustarem o compasso antes utilizá-lo. Nivele a ponta seca do compasso com o grafite e use uma lixa para o grafite ficar com o traçado desejado.

No primeiro exemplo, abaixo, o ângulo de 60º foi dividido em dois ângulos de 30º pela bissetriz. No segundo exemplo, a bissetriz divide o ângulo de 120º em dois ângulos de 60º.

a)



b)

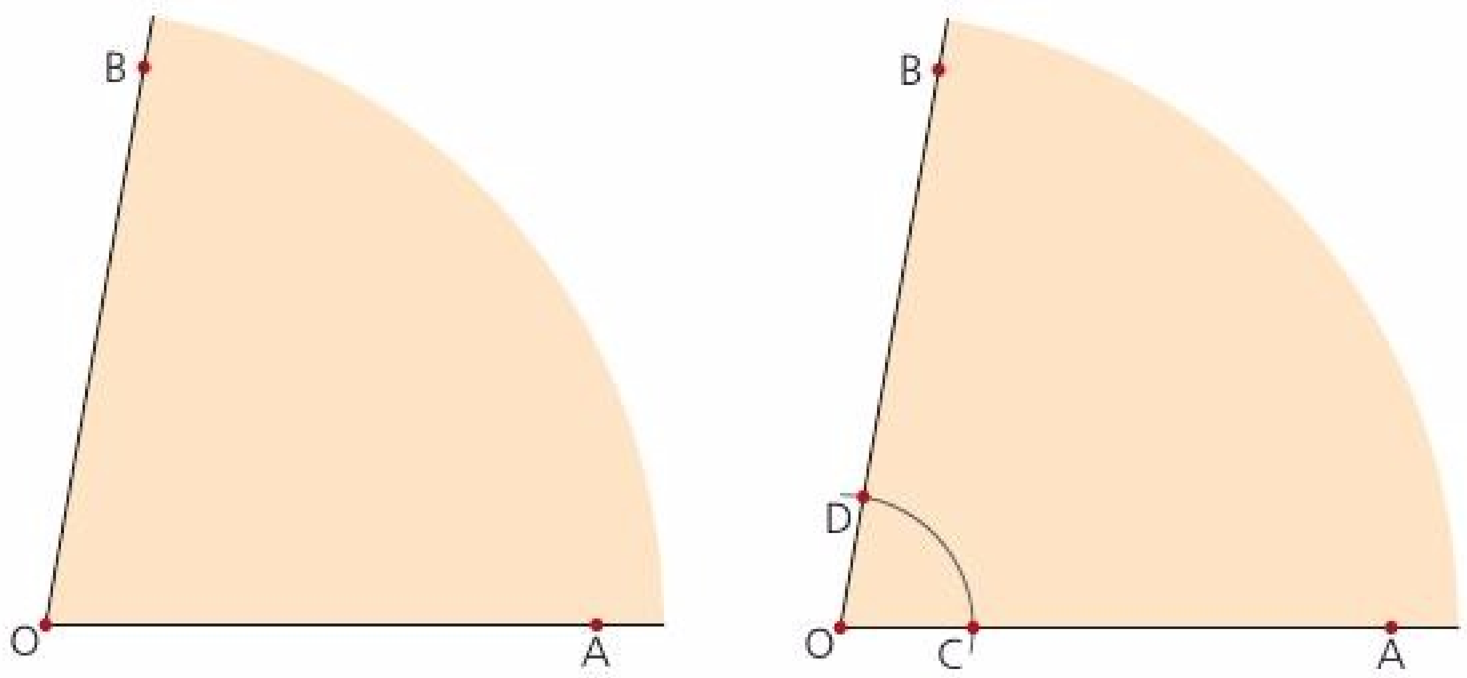


Nos dois casos, a semirreta $\overrightarrow{VB}$ é a bissetriz.

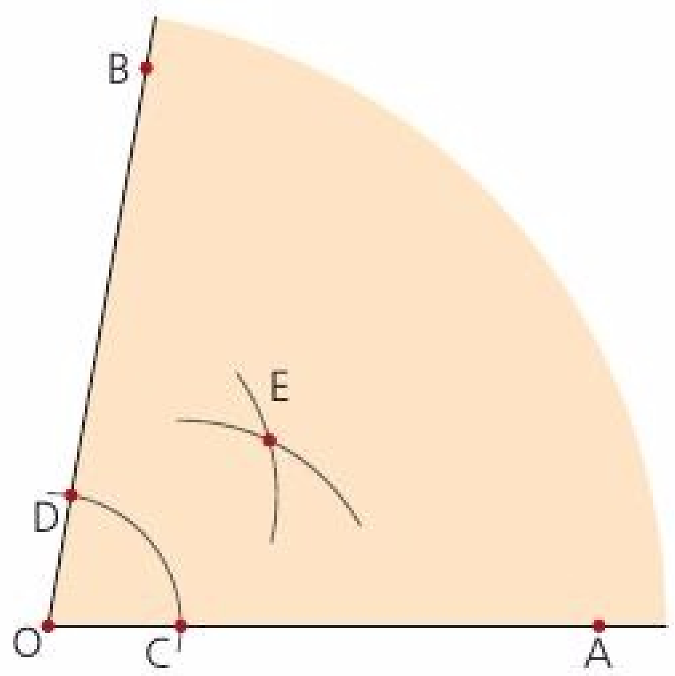
Construindo a bissetriz com um compasso

Você vai aprender agora como é possível traçar a bissetriz de um ângulo utilizando um compasso e uma régua. Vamos exemplificar com o ângulo AÔB a seguir. Faça no seu caderno.

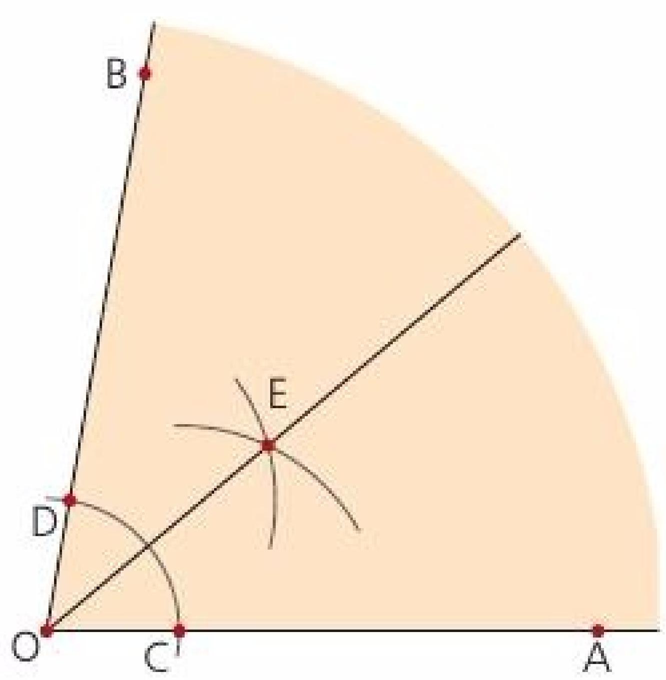
a) Posicione o compasso com centro no ponto O e, com uma abertura qualquer, obtenha os pontos C e D, como na figura a seguir:



b) Com o compasso com centro em C e depois em D, trace dois arcos com a mesma abertura, obtendo o ponto E.

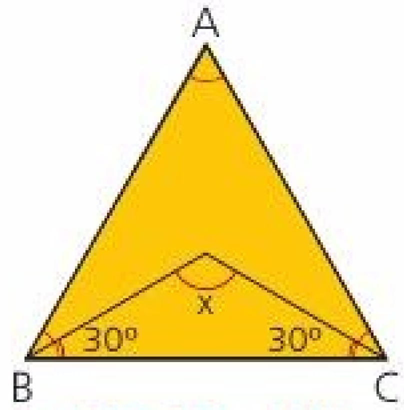


c) A bissetriz será a semirreta $\overrightarrow{OE}$. Observe na figura a seguir e faça a medida das duas metades com o transferidor.



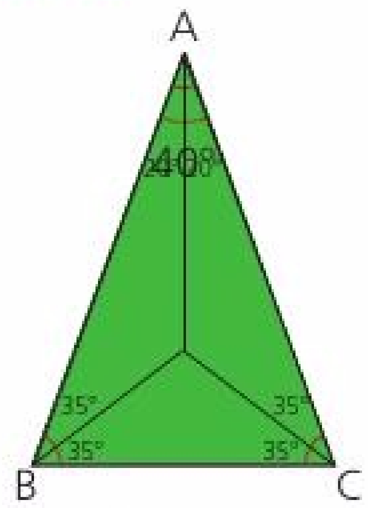
Atividades

1. Qual é o valor dos ângulos formados pelas bissetrizes dos ângulos internos de um triângulo equilátero?



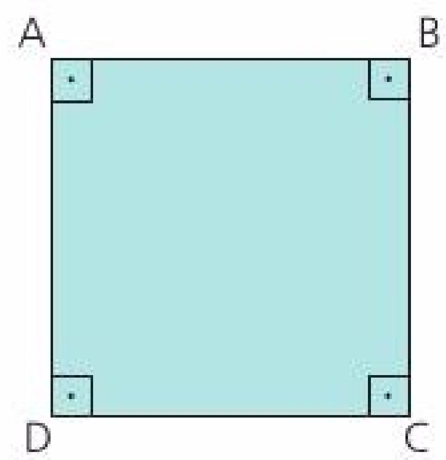
$x + 30° + 30° = 180°$
$x = 120°$

2. ABC é um triângulo isósceles com ângulo do vértice de 40°. Determine os ângulos formados pelas bissetrizes de cada ângulo interno.

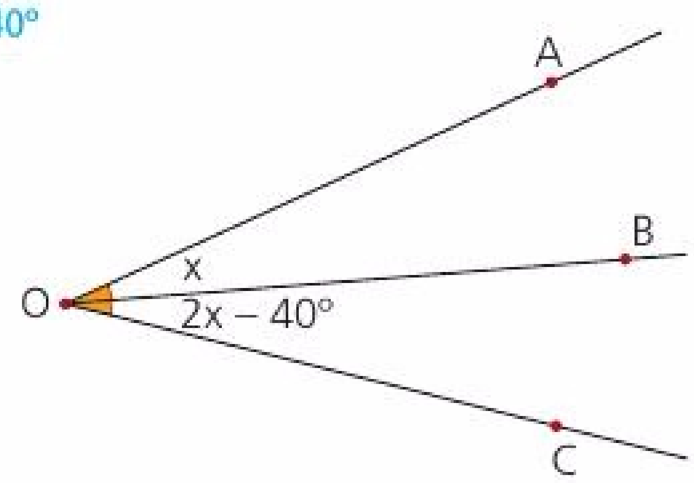


$x = 110°$ $y = 125°$ $z = 125°$

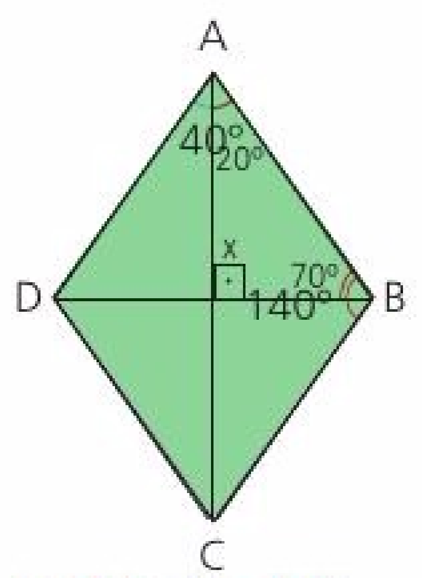
3. ABCD é um quadrado. As bissetrizes do ângulos internos determinam 8 ângulos em cada vértice. Qual é o valor de cada um? 45°



4. Sabendo-se que, na figura, $\overrightarrow{OB}$ é bissetriz do ângulo AÔC, determine o valor de **x** em graus.
$x = 40°$

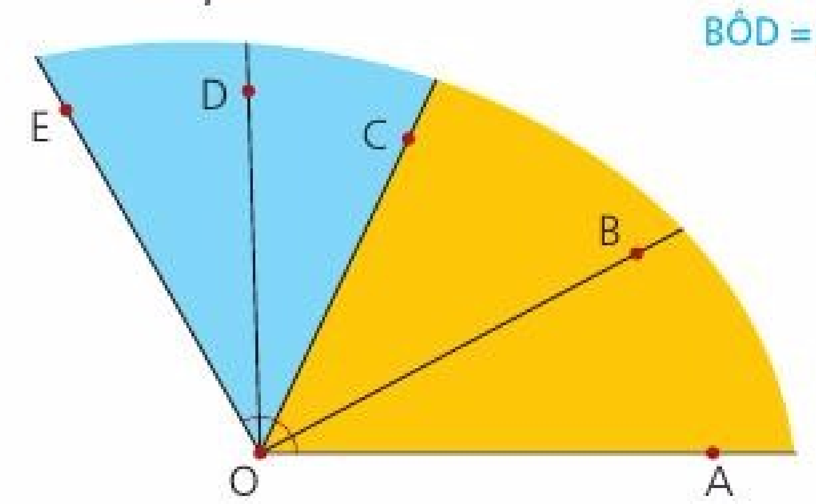


5. ABCD é um losango com dois de seus ângulos internos medindo, respectivamente, 40° e 140°. Qual é o valor dos ângulos determinados pela bissetriz dos ângulos dos vértices?



$x + 70° + 20° = 180°$
$x = 90°$

6. Na figura a seguir, $\overrightarrow{OB}$ é bissetriz de AÔC e $\overrightarrow{OD}$ é bissetriz do ângulo CÔE. Sabendo-se que o ângulo AÔC mede 70° e que CÔE mede 50°, determine a medida de BÔD.
BÔD = 60°



7. Desenhe em seu caderno um triângulo cujos ângulos internos sejam todos agudos. Faça-o num tamanho cômodo (lados com valores em torno de 4 cm) e, utilizando régua e compasso, trace as três bissetrizes dos ângulos internos. Em seguida, responda:

a) As três bissetrizes encontram-se no mesmo ponto? sim

b) Em caso afirmativo da questão **a**, centre o compasso no ponto de encontro das bissetrizes e, com abertura em um dos vértices, trace uma circunferência completa. A circunferência passa pelos três vértices?
não, só no caso do triângulo equilátero. O encontro dos bissetrizes é o incentro, centro da circunferência inscrita no triângulo.

8. Construa em seu caderno, utilizando régua e esquadro, um quadrado de lados medindo 3 cm e um retângulo de lados 2 cm e 4 cm. Trace as diagonais do quadrado, do retângulo e responda:

a) As diagonais do quadrado são bissetrizes dos respectivos ângulos? Sim

b) As diagonais do retângulo são bissetrizes dos respectivos ângulos? Não

9. Elabore conclusões baseado no exercício anterior. a) As bissetrizes internas de um quadrado coincidem com as diagonais do mesmo.
b) As diagonais de um retângulo não são bissetrizes de seus respectivos ângulos.

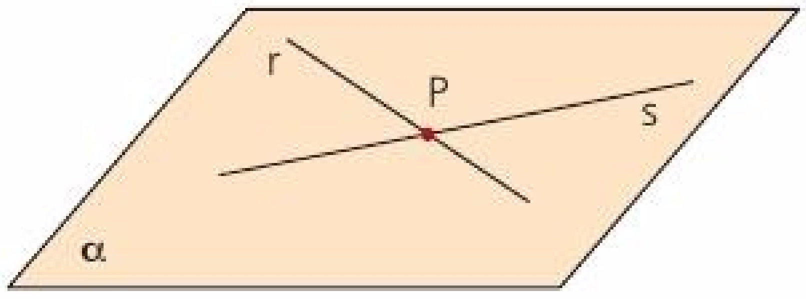
Professor: Comente com seus alunos que as diagonais de um losango também são bissetrizes e sempre formam ângulo de 90° entre si.

Posições relativas entre duas retas

Duas retas no espaço podem pertencer a um mesmo plano. Neste caso são chamadas **retas coplanares**. Elas podem, também, não estar no mesmo plano. Nessas condições são denominadas **retas reversas**. As retas coplanares podem ser concorrentes ou paralelas, enquanto as retas reversas podem ser **ortogonais** ou **não-ortogonais**. Vamos examinar cada uma dessas situações.

Retas coplanares

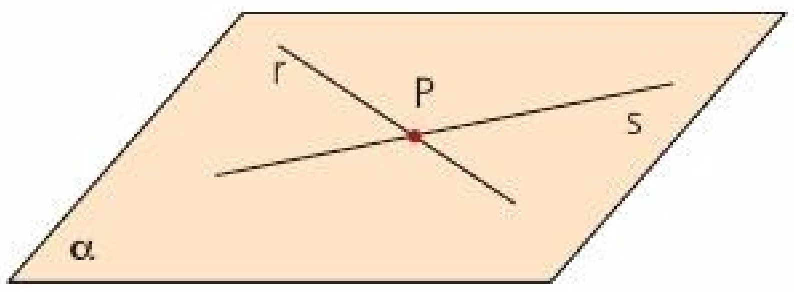
São aquelas que estão contidas em um mesmo plano.



$$\left.\begin{array}{l} r \subset \alpha \\ s \subset \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \textbf{r}, \textbf{s} \text{ são } \textbf{coplanares}$$

Duas retas coplanares **r** e **s** podem ser:

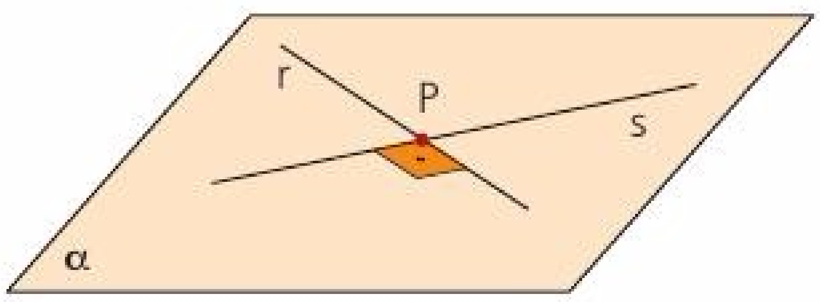
a) **concorrentes**: **r** e **s** têm um único ponto comum.



r ∩ s = {P} (lê-se: **r** intersecção com **s** é o ponto **P**)

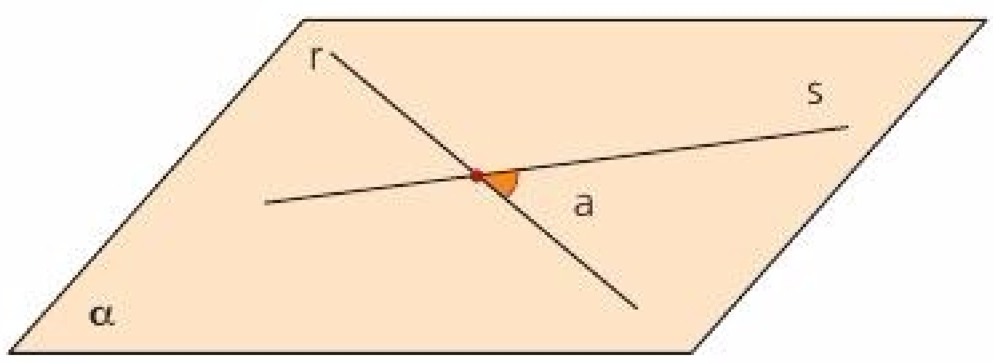
De acordo com o ângulo que formam entre si, duas retas concorrentes podem ser:

perpendiculares: **r** e **s** formam ângulo reto.



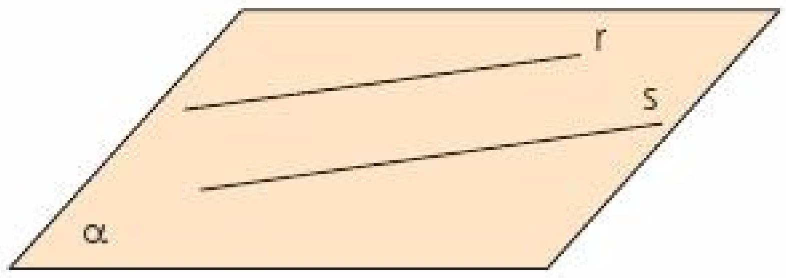
r ⊥ s (lê-se: **r** é perpendicular a **s**)

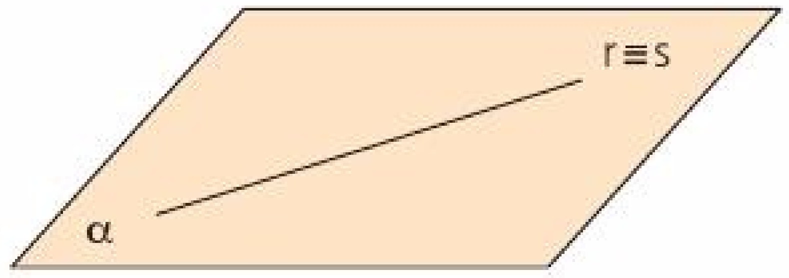
oblíquas: **r** e **s** não são **perpendiculares**.



$a \neq 0^{o}$ e $a \neq 90^{o}$

b) **paralelas**: **r** e **s** não têm ponto comum, ou **r** e **s** são coincidentes.





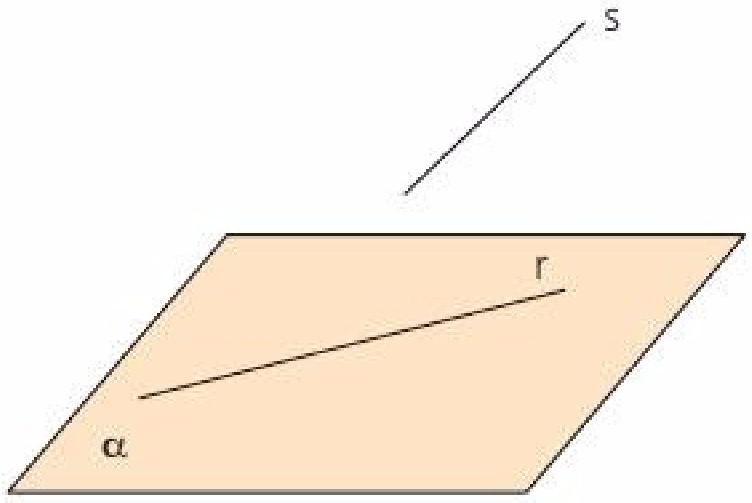
$\left.\begin{array}{l} r \subset \alpha \\ s \subset \alpha \\ r \cap s = \varnothing \end{array}\right\} \Rightarrow$ **paralelas distintas**

$\left.\begin{array}{l} r \subset \alpha \\ s \subset \alpha \\ r \cap s = r = s \end{array}\right\} \Rightarrow$ **paralelas coincidentes**

Convenciona-se que o ângulo entre duas retas paralelas é de 0°.

Retas reversas

Quaisquer duas retas que não estão contidas em um mesmo plano são denominadas retas reversas.



Observe na figura que não existe um plano que contenha simultaneamente as retas *r* e *s*.

Duas retas reversas não têm ponto comum. Portanto, na figura:

$$r \cap s = \varnothing$$

Chamamos de ângulo entre duas retas reversas o ângulo formado por uma das retas e uma outra paralela à segunda reta, porém no plano que contém a primeira.

Observe na figura 1 que a reta **r** forma um ângulo Â com uma reta **t** paralela a **s** e que está contida no plano α. Se Â ≠ 90°, dizemos que as retas **r** e **s** da figura 1 são retas reversas **não-ortogonais**. A figura 2 mostra que as retas **r** e **s'** formam ângulos Â = 90°.

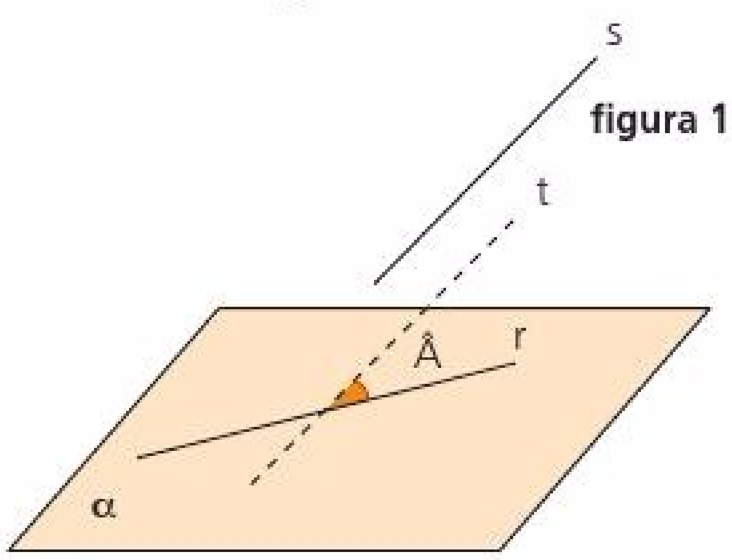


figura 1

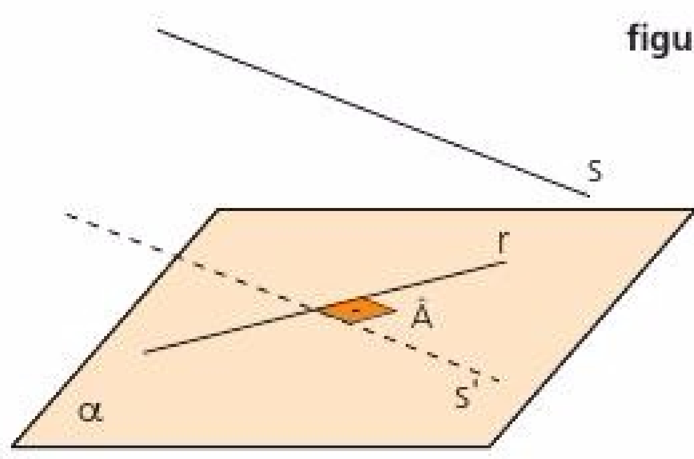


figura 2

Quando o ângulo Â é 90°, as retas r e s recebem o nome de **ortogonais.**

$\left.\begin{array}{l} r, s \text{ reversas} \\ s \,//\, s' \\ r \perp s' \end{array}\right\} \Rightarrow$ *r* é **ortogonal** a *s* ($r \perp s$)

Atividades

10. Classifique cada afirmação a seguir como verdadeira ou falsa:

V a) Duas retas reversas são sempre distintas.

V b) Duas retas que não têm ponto comum são paralelas.

V c) Duas retas que não têm ponto comum são reversas.

F d) Duas retas distintas ou são reversas, ou são paralelas, ou são concorrentes.

V e) Duas retas de um mesmo plano são paralelas ou concorrentes.

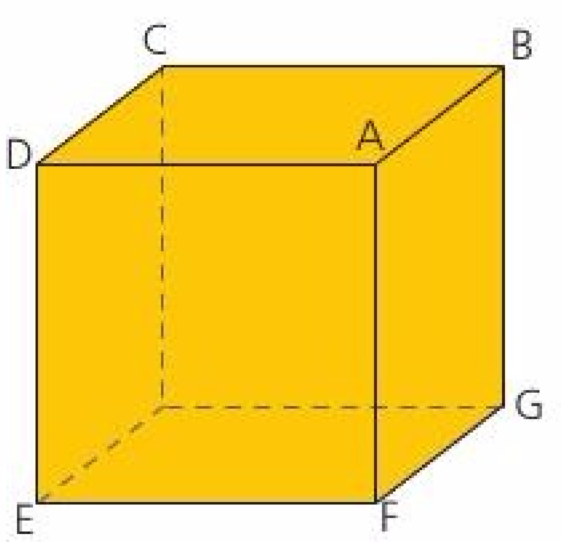
V f) Duas retas que têm um ponto comum são concorrentes.

11. Classifique como verdadeira ou falsa cada afirmação a seguir:

F a) Se dois planos têm uma reta comum, eles têm um ponto comum.

F b) Dois planos podem ter um único ponto comum.

12. Neste cubo, localize os três pares de retas abaixo, identificando-as pelos pontos pelos quais elas passam:



a) concorrentes; A, B, F

b) paralelas; $\overline{CB} // \overline{DA} // \overline{EF}$ $\overline{CD} // \overline{AB} // \overline{FG}$

c) reversas. $\overline{AB} \wedge \overline{EF}$ $\overline{AD} \wedge \overline{FG}$

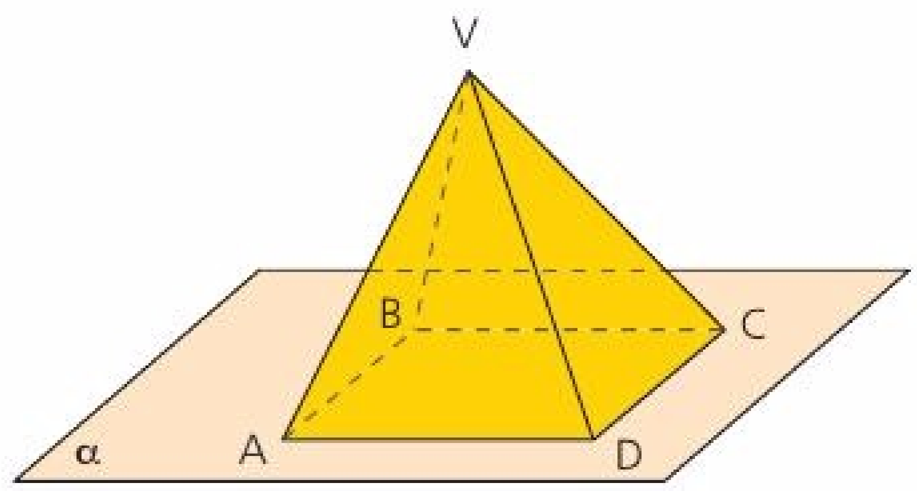
13. Diga se é verdadeira ou falsa a afirmação:

Três retas concorrentes duas a duas e que não passam por um mesmo ponto, estão em um mesmo plano. Resposta pessoal.

Justifique sua resposta em seu caderno.

! Professor: Comente com seus alunos que duas retas concorrentes sempre estão no mesmo plano.

14. Considere a pirâmide a seguir, cuja base está no plano α e classifique como verdadeira ou falsa cada afirmação:



V a) $\overleftrightarrow{VD}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são reversas.

V b) $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{AD}$ são coplanares.

F c) $\overleftrightarrow{VA}$, $\overleftrightarrow{VB}$, $\overleftrightarrow{VC}$ e $\overleftrightarrow{VD}$ são coplanares.

V d) $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ podem ser paralelas.

V e) $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{VB}$ são concorrentes em B;

15. Classifique cada afirmação a seguir como verdadeira ou falsa:

V a) Duas retas perpendiculares são concorrentes.

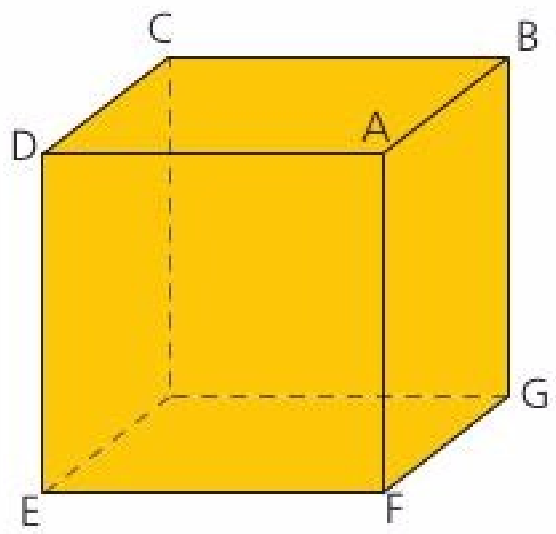
F b) Duas retas paralelas podem ser ortogonais.

V c) O ângulo entre duas retas é 90°; logo, elas são perpendiculares ou ortogonais.

V d) Duas retas reversas formam ângulo de 90°; logo, elas são ortogonais.

F e) Duas retas concorrentes são perpendiculares.

16. No cubo a seguir, indique dois pares de retas:



a) perpendiculares;
$\overline{AB} \perp \overline{BC}$

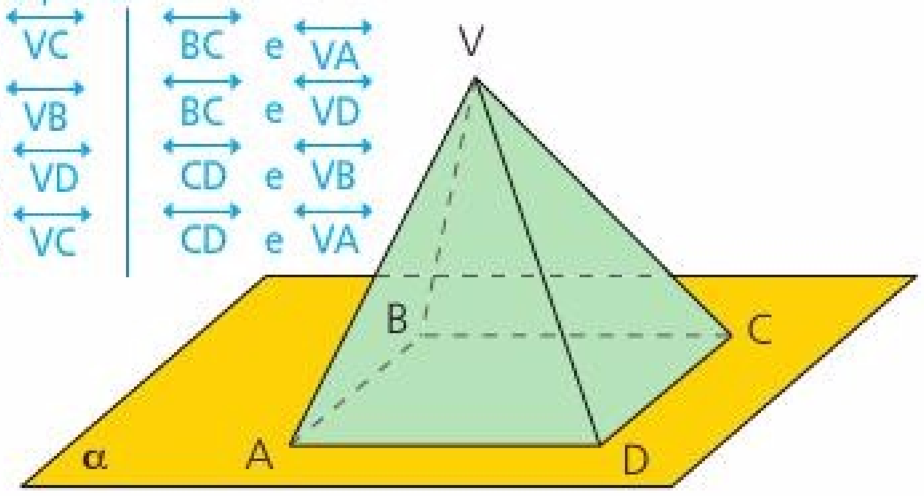
b) ortogonais;
$\overline{AB} \wedge \overline{EF}$

c) coplanares;
$\overline{AB} \wedge \overline{FG}$

17. Na pirâmide a seguir, considere as retas que ficam determinadas por dois de seus vértices, *A*, *B*, *C*, *D*. Determine quantos e quais são os pares de retas reversas.

Existem 8 pares:

$\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{VC}$
$\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{VB}$
$\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{VD}$
$\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{VC}$
$\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{VA}$
$\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{VD}$
$\overleftrightarrow{CD}$ e $\overleftrightarrow{VB}$
$\overleftrightarrow{CD}$ e $\overleftrightarrow{VA}$

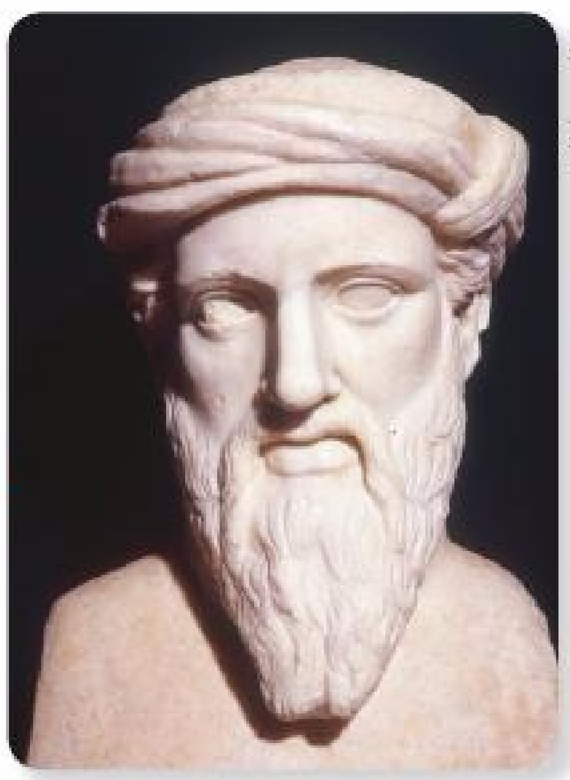


Quando, quem e onde

O conhecimento geométrico remonta a 2000 a.C. entre os babilônios, tendo tido enorme desenvolvimento também no antigo Egito. As demarcações de terras férteis inundadas pelo rio Nilo, feitas com enorme precisão, assim como o planejamento e edificação das pirâmides são provas indiscutíveis deste conhecimento. No entanto, foi entre os gregos que a Geometria começou a ser sistematizada e organizada como conhecimento científico.

Tales e Pitágoras, que viveram por volta de 520 a.C, Euclides, que viveu por volta de 320 a.C. e Ptolomeu, cujos estudos datam de aproximadamente 100 a.C., contribuíram com proposições e trabalhos que deram à Geometria impulso decisivo em seu desenvolvimento.

Professor, existe também a geometria não-euclidiana em que não valem os axiomas de Euclides.


Wikimedia

Pitágoras


Wikimedia

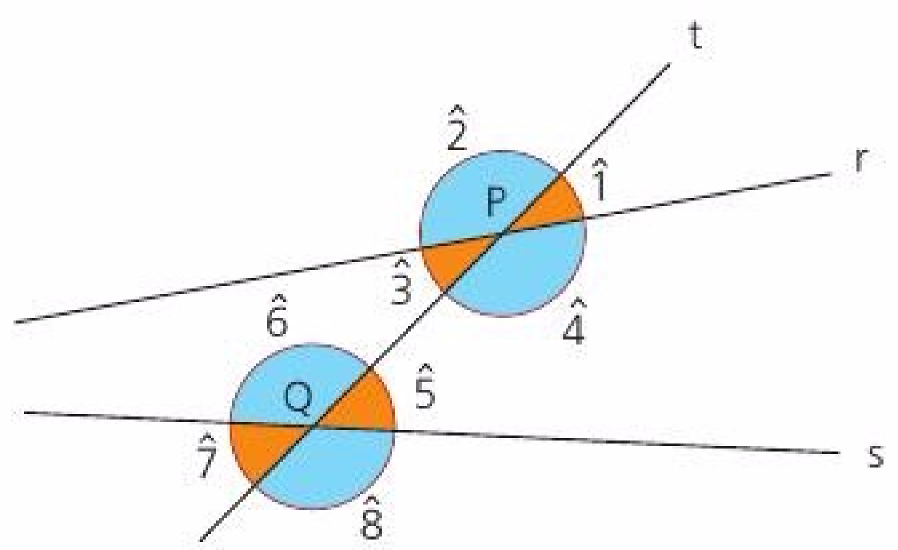
Euclides

Em especial, destaca-se a obra de autoria de Euclides, que compilou os conhecimentos de geometria em uma coletânia de13 volumes, denominada **Elementos**, cuja importância é tão grande que até hoje a geometria clássica é conhecida como **Geometria Euclidiana**.

Ângulos formados por paralelas e uma transversal

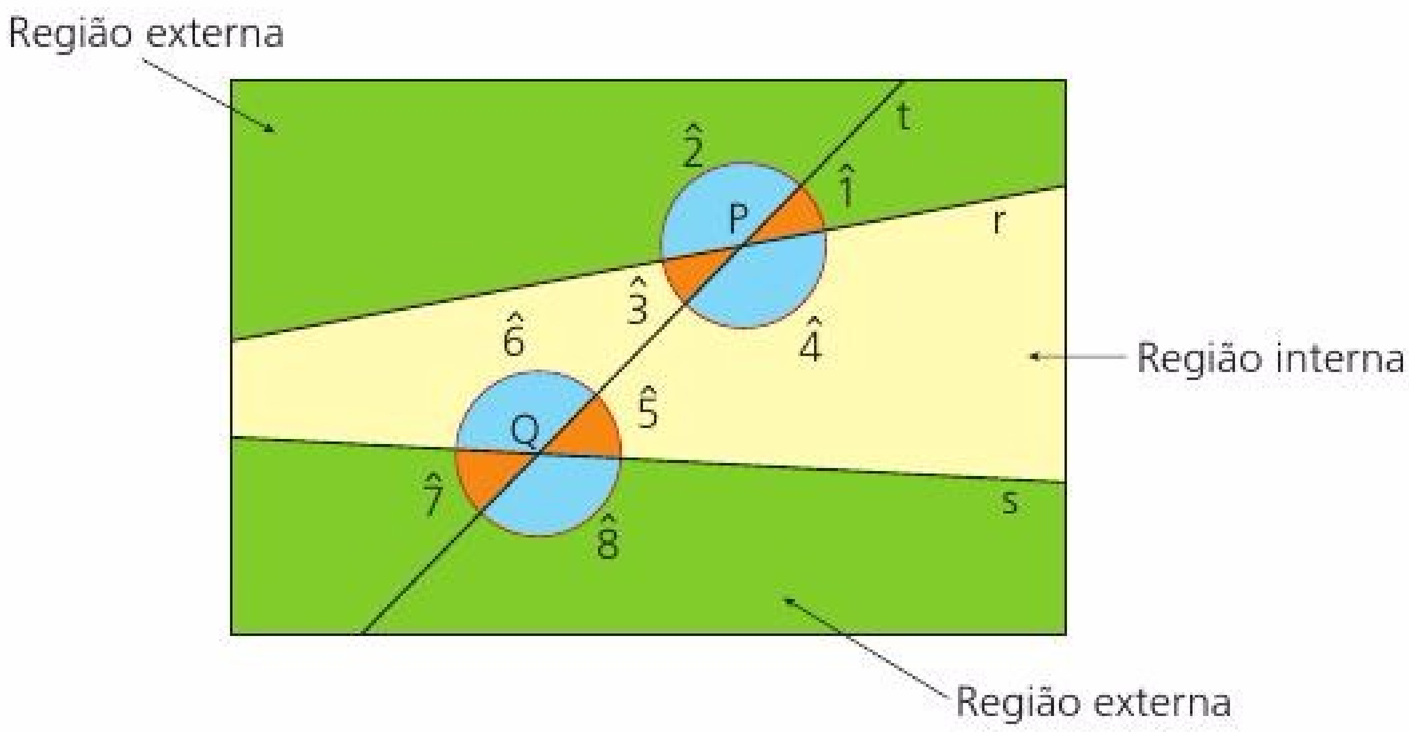
Antes de estudarmos os ângulos formados por duas retas paralelas que são cortadas por uma transversal, vamos entender e classificar os ângulos formados por **duas retas quaisquer** cortadas por uma transversal.

Observe o que ocorre na figura a seguir, na qual **r**, **s** e **t** são retas coplanares. Nessa situação, dizemos que a reta **t** é **transversal** às retas **r** e **s**. Note que a reta **t** corta a reta **r** no ponto P e corta a reta **s** em Q, formando oito ângulos.



As retas **r** e **s** dividem o plano em regiões internas ou externas em relação a elas.

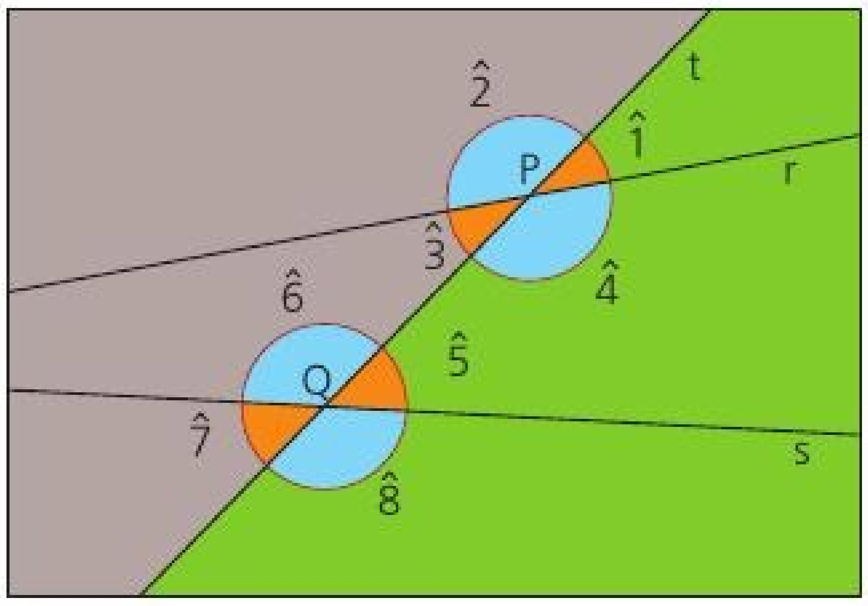
Professor, utilize o quadro para desenhar as retas com as transversais e destacar as regiões formadas por elas. Peça aos alunos para usarem régua nos traçados das retas, isso facilita a compreensão.



Note que os ângulos $\hat{3}$, $\hat{4}$, $\hat{5}$ e $\hat{6}$ estão na região interna. Por essa razão são denominados **ângulos internos**. Os ângulos $\hat{1}$, $\hat{2}$, $\hat{7}$ e $\hat{8}$, por sua vez, estão na região externa e por isso são chamados **ângulos externos**.

Fernanda Youssef

Se considerarmos, agora, a transversal **t**, veremos que ela divide o plano em duas partes.



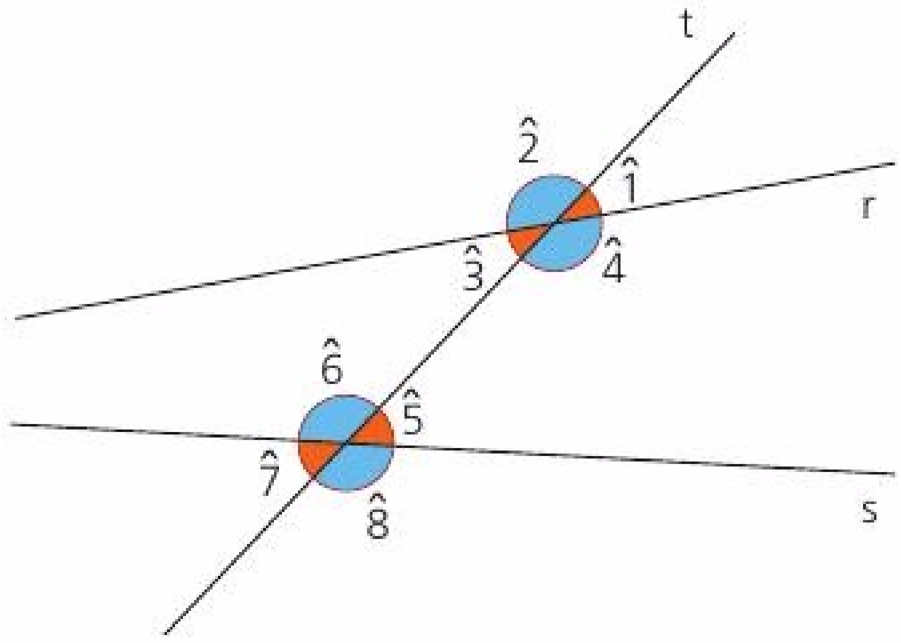
Fernanda Youssef

Os ângulos $\hat{1}$, $\hat{4}$, $\hat{5}$ e $\hat{8}$ são chamados **colaterais**, pois estão de um "mesmo lado" do plano em relação à rela **t**. Também são chamados **colaterais** os ângulos $\hat{2}$, $\hat{3}$, $\hat{6}$ e $\hat{7}$.

Cada um dos pares de ângulos formados pela transversal **t** ao cortar as retas **r** e **s** recebe uma denominação. Verifique essas denominações nas figuras mostradas a seguir.

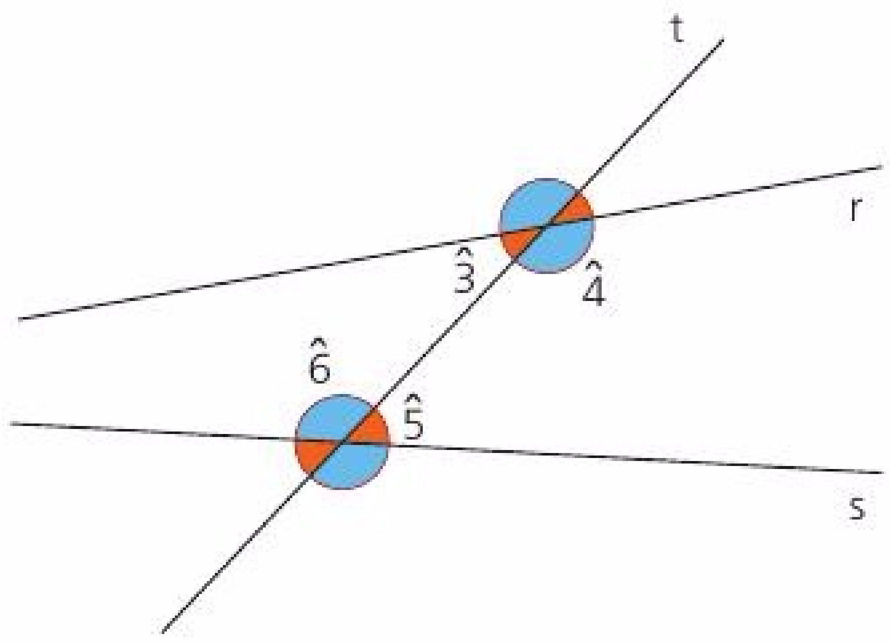
- $\hat{1}$ e $\hat{5}$, $\hat{2}$ e $\hat{6}$, $\hat{4}$ e $\hat{8}$; $\hat{3}$ e $\hat{7}$ são **ângulos correspondentes**;
- $\hat{4}$ e $\hat{5}$, $\hat{3}$ e $\hat{6}$, são **ângulos colaterais internos**
- $\hat{1}$ e $\hat{8}$, $\hat{2}$ e $\hat{7}$ são **ângulos colaterais externos**;
- $\hat{3}$ e $\hat{5}$, $\hat{4}$ e $\hat{6}$ são **ângulos alternos internos**;
- $\hat{2}$ e $\hat{8}$, $\hat{1}$ e $\hat{7}$ são **ângulos alternos externos**;
- $\hat{1}$ e $\hat{3}$, $\hat{5}$ e $\hat{7}$, $\hat{2}$ e $\hat{4}$, $\hat{6}$ e $\hat{8}$ são **ângulos opostos pelo vértice**.

- **ângulos correspondentes**



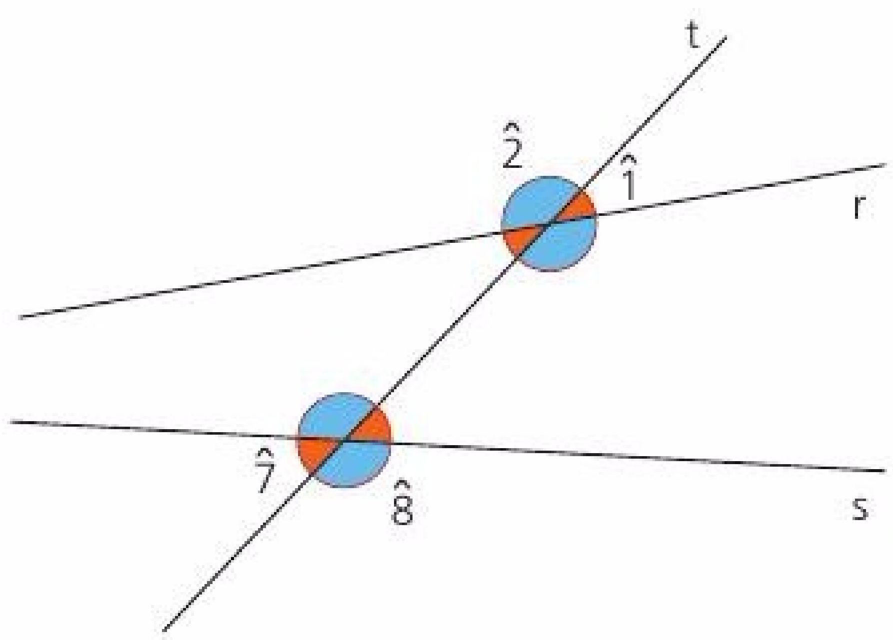
$\hat{1}$ e $\hat{5}$, $\hat{2}$ e $\hat{6}$, $\hat{4}$ e $\hat{8}$ e $\hat{3}$ e $\hat{7}$ são ângulos correspondentes porque são pares de ângulos que estão de um mesmo lado em relação à reta **t**, mas em regiões diferentes em relação às retas **r** e **s**.

- **ângulos colaterais internos**



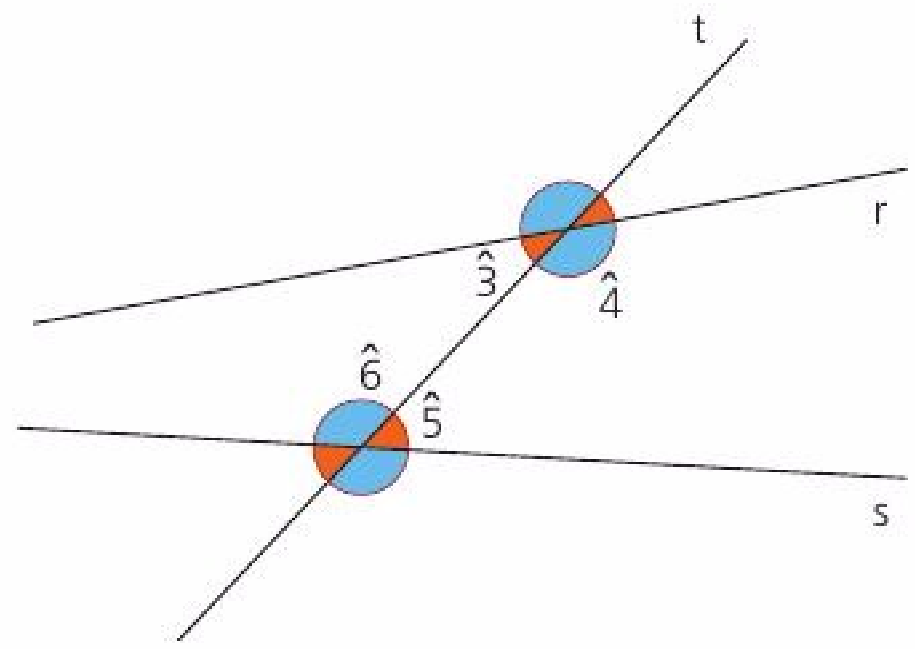
$\hat{4}$ e $\hat{5}$ e $\hat{3}$ e $\hat{6}$ são ângulos colaterais internos porque estão de um mesmo lado do plano e se encontram entre as retas **r** e **s**.

- **ângulos colaterais externos**



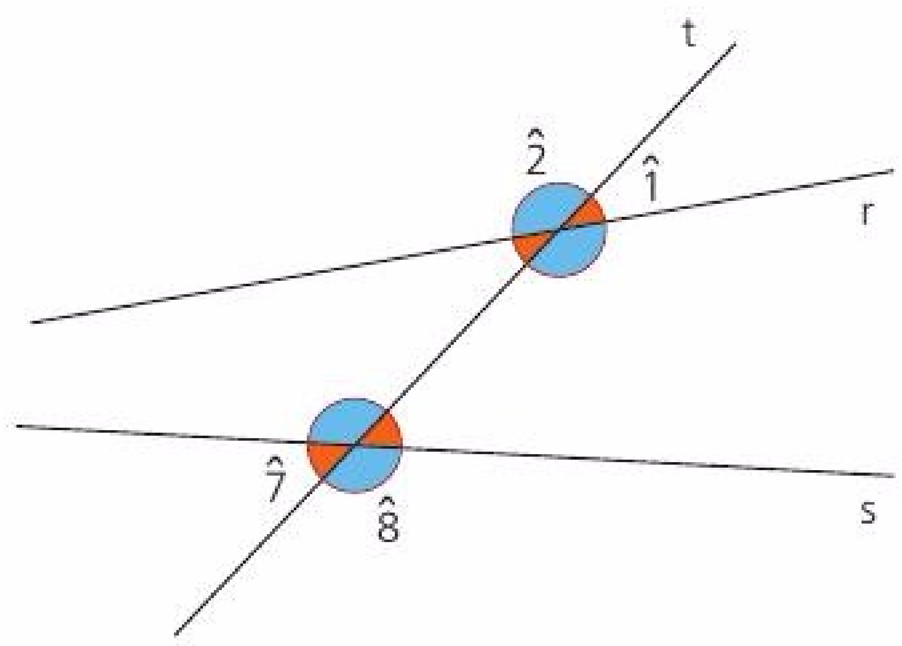
$\hat{2}$ e $\hat{7}$ e $\hat{1}$ e $\hat{8}$ são ângulos colaterais externos porque estão de um mesmo lado do plano e estão na região externa às retas **r** e **s**.

- **ângulos alternos internos**



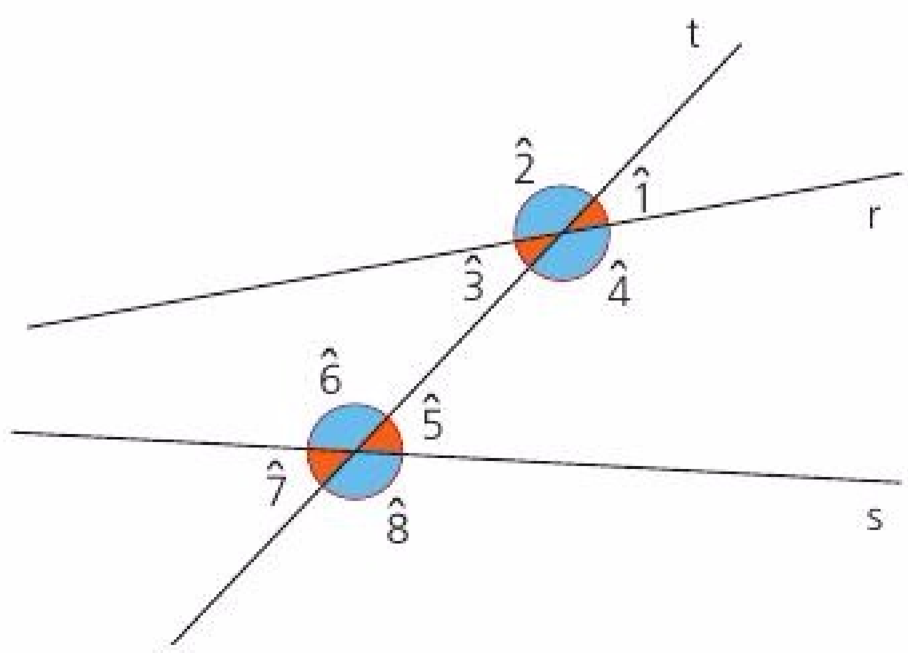
$\hat{3}$ e $\hat{5}$ e $\hat{4}$ e $\hat{6}$ são ângulos alternos internos porque ficam na região interna às retas **r** e **s**, mas em lados opostos do plano.

- **ângulos alternos externos**



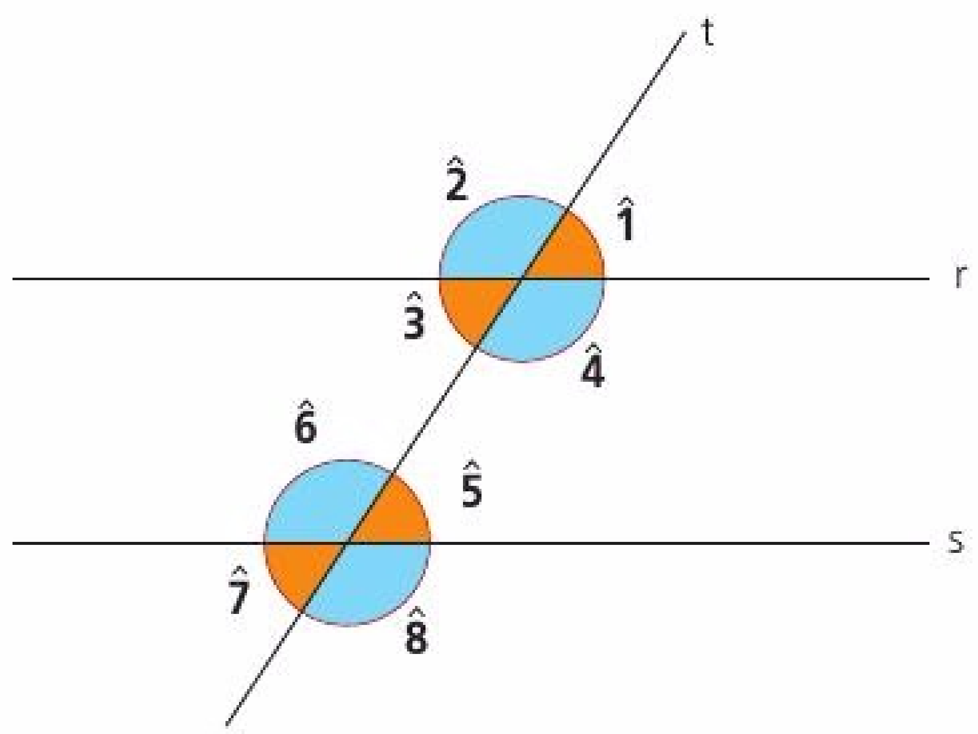
$\hat{2}$ e $\hat{8}$ e $\hat{1}$ e $\hat{7}$ são ângulos alternos externos porque ficam na região externa às retas **r** e **s** e em lados opostos à reta **t**.

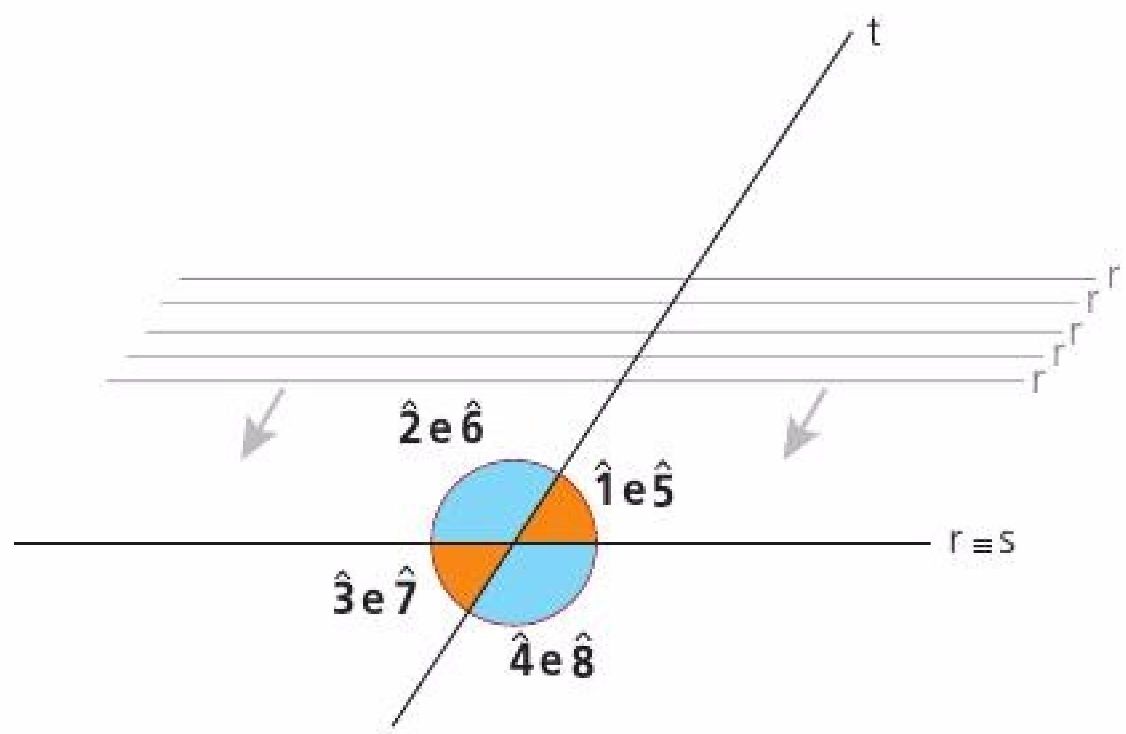
- **ângulos opostos pelo vértice**



$\hat{1}$ e $\hat{3}$, $\hat{5}$ e $\hat{7}$, $\hat{2}$ e $\hat{4}$ e $\hat{6}$ e $\hat{8}$ são ângulos opostos pelo vértice porque esses pares de ângulos têm vértice comum e lados contidos nas mesmas retas.

Vamos agora estudar as relações existentes entre os ângulos que ficam determinados quando uma transversal corta duas retas paralelas, **r** e **s**. Procure imaginar o que ocorreria se promovêssemos uma translação da reta **r** até que ela ficasse superposta à reta **s** ($r \equiv s$).

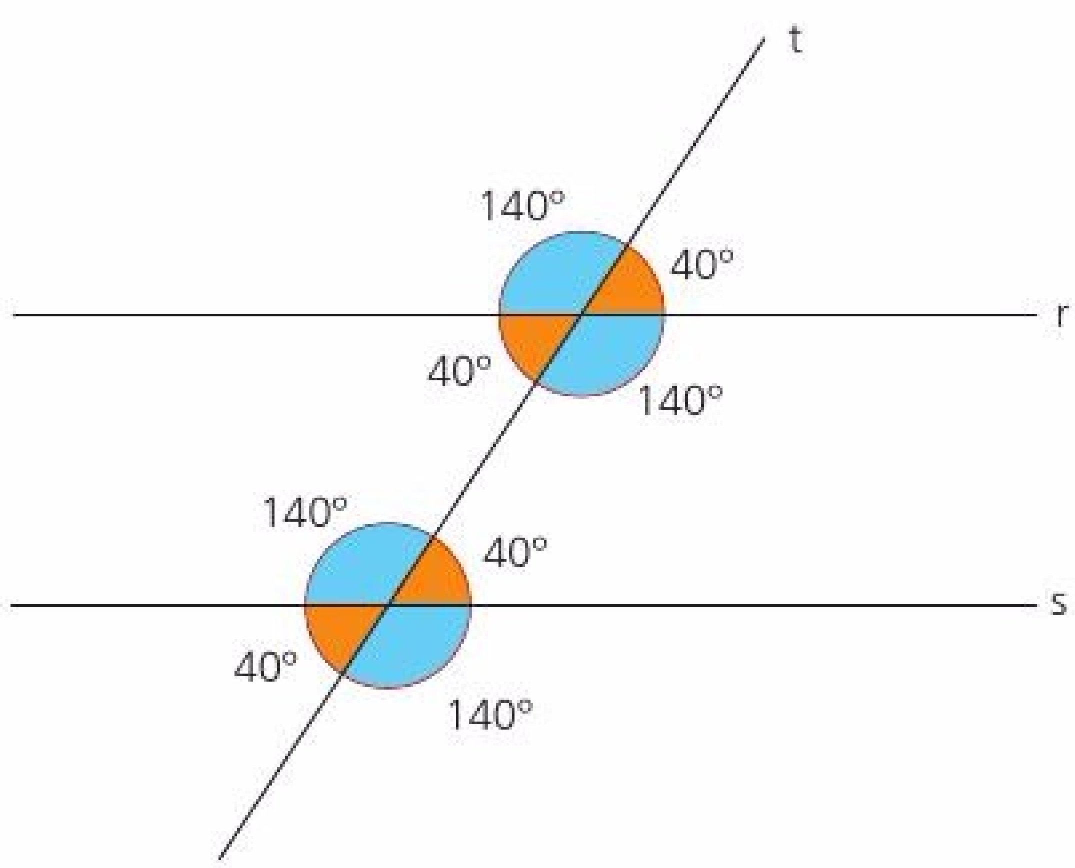




Note na figura as relações existentes entre os pares de ângulos formados pela transversal **t** ao cortar as paralelas **r** e **s**:

- Os ângulos $\hat{1}$ e $\hat{2}$ são **suplementares**, ou seja, somam 180°. O mesmo ocorre com $\hat{3}$ e $\hat{4}$, $\hat{5}$ e $\hat{6}$, $\hat{7}$ e $\hat{8}$;
- Os ângulos $\hat{1}$ e $\hat{3}$ são iguais, pois são **opostos pelo vértice**. Também são iguais $\hat{2}$ e $\hat{4}$, $\hat{5}$ e $\hat{7}$, $\hat{6}$ e $\hat{8}$;
- Os ângulos **correspondentes** $\hat{1}$ e $\hat{5}$, $\hat{4}$ e $\hat{8}$ são iguais; também são iguais $\hat{2}$ e $\hat{6}$, $\hat{3}$ e $\hat{7}$;
- Também são iguais os **alternos internos** $\hat{4}$ e $\hat{6}$, $\hat{3}$ e $\hat{5}$;
- Os **alternos externos** $\hat{2}$ e $\hat{8}$, $\hat{7}$ e $\hat{1}$ também são iguais;

Observe bem o exemplo a seguir e verifique as relações existentes entre os ângulos:

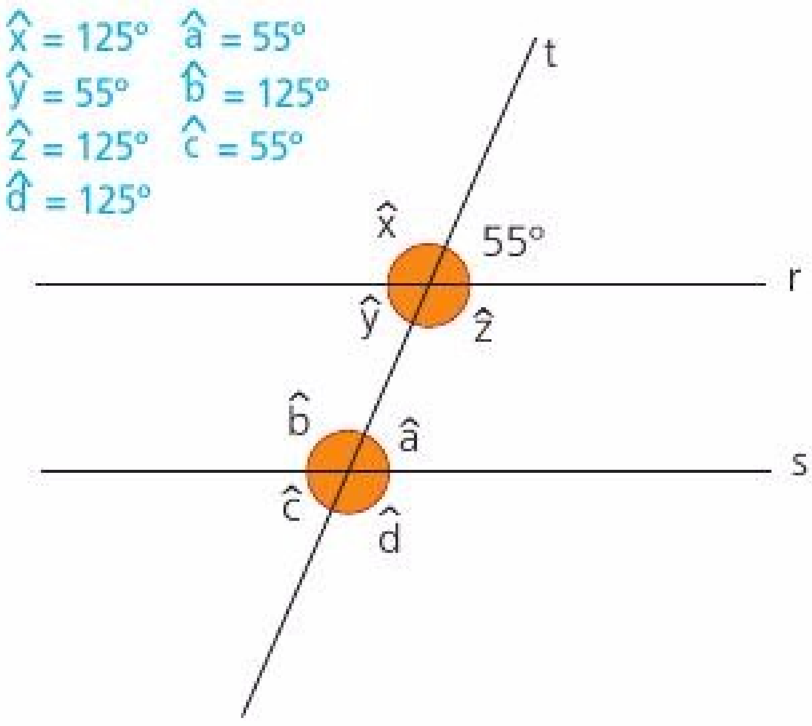


Atividades

Professor, peça aos alunos para copiarem no caderno as retas propostas em cada exercício para que se apropriem das resoluções.

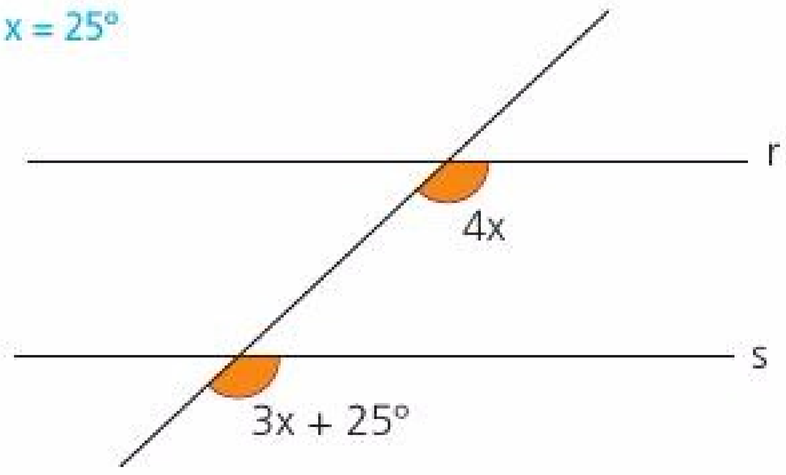
18. Calcule o valor dos ângulos desconhecidos na figura a seguir, sabendo-se que r//s:

$\hat{x} = 125°$ $\hat{a} = 55°$
$\hat{y} = 55°$ $\hat{b} = 125°$
$\hat{z} = 125°$ $\hat{c} = 55°$
$\hat{d} = 125°$

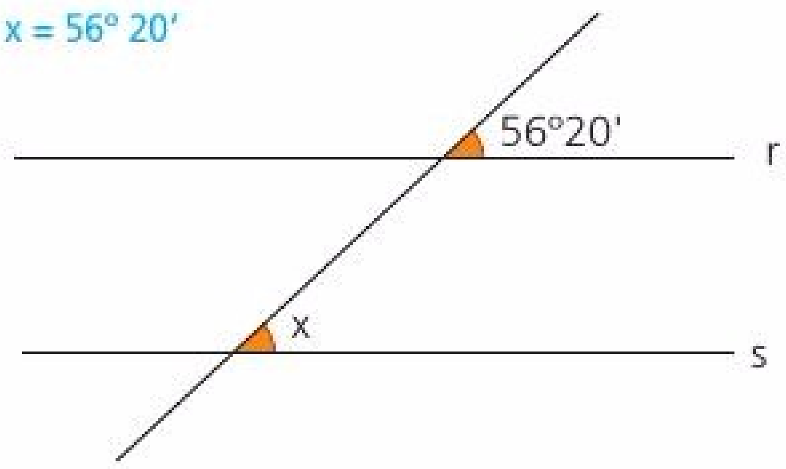


19. Determine o valor de **x** em graus em cada figura, sabendo-se que r//s:

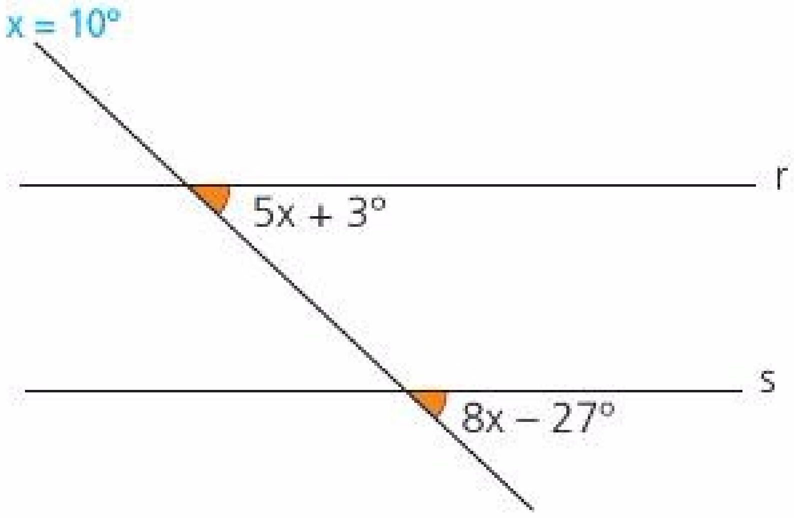
a) x = 25°



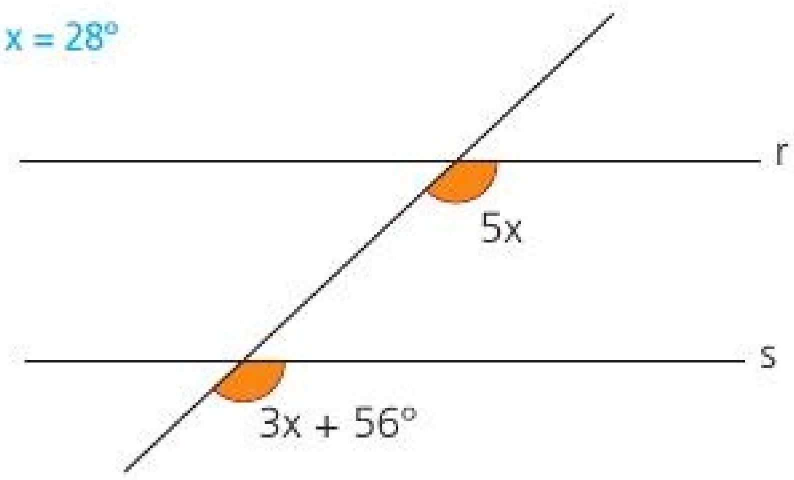
b) x = 56° 20′



c) x = 10°

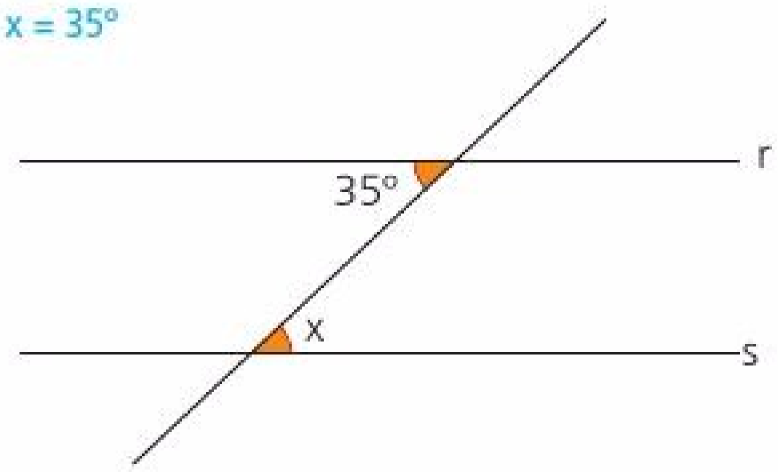


d) x = 28°

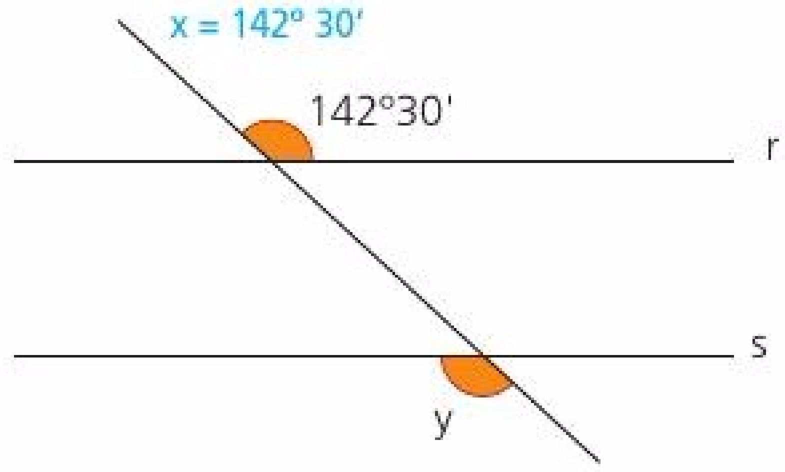


20. Sabendo que r//s, calcule os valores de **x** e **y** nas figuras:

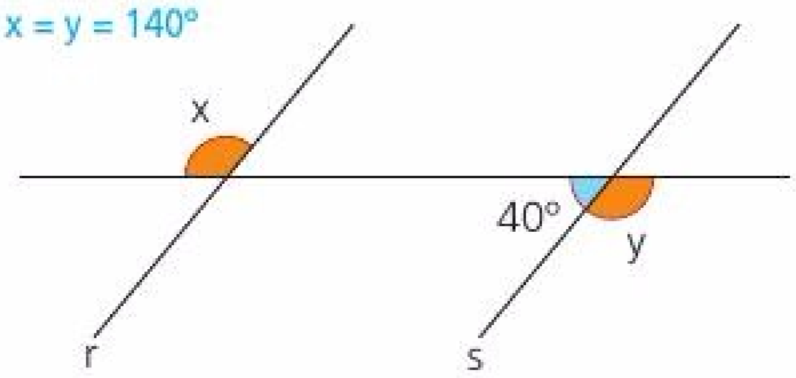
a) x = 35°



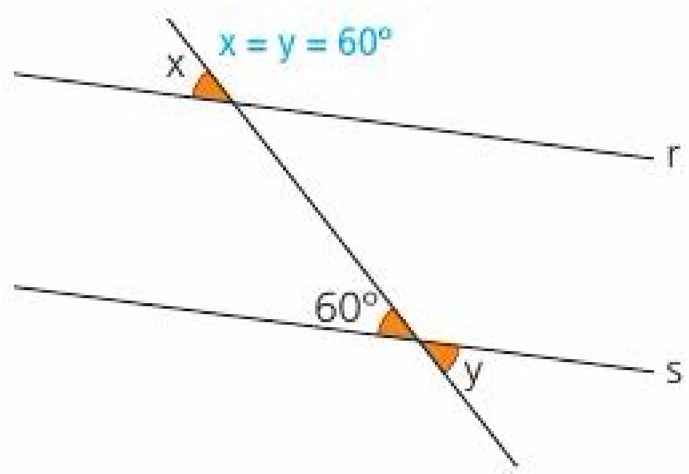
b) x = 142° 30′



c) x = y = 140°



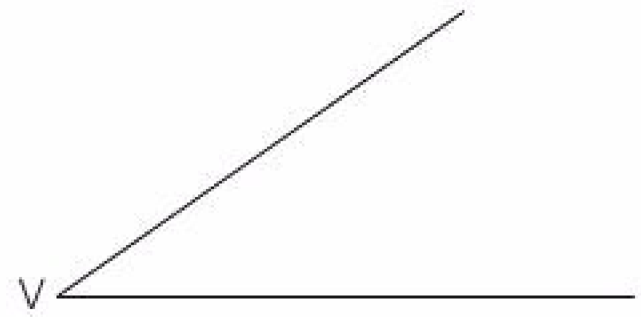
d) x = y = 60°



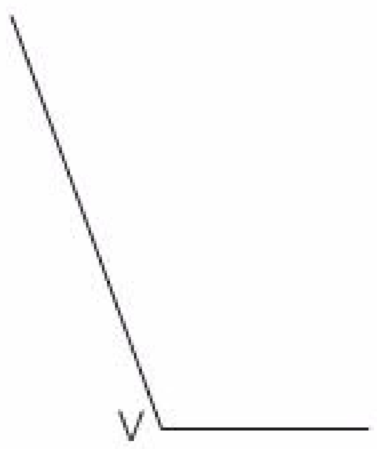
Para estudar

21. Meça cada um dos ângulos a seguir com um transferidor. Em seguida, desenhe cada ângulo em seu caderno e, utilizando compasso e régua, trace a bissetriz de cada um.

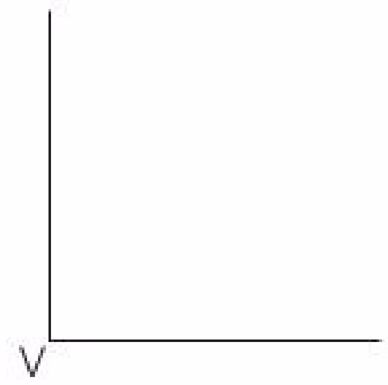
a)



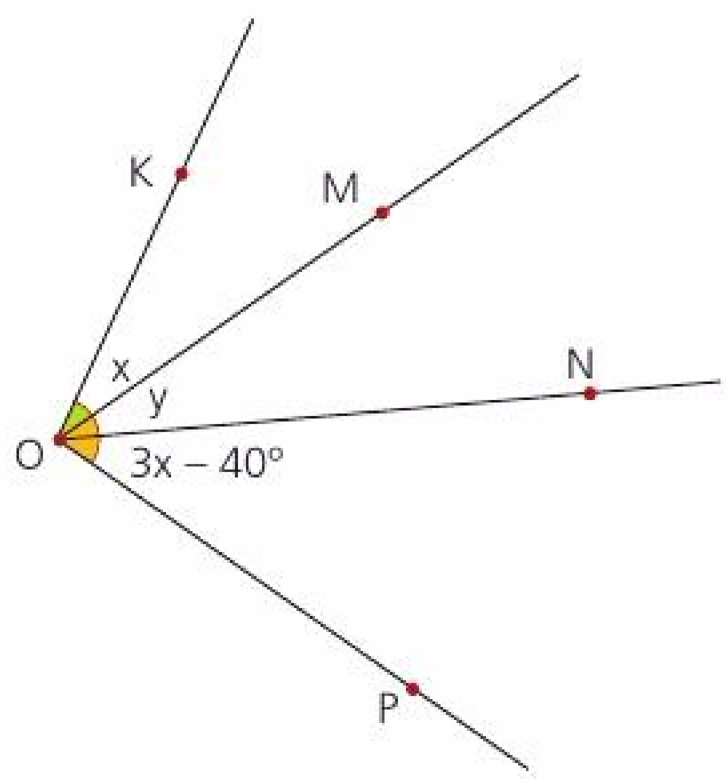
b)



c)



22. Sabendo-se que, na figura, $\overrightarrow{ON}$ é bissetriz do ângulo $M\hat{O}P$ e que $\overrightarrow{OM}$ é bissetriz de $K\hat{O}N$, determine os valores de **x** e **y** em graus.



23. Traçando-se a bissetriz de um dos ângulos determinados pela bissetriz de um ângulo de 60°, que ângulos teremos determinado?

Interpretar texto

24. Classifique cada afirmação a seguir como verdadeira ou falsa:

a) Duas retas reversas são sempre perpendiculares.

b) Duas retas que não têm ponto comum são reversas.

c) Duas retas que não têm ponto comum não estão contidas num único plano

d) Se uma reta intercepta uma outra, interceptará também todas as paralelas a esta outra reta.

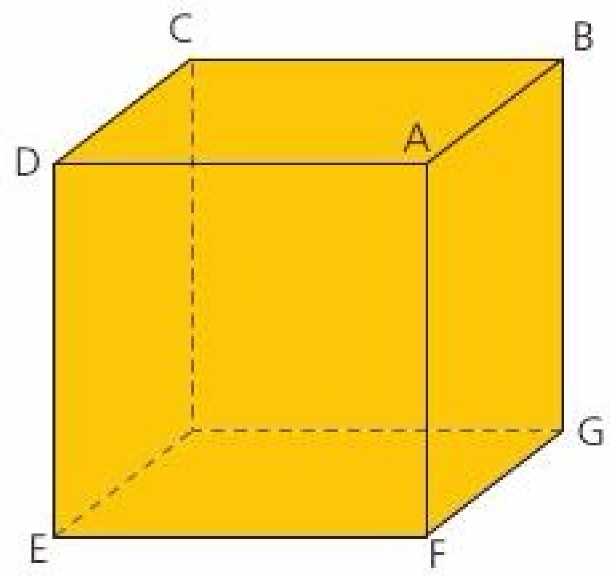
e) Duas retas de um mesmo plano são concorrentes ou reversas.

f) Duas retas que não têm um ponto comum são paralelas ou reversas.

25. Considere os pontos **A**, **B**, **C**, **D**, **E**, **F** e **G** vértices do cubo da figura e as retas:

Analisar figura

r, que passa por E e B;
s, que passa por F e G;
t, que passa por D e E;
u, que passa por C e A



Identifique a posição relativa das retas:

a) **r** e **s** b) **t** e **u** c) **s** e **u** d) **r** e **t**

26. Classifique como verdadeira ou falsa cada afirmação a seguir e justifique sua resposta.

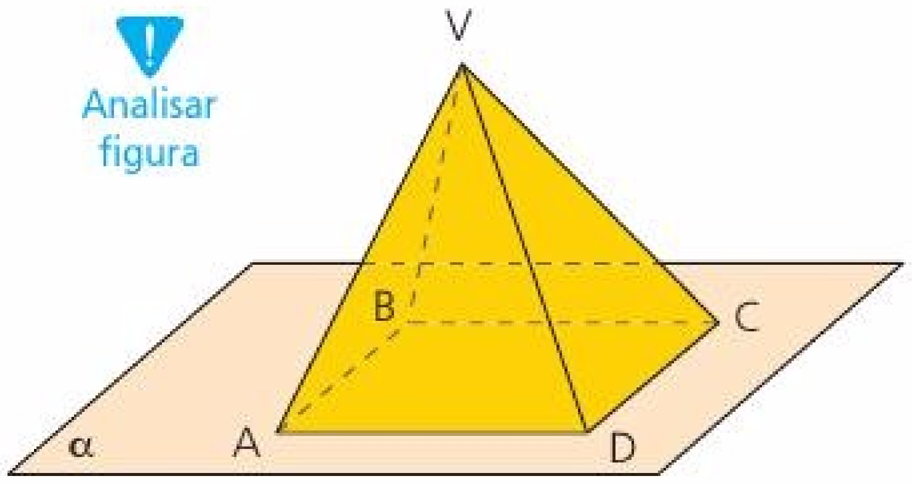
Argumentar

a) Se dois planos têm uma reta comum, eles são perpendiculares.

b) Dois planos podem ter uma reta em comum.

27. Considere a pirâmide a seguir, cuja base é um quadrado que está no plano α.

Analisar figura



Classifique como verdadeira ou falsa a cada afirmação:

a) Qualquer reta que passa pelo vértice V é paralela à base α

b) $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{AD}$ são paralelas.

c) $\overleftrightarrow{VA}$, $\overleftrightarrow{VB}$, $\overleftrightarrow{VC}$ e $\overleftrightarrow{VD}$ são concorrentes.

e) Qualquer reta que passa por V é perpendicular ao plano da base.

28. Classifique cada afirmação a seguir como verdadeira ou falsa:

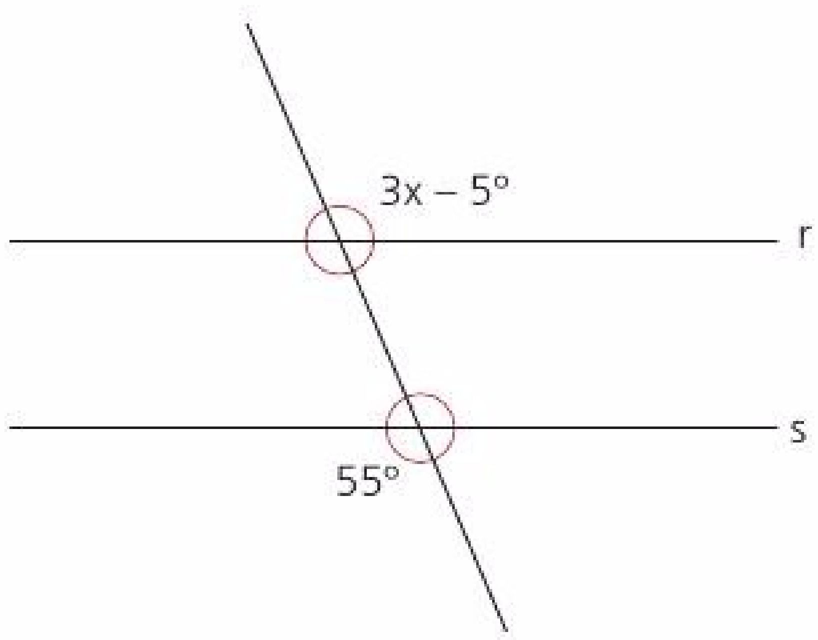
a) Duas retas concorrentes podem ser perpendiculares.

b) Duas retas ortogonais são sempre reversas.

c) Duas retas reversas que formam ângulo de 90° são perpendiculares.

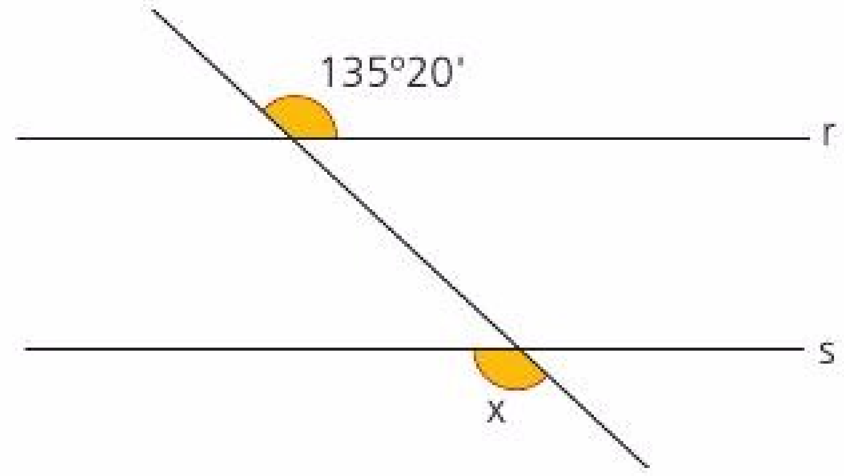
e) Duas retas concorrentes são perpendiculares.

29. Calcule o valor de **x** em graus, sabendo que r // s:

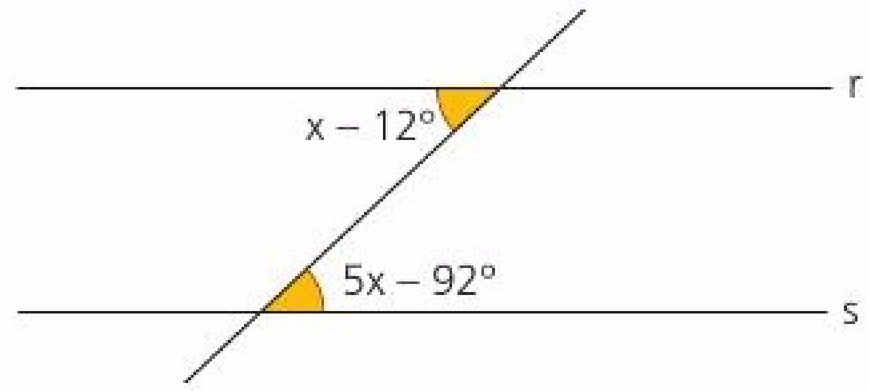


30. Determine **x** em cada caso sabendo que r // s.

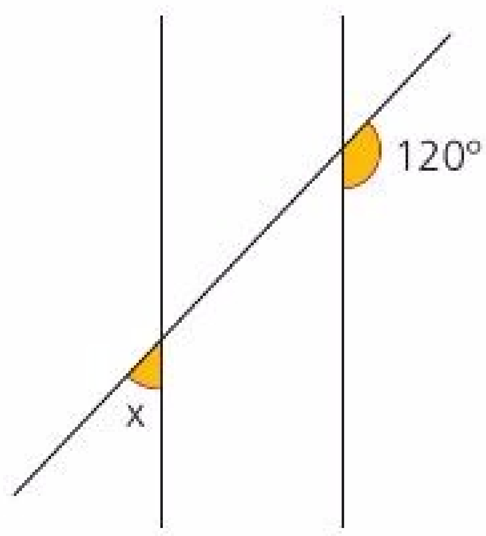
a)



b)



c)

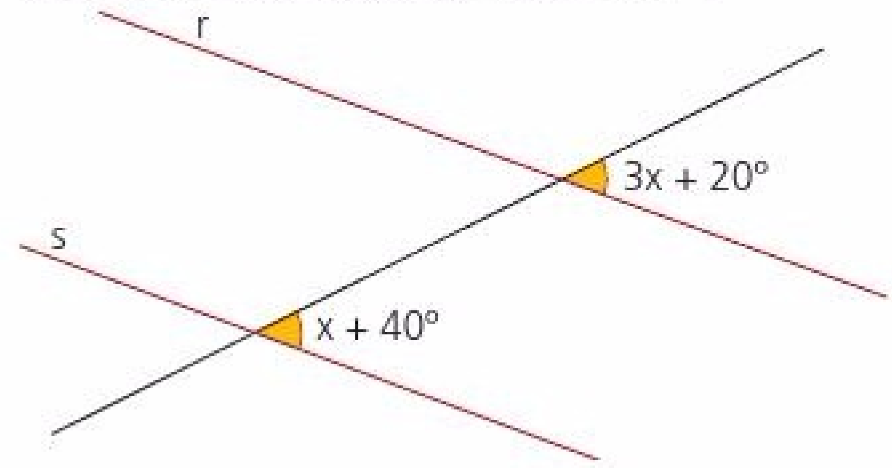


31. Duas retas paralelas e uma transversal a elas determinam ângulos correspondentes de medidas x + 30° e 3x – 10°. Construa a figura que epresenta a situação e calcule as medidas dos ângulos obtusos determinados por essas retas.

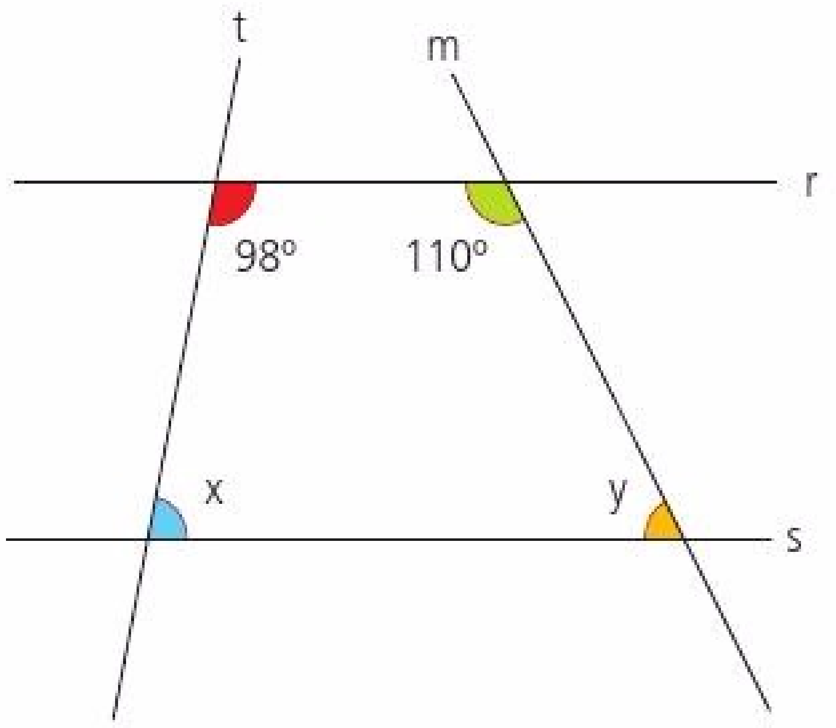
Construir figura

32. Uma transversal **t** intercepta duas retas paralelas **r** e **s** e forma quatro ângulos agudos. A soma desses ângulos é 120°. Calcule a medida dos quatro ângulos obtusos formados.

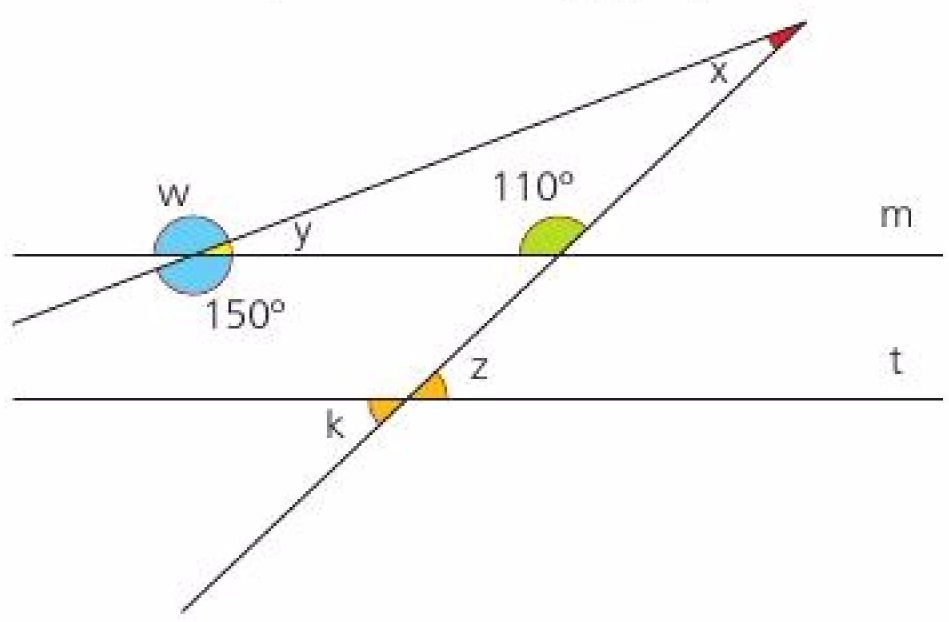
33. Calcule **x** e determine a medida dos ângulos indicados na figura, sendo r // s



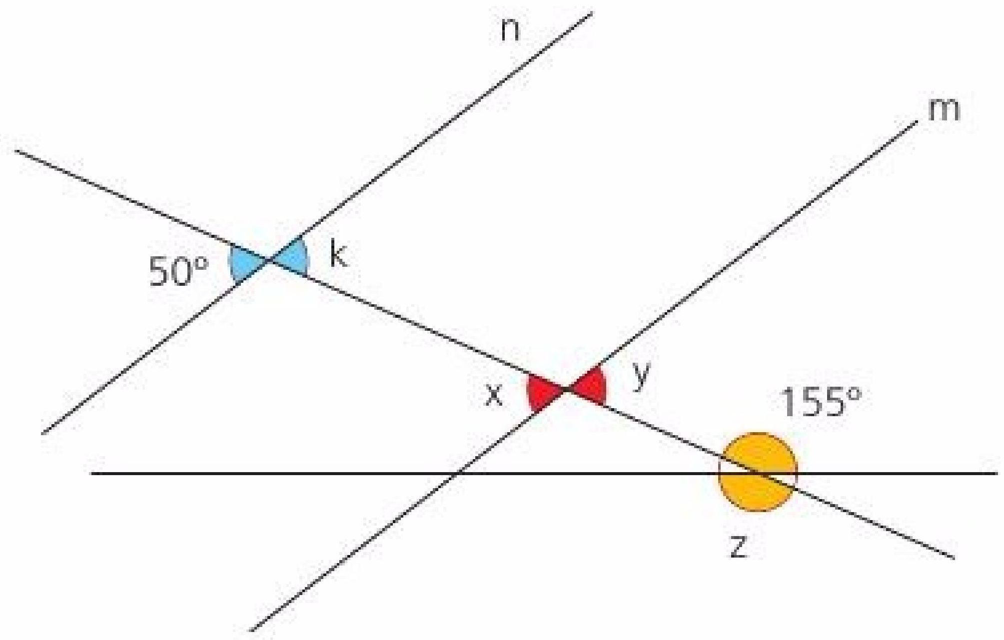
34. Na figura a seguir, **t** e **m** são transversais ao par de paralelas **r** e **s**. Determine os ângulos **x** e **y**. Em seguida, determine a soma dos ângulos internos do trapézio definido pelas intersecções das retas **t** e **m** com **r** e **s**.



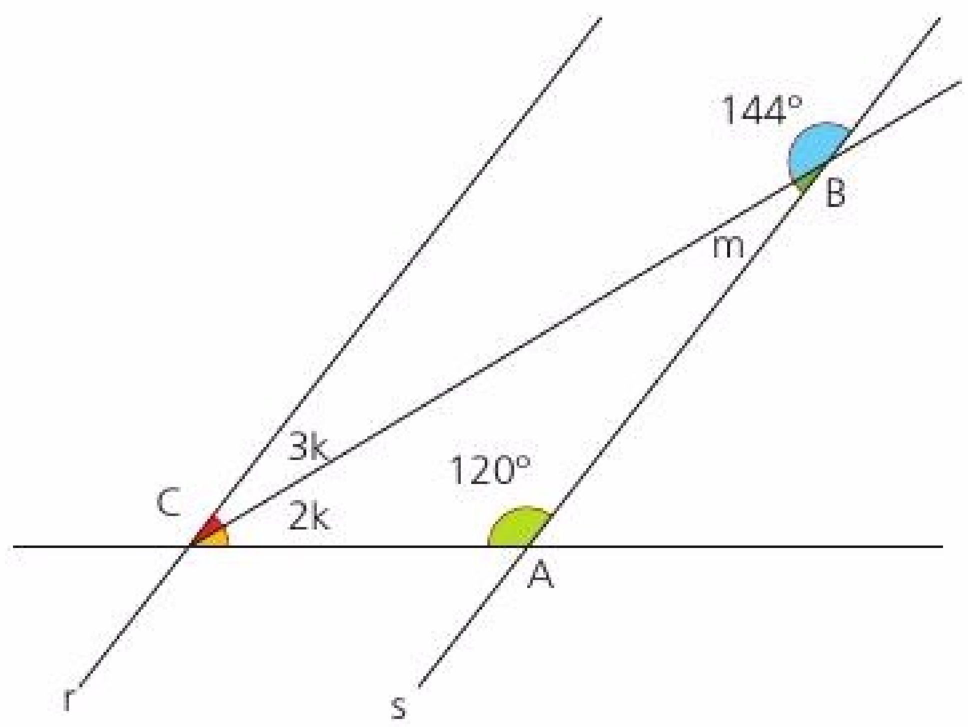
35. Sendo m // t, determine **x**, **y**, **z**, **w** e **k**.



36. As retas m e n são paralelas. Determine o valor de **x**, **y**, **z** e **k**.

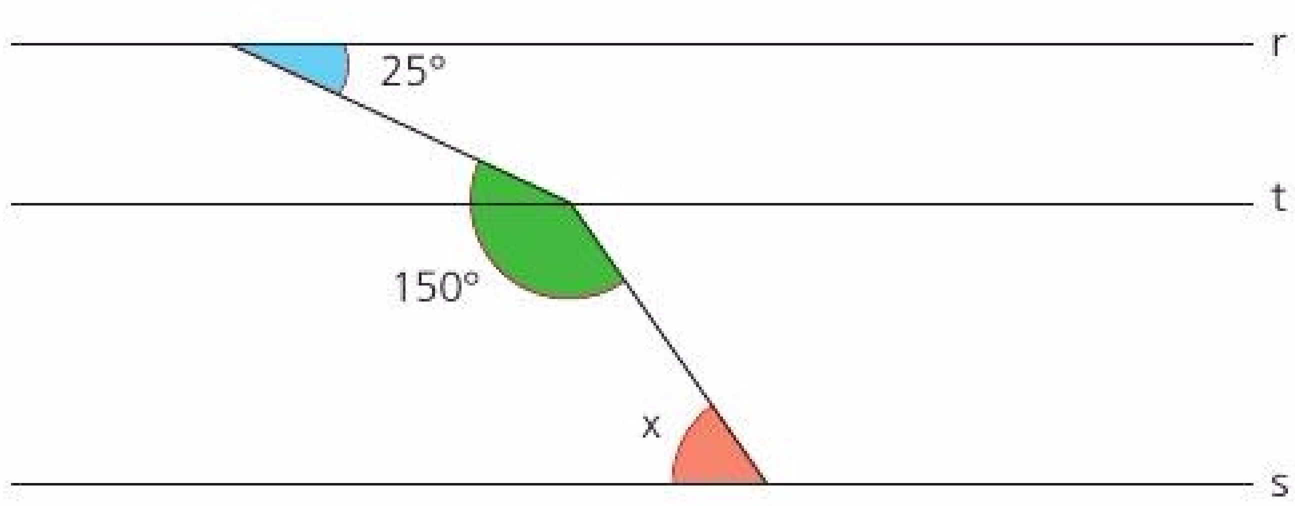


37. As retas **r** e **s** são paralelas. Calcule **k** e **m** e determine as medidas dos ângulos internos do triângulo ABC na figura a seguir.



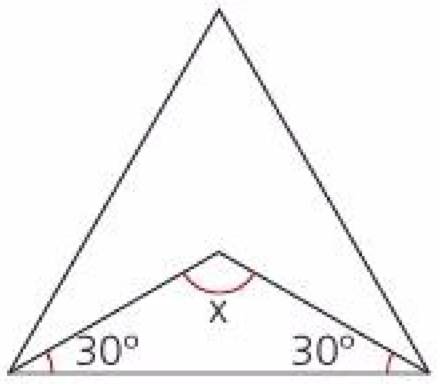
Desafio

Na figura abaixo, as retas **r**, **t** e **s** são paralelas entre si. Calcule o valor do ângulo **x**.



Resolução das atividades

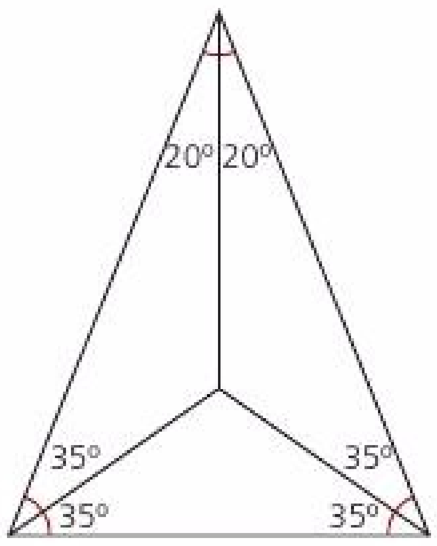
1.



$x + 30° + 30° = 180°$

$x = 120°$

2.



$x = 110°$

$y = 125°$

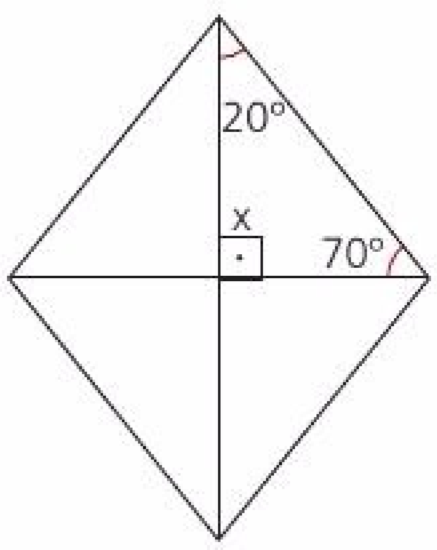
$z = 125°$

3. 45°

4. $x = 2x - 40°$

$x = 40°$

5.



$x + 70° + 20° = 180°$

$x = 90°$

6. $D\hat{O}C = 25°$

$B\hat{O}C = 35°$

$B\hat{O}D = D\hat{O}C + B\hat{O}C = 25° + 35° = 60°$

7. a) sim

b) não, só no caso do triângulo equilátero. O encontro dos bissetrizes é o incentro, centro da circunferência inscrita no triângulo.

8. a) Sim

b) Não

9. a) As bissetrizes internas de um quadrado coincidem com as diagonais do mesmo.

b) As diagonais de um retângulo não são bissetrizes de seus respectivos ângulos.

10. a) V

b) V

c) V

d) F

e) V

f) V

11. a) F

b) F

12. a) A, B, F

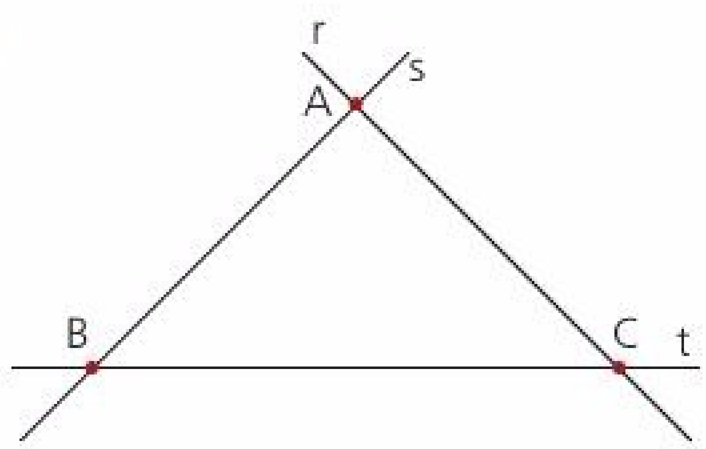
b) $\overline{CB}$ // $\overline{DA}$ // $\overline{EF}$

$\overline{CD}$ // $\overline{AB}$ // $\overline{FG}$

c) $\overline{AB} \wedge \overline{EF}$

$\overline{AD} \wedge \overline{FG}$

13.



14. a) V

b) V

c) F

d) V

e) V

15. a) V

b) F

c) V

d) V

e) F

16. a) $\overline{AB} \perp \overline{BC}$

b) $\overline{AB} \wedge \overline{EF}$

c) $\overline{AB} \wedge \overline{FG}$

17. Os vértices da pirâmide determinam, dois a dois, 8 pares de retas reversas:

$\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{VC}$

$\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{VB}$

$\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{VD}$

$\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{VC}$

$\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{VA}$

$\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{VD}$

$\overleftrightarrow{CD}$ e $\overleftrightarrow{VB}$

$\overleftrightarrow{CD}$ e $\overleftrightarrow{VA}$

18. $\hat{x} = 180° - 55° \rightarrow \hat{x} = 125°$

$y = 55°$ (opostos pelo vértice)

$\hat{z} = \hat{x}$ (opostos pelo vértice) $\rightarrow \hat{z} = 125°$

$\hat{b} = \hat{x}$ (correspondentes) $\rightarrow \hat{b} = 125°$

$\hat{a} = 55°$ (correspondentes)

$\hat{d} = \hat{z}$ (correspondentes) $\rightarrow \hat{d} = 125°$

$\hat{c} = \hat{y}$ (correspondentes) $\rightarrow \hat{c} = 55°$

19. a) $4x = 3x + 25°$

$x = 25°$

b) $x = 56° 20'$

c) $5x + 3° = 8x - 27°$

$3x = 30°$

$x = 10°$

d) $5x = 3x + 56°$

$2x = 56°$

$x = 28°$

20. a) $x = 35°$ (alternos internos)

b) $x = 142° 30'$ (alternos externos)

c) $x = y = 180° - 40° = 140°$ (alternos externos)

d) $x = y = 60°$ (alternos externos)

Respostas da seção Para estudar

21. Construção no caderno.

22. $y = x = 20°$

23. 15°

24. a) F
b) F
c) F
d) F
e) F
f) V

25. a) reversas
b) reversas
c) reversas
d) concorrentes

26. a) Falsa, pois podem ser simplesmente concorrentes.
b) Verdadeira, pois podem ter dois pontos comuns que determinam uma reta.

27. a) F
b) V
c) V
d) F

28. a) V
b) V
c) F
d) F

29. $x = 60°$

30. a) $x = 135°20'$
b) $x = 20°$
c) $x = 60°$

31. Os ângulos obtusos medem 110°.

32. Cada obtuso mede 150°.

33. O ângulo mede 50°.

34. A soma dos ângulos internos é 360°.

35. $w = 150°$

$y = 30°$

70°

36. $z = 155°$

$x = y = k = 65°$

37. $k = 12°$

$m = 36°$

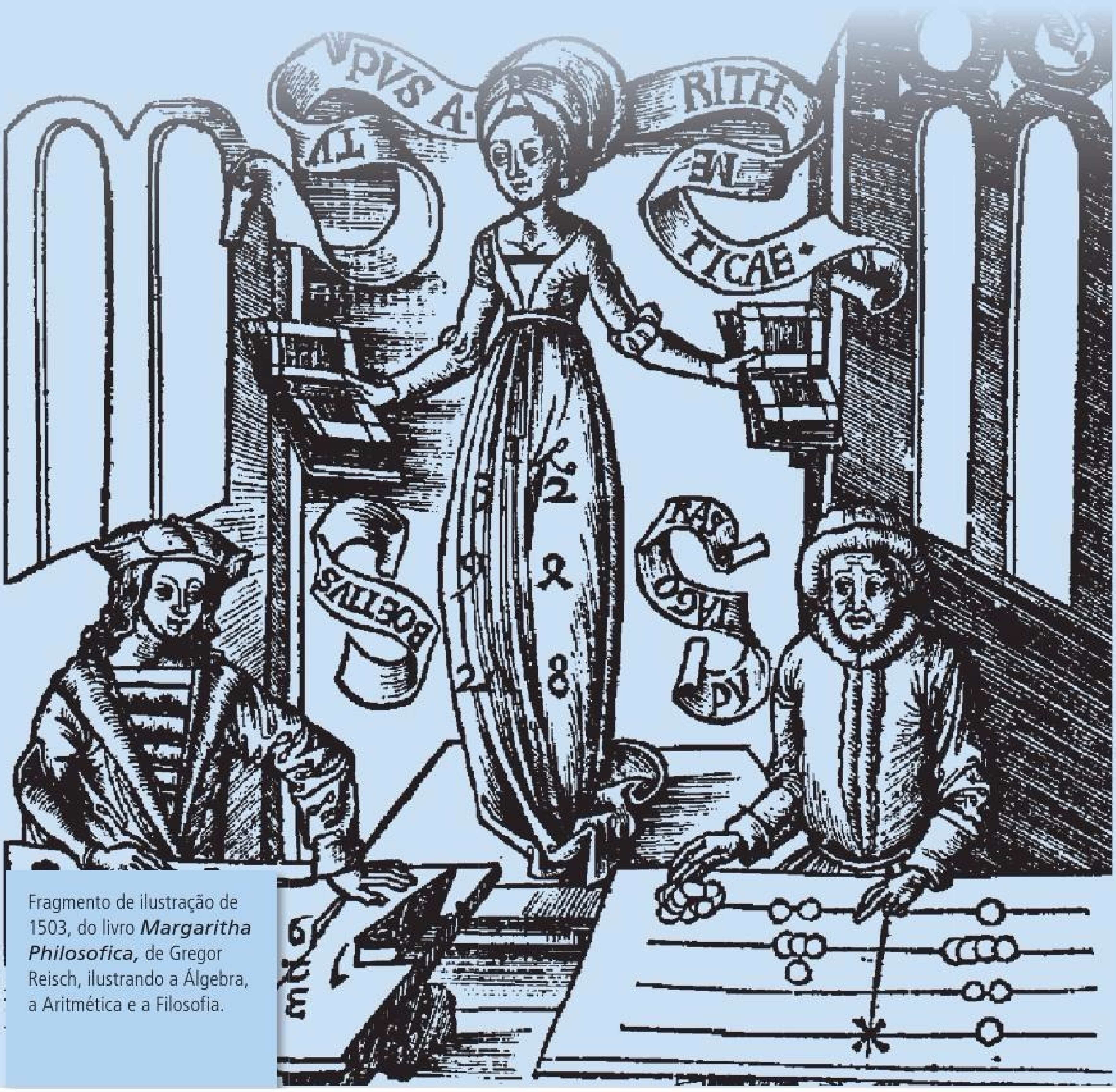
Os ângulos internos são 24°, 36°, 120°.

capítulo 6

Monômios e Polinômios

- Expressões algébricas
- Monômios
- Polinômios

Bibliothèque de la Faculté de Médecine; Paris; França



Fragmento de ilustração de 1503, do livro ***Margaritha Philosofica,*** de Gregor Reisch, ilustrando a Álgebra, a Aritmética e a Filosofia.

Conversa Inicial

É comum encontrarmos pessoas que acreditam que sem estudar os números, não se estuda Matemática. Isso é verdade, tanto assim que, até aqui, estudamos as operações de adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação, utilizando números racionais.

Aplicando corretamente as propriedades dessas operações, podemos resolver diversos tipos de problemas aritméticos e geométricos envolvendo valores numéricos específicos.

O desenvolvimento de uma nomenclatura específica para representar os diversos problemas que podemos resolver com um único processo, deu origem à **notação algébrica**. Ou seja, com a notação algébrica, podemos representar as resoluções de problemas semelhantes, porém, para diferentes valores numéricos.

Para representar essas situações, expressamos operações e resoluções de problemas utilizando letras, ao invés de números. Essas letras podem, assim, receber diferentes valores numéricos, para diferentes situações.

Veja, por exemplo o problema numérico a seguir:

"Quanto obteremos se triplicarmos o número 5 e somarmos 8 ao resultado?"

Se escrevermos a expressão numérica, obtemos o seguinte resultado:

$$\underbrace{3 \cdot 5}_{\text{Triplo do número 5}} + \underbrace{8}_{\text{Somar com 8}} = 15 + 8 = 23$$

Observe, agora, como seria a expressão para um número **x** qualquer:

$$3 \cdot x + 8$$

Nesse caso, o **x** é uma variável que pode assumir qualquer valor racional ou qualquer outro valor numérico que nos interessar. Passamos a ter uma expressão do seguinte problema: "**qual o valor do triplo de um número somado a 8?**"

A expressão de sentenças matemáticas utilizando letras se transformou ao longo dos séculos, desde a antiga Babilônia, na linguagem da álgebra. As soluções de equações, por exemplo, são encontradas desde 500 a.C. com os pitagóricos, com Euclides, por volta de 300 a.c e também nos trabalhos de Diofanto de Alexandria (300 d.C.), considerado por muitos como o pai da álgebra.

Diofanto de Alexandria

Neste capítulo, vamos estudar as formas de trabalhar com **monômios** e **polinômios** para dominarmos as operações algébricas que nos permitirão representar e resolver os mais diversos problemas.

Professor: Leia o texto com seus alunos e, no quadro, anote os principais pontos do texto. Procure mostrar que existe uma formalidade ao se escrever uma expressão algébrica para quea leitura seja facilitada. Pode ser um bom momento para explicar a linguagem matemática e o raciocínio lógico que estão presentes nos textos matemáticos.

Expressões algébricas

As expressões que possuem uma ou mais variáveis representadas por letras são denominadas **expressões algébricas** e são estudadas numa parte da Matemática chamada **Álgebra**.

Veja alguns exemplos:

- $2x + 7$
- $x^2 + xy - y$
- $n^4 - 5$
- $\dfrac{a^5 + ab}{b^5}$

É muito comum omitirmos o sinal de multiplicação numa expressão algébrica. Dessa maneira, quando escrevemos **ab**, estamos expressando o produto **a · b** (**a** multiplicado por **b**).

Valor numérico de uma expressão algébrica

Quando substituímos as variáveis de uma expressão algébrica por números e efetuamos as operações indicadas, obtemos o **valor numérico da expressão**.

Veja os exemplos a seguir:

- O valor numérico da expressão $3x + 5$ para $x = 8$ é calculado substituindo-se o **x** por 8 na expressão:

$$3x + 5 \rightarrow x = 8 \rightarrow 3 \cdot 8 + 5 = 24 + 5 = 29$$

- O valor numérico da expressão $7x - 2y^2$ para $x = 5$ e $y = 3$ é:

$$7x - 2y^2 \rightarrow x = 5 \text{ e } y = 3 \rightarrow 7 \cdot 5 - 2(3)^2 = 35 - 2 \cdot 9 = 35 - 18 = 17$$

- Um número **A** é igual ao valor numérico da expressão $x^2 - 5x + 6$ para $x = 3$. Sendo assim, calculamos **A** substituindo **x** por 3 na expressão algébrica.

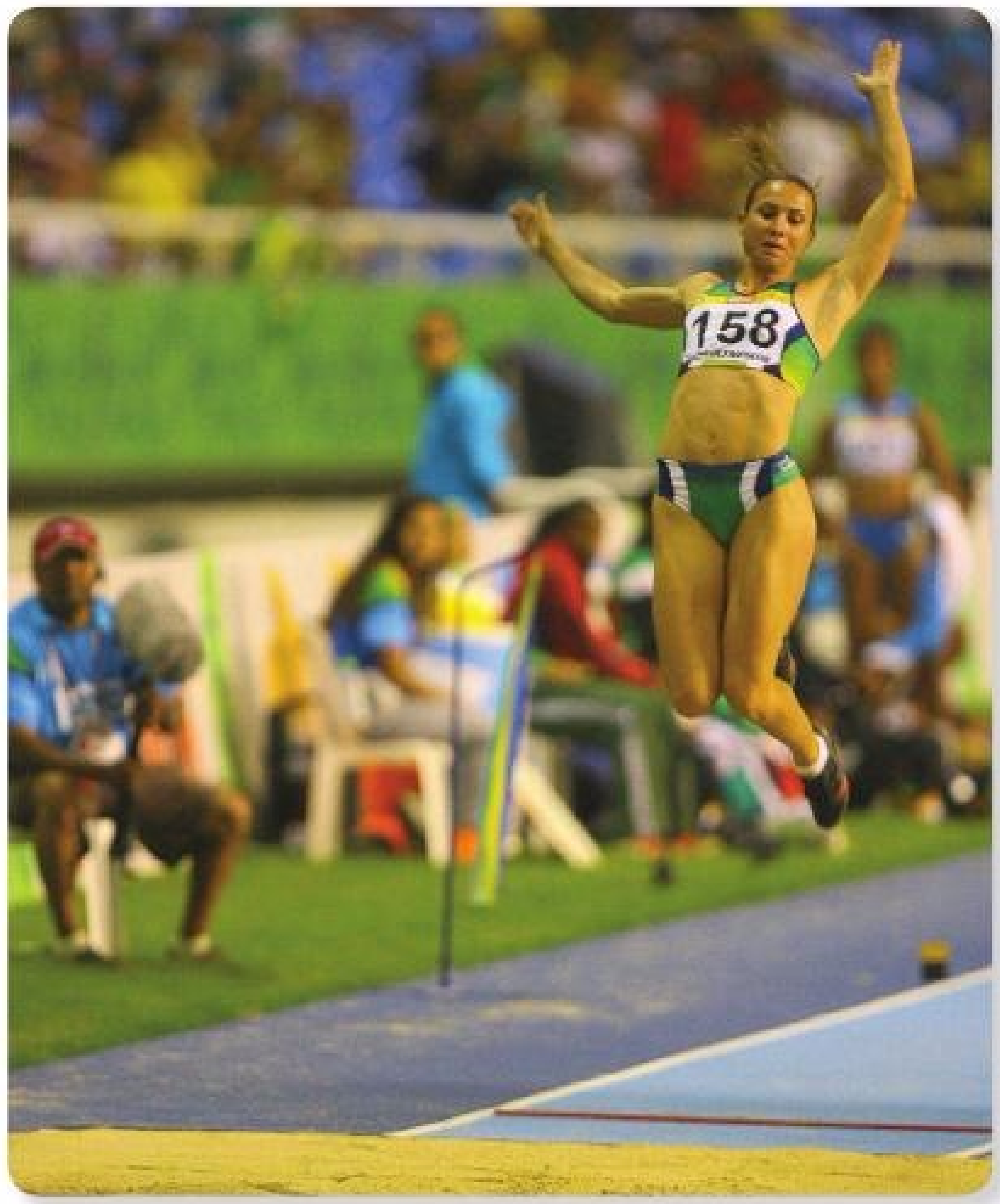
$$A = x^2 - 5x + 6 \text{ para } x = 3$$
$$A = 3^2 - 5 \cdot 3 + 6$$
$$A = 9 - 15 + 6 \rightarrow A = 0$$

Para o cálculo do valor numérico de uma expressão, valem as mesmas regras de prioridades que seguimos para o cálculo de expressões numéricas: primeiro, fazemos as multiplicações e as divisões e depois as adições e subtrações, na ordem em que aparecem.

Sentença matemática

Você já está acostumado a ler e escrever sentenças em língua portuguesa. Numa sentença, geralmente temos um verbo que indica uma ação. Por exemplo:

"A atleta brasileira **saltou** 7,04 m."



Lalo de Almeida/Fohapress

Maureen Maggi salta 7,04 m em extensão na Olimpíada da China, em 2008.

Nessa sentença o verbo saltar indica a ação.

Numa sentença matemática, o "verbo" utilizado indica uma igualdade ou uma desigualdade (diferente, maior ou menor) entre duas expressões algébricas. Observe alguns exemplos:

$3x + 5 = 2y$ → "Três vezes **x** mais cinco **é igual** a dois vezes **y**."

A sentença matemática é uma forma de traduzir uma frase em língua portuguesa que representa uma situação que queremos descrever ou um problema que queremos resolver.

Nesses casos utilizamos a linguagem algébrica. Veja alguns casos:

- Na adição de dois números naturais, a ordem das parcelas não altera a soma. Representando os números por **a** e **b**, escrevemos:

$$a \in N \text{ e } b \in N, a + b = b + a$$

- Todo número inteiro somado a seu oposto resulta 0.

$$x \in Z, x + (-x) = 0 \rightarrow x - x = 0$$

- O dobro de um número natural não nulo é sempre maior que o número.

$$a \in N^*, 2a > a$$

- A diferença entre a minha idade e a de meu filho é 30 anos. Chamando minha idade de **x** e a de meu filho de **y**, escrevemos:

$$x - y = 30$$

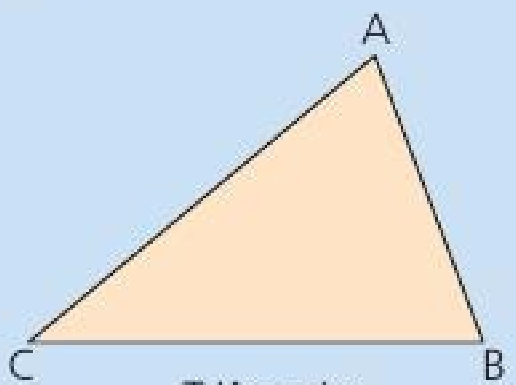
Uma sentença matemática é escrita utilizando-se geralmente as letras minúsculas do alfabeto, como a, b, x, y, z etc.

Professor: Leia o texto e estimule a leitura das sentenças matemáticas. Mostre que a matemática tem linguagem própria e seu processo de aprendizagem se assemelha ao de aprendizagem de um novo idioma. Nesse momento é fundamental estabelecer conexões com os conjuntos numéricos estudados e linguagem das expressões matemáticas.

Conexão

Diagonais de um polígono

Existem várias situações em que podemos montar uma fórmula de cálculo utilizando expressões algébricas. Agora vamos conhecer uma fórmula muito interessante, aplicável aos polígonos convexos.

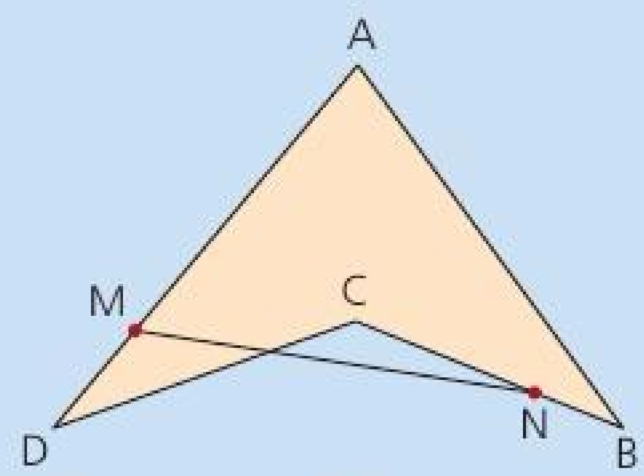


Triângulo

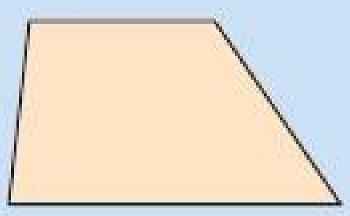
Polígono convexo é um polígono construído de modo que os prolongamentos dos lados nunca ficarão em seu interior. Se dois pontos pertencem a um polígono convexo, então todo o segmento que tem estes dois pontos como extremidades, estará inteiramente contido no polígono.

Assim, todo triângulo é um polígono convexo, pois quaisquer dois pontos do triângulo formam um segmento que estará contido no triângulo.

Nem todos os quadriláteros são convexos. Veja, por exemplo, o quadrilátero ABCD não convexo, também chamado de côncavo. O segmento $\overline{MN}$, cujas extremidades pertencem aos lados $\overline{AD}$ e $\overline{CB}$, não está totalmente contido na região determinada por ABCD.

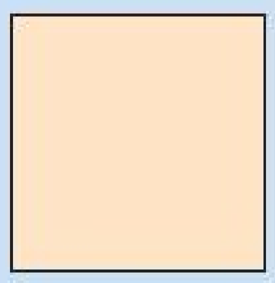


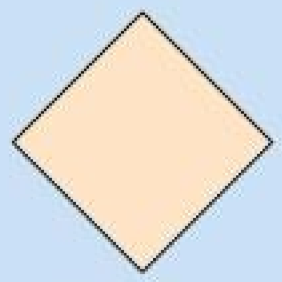
Veja alguns quadriláteros convexos que já estudamos.


Trapézio

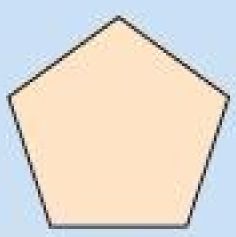

Paralelogramo

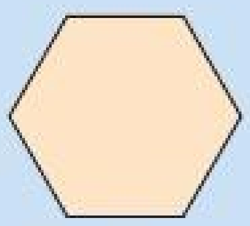

Retângulo

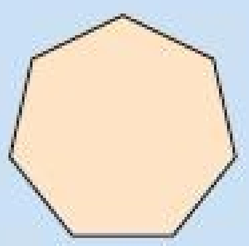

Quadrado

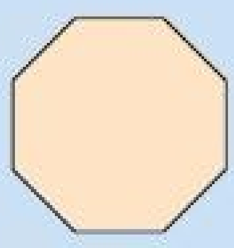

Losango

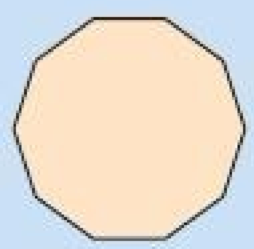
Um polígono convexo recebe o nome de acordo com o número de lados.


Pentágono


Hexágono


Heptágono

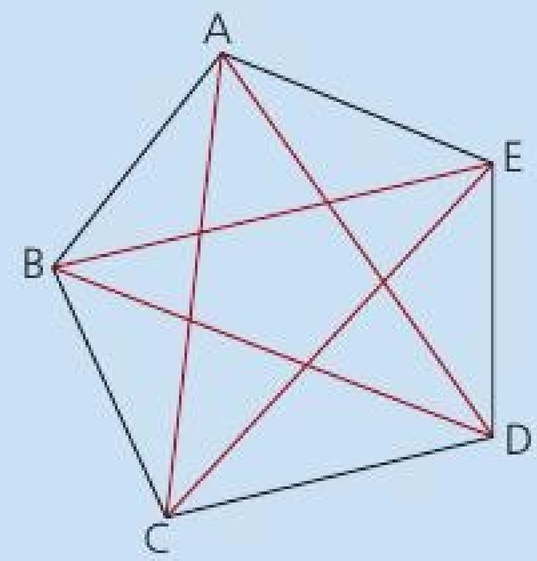

Octógono


Decágono

Número de lados	Nome do Polígono
3	triângulo
4	quadrilátero
5	pentágono
6	hexágono
7	heptágono
8	octógono
9	eneágono
10	decágono

Chamamos de diagonal de um polígono convexo ao segmento cujas extremidades sejam dois vértices não consecutivos. Observe as diagonais $\overline{AD}$, $\overline{AC}$, $\overline{CE}$, $\overline{BE}$ e $\overline{BD}$, do pentágono a seguir.

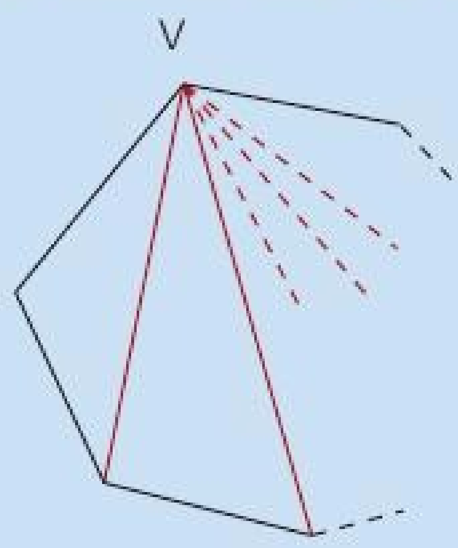
O número de diagonais de um polígono convexo depende da quantidade de lados do polígono.



Veja que, no pentágono, de cada vértice saem 2 diagonais. Como temos 5 vértices, teríamos $5 \cdot 2 = 10$ diagonais. No entanto, fazendo dessa maneira, contamos cada diagonal duas vezes ($\overline{AD}$ e $\overline{DA}$, por exemplo). Por essa razão dividimos esse valor por 2. No caso do pentágono, ele terá 5 diagonais, pois:

$$\mathbf{d = número\ de\ diagonais = \frac{5 \cdot 2}{2} = 5}$$

Vamos agora estabelecer a fórmula para um polígono convexo de **n** lados. Se o polígono tem **n** lados, terá **n** vértices. Podemos ligar cada um dos vértices a todos os outros vértices do polígono obtendo as diagonais. Porém, não serão diagonais a ligação do vértice V com ele mesmo e com os dois vértices vizinhos. Os demais segmentos serão diagonais.



Na figura ao lado observamos que do vértice **V** saem diagonais para todos os outros **n** vértices, exceto para o próprio **V** e para os dois vértices vizinhos a ele.

Assim, podemos, então, dizer que de cada vértice saem **n – 3** diagonais e que, para obter o total de diagonais devemos multiplicar **n** por **n – 3** e dividir por 2, para não contar duas vezes cada diagonal.

Dessa forma, chamando de **d** o número de diagonais de um polígono convexo, podemos escrever a fórmula (ou sentença) que dá esse número:

$$\mathbf{d = \frac{n\,(n - 3)}{2}}$$

Veja alguns exemplos do cálculo do número de diagonais de um polígono convexo:

- **Decágono**

Para o decágono, n = 10

$$d = \frac{10 \cdot (10 - 3)}{2} = \frac{10 \cdot 7}{2} = \frac{70}{2} = 35$$

Logo, o decágono tem 35 diagonais.

- **Hexágono**

Para o hexágono, n = 6

$$d = \frac{6 \cdot (6 - 3)}{2} = \frac{6 \cdot 3}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

Atividades

Interpretar texto

1. Utilizando variáveis, escreva as sentenças a seguir em seu caderno:
   a) Todo número inteiro multiplicado por 1 resulta no próprio número inteiro. $x \cdot 1 = x$
   b) Todo número racional somado com ele mesmo resulta em duas vezes o seu valor. $\frac{x}{y} + \frac{x}{y} = 2\left(\frac{x}{y}\right)$
   c) Numa multiplicação de dois números inteiros quaisquer, a ordem dos fatores não altera o produto. $x \cdot y = y \cdot x$
   d) Na subtração de dois números inteiros iguais o resultado é sempre zero. $x - x = 0$

2. Um ingresso para o *show* de uma banda de *rock* custa R$ 50,00.
   a) Quanto gastarão quatro pessoas para assistir ao *show*? R$ 200,00
   b) Escreva uma expressão algébrica para a seguinte pergunta: ***x** pessoas gastarão quantos reais?* R$ 50,00 · x
   c) Qual é o valor numérico dessa expressão para x = 3? R$ 150,00

3. Numa determinada conta bancária há **x reais**. Escreva a expressão algébrica que representa cada uma das seguintes situações:
   a) Foram depositados R$ 230,00 na conta. Quanto terá a conta? x + R$ 230,00
   b) Qual seria o valor do saldo se a quantidade inicial **x** fosse R$ 840,00? R$ 1070,00

4. A bandeirada de um táxi custa R$ 7,00 e são cobrados R$1,80 por quilômetro rodado:
   a) Qual será o preço de uma corrida de 5 quilômetros? R$ 16,00
   b) Escreva a expressão algébrica para o preço **P** de uma corrida de **x** quilômetros. $P = 7{,}00 + 1{,}8 \cdot x$
   c) Qual é o valor dessa expressão quando x = 20? R$ 43,00

5. Qual é o valor numérico de $x(x + y)$ quando $x = -4$ e $y = -8$? 48

6. Para comprar **x** chocolates, todos com o mesmo preço, paguei **y** reais e recebi de troco R$ 13,00.
   a) Com uma expressão algébrica, indique quanto custou cada chocolate. R$ $= \frac{y - 13}{x}$
   b) Qual é o valor numérico dessa expressão quando x = 2 e y = 33? R$ 10,00

7. Numa sequência, na posição 1 está o número 2; na posição 2, o número 4, na posição 3 o número 6 e assim por diante. Escreva a sequência no caderno e responda: como podemos representar um termo qualquer a partir da posição que ela ocupa? Chame a posição de **n** ($n \in \mathbb{N}^*$).
   2, 4, 6, 8, ...
   Na posição n, o termo será 2n.

Utilizando a fórmula $d = \frac{n(n-3)}{2}$, onde **n** é o número de lados de um polígono e **d** o número de diagonais, faça as atividades a seguir. Interpretar texto

8. Quantas diagonais tem um hexágono? 9 diagonais

Argumentar

9. Calcule o número de diagonais de um polígono de:
   a) 7 lados 14
   b) 12 lados 54

10. A partir da fórmula que dá o número de diagonais de um polígono, verifique que um triângulo não tem diagonais. Explique o significado geométrico desse fato.
    $d = \frac{3(3-3)}{2} = 0$ No triângulo não é possível unir vértices opostos, pois eles não existem.

Monômios

Monômios são expressões algébricas expressas por **apenas** um número, **apenas** uma variável ou produtos entre números e variáveis.

Observe alguns exemplos:

- $7x^2y^3$
- $-6x$
- a^5
- 18
- $\frac{3x}{4}$

Professor: A matemática aqui apresentada passou da aritmética e da geometria e começou a se tornar uma abstração, para se poder introduzir os assuntos referentes à álgebra. Neste momento, toda a atenção ao aluno deve ser dada paraque ele perceba os mecanismos de soma e de produto de expressões literais.

Quando não for apenas um número, um monômio é formado por duas partes: um número, que é chamado **coeficiente**, e uma multiplicação de variáveis, que é a chamada **parte literal**.

Veja estes exemplos:

- $3x^2y^3 \begin{cases} \text{O coeficiente é } 3. \\ \text{A parte literal é } x^2y^3. \end{cases}$
- $-5ab \begin{cases} \text{O coeficiente é } -5. \\ \text{A parte literal é } ab. \end{cases}$
- $mn^2 \begin{cases} \text{O coeficiente é } 1. \\ \text{A parte literal é } mn^2. \end{cases}$
- $-xy^2z \begin{cases} \text{O coeficiente é } -1. \\ \text{A parte literal é } xy^2z. \end{cases}$
- $\frac{3xy}{4} \begin{cases} \text{O coeficiente é } \frac{3}{4}. \\ \text{A parte literal é } xy. \end{cases}$

Monômios semelhantes

Dois monômios são chamados **monômios semelhantes** quando têm a **mesma parte literal**. Observe os exemplos:

$$\left.\begin{array}{r} 5x^5y^3 \\ -12x^5y^3 \end{array}\right\} \text{são monômios semelhantes, pois têm a mesma parte literal } x^5y^3.$$

$$\left.\begin{array}{r} -67x \\ 2x \end{array}\right\} \text{também são monômios semelhantes pois têm a mesma parte literal } x.$$

Adição e subtração de monômios

Tanto a adição quanto a subtração de monômios só é possível quando eles têm a mesma parte literal. O resultado da adição ou da subtração é o monômio obtido da seguinte maneira:

a) Conservamos a parte literal comum;

b) Realizamos as operações com os coeficientes.

Veja dois casos de adição de monômios semelhantes:

- $3x^3y^2 + 8x^3y^2 = 11x^3y^2$
- $2x^5 + x^5 + 4x^5 = 7x^5$

Essas operações se justificam pela **propriedade distributiva**:

- $3x^3y^2 + 8x^3y^2 = (3 + 8)\,x^3y^2 = 11x^3y^2$
- $2x^5 + x^5 + 4x^5 = (2 + 1 + 4)\,x^5 = 7x^5$

A subtração de monômios semelhantes também é feita conservando-se a parte literal comum e operando-se os coeficientes. Por exemplo:

- $9a^2y - 7a^2y = (9 - 7)a^2y = 2a^2y$
- $13m^5 - 16m^5 = (13 - 16)m^5 = -3m^5$

Observe outros exemplos de adição e subtração de monômios:

- $-3xy + 2xy = (-3 + 2)xy = -xy$
- $a^3bc - 4a^3bc = (1 - 4)\,a^3bc = -3a^3bc$
- $2{,}5x^2 + 4x^2 = (2{,}5 + 4)x^2 = 6{,}5x^2$
- $4m^3n^2 - 2m^3n^2 = (4 - 2)m^3n^2 = 2m^3n^2$
- $\frac{2a^2b}{5} - a^2b = \left(\frac{2}{5} - 1\right)a^2b = -\frac{3}{5}\,a^2b$

Quando temos uma adição ou subtração de monômios não semelhantes, mantemos a expressão algébrica indicada, sem fazer qualquer operação. É o que acontece, por exemplo, com a expressão: $3xy - x + 4y$, que não tem termos semelhantes.

Atividades

11. Em seu caderno, escreva a parte literal de cada monômio.

a) $5x^5y^5$ $x^5\,y^5$

b) $-7x^3$ x^3

c) x^4y^2 $x^4\,y^2$

d) $7mn^4$ $m\,n^4$

12. Escreva os coeficientes dos monômios.

a) ax^6 1

b) $-ax^4$ -1

c) $-\frac{3}{2}x^2y$ $-\frac{3}{2}$

d) $4ay^2$ 4

13. Calcule o valor numérico das expressões algébricas, para x = –1 e y = 3.

a) $3xy - 8xy + 17xy - 21xy$ 27

b) $2x^4y + 3x^4y + 5x^4y$ 30

c) $\frac{x^3y}{3} + \frac{x^3y}{2} + \frac{x^3y}{6}$ -3

14. Efetue:

a) $5x^2 + 12x^2$ $17x^2$

b) $3xy - 10xy$ $-7xy$

c) $-7x^3y + 8x^3y$ x^3y

d) $-5x - 11x$ $-16x$

e) $8xy^2 + 8xy^2$ $16xy^2$

f) $y^2 - 2y^2$ $-y^2$

15. Efetue:

a) $-2xy^5z + 2xy^5z$ 0

b) $-2x + 0{,}3x$ $-1{,}7x$

c) $2x^3 - \frac{1}{2}x^3$ $\frac{3}{2}x^3$

16. Efetue :

a) $5x^3 + 7x^3 + 10x^3$ $22x^3$

b) $12x^2y - 8x^2y - x^2y + x^2$ $3x^2y + x^2$

c) $-y - 12y + 3x^2 - 18y + x^2$ $-31y + 4x^2$

Multiplicação e Divisão de monômios

Inicialmente, vamos recordar a seguinte propriedade: na multiplicação de potências de mesma base, **mantemos a base** e **somamos os expoentes**.

Observe, agora, a aplicação desta propriedade no produto de dois monômios:

$$x^4 \cdot x^3 = x^{4+3} = x^7$$

$$x^4 \cdot x^3 = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot x}_{\text{4 fatores}} \cdot \underbrace{x \cdot x \cdot x}_{\text{3 fatores}} = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x}_{\text{7 fatores}} = x^7$$

Dessa forma, para a multiplicação de monômios, basta que apliquemos esta propriedade nas partes literais de cada um deles e realizemos as multiplicações dos coeficientes. Observe os exemplos:

- $(5x^4y^3)(6xy^5) = \underbrace{5 \cdot 6}_{30} \cdot \underbrace{x^4 \cdot x}_{x^5} \cdot \underbrace{y^3 \cdot y^5}_{y^8} = 30x^5y^8$
- $(3a^2b^3)(-9a^2b^3c) = 3 \cdot (-9) \cdot a^2 \cdot a^2 \cdot b^3 \cdot b^3 \cdot c = -27a^4b^6c$
- $\left(\frac{3}{4}mnz\right)\left(\frac{7}{5}mz\right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{5} \cdot m \cdot m \cdot n \cdot z \cdot z = \frac{21}{20}m^2nz^2$

No caso da divisão, devemos relembrar outra propriedade: na divisão de potências de mesma base, **mantemos a base** e **subtraímos os expoentes**.

Acompanhe a divisão do monômio x^5 pelo monômio x^3:

$$x^5 : x^3 = \frac{x^5}{x^3} = \frac{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x}{x \cdot x \cdot x} = \frac{x \cdot x \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x}}{\cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x}}$$

$$x^5 : x^3 = \frac{x^5}{x^3} = x^{5-3} = x^2$$

Veja, agora, mais alguns exemplos:

- $(21x^5y^3z^4) : (3x^3y^2z) = \dfrac{21x^5y^3z^4}{3x^3y^2z} = \dfrac{21}{3}\, x^{5-3}\, y^{3-2}\, z^{4-1} = 7x^2yz^3$
- $(5x^3y^2z^6) : (10x^3yz^3) = \dfrac{5x^3y^2z^6}{10x^3yz^3} = \dfrac{5}{10}\, x^{3-3}\, y^{2-1}\, z^{6-3} = \dfrac{yz^3}{2}$
- $(5x^2y) : (-10x^2y) = \dfrac{5x^2y}{-10x^2y} = -\dfrac{5}{10}\, x^{2-2}\, y^{1-1} = -\dfrac{1}{2}$

Potenciação de monômios

No caso da potenciação de monômios, devemos relembrar a seguinte propriedade: **a potência de um produto é igual ao produto das potências**.

Veja, por exemplo, como calculamos a potência $(3x^3y^4)^2$.

Essa potência é uma multiplicação de dois fatores iguais a $3x^3y^4$:

$$(3x^3y^4)^2 = (3x^3y^4)(3x^3y^4) = (3 \cdot 3) \cdot (x^3 \cdot x^3) \cdot (y^4 \cdot y^4)$$

Portanto,

$$(3x^3y^4)^2 = 9x^6y^8$$

Podemos também efetuar esta potenciação, multiplicando os expoentes de cada um dos fatores pelo expoente da potência:

$$(3x^3y^4)^2 = 3^2 \cdot (x^3)^2 \cdot (y^4)^2 = 3 \cdot 3 \cdot x^{3 \cdot 2} \cdot y^{4 \cdot 2} = 9x^6y^8$$

Acompanhe mais dois exemplos:

- $(-2x^3y)^4 = (-2)^4 \cdot x^{3 \cdot 4} \cdot y^{1 \cdot 4} = 16x^{12}y^4$
- $\left(\dfrac{2}{3}\, a^2y^3\right)^3 = \left(\dfrac{2}{3}\right)^3 \cdot a^{2 \cdot 3} \cdot y^{3 \cdot 3} = \dfrac{8}{27}\, a^6y^9$

Atividades

Professor: Ao resolver as atividades aqui propostas, procure indicar as operações com os expoentes dos monômios e, paulatinamente, fazer mentalmente tais operações, estimulando, assim, os alunos a fazerem cálculos mentais com os expoentes.

17. Efetue:

Aplicar propriedades operacionais

a) $x^4 \cdot x^5$ x^9

b) $(2y^2) \cdot y^3$ $2y^5$

c) $(2x^2) \cdot (3x)$ $6x^3$

d) $(-5y) \cdot (-8y^2)$ $40y^3$

e) $x^2 \cdot (xy)$ x^3y

f) $(x^2y) \cdot (x^3y^2)$ x^5y^3

18. Efetue:

a) $(2x^2y^2)(3x^3y^3)$ $6x^5y^5$

b) $(3x^2z^2)(-2xy)(6z^2)$ $-36x^3yz^4$

c) $(-2x^2)(-4y^2)(-5x^3y^4)$ $-40x^5y^6$

d) $2m^3\,(-6n^4)(3m^2n^2)$ $-36m^5n^6$

e) $5xyz\,(x^2y)(-y^3z^2)(xz^4)$ $5x^4y^5z^7$

19. Efetue:

a) $\left(\frac{2}{5}x^2y^2\right)\left(\frac{3}{7}x^3y^3\right)$ $\frac{6}{35}x^5y^5$

b) $\left(\frac{2}{3}m^2y^3\right)\left(\frac{3}{5}m^3y^4\right)$ $\frac{2}{5}m^5y^7$

c) $\left(\frac{1}{4}a^2b^5\right)\left(\frac{8}{5}ab^2\right)\left(\frac{5}{3}a^3b^4\right)$ $\frac{3}{2}a^6b^{11}$

20. Efetue:

a) $(1{,}5a^2x^3)(-1{,}8bx^2)(-5a^3bx^4)$ $13{,}5a^5b^2x^9$

b) $(0{,}25b^2)(1{,}4xb^3)$ $0{,}35xb^5$

21. Efetue:

a) $(4a^4b^3)^2$ $16a^8b^6$

b) $(-2a^6b)^5$ $-32a^{30}b^5$

c) $\left(\frac{2}{3}a^2y^5\right)^4$ $\frac{16}{81}a^8y^{20}$

d) $(-x^5y)^{10}$ $x^{50}y^{10}$

e) $(xy^2z^3)^8$ $x^8y^{16}z^{24}$

f) $\left(\frac{4}{3}ay^3\right)^4$ $\frac{256}{81}a^4y^{12}$

22. Efetue:

a) $(x^3y^3) : (x^2y^2)$ xy

b) $(63a^4x^5) : (-9a^3x^2)$ $-7ax^3$

c) $(-12xy)^3 : (20x)$ $-\frac{432}{5}x^2y^3$

d) $(-8a^5y^6) : (-40ay)$ $\frac{1}{5}a^4y^5$

23. Efetue:

Aplicar propriedades operacionais

a) $(37x^8y^9) : (-x^8y^9)$ -37

b) $(25a^3x^2y^4) : (5x^2)$ $5a^3y^4$

c) $(12a^6) : (-72a^2)$ $-\frac{1}{6}a^4$

d) $(27a^{10}b^9) : (-3a^9b^9)$ $-9a$

24. Efetue:

a) $(11{,}25a^2b^4) : (4{,}5ab^2)$ $2{,}5ab^2$

b) $(a^3b^2) : (-4ab)$ $-\frac{1}{4}a^2b$

c) $\left(-\frac{2}{5}a^5b^5\right) : \left(-\frac{4}{15}a^2b\right)$ $\frac{3}{2}a^3b^4$

d) $(-1^{10}b^6) : \left(\frac{8}{7}b^6\right)$ $-\frac{7}{8}$

25. Efetue:

a) $(3x^3)^2$ $9x^6$

b) $\left(\frac{2}{5}x^2\right)^3$ $\frac{8}{125}x^6$

c) $(x^2y^3z^4)^4$ $x^8y^{12}z^{16}$

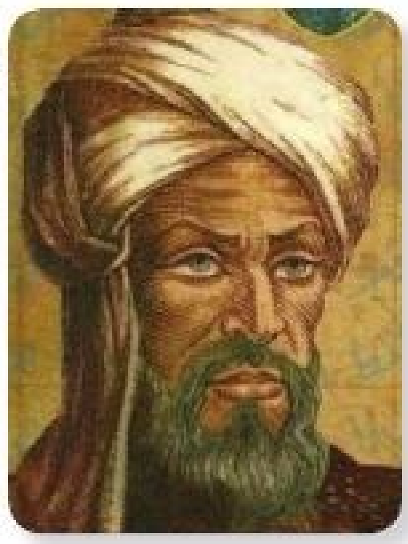
d) $(-x^3y^5)^2$ x^6y^{10}

e) $(2x^3y)^4 - (5x^6y^2)^2$ $-9x^{12}y^4$

f) $\left(\frac{2}{3}x^2y^2\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}xy^3\right)^2$ $\frac{1}{6}x^9y^{12}$

Quando, quem e onde

As pesquisas e achados arqueológicos indicam que as origens da álgebra se encontram na antiga Babilônia, onde estão registrados cálculos que incluem incógnitas representadas por símbolos especiais. Nessa época, cerca de 1000 a.C, egípcios, gregos e hindus resolviam esse tipo de cálculo (que hoje chamamos de equações) recorrendo à Geometria.


Muslim Heritage

Al-Khowarizmi


Muslim Heritage

Capa do livro *Al-Jabr wa-al-Muqabilah*.

O nome "álgebra" surgiu por volta de 800 d.C e deriva do nome de um livro de autoria do matemático Al-Khowarizmi, com o título *Al-Jabr wa-al-Muqabilah*. Do termo *Al-Jabr* derivou a palavra **Álgebra**, que passou a dar nome à parte da Matemática que estuda todas as soluções de expressões e equações com representação simbólica de letras.


Wikimedia

François Viéte

A notação algébrica que utilizamos atualmente, começou com François Viéte, no século XVI, e foi definida na forma atual por René Descartes, no início do século XVII. Antes disso, os gregos, hindus, árabes e mesmo alguns matemáticos do século XV, representavam as soluções de equações e cálculos por meio de palavras e desenhos.

Polinômios

Chamamos de polinômio a qualquer adição ou subtração de monômios. Um monômio pode também ser considerado um polinômio de apenas um termo.

Observe alguns exemplos de polinômios:

- $5x^5 + 7x^3 - 3x - 4$
- $2x^3y^2 + 14x^3y^2 + y^4$
- $4a^2xy$
- $-6m^5n^3$

Os monômios que formam um polinômio são chamados de **termos do polinômio**.

Dizemos que um polinômio está na sua **forma reduzida** quando não tiver monômios semelhantes.

Veja, por exemplo, o polinômio $2x^5 + 3x^3y^2 - 5x^5 + 4x^3y^2$.

Este polinômio possui alguns termos semelhantes. Para escrevê-lo na forma reduzida, devemos somar esses termos semelhantes:

$$2x^5 + 3x^3y^2 - 5x^5 + 4x^3y^2 = \underbrace{2x^5 - 5x^5} + \underbrace{3x^3y^2 + 4x^3y^2} = -3x^5 + 7x^3y^2$$

O polinômio $-3x^5 + 7x^3y^2$ não possui termos semelhantes e, por essa razão, é a **forma reduzida** do polinômio $2x^5 + 3x^3y^2 - 5x^5 + 4x^3y^2$.

Adição de polinômios

Enfatize que os polinômios apresentam as mesmas propriedades em relação à adição dos números inteiros: existe o oposto, o elemento neutro (no caso, o próprio número zero) e valem as propriedades associativa e comutativa.

A adição de dois polinômios se faz adicionando-se todos os termos dos dois polinômios.

Vamos efetuar a seguinte adição de polinômios:

$$(8x^2 - 3xy - xy^2) + (3x^2 - xy + 2y^2)$$

Em primeiro lugar, eliminamos os parênteses:

Destaque que as expressões algébricas guardam as mesmas propriedades que os números. Produtos de polinômios também possuem as mesmas propriedades que a multiplicação de números inteiros apresentam:

- Propriedade comutativa: $(a^2b + c)(z + y) = (z + y)(a^2b + c)$;
- Propriedade associativa: $[(a^2b + c)(z + y)](x + a) = (a^2b + c)[(z + y)(x + a)]$.

$$(8x^2 - 3xy - y^2) + (3x^2 - xy + 2y^2) = 8x^2 - 3xy - y^2 + 3x^2 - xy + 2y^2$$

Em seguida, somamos os monômios semelhantes:

$$8x^2 - 3xy - y^2 + 3x^2 - xy + 2y^2 =$$
$$= 8x^2 + 3x^2 + (-3 -1)\,xy + (-1 +2)y^2 = 11x^2 - 4xy + y^2$$

Oposto de um polinômio

O oposto de um polinômio é outro polinômio que somado ao primeiro resulta zero. Observe o exemplo:

$$\underbrace{(5x^2 - 2x + 5)}_{\text{polinômio}} + \underbrace{(-5x^2 + 2x - 5)}_{\text{polinômio oposto}} = 0$$

Subtração de polinômios

A subtração de dois polinômios é a soma do primeiro polinômio (minuendo) com o oposto do segundo (subtraendo).

Observe no exemplo a subtração de dois polinômios:

$$(7x^3 + x^2 + 3xy - 7y^2) + [-(3x^3 + 2x^2 + 4xy - y^2)]$$

$$\underbrace{(7x^3 + x^2 + 3xy - 7y^2)}_{\text{minuendo}} - \underbrace{(3x^3 + 2x^2 + 4xy - y^2)}_{\text{subtraendo}}$$

Somamos o minuendo com o oposto do subtraendo:

$(7x^3 + x^2 + 3xy - 7y^2) + (-3x^3 - 2x^2 - 4xy + y^2) =$

$= 7x^3 + x^2 + 3xy - 7y^2 - 3x^3 - 2x^2 - 4xy + y^2 =$

$= 4x^3 - x^2 - xy - 6y^2$

De modo geral, nas expressões que envolvem adição e subtração de polinômios, devemos seguir a mesma hierarquia que utilizamos nas expressões numéricas, eliminando os parênteses, depois os colchetes e, ao final, as chaves. Lembre-se que as regras para os sinais permanecem as mesmas. Observe um outro exemplo que envolve parênteses e colchetes :

$(3x^2 - 5x + 3) - [(5x^2 + 3x - 5) - (x^2 + 1)] =$

$= 3x^2 - 5x + 3 - [5x^2 + 3x - 5 - x^2 - 1] =$

$= 3x^2 - 5x + 3 - 5x^2 - 3x + 5 + x^2 + 1 =$

$= -x^2 - 8x + 9$

Atividades

26. Escreva a forma reduzida dos polinômios:

a) $2x + 3y - 5x - 7y + 8 - x - 1$ $-4x - 4y + 7$

b) $9xy - x^2 + y^2 - 3xy + 5x^2 + 6y^2$ $4x^2 + 7y^2 - 6xy$

27. Efetue as adições dos

a) $(x^2 - 3x) + (2x^2 + 4x + 1)$ $3x^2 + x + 1$

b) $(-7xy + 17x - 8y + 9) + (12xy + 2x - y)$ $5xy + 19x - 9y + 9$

c) $(5x^3 - 11x^2 - 2x + 3) + (8x^3 + 3x^2 + 4x - 5)$ $13x^3 - 8x^2 + 2x - 2$

28. Escreva o polinômio oposto de:

a) $2xy^2 - x^3 + 5y^3 - 8$ $-2xy^2 + x^3 - 5y^3 + 8$

b) $-5y^3 + 10y^2 - 2y - 6$ $5y^3 - 10y^2 + 2y + 6$

29. Efetue as subtrações:

a) $(5x^2 - 4x + 2) - (10x^2 - 8x + 5)$ $-5x^2 + 4x - 3$

b) $(10x^2 - 8x + 4) - (10x^2 - 8x + 5)$ -1

30. Efetue as operações indicadas em cada caso, respeitando a hierarquia de eliminação de parênteses e colchetes:

a) $(2y^2 - 3y + 5) - [(5y^2 + 3y - 7) - (y^2 + 3)]$ $6y^2 - 5$

b) $(2xy^2 - 3xy + 4) - [(-2xy^2 + 4xy - 1) - (xy^2 - 3xy + 6)]$ $5xy^2 - 10xy + 11$

Organizar processo de cálculo.

31. Dado o polinômio $2x^3 - 5x^2 - 4x + 1$, responda:

a) Qual é o resultado da soma do polinômio com seu oposto? 0 (zero)

b) Subtraindo do polinômio o seu oposto, qual o polinômio obtido? $4x^3 - 10x^2 - 8x + 2$

c) Qual é o resultado da soma desse polinômio com seu dobro? $6x^3 - 15x^2 - 12x + 3$

Multiplicação de monômio por polinômio

Para efetuar a multiplicação de um monômio por um polinômio, fazemos a multiplicação do monômio por cada um dos termos do polinômio e somamos os monômios obtidos. Observe os exemplos:

a) Vamos multiplicar $3x^4$ por $5x^2 + 3xy + 2$:

Indicação da multiplicação → $3x^4 \cdot (5x^2 + 3xy + 2)$

Veja como fica a multiplicação do monômio $3x^4$ pelos termos do polinômio.

O exemplo a seguir mostra como se deve fazer a multiplicação e obter o produto:

$$3x^4 \quad (5x^2 + 3xy + 2)$$

$$3x^4 \cdot (5x^2 + 3xy + 2) = (3x^4) \cdot (5x^2) + (3x^4) \cdot (3xy) + (3x^4) \cdot 2 =$$

$$= 15x^6 + 9x^5y + 6x^4$$

Multiplicação de dois polinômios

A multiplicação de polinômios é efetuada multiplicando-se cada monômio do primeiro polinômio pelos monômios do segundo, e somando-se os resultados.

Observe os três exemplos a seguir:

1. Vamos efetuar: $(x + 5)(y - 3)$

$$(x + 5)\,(y - 3)$$

$$(x + 5)(y - 3) = xy - 3x + 5y - 15$$

2. Vamos, agora, efetuar a multiplicação $(5x + 7)(3x^2 + 2x - 4)$, sem representar as setas. Acompanhe a multiplicação dos monômios do primeiro com os monômios do segundo polinômio:

$$(5x + 7)(3x^2 + 2x - 4) = 15x^3 + 10x^2 - 20x + 21x^2 + 14x - 28 = 15x^3 + 31x^2 - 6x - 28$$

3. Para se elevar um polinômio ao quadrado multiplica-se o polinômio por ele mesmo:

$$(2x + 3)^2 = (2x + 3) \cdot (2x + 3) = 4x^2 + 6x + 6x + 9 = 4x^2 + 12x + 9$$

Atividades

32. Efetue:

a) $2y\,(y^3 - 1)$ $2y^4 - 2y$

b) $x^2\,(x^2 + x + 1)$ $x^4 + x^3 + x^2$

c) $-2x^2y^3\,(5x^2 - xy + 6y^2)$ $-10x^4y^3 + 2x^3y^4 - 12x^2y^5$

33. Efetue:

a) $(x + 1)\,(x + 3)$ $x^2 + 4x + 3$

b) $(3x + 2)\,(3x - 2)$ $9x^2 - 4$

c) $(2x + 5)\,(3x - 4)$ $6x^2 + 7x - 20$

d) $(x + 1)\,(x^2 - x + 1)$ $x^3 + 1$

e) $(2y + 1)\,(3y^2 - 2y - 11)$ $6y^3 - y^2 - 24y - 11$

f) $(x + 2y)\,(x + y - 5)$ $x^2 + 2y^2 + 3xy - 5x - 10y$

34. Efetue as multiplicações e, depois, reduza os termos semelhantes.

a) $2x\,(x - 2) + 3x\,(x - 5)$ $5x^2 - 19x$

b) $x\,(2x - 10) - 5x\,(x - 2)$ $2x^2 - \cancel{10x} - 5x^2 + \cancel{10x}\ -3x^2$

c) $(x + 2)\,(x + 3) - 2\,(x + 4)$
$x^2 + 3x + \cancel{2x} + 6 - \cancel{2x} - 8$
$x^2 + 3x - 2$

35. Efetue:
$6x^4 - \cancel{2x^3} - \cancel{6x^2} - \cancel{9x^3} + \cancel{3x^2} + 9x - \cancel{6x^2} +$
$+ 2x + 6$
$6x^4 - 11x^3 - 9x^2 + 11x + 6$

$(2x^2 - 3x - 2)\,(3x^2 - x - 3)$

36. Calcule:

a) $(x + 1)^2$ $x^2 + 2x + 1$

b) $(x - 10)^2$ $x^2 - 20x + 100$

c) $(3x + 4)^2$ $9x^2 + 242 + 16$

d) $(5 - x)^2$ $25 - 10x + x^2$

37. São dados os polinômios indicados pelas letras A, B e C

$A = x + 2;$

$B = 2x - 5;$

$C = 3x + 4$

Calcule:

a) $B + AC$ $3x^2 + 12x - 3$

b) $C - AB$ $-2x^2 + 4x + 14$

Para estudar

38. Escreva as sentenças a seguir utilizando letras como variáveis.

a) O dobro de um número racional é igual ao próprio número adicionado a 12.

b) Um número racional somado com seu dobro é igual a três vezes seu valor.

c) O produto de dois números racionais é igual se invertermos a ordem dos fatores.

d) Todo número racional somado com seu oposto dá zero.

39. Um chocolate custa R$ 3,50. Responda:

a) Qual o preço de 4 chocolates?

b) Escreva a expressão algébrica que representa o preço de **x** chocolates.

c) Qual é o valor numérico dessa expressão para $x = 3$?

40. Veja a sequência 3, 5, 7, 9... . Na posição 1 está o número 3; na posição 2, o número 5, na posição 3, o número 7 e assim por diante. Para representar o número da posição **n**, com $n \in \mathbb{N}^*$, o que devemos escrever?

41. Qual é o valor numérico da expressão $\frac{x^4}{x^2}$, quando $x = 4$?

42. Utilizando a fórmula que dá o número de diagonais de um polígono, calcule o número de diagonais de um polígono de:

a) 6 lados

b) 10 lados

43. Escreva a parte literal de cada monômio.

a) $3x^5y^5$

b) $-5x^7$

c) $12x^4y^2$

d) $0{,}5y^3z^4$

44. Efetue:

a) $5x^2 + 2x^2$

b) $7xy - 10xy + 8xy$

c) $-5x^3y + 4x^3y$

d) $-5ax - 10ax$

e) $xy^2 + 4xy^2$

f) $y^2 - 2y^2 + y^2$

45. Calcule o valor numérico das expressões a seguir, para $x = -1$ e $y = 4$.

a) $23xy - 18xy + 171xy - 216xy$

b) $2x^5y + 3x^5y + 5x^5y$

c) $\dfrac{x^2y}{4} + \dfrac{x^2y}{2} + \dfrac{x^2y}{4}$

46. Efetue as adições dos monômios semelhantes e, em seguida, calcule o valor numérico das expressões algébricas seguintes, para $\mathbf{x = \dfrac{1}{2}}$ e $\mathbf{y = -3}$.

a) $7x - 9y - 9x + 8y$

b) $\dfrac{xy}{2} + \dfrac{xy}{3} - \dfrac{xy}{6} + xy$

c) $2x^2 - \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{x}{3} - \dfrac{x}{2}$

47. Efetue:

a) $(5a^2y^2)(3a^3y^3)$

b) $(3a^2z^2)(-2ay)(6z^2)$

c) $(-2a^2)(-4y^2)(-5a^3y^4)$

48. Efetue: $\left(\dfrac{2}{5}x^2y^2\right)\left(\dfrac{3}{7}x^3y^3\right)$

49. Efetue:

a) $(a^3y^3) \div (a^2y^2)$

b) $(63a^4a^5) \div (-9a^3a^2)$

c) $(-12ay)^3 \div (20a)$

d) $(-8a^5y^6) \div (-40ay)$

50. Efetue:

a) $(3a^3)^2$

b) $\left(\dfrac{2}{5}x^2\right)^3$

c) $(a^2y^3z^4)^4$

d) $(-a^3y^5)^2$

e) $(2a^3y)^4 - (5a^6y^2)^2$

f) $\left(\dfrac{2}{3}x^2y^2\right)^3 \cdot \left(\dfrac{3}{4}xy^3\right)^2$

51. Escreva na forma reduzida:

a) $(a^2 - 3a) + (2a^2 + 6a + 1)$

b) $(5a^3 - 10a^2 - 2a + 3) + (8a^3 - a^2 + 4a - 5)$

52. Escreva o oposto de:

a) $4ay^2 - a^3 + 7y^3 - 8$

b) $-5y^3 + 10y^2 - 2y - 6$

53. Efetue:

a) $(3a^3y - 5y^2) + (2a^3y - 6y^2)$

b) $(7a^3 - 7a + 9) + (2a^3 - 6a + 8)$

c) $(3a^2b - ab^2 + ab) - (a^2b + 3ab^2 - 3ab)$

d) $(3a - 4y - 2) - (2a - y + 8) - (-a + y + 1)$

54. Efetue as multiplicações e, depois, reduza os termos semelhantes.

a) $2x^2(x - 2) - x(x - 5)$

b) $x(2x - 10) + 2x(x - 2)$

c) $(x - 2)(x + 3) - 3(x + 5)$

55. Com as letras A, B e C, representamos os seguintes polinômios:

$A = 3a - 2;$

$B = a - 5;$

$C = 2a - 4$

Calcule:

a) $B - AC$

b) $C^2 + AB$

Resolução das atividades

1. a) $x \cdot 1 = x$

b) $\frac{x}{y} + \frac{x}{y} = 2\left(\frac{x}{y}\right)$

c) $x \cdot y = y \cdot x$

d) $x - x = 0$

2. a) R\$ 200,00

b) R\$ 50,00 · x

c) R\$ 150,00

3. a) x + R\$ 230,00

b) R\$ 840,00 + R\$ 230 = R\$ 1 070,00

4. a) $7{,}00 + 1{,}80 \cdot 5 =$ R\$ 13,00

b) $7{,}00 + 1{,}80 \cdot x = P$

c) $4{,}00 + 1{,}80 \cdot 20 =$ R\$ 43,00

5. $-4(-4 - 8) = -4 \cdot (-12) = 48$

6. a) R\$ $= \frac{y - 13}{x}$

b) R\$ $= \frac{33 - 13}{2} =$ R\$ 10,00

7. 2, 4, 6, 8, ...
Na posição n, o termo será 2n.

8. $n = 6$

$d = \frac{6\,(6 - 3)}{2} \rightarrow d = 9$ diagonais

9. a) $d = \frac{n\,(n - 3)}{2} = \frac{7\,(7 - 3)}{2} = 14$

b) 54

10. Se n = 3 temos:

$$d = \frac{3\,(3 - 3)}{2} = 0$$

No triângulo não é possível unir vértices opostos, pois eles não existem.

11. a) $x^5\,y^5$

b) x^3

c) $x^4\,y^2$

d) $m\,n^4$

12. a) 1

b) – 1

c) $-\frac{3}{2}$

d) 4

13. Para x = –1 e y = 3:

a) $3xy - 8xy + 17xy - 21xy = -9xy$

$-9(-1) \cdot 3 = 27$

b) $2x^4y + 3x^4y + 5x^4y = 10x^4y$

$10(-1)^4 \cdot 3 = 30$

c) $\frac{x^3y}{3} + \frac{x^3y}{2} + \frac{x^3y}{6} = \frac{6x^3y}{6} = x^3y$

$(-1)^3 \cdot 3 = -3$

14. a) $17x^2$

b) $-7xy$

c) x^3y

d) $-16x$

e) $16x\,y^2$

f) $-y^2$

15. a) 0

b) $-1{,}7\,x$

c) $\frac{3}{2}x^3$

16. a) $22x^3$

b) $3x^2y + x^2$

c) $-31y + 4x^2$

17. a) $x^4 \cdot x^5 = x^{4+5} = x^9$

b) $(2y^2) \cdot y^3 = 2y^{2+3} = 2y^5$

c) $(2x^2) \cdot (3x) = 2 \cdot 3 \cdot x^{2+1} = 6x^3$

d) $(-5y) \cdot (-8y^2) = 40y^{1+2} = 40y^3$

e) $x^2 \cdot (xy) = x^{2+1} \cdot y = x^3y$

f) $(x^2y) \cdot (x^3y^2) = x^{2+3} \cdot y^{1+2} = x^5y^3$

18. a) $(2x^2y^2)(3x^3y^3) = 6x^{2+3} \cdot y^{2+3} = 6x^5y^5$

b) $(3x^2z^2)(-2xy)(6z^2) = -36x^{2+1} \cdot yz^{2+1+2} =$

$= -36x^3yz^4$

c) $(-2x^2)(-4y^2)(-5x^3y^4) = -40x^{2+3} \cdot y^{2+4} =$

$= -40x^5y^6$

d) $2m^3(-6n^4)(3m^2n^2) = -36m^{3+2} \cdot n^{4+2} =$

$= -36m^5 \cdot n^6$

e) $5xyz(x^2y)(-y^3 \cdot z^2)(xz^4) =$

$= -5x^{1+2+1} \cdot y^{1+1+3} \cdot z^{1+2+4} = -5x^4y^5z^7$

19. a) $\left(\frac{2}{5}x^2y^2\right)\left(\frac{3}{7}x^3y^3\right) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7} \cdot x^{2+3} \cdot y^{2+3} =$

$= \frac{6}{35}x^5 \cdot y^5$

b) $\left(\frac{2}{3}m^2y^3\right)\left(\frac{3}{5}m^3y^4\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot m^{2+3} \cdot y^{3+4} =$

$= \frac{2}{5}m^5 \cdot y^7$

c) $\left(\frac{1}{4}a^2b^5\right)\left(\frac{8}{5}ab^2\right)\left(\frac{5}{3}a^3b^4\right) =$

$= \frac{1}{4} \cdot \frac{8}{5} \cdot \frac{5}{3} \cdot a^{2+1+3} \cdot b^{5+2+4} = \frac{2}{3}a^6 \cdot b^{11}$

20. a) $(1{,}5a^2x^3)(-1{,}8bx^2)(-5a^3bx^4) =$

$= 1{,}5 \cdot (-1{,}8)(-5) \cdot a^{2+3} \cdot b^{1+1} \cdot x^{3+2+4} = 13{,}5$

b) $(0{,}25b^2)(1{,}4xb^3) = 0{,}25 \cdot 1{,}4 \cdot b^{2+3} \cdot x =$

$= 0{,}35b^5x$

21. a) $16\,a^8\,b^6$

b) $-32\,a^{30}\,b^5$

c) $\frac{16}{81}a^8\,y^{20}$

d) $x^{50}\,y^{10}$

e) $x^8\,y^{16}\,z^{24}$

f) $\frac{256}{81}a^4\,y^{12}$

22. a) $(x^3y^3) : (x^2y^2) = \frac{x^3 \cdot y^3}{x^2 \cdot y^2} = x^{3-2} \cdot y^{3-2} =$

$= x \cdot y$

b) $(63a^4x^5) : (-9a^3x^2) = -\frac{63a^4x^5}{9a^3x^2} =$

$= -7a^{4-3} \cdot x^{5-2} = -7ax^3$

c) $(-12xy)^3 : (20x) = -\frac{12x^3y^3}{20x} =$

$= -\frac{3}{5}x^{3-1} \cdot y^3 = -\frac{3}{5}x^2y^3$

d) $(-8a^5y^6) : (-40ay) = -\frac{8a^5y^6}{40ay} =$

$= \frac{1}{5}a^{5-1} \cdot y^{6-1} = \frac{1}{5}a^4y^5$

23. a) $(37x^8y^9) : (-x^8y^9) = -\frac{37\cancel{x^8y^9}}{\cancel{x^8y^9}} = -37$

b) $(25a^3x^2y^4) : (5x^2) = -\frac{25a^3\cancel{x^2}y^4}{2\cancel{x^2}} = 5a^3y^4$

c) $(12a^6) : (-72a^2) = -\frac{12a^6}{72a^2} = -\frac{a^{6-2}}{6} = -\frac{a^4}{6}$

d) $(27a^{10}b^9) : (-3a^9b^9) = -\frac{27a^{10}\cancel{b^9}}{3a^9\cancel{b^9}} =$

$= -9a^{10-9} = -9a$

24. a) $(11{,}25a^2b^4) : (4{,}5ab^2) = \frac{11{,}25}{4{,}5} \cdot \frac{a^2b^4}{ab^2} =$

$= 2{,}5a^{2-1} \cdot b^{4-2} = 2{,}5ab^2$

b) $(a^3b^2) : (-4ab) = -\frac{a^3b^2}{4ab} = -\frac{a^2b}{4}$

c) $\left(-\frac{2}{5}a^5b^5\right) : \left(-\frac{4}{15}a^2b\right) =$

$= \frac{2}{5} \cdot \frac{15}{4} \cdot a^{5-2} \cdot b^{5-1} = \frac{3}{2}a^3 \cdot b^4$

d) $\left(-1^{10} \cdot b^6\right) : \left(\frac{8}{7}b^6\right) = -1 \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{\cancel{b^6}}{\cancel{b^6}} = -\frac{7}{8}$

25. a) $9x^6$

b) $\frac{8}{125}x^6$

c) $x^8\,y^{12}\,z^{16}$

d) $x^6\,y^{10}$

e) $-9\,x^{12}\,y^4$

f) $\frac{1}{6}x^9\,y^{12}$

26. a) $2x + 3y - 5x - 7y + 8 - x - 1 =$

$= 2x - 5x - x + 3y - 7y + 8 - 1 =$

$= -4x - 4y - 4y + 7$

b) $9xy - x^2 + y^2 - 3xy + 5x^2 + 6y^2 =$

$= 9xy - 3xy - x^2 + 5x^2 + y^2 + 6y^2 =$

$= 6xy + 4x^2 + 7y^2$

27. a) $(x^2 - 3x) + (2x^2 + 4x + 1) =$
$= x^2 - 3x + 2x^2 + 4x + 1 =$
$= 3x^2 + x + 1$

b) $(-7xy + 17x - 8y + 9) + (12xy + 2x - y) =$
$= -7xy + 12xy + 17x + 2x - 8y - y + 9 =$
$= 5xy + 19x - 9y + 9$

c) $(5x^3 - 11x^2 - 2x + 3) + (8x^3 + 3x^2 + 4x - 5) =$
$= 5x^3 + 8x^3 - 11x^2 + 3x^2 - 2x + 4x + 3 - 5 =$
$= 13x^3 - 8x^2 + 2x - 2$

28. a) $-2x\,y^2 + x^3 - 5y^3 + 8$

b) $5y^3 - 10y^2 + 2y + 6$

29. a) $-5x^2 + 4x - 3$

b) -1

30. a) $(2y^2 - 3y + 5) + [5y^2 + 3y - 7) - (y^2 + 3)] =$
$= 2y^2 - 3y + 5 + [5y^2 + 3y - 7 - y^2 - 3] =$
$= 2y^2 - \cancel{3y} + 5 + 5y^2 + \cancel{3y} - 7 - y^2 - 3 =$
$= 6y^2 - 5$

b) $(2xy^2 - 3xy + 4) - [(-2xy^2 + 4xy - 1) -$
$- (xy^2 - 3xy + 6)] = 2xy^2 - 3xy + 4 -$
$- [-2xy^2 + 4xy - 1 - xy^2 + 3xy - 6] =$
$= 2xy^2 - 3xy + 4 + 2xy^2 - 4xy + 1 + xy^2 -$
$- 3xy + 6 = 5xy^2 - 10xy + 11$

31. a) 0 (zero)

b) polinômio multiplicado por 2
$4x^3 - 10x^2 - 8x + 2$

c) $6x^3 - 15x^2 - 12x + 3$

32. a) $2y(y^3 - 1) = 2y^{1+3} - 2y = 2y^4 - 2y$

b) $x^2(x^2 + x + 1) = x^{2+2} + x^{2+1} + x^2 = x^4 + x^3 + x^2$

c) $-2x^2y^3(5x^2 - xy + 6y^2) =$
$= -10x^4y^3 + 2x^3y^4 - 12x^5y^5$

33. a) $(x + 1)(x + 3) = x^2 + 3x + x + 3 = x^2 + 4x + 3$

b) $(3x + 2)(3x - 2) = 9x^2 - \cancel{6x} + \cancel{6x} - 4 = 9x^2 - 4$

c) $-2x^2y^3(5x^2 - xy + 6y^2) = -2x^4y^3 - 2x^3y^4$
$- 12x^2y^5$

d) $(x + 1)(x^2 - x + 1) = x^3 - \cancel{x^2} + \cancel{x} + \cancel{x^2} - \cancel{x} + 1 =$
$= x^3 + 1$

e) $(2x + 1)(3y^2 - 2y - 1) =$
$= 6xy^2 - 4xy - 2x + 3y^2 - 2y - 1$

f) $(x + 2y)(x + y - 5) = x^2 + xy - 5x + 2xy +$
$+ 2y^2 - 10y = x^2 + xy - 5x + 2y^2 - 10y$

34. a) $2x(x - 2) + 3x(x - 5) = 2x^2 - 4x + 3x^2 - 15x =$
$= 5x^2 - 19x$

b) $x(2x - 10) - 5x(x - 2) =$
$= 2x^2 - \cancel{10x} - 5x^2 + \cancel{10x} = -3x^2$

c) $(x + 2)(x + 3) - 2(x + 4) =$
$= x^2 + 3x + \cancel{2x} + 6 - \cancel{2x} - 8 = x^2 + 3x - 8$

35. $(2x^2 - 3x - 2)(3x^2 - x - 3) =$
$= 6x^4 - \cancel{2x^3} - \cancel{6x^2} - \cancel{9x^3} + \cancel{3x^2} + 9x - \cancel{6x^2} +$
$+ 2x + 6 = 6x^4 - 11x^3 - 9x^2 + 11x + 6$

36. a) $x^2 + 2x + 1$

b) $x^2 - 20x + 100$

c) $9x^2 + 242 + 16$

d) $25 - 10x + x^2$

37. $A = x + 2$
$B = 2x - 5$
$C = 3x + 4$

a) $B + AC$
$2x - 5 + (x + 2)\,(3x + 4)$
$2x - 5 + 3x^2 + 4x + 6x + 8$
$3x^2 + 12x - 3$

b) $C - A + B$
$3x + 4 - (x + 2)\,(2x - 5)$
$3x + 4 - (2x^2 - 5x + 4x - 10)$
$3x + 4 - 2x^2 + x + 10$
$-2x^2 + 4x + 14$

Respostas da seção Para estudar

38. a) $2x = x + 12$

b) $x + 2x = 3x$

c) $x \cdot y = y \cdot x$

d) $x + (-x) = 0$

39. a) p = R\$ 14,00

b) $3{,}5 \cdot x$

c) R\$ 10,50

40. 2n

41. $\frac{x^4}{x^2} \rightarrow \frac{4^4}{4^2} = 4^2 = 16$

42. $d = \frac{n(n-3)}{2}$

a) $d = 9$

b) $d = 35$

43. a) x^5y^5

b) x^7

c) x^4y^2

d) y^3z^4

44. a) $7x^2$

b) $5xy$

c) $-x^3y$

d) $-15ax$

e) $5xy^2$

45. a) 160

b) -40

c) 4

46. a) 2

b) -1

c) $-\frac{7}{12}$

47. a) $15a^5y^5$

b) $-36a^3z^4y$

c) $-40a^5y^6$

48. $\left(\frac{2}{5}x^2y^2\right)\left(\frac{3}{7}x^3y^3\right) = \frac{6}{35}x^5y^5$

49. a) ay

b) $-7a^4$

c) $-\frac{3}{5}a^2y^3$

d) $\frac{1}{5} \cdot a^4y^5$

50. a) $9a^6$

b) $\frac{8}{125}x^6$

c) $a^8y^{12}z^{16}$

d) $-a^6y^{10}$

e) $16a^{12}y^4$

f) $\frac{1}{5}x^4$

51. a) $3a^2 + 3a + 1$

b) $13a^3 - 11a^2 + 2a - 2$

52. a) $-4ay^2 + a^3 - 7y^3 - 8$

b) $5y^3 - 10y^2 + 2y + 6$

53. a) $5a^3y - 11y^2$

b) $9a^3 - 13a + 17$

c) $2a^2b - 4ab^2 + 4ab$

d) $2a - 4y - 11$

54. a) $2x^3 - 4x^2 - x^2 + 5x = 2x^3 - 5x^2 + 5x$

b) $2x^2 - 10x + 2x^2 - 4x = 4x^2 - 14x$

c) $x^2 + 3x - 2x - 6 - 3x - 15 = x^2 - 2x - 21$

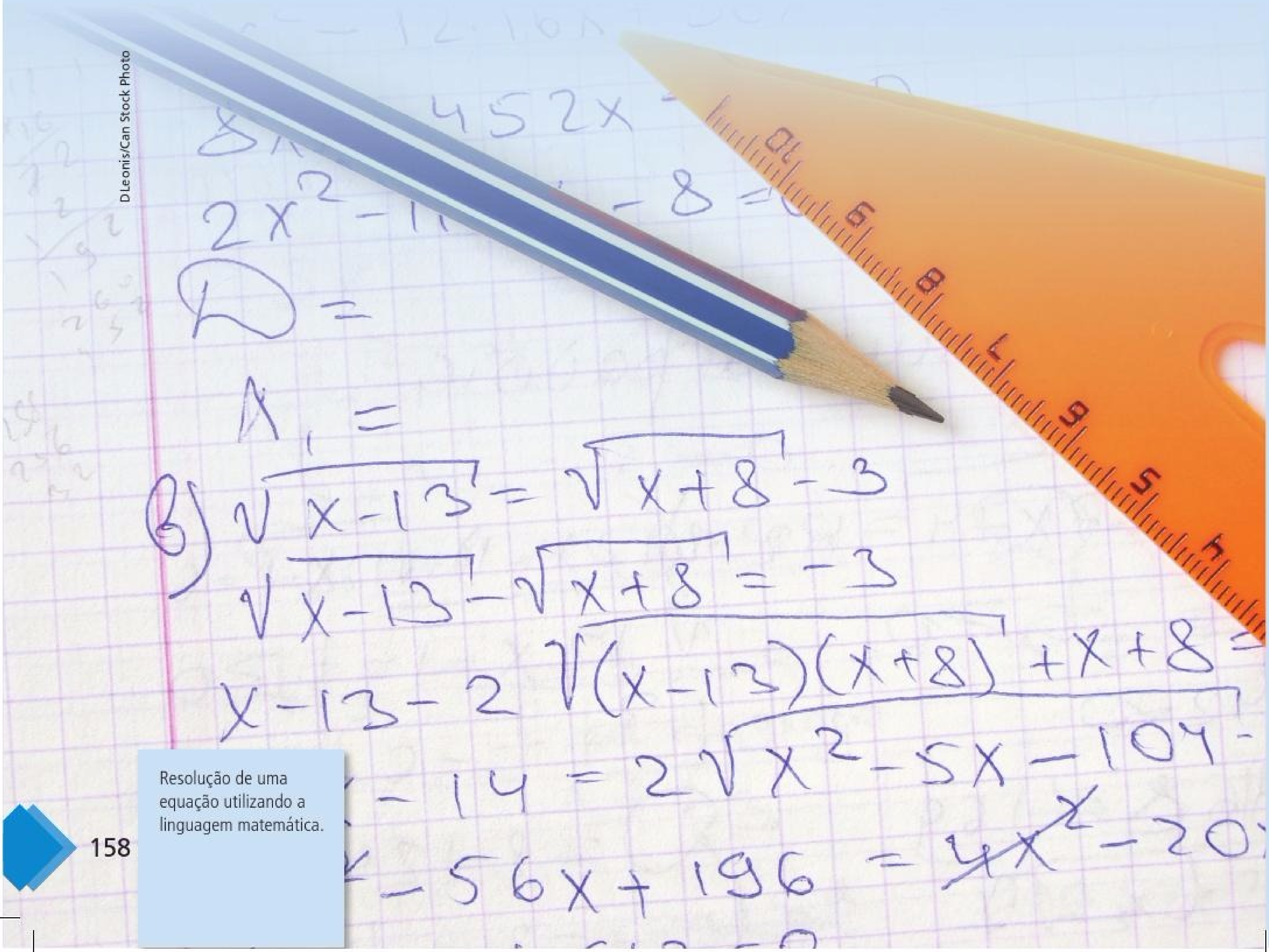
55. a) $a - 5 - (3a - 2)(2a - 4) = 6a^2 + 17a - 13$

b) $(2a - 4)(2a - 4) + (3a - 2)(a - 5) =$
$= 4a^2 - 8a - 8a + 16 + 3a^2 - 15a + 10 =$
$= 7a^2 - 31a + 2b$

capítulo 7

Equações

- Equações
- Equação do 1º grau
- Equações com coeficientes fracionários
- Resolução de problemas



D Leonis/Can Stock Photo

Resolução de uma equação utilizando a linguagem matemática.

Conversa Inicial

Vários problemas que encontramos em nosso cotidiano podem ser enunciados utilizando-se a linguagem matemática.

As mais diversas situações que vivenciamos por nós exigem que façamos cálculos de valores desconhecidos. É assim ao fazermos compras, ao calcularmos a nota que precisamos tirar numa prova, o preço de uma prestação e até quando alguém aparece com um desses truques de adivinhação de números. Por falar nisso, sempre é bom lembrar que de mágica esses truques não têm nada. São apenas equações. Com certeza.

Luiz Carlos Murauskas/Folha Imagem

Caixa de supermercado.

Bradcalkins/Can Stock Photos

Aluno fazendo prova.

Nos capítulos anteriores já utilizamos expressões nas quais apareciam valores desconhecidos que devíamos calcular.

Sem a preocupação com quaisquer formalismos, estávamos, na realidade, resolvendo equações, pois sempre que traduzimos uma sentença escrita em palavras para uma outra escrita em linguagem matemática, onde existem um ou mais valores a serem calculados, estamos escrevendo uma equação. Resolver a equação nos fornece a solução do problema original.

Veja como fazemos isso para um problema escrito de duas formas distintas: na linguagem natural e a linguagem algébrica.

Linguagem natural:

Qual é o número que somado ao seu antecessor resulta 99?

Linguagem algébrica:

$$\left.\begin{array}{r}\textbf{número} \rightarrow x \\ \textbf{antecessor} \rightarrow x - 1\end{array}\right\} \rightarrow x + x - 1 = 99$$

A partir de agora vamos começar a resolver equações utilizando processos algébricos. Precisamos saber quais são os métodos mais eficientes para fazer isso e em que condições devemos utilizar as propriedades das operações com expressões algébricas que estudamos.

Professor: Destaque para seus alunos que a equação é uma maneira de resolver situações nas quais surgem valores desconhecidos quando se tem uma igualdade. A palavra "equação" vem do latim *equatione*, equacionar, que quer dizer igualar, pesar, igualar em peso. E a origem primeira da palavra "equação" vem do árabe *adala*, que significa "ser igual a", de novo a idéia de igualdade. Por serem desconhecidos, esses valores são representados por letras. Por isso na língua portuguesa existe uma expressão muito usada: "o x da questão". Ela é utilizada quando temos um problema dentro de uma determinada situação. Matematicamente, dizemos que esse x é o valor que não se conhece.

Equações

Equação é toda sentença matemática na qual encontramos:

- uma ou mais letras que indicam valores desconhecidos, que denominamos **incógnitas**;
- um sinal de igualdade, representado pelo símbolo **= (igual)**;
- uma expressão à esquerda, denominada **1º membro**, e uma à direita, denominada **2º membro**.

Observe alguns exemplos de equações de uma incógnita:

- $\mathbf{3 \cdot x + 4 = 12} \rightarrow \begin{cases} \text{incógnita: } x \\ 1^{\underline{o}} \text{ membro: } 3 \cdot x + 4 \\ 2^{\underline{o}} \text{ membro: } 12 \end{cases}$

- $\mathbf{n - 8 = 2 \cdot n - 12} \rightarrow \begin{cases} \text{incógnita: } n \\ 1^{\underline{o}} \text{ membro: } n - 8 \\ 2^{\underline{o}} \text{ membro: } 2 \cdot n - 12 \end{cases}$

- $\mathbf{3 \cdot (x + 1) = 4 \cdot x - 12} \rightarrow \begin{cases} \text{incógnita: } x \\ 1^{\underline{o}} \text{ membro: } 3 \cdot (x + 1) \\ 2^{\underline{o}} \text{ membro: } 4 \cdot x - 12 \end{cases}$

Quando indicamos multiplicações de números por **x**, ou por qualquer letra que represente um número, podemos omitir o sinal de vezes. Por exemplo:

$$3x \text{ indica } 3 \cdot x$$

$$2n \text{ indica } 2 \cdot n$$

Vamos trabalhar inicialmente com equações que possuem apenas uma letra, ou seja, com equações que tenham somente uma **incógnita**. Por exemplo, na equação $3x + 4 = 12$, a incógnita é **x**.

Veja no exemplo a seguir os dois membros de uma equação de incógnita x:

$$\underbrace{5x + 2}_{1^{\underline{o}} \text{ membro}} = \underbrace{12}_{2^{\underline{o}} \text{ membro}}$$

Resolver uma equação que tem uma incógnita é o mesmo que encontrar o valor dessa incógnita que vai satisfazer a igualdade. Esse valor é denominado de **solução ou raiz** da equação.

Veja, por exemplo, a equação $5x + 2 = 12$. Observe o que acontece quando substituímos a incógnita **x** por **2**, que é a solução da equação, e por um outro valor **x = 3**, que não é a solução da equação:

Substituindo x por 2 em 5x + 2 = 12	
1º membro	2º membro
$5 \cdot 2 + 2$ $10 + 2$	12 12
$12 =$	12
2 é solução da equação	

Substituindo x por 3 em 5x + 2 = 12	
1º membro	2º membro
$5 \cdot 3 + 2$ $15 + 2$	12 12
$17 \neq$	12
3 não é solução da equação	

Atividades

1. Escreva, em seu caderno, uma equação para cada um dos problemas a seguir (utilize **x** como incógnita):

a) Dois trabalhadores têm o mesmo salário. Qual o valor deste salário se a soma dos dois é R$ 1 200,00? R$ 600,00

b) Qual é o número que somado a seu dobro resulta 15? $x = 5$

c) A soma de dois números consecutivos é 11. Quais são esses números? (dica: se x é um dos números, o outro será $x + 1$). $x = 5$ números: 5 e 6

2. Escreva a equação para o cálculo do lado de um quadrado de perímetro 28 cm. $\ell = 7$

3. Identifique o primeiro e o segundo membros das equações a seguir:

a) $3x - 1 = x + 5$ 1º $= 3x - 1$ 2º $= x + 5$

b) $-9x - 3 = 18$ 1º $= -9x - 3$ 2º $= 18$

c) $4x = 2(x + 1)$ 1º $= 4x$ 2º $= 2(x + 1)$

4. Assinale, no caderno, V para verdadeiro ou F para falso em cada afirmação a seguir e justifique:

Argumentar

V a) $x = 2$ é raiz da equação:
$$2x - 4 = 0$$

F b) $x = -1$ é solução da equação:
$$3x + 2 = x - 1$$

F c) $x = 0$ é raiz da equação:
$$2x + 1 = 4 + x$$

V d) $x = 3$ é solução da equação:
$$2x + 1 = 4 + x$$

Equação do 1º grau

Chamamos de equação do 1º grau com coeficientes racionais e incógnita **x** a toda equação do tipo **ax = b**, onde **a** e **b** são números racionais e $a \neq 0$.

Para resolver uma equação do 1º grau, usaremos a ideia de operação inversa. Observe os exemplos:

- $3x = -18$

Como a incógnita está multiplicada por três, podemos encontrá-la dividindo os dois membros da equação por 3:

$$(3x) : 3 = (-18) : 3$$
$$x = (-18) : 3$$
$$x = -6$$

- $\left(-\frac{2}{3}\right)x = -\frac{5}{6} \rightarrow \left(-\frac{2}{3}x\right) : \left(-\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{5}{6}\right) : \left(-\frac{2}{3}\right)$

$$x = \left(-\frac{5}{6}\right) : \left(-\frac{2}{3}\right) \rightarrow x = \left(-\frac{5}{6}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{\cancel{15}^{5}}{\cancel{12}_{4}} \rightarrow x = \frac{5}{4}$$

Professor: é muito importante que os alunos entendam o processo de resolução de uma equação. Escreva no quadro cada passagem do texto e destaque que o processo como caminho para resolver uma situação problema. Além disso, o conteúdo de equações permite ao professor tratar de diversas situações-problemas de forma contextualizada e interdisciplinar. A contextualização histórica do tema pode ser um bom caminho para quealuno perceba que as equações surgiram da necessidade de simplificar a linguagem dos problemas e possibilitar a sua interpretação e resolução. Se achar conveniente avalie a possibilidade de realizar trabalhos com o(s) professor(es) de história.

- Vamos resolver a seguinte equação: $2x - 5 = 1$

Primeiramente aplicamos a operação inversa da subtração:

$$2x - 5 = 1 \rightarrow 2x = 1 + 5$$

$2x = 6 \rightarrow$ equação do 1º grau

Em seguida, aplicamos a operação inversa da multiplicação:

$$2x = 6 \rightarrow x = \frac{6}{2} \rightarrow x = 3$$

Acompanhe, agora, as resoluções de equações nas quais aplicamos a operação inversa da adição, ou a operação inversa da subtração.

- $x + 8 = 12$

Vamos subtrair 8 dos dois membros da equação:

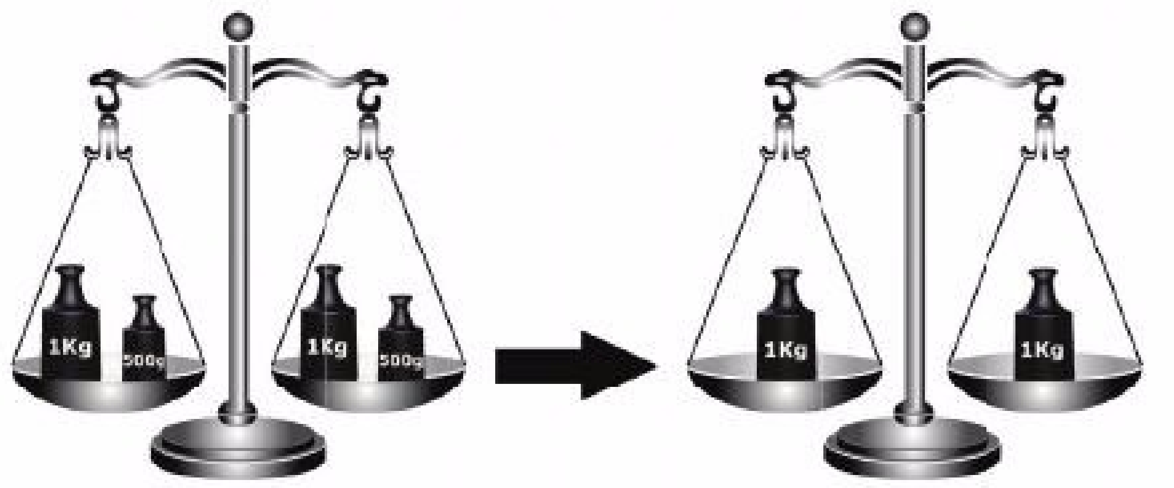
$$x + 8 - 8 = 12 - 8 \rightarrow x = 12 - 8 \rightarrow x = 4$$

- $x - 7 = 13$

Nese caso, adicionamos 7 aos dois membros da equação:

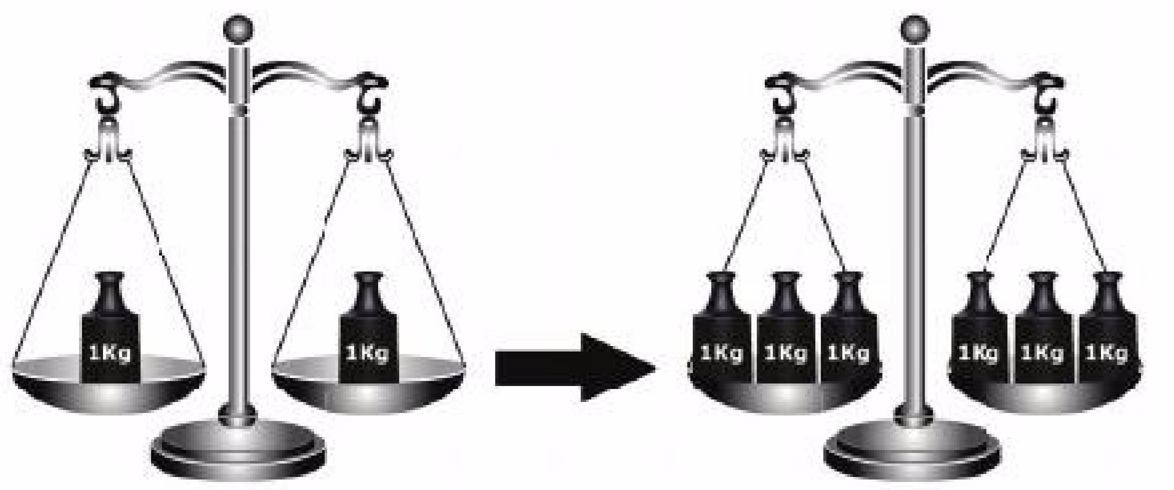
$$x - 7 + 7 = 13 + 7 \rightarrow x = 13 + 7 \rightarrow x = 20$$

Quando aplicamos a operação inversa da adição ou da subtração, estamos, na realidade, subtraindo ou adicionando um mesmo valor dos dois membros da equação. Suponha, por exemplo, uma balança que está equilibrada com dois corpos em cada um dos pratos. Um corpo tem 1 kg e o outro tem 500 g:



Retirando-se 500 g de cada prato, a balança permanecerá equilibrada. O mesmo acontece quando subtraímos ou adicionamos um mesmo valor aos dois membros de uma equação.

Se tivermos a balança equilibrada com 1 kg em cada prato e multiplicarmos esse peso por 3 nos dois pratos da balança, ela irá se manter equilibrada.



De maneira geral, para resolver equações utilizando a operação inversa, podemos

- somar um mesmo número aos dois membros;
- subtrair um mesmo número dos dois membros;
- multiplicar os dois membros por um mesmo número diferente de zero;
- dividir os dois membros por um mesmo número diferente de zero.

Veja mais dois exemplos:

1. Vamos resolver a equação: $2x - 7 = 8 - x$.

Adicionamos **x** aos dois membros.

$$(2x - 7) + x = (8 - x) + x$$

$$\underbrace{2x + x} - 7 = 8 - \cancel{x} + \cancel{x}$$

$$3x - 7 = 8$$

Adicionamos 7 aos dois membros.

$$3x - \cancel{7} + \cancel{7} = 8 + 7 \rightarrow 3x = 15$$

Fernanda Youssef

Dividimos os dois membros por 3.

$$3x = 15$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{15}{3} \rightarrow x = \frac{15}{3} \rightarrow x = 5$$

2. Observe como resolvemos a equação: $5 \cdot (-x - 7) = 6 - 4x + 8$

Lembrando que, quando uma multiplicação tem uma expressão entre parênteses, com um fator multiplicando-a, podemos omitir o sinal de vezes. Assim, a equação pode ser escrita como:

$$5(-x - 7) = 6 - 4x + 8$$

Em primeiro lugar, eliminamos os parênteses utilizando a propriedade distributiva da multiplicação:

$$5(-x - 7) = 6 - 4x + 8 \rightarrow -5x - 35 = 6 - 4x + 8$$

Em seguida, adicionamos 4x aos dois membros:

$$-5x - 35 + \mathbf{4x} = 6 - 4x + 8 + \mathbf{4x} \rightarrow -5x + 4x - 35 = 6 + 8 - \cancel{4x} + \cancel{4x}$$
$$-x - 35 = 14 \rightarrow -x = 14 + 35 \rightarrow -x = 49$$

Multiplicando, agora, os dois membros por – 1, obtemos:

$$-x = 49 \rightarrow (-x)(-1) = (49) \cdot -1 \rightarrow x = -49$$

Neste exemplo, escolhemos "adicionar 4x" aos dois membros da equação para que a incógnita ficasse isolada em um dos membros.

Observe o que aconteceu:

$$-5x - 35 = 6 - 4x + 8$$
$$-5x + 4x - 35 = 6 - \cancel{4x} + 8 + \cancel{4x}$$

Professor: O conceito de balança é importante para o aluno entender o que ocorre comas equações mas, na prática, é o "passar para o outro lado com a operação oposta ou inversa que é a técnica a ser trabalhada, principalmente quando se trata de coeficientes fracionários.

Quando procedemos dessa maneira, dizemos que o **–4x** do segundo membro "**passou**" para o primeiro membro, **trocando de sinal.**

Fazendo isso diretamente temos:

$$-5x - 35 = 6 \underbrace{-\ 4x} + 8$$
$$+\ 4x$$
$$-5x + 4x - 35 = 6 + 8$$

Fazendo o mesmo com o **–35**:

$$-5x + 4x \underbrace{-\ 35} = 6 + 8$$
$$+\ 35$$
$$-5x + 4x = 6 + 8 + 35$$
$$-x = 49 \rightarrow x = -49$$

Quando mudamos uma **parcela** de um membro para outro numa equação, devemos trocar seu sinal para manter a igualdade.

Se, por outro lado, passarmos um **fator** de um membro para outro, devemos inverter a operação. Veja os exemplos:

- $\underbrace{3}_{:3}x = 12 \rightarrow x = \dfrac{12}{3} \rightarrow x = 4$

- $\dfrac{x}{\underbrace{5}_{\times 5}} = 4 \rightarrow x = 5 \cdot 4 \rightarrow x = 20$

- $\dfrac{4x - 1}{\underbrace{3}_{\times 3}} = 5 \rightarrow 4x - 1 = 5 \cdot 3$

$4x - \underbrace{1}_{+1} = 15 \rightarrow 4x = 15 + 1$

$\underbrace{4}_{:4}x = 16 \rightarrow x = \dfrac{16}{4} \rightarrow x = 4$

Fernanda Youssef

Atividades

5. Resolva as equações aplicando o princípio da operação inversa:

a) $2x = 40$ $x = 20$

b) $-3x = -18$ $x = 6$

c) $5x - \left(\dfrac{1}{3}\right) = \left(-\dfrac{2}{3}\right)$ $x = -\dfrac{1}{15}$

6. Uma pessoa colocou 2 maçãs e 6 bananas, em um prato de uma balança. Elas se equilibraram com 7 laranjas colocadas no outro prato. Cada laranja tem 50 gramas e cada banana, 40 gramas.

a) Chamando o peso das maçãs de **m**, o das bananas de **b** e o das laranjas de ***l***, escreva a expressão que representa o equilíbrio da balança; 7ℓ

b) Substitua os valores dos pesos de cada laranja e de cada banana na expressão e calcule quanto pesa uma maçã. $m = 55$ g

m = maçã b = banana ℓ = laranja

7. Encontre a solução das seguintes equações:

a) $5x + 15 = 10$ $x = -1$

b) $4x - 40 = 60$ $x = 25$

c) $7x + 17 = 16$ $x = -\dfrac{1}{7}$

d) $3x - 49 = -100$ $x = -17$

e) $3x + 17 = 11$ $x = -2$

f) $6x - 18 = -6$ $x = 2$

g) $5x - 9 = -8$ $x = \dfrac{1}{5}$

h) $9x - 2 = -11$ $x = -1$

8. Encontre a raiz das seguintes equações, onde a incógnita é **m**:

a) $3m + 1 = 4$ $m = 1$
b) $5m - 12 = -2$ $m = 2$
c) $10m - 7 = -1$ $m = 0{,}6$
d) $2m + 4 = 5$ $m = \frac{1}{2}$

9. Lembrando que $\frac{2x}{5}$, por exemplo, é o mesmo que $\left(\frac{2}{5}\right) \cdot x$, resolva as equações utilizando a operação inversa:

a) $\frac{3x}{7} = 6$ $x = 14$
b) $\frac{8x + 5}{3} = -1$ $x = -1$
c) $\frac{3x + 15}{2} = 8$ $x = \frac{1}{3}$
d) $\frac{2x + 5}{4} = 2$ $x = \frac{3}{2}$
e) $\frac{7x}{2} = 21$ $x = 6$
f) $\frac{3x - 15}{3} = 15$ $x = 20$

10. Resolva as equações.

a) $2x + x + 5x = 128$ $x = 16$
b) $2x + 3x + 4 = 89$ $x = 17$
c) $5x - 4 - 3x = -16$ $x = -6$

11. Elimine os parênteses utilizando a propriedade distributiva da multiplicação e resolva as equações:

a) $4x + (7x + 11) = -11$ $x = -2$
b) $5x - (-x + 22) = -4$ $x = 3$
c) $11x + (-3x + 10) = 4x + 2$ $x = -2$
d) $11x - (-3x - 10) = 4x + 20$ $x = 1$

Equações com coeficientes fracionários

É muito comum encontrarmos equações que tenham coeficientes fracionários. Para resolvê-las, devemos reduzi-las a equações sem coeficientes fracionários e aplicarmos o que aprendemos sobre a operação inversa. Observe os exemplos a seguir:

- Vamos resolver a equação: $\frac{x}{12} = \frac{3}{4}$

Professor: Escreva no quadro cada passagem e explore a resolução das equações com coeficientes fracionários. Esse tema é fundamental para o aluno, pois esse conceito é aplicado de forma sistemática em diversos momentos para resolução de problemas. Destaque que esse tipo de equação precisa ser resolvido atendendo a algumas restrições, pois não podemos realizar divisões por zero. Assim, enfatize as abordagens do texto e explore as atividades propostas.

Podemos eliminar os denominadores que aparecem nessa equação, multiplicando os dois membros por 12 e por 4, o que equivale a multiplicarmos os dois membros por 12·4:

$$\frac{x}{12} = \frac{3}{4} \rightarrow 12 \cdot 4 \cdot \frac{x}{12} = 12 \cdot 4 \cdot \frac{3}{4}$$

Note que podemos cancelar o 12 no primeiro membro e o 4 no segundo membro, obtendo, assim a equação:

$$4 \cdot x = 3 \cdot 12$$

Na prática, dizemos que fazemos uma **multiplicação em cruz:**

$$\frac{x}{12} = \frac{3}{4}$$

Assim, passamos diretamente de $\frac{x}{12} = \frac{3}{4}$ para $4 \cdot x = 3 \cdot 12$.

Agora, a solução da equação fica mais simples:

$$\frac{x}{12} = \frac{3}{4} \rightarrow 4 \cdot x = 3 \cdot 12 \rightarrow 4x = 36 \rightarrow x = 9$$

A multiplicação em cruz pode ser usada em todas as equações do mesmo tipo do exemplo.

- Veja, agora, um exemplo que também pode ser resolvido pela multiplicação em cruz, onde há a necessidade de usarmos corretamente os parênteses:

$$\frac{2x - 1}{3} = \frac{8x - 3}{5} \rightarrow 5 \cdot (2x - 1) = 3 \cdot (8x - 3)$$
$$10x - 5 = 24x - 9 \rightarrow 10x - 24x = -9 + 5$$
$$-14x = -4 \rightarrow (-1)(-14)x = (-1)(-4) \rightarrow 14x = 4$$
$$x = \frac{4}{14} \rightarrow x = \frac{2}{7}$$

Observe neste exemplo que para “abrir” os parênteses utilizamos a propriedade distributiva da multiplicação.

- Vamos, agora, apresentar dois exemplos de um tipo de equação com coeficientes fracionários, na qual não podemos, inicialmente, multiplicar em cruz, pois não se trata de uma igualdade de frações.

a) $\frac{x}{5} - \frac{x}{6} = \frac{1}{4}$

Para resolver este tipo de equação, devemos, inicialmente, reduzir as frações a um denominador comum, encontrando o **mmc** dos denominadores:

$$\frac{x}{5} - \frac{x}{6} = \frac{1}{4} \rightarrow \text{mmc}(5, 6, 4) = 60 \rightarrow \frac{12x}{60} - \frac{10x}{60} = \frac{15}{60}$$
$$\frac{12x - 10x}{60} = \frac{15}{60} \rightarrow \frac{2x}{60} = \frac{15}{60} \rightarrow 2x = 15 \rightarrow x = \frac{15}{2}$$

Veja que em $\frac{2x}{60} = \frac{15}{60}$ temos uma igualdade de frações com mesmo denominador. Por essa razão podemos também igualar os numeradores.

Obteríamos o mesmo resultado se multiplicássemos em cruz e, depois simplificássemos o fator 60.

$$\frac{2x}{60} = \frac{15}{60} \rightarrow 2x \cdot 60 = 15 \cdot 60$$
$$120x = 900 \rightarrow x = \frac{900}{120} \rightarrow x = \frac{15}{2}$$

b) $\dfrac{x-2}{6} + \dfrac{x}{4} = 3$

$$\frac{x-2}{6} + \frac{x}{4} = 3 \rightarrow \text{mmc } (6, 4) = 12$$

$$\frac{2 \cdot (x-2)}{12} + \frac{3x}{12} = \frac{36}{12}$$

$$\frac{2 \cdot (x-2)}{12} + \frac{3x}{12} = \frac{36}{12}$$

$$\frac{2 \cdot (x-2) + 3x}{12} = \frac{36}{12}$$

Como os denominadores são iguais, igualamos os numeradores:

$$2 \cdot (x-2) + 3x = 36 \rightarrow 2x - 4 + 3x = 36$$

$$5x - 4 = 36 \rightarrow 5x - 4 = 36 \rightarrow 5x = 40$$

$$x = \frac{40}{5} \rightarrow x = 8$$

Atividades

12. Utilizando a multiplicação em cruz, resolva essas equações:

a) $\dfrac{x}{6} = \dfrac{14}{21}$ $x = 4$

b) $\dfrac{x}{9} = \dfrac{18}{27}$ $x = 6$

c) $\dfrac{12}{x} = \dfrac{3}{7}$ $x = 28$

d) $\dfrac{15}{2} = \dfrac{90}{x}$ $x = 12$

e) $\dfrac{7}{4} = \dfrac{14}{x}$ $x = 8$

13. Resolva as equações.

a) $\dfrac{x+4}{15} = \dfrac{2}{3}$ $x = 6$

b) $\dfrac{x+4}{3} = \dfrac{x+3}{4}$ $x = -7$

c) $\dfrac{4x-7}{3} = \dfrac{5x}{3}$ $x = -7$

d) $\dfrac{5x-1}{18} = \dfrac{11-x}{18}$ $x = 2$

14. Efetue:

a) $\dfrac{x}{6} + \dfrac{1}{12} = \dfrac{1}{4}$ $x = 1$

b) $x + \dfrac{x}{3} = 8$ $x = 2$

c) $\dfrac{x}{6} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{2}$ $x = 1$

d) $\dfrac{x}{3} - 1 = \dfrac{x}{4}$ $x = 12$

15. Resolva as equações:

a) $\dfrac{x+3}{2} + \dfrac{x-10}{3} = 4$ $x = 7$

b) $\dfrac{x+1}{4} + \dfrac{x-2}{3} = 4$ $x = \dfrac{53}{7}$

c) $\dfrac{2x-1}{3} - \dfrac{x+4}{2} = 6$ $x = 50$

d) $\dfrac{x-1}{2} + \dfrac{3x}{4} = 1$ $x = \dfrac{6}{5}$

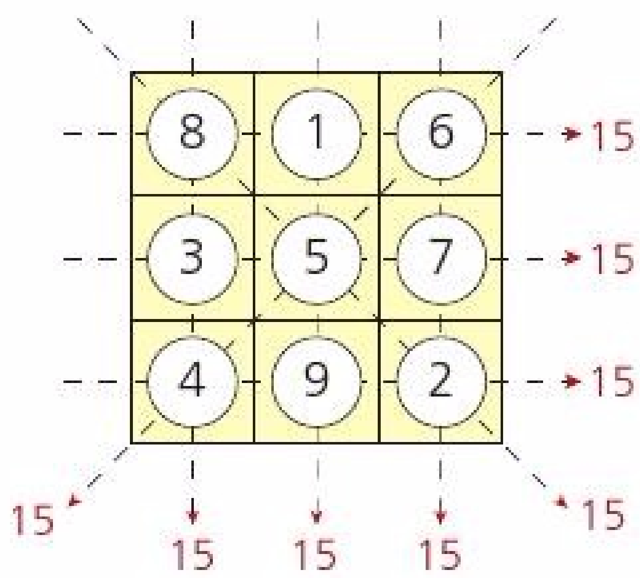
Curiosidade

Quadrados mágicos

Um dos mais antigos desafios matemáticos é a construção de tabelas compostas por números dispostos na forma de um quadrado, que apresenta a curiosa propriedade de ter a soma constante para os elementos de uma mesma linha, coluna ou diagonal. Esse tipo de tabela é chamada de **quadrado mágico**. Observe, por exemplo, um quadrado mágico de 3 linhas e 3 colunas:

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Somando-se os elementos de uma linha, coluna ou diagonal deste quadrado mágico, sempre obtemos o valor constante 15.



Fernanda Youssef

Complete os dois quadrados mágicos a seguir, calculando os valores das incógnitas indicadas em cada um deles.

a)

4	**y**	8
11	7	3
z	5	**x**

Z = 6
y = 9
x = 10

b)

1	14	**x**	4
12	7	6	9
w	11	10	**y**
13	2	**z**	16

w = 8
x = 15
z = 3
y = 5

Resolução de problemas

Já vimos que as equações são sentenças matemáticas que podem representar situações reais nas quais procuramos resolver problemas encontrando valores desconhecidos ou incógnitas.

Para resolvermos esses problemas, devemos saber como traduzi-los da linguagem comum para a linguagem matemática. Basta entendermos as etapas que compõem o problema e traduzi-las uma a uma.

Veja a seguir, alguns exemplos de tradução de uma sentença escrita em linguagem comum para a linguagem matemática, onde utilizamos a incógnita **x**:

Professor: a descrição apresentada nesta página recupera a utilizada pelos antigos matemáticos, quando ainda não havia sido desenvolvida uma linguagemmatemática tal qual a que se conhece hoje.

- *um número inteiro somado com seu sucessor* → $x + (x + 1)$
- *a metade do sucessor de um número* → $\frac{x + 1}{2}$
- *um número somado à sua metade* → $x + \frac{x}{2}$
- *um número somado com seu triplo* → $x + 3x$
- *um número somado com a metade de seu antecessor* → $x + \frac{x + 1}{2}$
- *um número somado à sua quarta parte* → $x + \frac{x}{4}$
- *cinquenta por cento de um número* → $0,5x$
- *um número mais cinquenta por cento de seu valor* → $x + 0,5x$

Observe nos exemplos a seguir como fazemos para traduzir um problema para a linguagem algébrica e resolvê-lo com uma equação do primeiro grau.

Fernanda Youssef

- **Pensei em um número. Somei-o com 3 e multipliquei o resultado da soma por 2. Em seguida, no novo resultado, somei o triplo do número que pensei. O resultado final foi 56. Em qual número pensei?**

Solução:

Vamos chamar de **x** o número pensado, que passa a ser nossa incógnita, e criar as sentenças matemáticas correspondentes às etapas do problema:

Linguagem comum	Linguagem matemática
Pensei em um número	x
Somei 3	$x + 3$
Multipliquei por 2	$2(x + 3)$
Somei o triplo do número pensado	$2(x + 3) + 3x$
O resultado final foi 56	**$2(x + 3) + 3x = 56$**

Observe que, ao final, obtivemos a equação $2(x + 3) + 3x = 56$.

$2(x + 3) + 3x = 56 \rightarrow 2x + 6 + 3x = 56 \rightarrow 5x = 56 - 6 \rightarrow 5x = 50 \rightarrow x = 10$

Veja agora dois novos exemplos. Para encontrar as soluções, não montaremos tabelas, como fizemos no exemplo anterior. Vamos estabelecer a incógnita e traduzir as proposições diretamente a partir da incógnita.

- **Um pai vai distribuir a seus três filhos a quantia de R$ 1500,00. O filho do meio, chamado João, receberá R$ 100,00 a mais que o mais novo, que se chama Flávio e o mais velho, chamado Francisco, vai receber o dobro de João. Quanto vai receber cada filho?**

Fernanda Youssef

Começamos a solução indicando por **x** a quantia que Flávio irá receber:

Flávio $\rightarrow x$

João $\rightarrow x + 100$

Francisco $\rightarrow 2(x + 100)$

Como o total é R$ 1 500,00, podemos escrever a seguinte equação:

$x + (x + 100) + 2(x + 100) = 1\,500$

Resolvendo essa equação, você encontrará o valor de **x** que Flávio irá receber e, em seguida quanto cada um de seus irmãos ganhará:

$x + x + 100 + 2x + 200 = 1\,500$

$4x = 1\,500 - 300 \rightarrow 4x = 1\,200 \rightarrow x = \frac{1\,200}{4} \rightarrow x = 300$

Como indicamos por x o valor atribuído a Flávio e x + 100 o valor a ser dado a Francisco, concluímos que:

Flávio receberá → R$ 300,00

João receberá → R$ 300,00 + R$ 100,00 = R$ 400,00

Para Francisco, devemos calcular:

2(R$ 300,00 + R$ 100,00) = 2 · R$ 400,00

Logo, Francisco receberá R$ 800,00

A solução do problema será:

Flávio receberá R$ 300,00, seu irmão João receberá R$ 400,00 e Francisco, R$ 800,00, totalizando os R$ 1 500,00 que o pai tinha para distribuir.

- **Na construção de um prédio de apartamentos à beira-mar num terreno de 2000 m², o projetista definiu que $\frac{1}{4}$ da área ocupada pelo prédio seja destinada a jardins Qual será a área ocupada pelo prédio, se todo o terreno foi utilizado para o prédio e o jardim.**

Trainman32/Dreamstime

Condomíno residêncial em construção. Florianópolis, SC.

Vamos chamar de **x** a área do prédio. Dessa forma, temos:

Área do jardim → $\frac{x}{4}$

Total do terreno → 2000 m²

A partir das proposições acima, podemos escrever a equação:

$$x + \frac{x}{4} = 2000$$

$$\frac{4x + x}{4} = \frac{8000}{4} \rightarrow 4x + x = 8000$$

$$5x = 8000 \rightarrow x = \frac{8000}{5} \rightarrow x = 1600$$

A área ocupada pelo prédio será de 1600 m².

Atividades

16. Determine um número que somado com seu sucessor resulta 99. $x = 49$

17. A soma de três números inteiros consecutivos é 36. Quais são esses números?
$x = 11$
os números são 11, 12 e 13

18. Determine o número natural que somado com sua quarta parte dá 55. $x = 44$

19. Qual é o número natural que somado com a metade de seu sucessor dá 44? ! Resolver problemas
$x = 29$

20. O pai de Roberto tem 40 anos a mais que ele. Quantos anos tem Roberto se a soma de sua idade com a do pai é 62 anos?
Roberto 11
Pai 51

21. Uma corrida de automóveis dá um prêmio de R$ 600 000,00 aos três primeiros colocados. O segundo colocado ganha R$50 000,00 a mais que o terceiro e o primeiro colocado ganha o dobro do segundo.

Tatiana Popova/Shutterstock

GP da Malásia, Sepang, 2011.

Qual é o prêmio de cada um?
1º R$ 325 000,00
2º R$ 162 500,00
3º R$ 112 500,00

22. Uma construtora vai construir uma clínica num terreno de 1 800 m², destinando $\frac{1}{3}$ dessa área para estacionamento.

a) Qual será a área ocupada pela clínica?
1 200 m²

b) Qual será a área do estacionamento?
600 m²

23. Ao fazer o pagamento de uma prestação atrasada uma pessoa pagou R$ 132,00, incluindo a multa de 10% por atraso. Calcule o valor da multa e o da prestação original.
valor da multa = R$ 12,00 e valor da prestação = R$ 120,00

24. Pensei em certo número, multipliquei-o por 2, subtraí 4 e somei o número em que tinha pensado, obtendo o resultado 17. Em que número pensei? $x = 7$

25. Encontre um certo número que foi multiplicado por 3, somado com 17 e dividido por 2, sabendo que o resultado final foi 16. $x = 5$

26. Pensei em certo número, somei-o com 52 e dividi o resultado por 5. Obtive 44. Qual foi o número pensado? $x = 168$

27. Pensei num número, somei $\frac{1}{4}$, multipliquei por 2 e subtraí $\frac{1}{2}$. Obtive $\frac{2}{3}$. Em que fração pensei? $x = \frac{1}{3}$

28. Três números inteiros e consecutivos somam zero. Determine-os. $-1, 0, +1$

29. A adição de 3 e um número racional tem o mesmo resultado da multiplicação desses mesmos números. Qual é esse resultado? (dica: monte a igualdade da soma com a multiplicação de **3** e **x**) $x = \frac{3}{2}$

30. Numa escola, foi realizada uma gincana com três equipes: Azul, Amarela e Vermelha. Ao final da competição, somados os pontos obtidos pelas equipes, a situação era a seguinte:

a) A equipe Amarela fez 140 pontos a mais que a Azul;

b) A equipe Vermelha fez o triplo dos pontos da Amarela e 1000 pontos a mais que a Azul.

Calcule quantos pontos cada equipe fez.
(Azul) $x = 290$ pontos
(Amarela) $y = 430$ pontos
(Vermelha) $Z = 1\,290$ pontos

Para estudar

31. Encontre a solução das seguintes equações:

a) $7x + 17 = 10$ c) $5x - 40 = 60$

b) $7x + 17 = 16$ d) $3x - 64 = -100$

32. Resolva as equações:

a) $\frac{2x}{5} = 6$ c) $\frac{2x + 5}{3} = -5$

b) $\frac{3x - 5}{4} = 1$ d) $\frac{2x - 5}{5} = 3$

33. Determine a solução destas equações:

a) $(-19) \cdot y = -133$ d) $7y - 9 = -23$

b) $y - 19 = -133$ e) $\frac{7x}{2} = 21$

c) $8y - 9 = 23$ f) $\frac{3x - 15}{3} = 5$

34. Resolva as equações:

a) $\frac{3x + 2}{2} = 7$ c) $3x + 2x + 1 = 6$

b) $\frac{x - 5}{2} = 27$ d) $7x + 5x = 6$

35. Utilizando a multiplicação em cruz, resolva estas equações:

a) $\frac{x}{4} = \frac{6}{8}$ c) $\frac{5}{x} = \frac{1}{9}$

b) $\frac{3x}{3} = \frac{8}{2}$ d) $\frac{15}{2} = \frac{90}{x}$

36. Resolva as equações:

a) $\frac{x - 7}{6} = \frac{4}{3}$ c) $\frac{x}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$

b) $\frac{2x - 8}{5} = \frac{6x}{5}$ d) $\frac{x}{6} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$

37. Resolva as equações.

a) $4x + (7x + 11) = -11$

b) $5x - (-x + 26) = -4$

c) $11x + (-3x + 10) = 4x + 2$

d) $11x - (-3x + 10) = 4x + 1$

38. Resolva as equações a seguir reduzindo todos os termos a um mesmo denominador:

a) $\frac{x + 3}{5} + \frac{x - 1}{3} = 1$

b) $\frac{x + 3}{4} + \frac{x - 10}{6} = 2$

39. Pensei em um número. Multipliquei-o por 4, subtraí 8 e, depois, subtraí o triplo do número pensado. Obtive como resultado –3. Em que número pensei?

40. Um número mais o triplo dele dá 20. Qual é esse número?

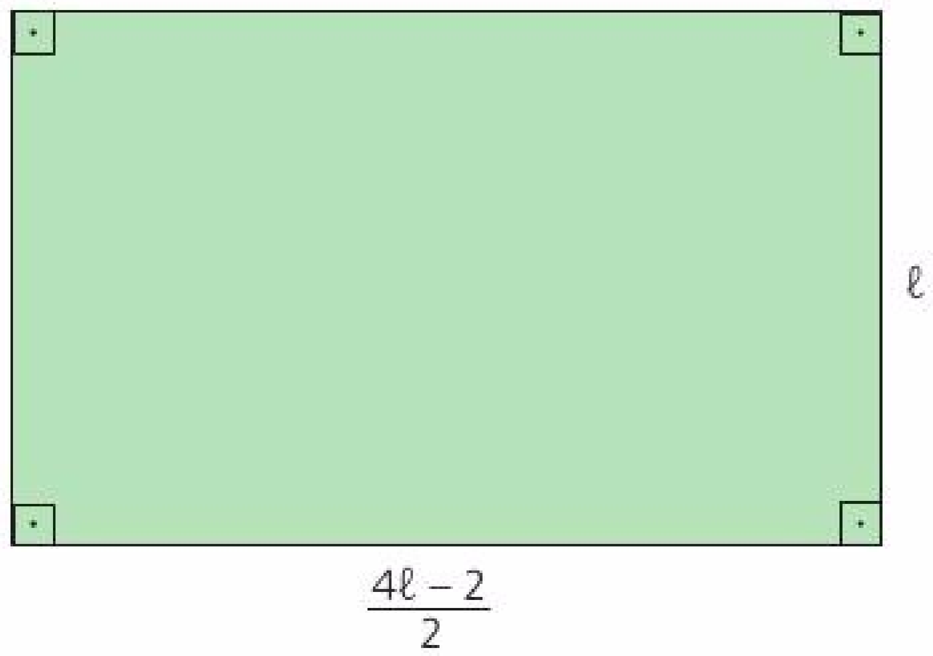
41. Um jogo, com 4 tempos de mesma duração e 3 intervalos de 4 minutos cada, leva 2 horas. Quantos minutos tem cada tempo?

Jogo de basquete.

42. Numa balança, 5 maçãs, cada uma com 180 gramas, mais 6 laranjas, cada uma com **x** gramas, equilibram-se com um abacaxi 1 800 gramas. Quanto vale **x**?

43. Os lados de um retângulo medem ℓ e $\frac{4\ell - 2}{2}$ centímetros, e o seu perímetro é 7 cm.

Resolver problemas



a) Encontre o valor de ℓ.

b) Encontre a medida de cada lado do retângulo.

Interpretar textos

44. Uma construtora vai aproveitar um terreno de 1 700 m², dividindo-o em duas partes: uma área **x** para construção e $\frac{1}{3}$ dessa área para estacionamento.

Alita Bobrov/Dreamstime

Estacionamento em parque público.

a) Qual será a área ocupada pela construção?

b) Qual será a área do estacionamento?

45. Paguei R$ 88,00 por uma prestação atrasada. Explicaram-me que estavam cobrando a prestação mais uma multa pelo atraso. A multa era igual a $\frac{1}{10}$ da prestação. Qual era foi valor da multa?

46. Uma camisa custa a terça parte do preço de um paletó. As duas peças juntas custam R$ 1 200,00. Qual é o preço de cada uma?

Kadmy/Can Stock Photo

Prateleira de loja de roupa masculina.

47. Para comprar um *skate*, faltam R$ 60,00. Porém, se eu tivesse o triplo do que tenho, compraria esse *skate* e ainda me sobrariam R$ 80,00.

Barsik/Can Stock Photo

Jovens em rampa de *skate*.

a) Quanto eu tenho?

b) Qual é o preço do *skate*?

Resolução das atividades

1. a) $2x = 1200$

$x = 600$

R$ 600,00

b) $x + 2x = 15$

$3x = 15$

$x = 5$

c) $x + (x + 1) = 11$

$2x = 10$

$x = 5$

números: 5 e 6

2. Perímetro $= 4 \cdot \ell$

$4\ell = 28$

$\ell = 7$

3. a) $1^{\circ} = 3x - 1$

$2^{\circ} = x + 5$

b) $1^{\circ} = -9x - 3$

$2^{\circ} = 18$

c) $1^{\circ} = 4x$

$2^{\circ} = 2(x + 1)$

4. a) V, pois $2 \cdot 2 - 4 = 0$

b) F, pois $3(-1) + 2 \neq -1 - 1$

c) F, pois $2 \cdot 0 + 1 \neq 4 + 0$

d) V, pois $2 \cdot 3 + 1 = 4 + 3$

5. a) $2x = 40$

$x = 20$

b) $-3x = -18$

$x = 6$

c) $5x - \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$

$5x = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3}$

$5x = -\frac{1}{3}$

$x = -\frac{1}{15}$

6. m = maçã

b = banana

ℓ = laranja

a) $2m + 6b = 7\ell$

b) $2m + 6 \cdot 40 = 7 \cdot 50$

$2m = 350 - 240$

$2m = 110$

$m = 55$ g

7. a) $5x + 15 = 10$

$5x = -5$

$x = -1$

b) $4x - 40 = 60$

$4x = 100$

$x = 25$

c) $7x + 17 = 16$

$7x = -1$

$x = -\frac{1}{7}$

d) $3x - 49 = 100$

$3x = -51$

$x = -17$

e) $3x + 17 = 11$

$3x = -6$

$x = -2$

f) $6x - 18 = -6$

$6x = 12$

$x = 2$

g) $5x - 9 = -8$

$5x = 1$

$x = \frac{1}{5}$

h) $9x - 2 = -11$

$9x = -9$

$x = -1$

8. a) $3\,m + 1 = 4$
$3\,m = 3$
$m = 1$

b) $5\,m - 12 = -2$
$5\,m = 10$
$m = 2$

c) $10\,m - 7 = -1$
$10\,m = 6$
$m = \frac{6}{10} = 0{,}6$

d) $2\,m + 4 = 5$
$2\,m = 1$
$m = \frac{1}{2}$

9. a) $\frac{3x}{7} = 6$
$x = 14$

b) $\frac{8x + 5}{3} = -1$
$8x + 5 = -3$
$8x = -8$
$x = -1$

c) $\frac{3x + 15}{2} = 8$
$3x + 15 = 16$
$x = \frac{1}{3}$

d) $\frac{2x + 5}{4} = 2$
$2x + 5 = 8$
$2x = 3$
$x = \frac{3}{2}$

e) $\frac{7x}{2} = \frac{42}{7}$
$x = 6$

f) $\frac{3x - 15}{3} = 15$
$3x = 60$
$x = 20$

10. a) $2x + x + 5x = 128$
$8x = 128$
$x = 16$

b) $x = 17$

c) $x = -6$

11. a) $4x + 7x + 11 = -11$
$11x = -22$
$x = -2$

b) $5x + x - 22 = -4$
$6x = 18$
$x = 3$

c) $11x - 3x + 10 = 4x + 2$
$4x = -8$
$x = -2$

d) $11x + 3x + 10 = 4x + 20$
$10x = 10$
$x = 1$

12. a) $\frac{x}{6} = \frac{14}{21}$
$x \cdot 21 = 14 \cdot 6$
$x = 4$

b) $\frac{x}{9} = \frac{18}{27}$
$x = \frac{18 \cdot 9}{27}$
$x = 6$

c) $\frac{12}{x} = \frac{3}{7}$
$x = \frac{12 \cdot 7}{3}$
$x = 28$

d) $\frac{15}{2} = \frac{90}{x}$
$x = \frac{90 \cdot 2}{15}$
$x = 12$

e) $\frac{7}{4} = \frac{14}{x}$
$x = \frac{14 \cdot 4}{7}$
$x = 8$

13. a) $\frac{x + 4}{15} = \frac{2}{3}$
$x = 6$

b) $\frac{x + 4}{3} = \frac{x + 3}{4}$
$4x + 16 = 3x + 9$
$x = -7$

c) $\dfrac{4x-7}{3} = \dfrac{5x}{3}$

$x = -7$

d) $\dfrac{5x-1}{18} = 11 - x$

$x = 2$

14. a) $\dfrac{x}{6} + \dfrac{1}{12} = \dfrac{1}{4}$

$2x + 1 = 3$

$x = 1$

b) $x + \dfrac{x}{3} = 8$

$4x = 8$

$x = 2$

c) $\dfrac{x}{6} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{2}$

$x - 2 = 3$

$x = 1$

d) $\dfrac{x}{3} - 1 = \dfrac{x}{4}$

$4x - 12 = 3x$

$x = 12$

15. a) $\dfrac{x+3}{2} + \dfrac{x-10}{3} = 4$

$3x + 9 + 2x - 20 = 24$

$5x = 35$

$x = 7$

b) $\dfrac{x+1}{4} + \dfrac{x-2}{3} = 4$

$3x + 3 + 4x - 8 = 48$

$7x = 53$

$x = \dfrac{53}{7}$

c) $\dfrac{2x-1}{3} - \dfrac{x+4}{2} = 6$

$4x - 2 - 3x - 12 = 36$

$x = 50$

d) $\dfrac{x-1}{2} + \dfrac{3x}{4} = 1$

$2x - 2 + 3x = 4$

$5x = 6$

$x = \dfrac{6}{5}$

16. $x + (x + 1) = 99$

$2x = 98$

$x = 49$

17. $x + x + 1 + x + 2 = 36$

$3x = 33$

$x = 11$

os números são 11, 12 e 13

18. $x + \dfrac{x}{4} = 55$

$4x + x = 220$

$x = 44$

19. $x + \dfrac{x+1}{2} = 44$

$2x + x + 1 = 88$

$3x = 87$

$x = 29$

20. Roberto = x

Pai = y

$x + y = 62$

$y = x + 40$

$x + x + 40 = 62$

$2x = 22$

$x = 11$

Roberto 11

Pai 51

21. 3º = x

2º = x + 50 000

1º = 2(x + 50 000)

$2(x + 50\,000)\ (x + 50\,000) + x = 600\,000$

$2x + 100\,000 + x + 50\,000 + x = 600\,000$

$4x = 450\,000$

$x = 112\,500$

1º R$ 325.000,00

2º R$ 162.500,00

3º R$ 112.500,00

22. terreno = 1 800 m^2

estacionamento $\dfrac{1}{3}$

a) clinica = $\dfrac{2}{3}$ 1800 = 1200 m^2

b) estacionamento = 600 m^2

23. Pagou R$ 132,00 atrasado
multa 10%
valor da multa = R$ 12,00
valor da prestação = R$ 120,00

24. $x \cdot 2 - 4 + x = 17$
$3x = 21$
$x = 7$

25. $\dfrac{x \cdot 3 + 17}{2} = 16$
$3x = 15$
$x = 5$

26. $\dfrac{x + 52}{5} = 44$
$x = 168$

27. $\left(x + \dfrac{1}{4}\right) \cdot 2 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{3}$
$x = \dfrac{1}{3}$

28. – 1, 0, + 1

29. $3 + x = 3 \cdot x \rightarrow x = \dfrac{3}{2}$

30. Azul Amarela Vermelha
x y z

a) Amarela = Azul + 140
y x

b) Vermelha = 3 · Amarela
y
Vermelha = 1000 + Azul
x

$y = 140 + x$
$z = 3y$ —— $3y = 1000 + x$
$z = 1000 + x$

$$\begin{cases} y = 140 + x \\ 3y = 1000 + x \end{cases}$$

$3(140 + x) = 1000 + x$
$420 + 3x = 1000 + x$
$2x = 580$

(Azul) x = 290 pontos
(Amarela) y = 290 + 140 = 430 pontos
(Vermelha) Z = 1290 pontos

Respostas da seção Para estudar

31. a) $x = -1$
b) $x = -\dfrac{1}{17}$
c) $x = 20$
c) $x = -12$

32. a) $x = 15$
b) $x = 3$
c) $x = -10$
d) $x = 10$

33. a) $y = 7$
b) $y = 114$
c) $y = 4$
d) $y = 2$
e) $x = 6$
f) $x = 10$

34. a) $x = 4$
b) $x = 59$
c) $x = 1$
d) $x = \dfrac{1}{2}$

35. a) $x = 3$
b) $x = 4$
c) $x = 45$
d) $x = 12$

36. a) $x = 15$
b) $x = -2$
c) $x = 1$
d) $x = 5$

37. a) $x = -2$
b) $x = -5$
c) $x = -2$
d) $x = -1$

38. a) $x = \dfrac{11}{8}$
b) $x = 7$

39. 5

40. 5

41. t = 27 minutos

42. x = 150g

43. a) $\ell = 1{,}5$ cm
b) Os lados são 2 cm; 2 cm; 1,5 cm; 1,5 cm

44. a) $x = 1\,275$ m^2
b) 425 m^2

45. multa = R$ 8,00

46. Camisa: R$ 300,00 e paletó R$ 900

47. a) R$ 70,00
b) *skate*: R$ 130,00

capítulo 8

Matemática Financeira

- Porcentagem e cálculos finceiros
- Juros simples
- Juros compostos

Fim de expediente no pregão da Bovespa, São Paulo, SP, 2008.

Fábio Rodrigues Pozzebom/ABr

Professor: Leia o texto com seus alunos e discuta a importância da educação financeira para a vida do indivíduo. Mencione que a educação financeira visa buscar uma melhor qualidade de vida no presente e no futuro, proporcionando a segurança material necessária para viver e alguma garantia para eventuais imprevistos. Promova a discussão entre seus alunos e anote no quadro os pontos mencionados pelo grupo.

Conversa Inicial

Todos os dias nos deparamos com informações que se relacionam com valores monetários. Aplicações, índices de Bolsas de Valores, indicadores de crescimento econômico, lucros, prejuízos, impostos, financiamentos e parcelamentos, são algumas das variáveis encontradas em nosso cotidiano, em nossas casas, nas empresas, nas notícias de jornais, na televisão e na internet. Afinal, o mundo gira em torno da economia e das finanças dos países, independentemente do tipo de regime político que eles têm.

Antônio Milena/ABr

Pregão da Bolsa de Valores de São Paulo, onde se realizam operações de compra e venda de ações. São Paulo, SP, 2008.

Conhecer conceitos básicos de Matemática Financeira é muito importante nos dias de hoje. Eles são muito úteis para sabermos um pouco sobre o funcionamento da economia, aprender a tomarmos decisão na hora de vender ou comprar alguma coisa e, também, a organizar financeiramente nossas vidas.

Desde já é preciso que você aprenda a economizar, cortar gastos, poupar e planejar o que fazer com o dinheiro que tem. Mais adiante, na sua vida, você precisará controlar uma conta bancária, operar aspectos financeiros de seu trabalho quando se tornar um profissional e também aprender a administrar o orçamento doméstico. Tudo isso começa com os conceitos fundamentais de Matemática Financeira.

Apesar de existirem diversas moedas nos diversos países do mundo, as variáveis ligadas ao dinheiro são medidas e controladas pela linguagem universal da Matemática. Como esta linguagem é aplicada aos cálculos financeiros? Qual o papel que o cálculo de porcentagem exerce na análise dos diversos fenômenos, incluindo-se os financeiros?

Porcentagem e cálculos financeiros

Já vimos que porcentagem é toda razão $\frac{a}{b}$, na qual b = 100.

Essas razões de denominador 100 são representadas pelo símbolo %.

Observe exemplos:

$$\frac{5}{100} = 0{,}05 = 5\%$$

$$\frac{137}{100} = 1{,}37 = 137\%$$

$$\frac{4}{25} = \frac{16}{100} = 0{,}16 = 16\%$$

$$\frac{155}{1\,000} = \frac{15{,}5}{100} = 0{,}155 = 15{,}5\%$$

Na maioria dos cálculos financeiros utilizamos porcentagens e os conceitos fundamentais de frações, razões e regra de três.

Verifique nos exemplos a seguir alguma situações comuns de cálculos financeiros.

1. Um vendedor tem 3% de comissão nos negócios que realiza. Qual foi a sua comissão em uma venda de R$ 36 000,00?

   A comissão do vendedor (C) é 3% da venda, ou seja:

   $$C = 3\% \text{ de } 36\,000 = \frac{3}{100} \cdot 36\,000 = \text{R\$ } 1\,080{,}00$$

2. Uma loja está oferecendo 5% de desconto para pagamento à vista, na compra de um automóvel que custa R$ 34 700,00. Quanto uma pessoa pagará por esse carro, à vista?

   Se é oferecido um desconto de 5%, restam 95% do preço. Portanto, o preço à vista será 95% de 34 700 = 0,95 × 34 700 = R$ 32 965,00.

3. Um funcionário recebeu um reajuste salarial de 7,5%. Quanto passará a receber se o salário atual é de R$ 1 200,00?

   Esse cálculo pode ser resolvido de dois modos:

1º modo: calculamos o reajuste e adicionamos ao salário atual.

reajuste salarial = 7,5% de 1 200 = 0,075 × 1 200 = R$ 90,00

Em seguida, fazemos:

novo salário = salário atual + reajuste salarial

novo salário = R$ 1 200,00 + R$ 90,00 = R$ 1 290,00

2º modo: calculamos o **índice de atualização** utilizado no reajuste salarial.

$$\underbrace{\text{novo salário}}_{x} = \text{salário atual} + 7{,}5\% \text{ do } \underbrace{\text{salário atual}}_{x}$$

novo salário = x + 7,5% x

novo salário = x + 0,075 x = (1 + 0,075)x

novo salário = 1,075x

O número 1,075 é o **índice** ou **fator de atualização**. Portanto, o novo salário será:

Novo salário = 1,075 · 1200 = R$ 1 290,00

4. O aluguel de uma casa passou de R$ 450,00 para R$ 504,00. Qual foi a porcentagem de aumento? E qual foi o índice de atualização do aluguel?

O aumento foi de: R$ 504,00 – R$ 450,00 = R$ 54,00.

A porcentagem de aumento se refere sempre ao valor anterior, portanto:

$$\begin{array}{ccc} 100 & \text{\_\_\_\_\_\_\_\_} & 450 \\ x & \text{\_\_\_\_\_\_\_\_} & 54 \end{array}$$

$\dfrac{100}{x} = \dfrac{450}{54} \rightarrow x = \dfrac{100 \cdot 54}{450} = 12 \rightarrow$ Logo, a porcentagem de aumento foi de 12%.

O índice de atualização do aluguel (I_A) é um número que, multiplicado pelo valor antigo, dá como produto o novo valor. Assim,

$$450 \cdot I_A = 504 \rightarrow I_A = \frac{504}{450} = 1{,}12$$

Logo, o índice de atualização do aluguel foi de 1,12.

Vale salientar que poderíamos ter calculado a porcentagem de aumento através do índice de atualização. Para isso, bastava dividir o novo salário pelo antigo e subtrair 1 inteiro, obtendo o acréscimo de 0,12 = 12%.

Professor: Discuta a atividade 7 com seus alunos com muita atenção, pois um erro normalmente cometido pelos alunos é considerar que um acréscimo de 12% equivale a um desconto de 12%. Assim, o aluno calcula 12% de R$ 425,60, que dá R$ 51,07, subtrai este valor da mensalidade atual, o que dá R$ 374,53 e acredita que este é o valor da mensalidade antiga. Mas se calcularmos 12% de R$ 374,53, obteremos R$ 44,94 e não R$ 51,07.

Atividades

O valor correto é obtido por:
$x \cdot 1{,}12 = 425{,}60$
$x = 425{,}60 / 1{,}12$
$x =$ R$ 380,00

1. Um vendedor recebe 9% de comissão nas vendas realizadas. Qual foi a sua comissão em uma venda de R$ 3 000,00? R$ 270,00

Julia Moraes/Folhapress

Vendedor em loja de eletrodomésticos.

2. Um corretor recebeu R$ 2 800,00 pela venda de uma casa, tendo sido de 5% a taxa de comissão. Qual o valor de venda da propriedade? R$ 56 000,00

3. Juca devia R$ 200,00 a Rodrigo e pagou apenas R$ 74,00. Quantos por cento da dívida foram pagos? 37%

4. Um determinado produto tinha um preço de R$ 500,00 e foi reajustado (aumentado) em 6%. Numa campanha de vendas no mês seguinte ele foi oferecido com um desconto de 6% sobre o preço reajustado. Responda:

a) qual o valor do reajuste? R$ 30,00

b) qual o valor do desconto dado na campanha de vendas? R$ 31,80

c) qual o preço cobrado pelo produto na campanha de vendas? R$ 498,20

d) o preço promocional é maior ou menor que o preço anterior ao reajuste?
menos R$ 1,80

5. Júlia recebeu um reajuste salarial de 11,5%. Quanto passou a ganhar se o seu salário era de R$ 820,00? ! Ampliar conhecimentos
R$ 914,30

6. Marcelo passou a ganhar R$ 550,00 porque teve um reajuste salarial de 10%. Quanto era seu salário antes do reajuste?
R$ 500,00

7. O aumento das mensalidades escolares foi de 12%. Se em uma escola essa mensalidade passou a ser de R$ 425,60, qual era o valor anterior? Qual foi o índice ou fator de atualização das mensalidades? !
R$ 380,00 Indice de 1,12 Resolver problemas

8. Celso prestou serviço para uma empresa no valor de R$ 800,00. Quanto recebeu se sofreu desconto de 5% devido ao Imposto Sobre Serviços (ISS) tributado pelo município?
0,95 (índice)

9. Ana ganha mensalmente R$ 1 200,00. Em cada mês, seu salário é descontado em média 10%, a título de previdência social e imposto sobre a renda. Qual é o valor descontado mensalmente?
R$ 120,00

10. Em uma liquidação, uma camisa que custava R$ 30,00 foi vendida com 15% de abatimento. Quanto passou a custar a camisa? R$ 25,50

Jacques Loic/Opção Brasil Imagens

Vitrine promocional numa liquidação.

Juros Simples

Quando alguém pede dinheiro emprestado, é comum pagar uma compensação pelo tempo que ficou com o dinheiro. Essa compensação é sempre uma porcentagem do valor que foi emprestado e é proporcional ao tempo em que o dinheiro ficou emprestado.

A compensação paga por um empréstimo durante um certo tempo chama-se **juro (J)**; a porcentagem que se paga é a **taxa de juros (i)**; o dinheiro que se empresta ou que se aplica, é o **capital (C)**; e o total que se paga no final do empréstimo é o montante **(M).**

Quando um empréstimo é feito num regime de juros simples, o juro é diretamente proporcional ao valor do capital inicial e ao tempo de aplicação.

O tempo de aplicação é indicado na taxa **i** e dado pelo número **n** de períodos em que o capital fica emprestado.

Em função dessa proporcionalidade, podemos dizer que:

C – Capital inicial
J – Juros simples
i – Taxa de juros
n – Número de períodos

Professor: leia o texto sobre juros simples e anote no quadro os principais pontos do texto. Discuta os exemplos em sala de aula e destaque que o regime de juros será simples quando o percentual de juros incidir apenas sobre o valor principal, ou seja, sobre os juros gerados a cada período não incidirão novos juros.

Observe os exemplos de cálculo de juros simples:

1. Uma pessoa toma emprestado R$ 2 000,00 pelo prazo de 2 meses, à taxa de 3% ao mês. Qual será o valor a ser pago como juro?

   Inicialmente calculamos o juro mês a mês:

   – 1º mês: juro = 3% de 2 000 = $0,03 \cdot 2\,000 = 60,00$

   – 2º mês: juro = 3% de 2 000 = $0,03 \cdot 2\,000 = 60,00$

   Ao final de 2 meses, os juros totalizam R$ 120,00. Podemos, também, fazer o cálculo diretamente:

   $$J = C \cdot i \cdot n \rightarrow J = 2\,000 \cdot 0,03 \cdot 2 \rightarrow J = 120,00$$

   Decorrido o prazo, o valor a ser pago como juro simples será de R$ 120,00 e o montante final será:

   $$M = 2\,000 + 120 \rightarrow M = R\$\ 2\,120,00$$

Fernanda Youssef

2. Qual o valor de um capital que, aplicado à taxa de juros simples de 2% ao mês, rendeu depois de um ano R$ 240,00 de juros?

Como a taxa é de i = 2% ao mês, devemos converter 1 ano em 12 meses, ou 12 períodos de aplicação desta taxa para produzir um juro de R$ 240,00.

Assim:

$J = C \cdot i \cdot n$

$240 = C \cdot 0{,}02 \cdot 12$

$240 = C \cdot 0{,}24 \rightarrow C = 1\,000$

O capital aplicado inicialmente foi de R$ 1 000,00

Montante

Chama-se **Montante** ou **valor acumulado** de um capital inicial C, investido a uma taxa **i** por período e pelo prazo de **n** períodos, ao valor que se obtém somando-se o capital inicial com os juros obtidos neste período. Indicando o montante por **M**, temos:

$$\mathbf{M = C + J \rightarrow M = C + C \cdot i \cdot n \rightarrow M = C\,(1 + i \cdot n)}$$

Observe dois exemplos do cálculo do montante:

1. Qual é o montante de um capital de R$ 1 000,00 aplicado à taxa de 12% a.a (ao ano) pelo prazo de 2 anos?

Temos:

$C = 1\,000$, $i = 0{,}12$ e $n = 2$ anos

$M = C\,(1 + i \cdot n) \rightarrow M = 1\,000\,(1 + 0{,}12 \cdot 2)$

M = R$ 1 240,00

O montante, após 2 anos, com juro de 12% a.a., será de R$ 1 240,00.

2. Que montante receberá um aplicador que tenha investido R$ 5 000,00, à taxa de juros simples de 18% a.a., durante 8 meses?

Em primeiro lugar, convertemos o tempo de aplicação para anos:

8 meses equivalem a $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ do ano.Aplicando a fórmula do montante, temos:

$M = C\,(1 + i \cdot n) \rightarrow M = 5\,000\left(1 + 0{,}18 \cdot \frac{2}{3}\right) \rightarrow M = \text{R\$}\,6\,600{,}00$

O aplicador receberá R$ 6 600,00 ao fim de 6 meses.

Conexão

O índice Bovespa

Através dos principais meios de comunicação, somos informados diariamente sobre o comportamento dos **índices de bolsas de valores**, tanto do mercado brasileiro quanto do internacional.

As bolsas de valores são organismos do sistema financeiro que se destinam à operação de capitais investidos em ações de **empresas de capital aberto**. Dizer que uma empresa tem capital aberto é o mesmo que dizer que qualquer pessoa ou instituição pode ser proprietária de parte dessa empresa por meio da aquisição de lotes de suas ações.


Rubens Chaves/Folhapress

Corretores negociam ações na Bovespa em São Paulo, SP, 2008.

Dependendo de fatores políticos, econômicos e principalmente do desempenho da empresa, essas ações se valorizam ou desvalorizam diariamente. Se, por exemplo, é descoberta uma nova jazida de petróleo no território brasileiro, as ações da Petrobrás tendem a subir.

A Bolsa de Valores do Estado de São Paulo (Bovespa), é o local onde operadores de corretoras atuam nos pregões, que são as sessões diárias de operação das Bolsas, comprando e vendendo as ações dos investidores, de acordo com a variação de seus valores.

O que é o índice Bovespa?

O índice Bovespa, da Bolsa de Valores do Estado de São Paulo, é o mais importante indicador do desempenho médio das cotações do mercado de ações brasileiro. Ele foi criado em 1968 e serve como um referencial para comparar o desempenho das empresas que têm ações na bolsa, refletindo o comportamento das principais ações transacionadas a cada dia no mercado de capitais.

O mesmo método de medida de desempenho é utilizado nas Bolsas de Valores em todo o mundo pois o comportamento dos mercados mais importantes, como Nova York, Londres e Tokyo influencia o mercado brasileiro e é influenciado por este, uma vez que existem empresas internacionais em todos esses países.

O que quer dizer fechamento em alta ou em baixa?

Quando dizemos que a Bovespa fechou em alta ou em baixa, estamos expressando quanto o índice de fechamento da bolsa foi superior ou inferior ao índice de fechamento do pregão do dia anterior. Em outras palavras, o índice em alta ou em baixa indica que, em relação ao dia anterior, a média do comportamento das ações melhorou ou piorou. A alta ou a baixa não representa especificamente nenhum lote de ações, mas reflete o comportamento do conjunto de ações negociadas no pregão daquele dia.

São também muito importantes os comparativos de alta ou baixa por períodos acumulados como, por exemplo, meses, trimestres e anos, que nos fornecem uma visão média mais ampla da economia e suas relações com a conjuntura nacional e internacional.

Fábio Rodrigues Pozzebom/ABr

Painel da Bovespa indica as variações das ações das empresas.

Para ler

O cheque especial

O cheque especial é um contrato de empréstimo que os bancos oferecem a determinados correntistas, dependendo de seu perfil e da movimentação média de sua conta e consiste em adicionar ao saldo da conta bancária um valor extra, chamado de limite do cheque especial. Assim, uma pessoa que possui R$ 2 300,00 em sua conta e um cheque especial de R$ 5 000,00, terá disponível para gastar R$ 7 300,00.

Sempre que o correntista ultrapassar o limite de seu dinheiro e utilizar o limite do cheque especial, pagará juros proporcionais ao valor e ao período em que utilizou a quantia, como se fosse um empréstimo automático.

Porém, diferentemente de outros empréstimos, que são cobrados através de parcelas mensais, o valor que o correntista utilizou do limite do cheque especial é cobrado em uma única parcela na data de vencimento, acrescida das taxas e dos juros do cheque especial.

Suponha, por exemplo, que uma pessoa utilize R$ 500,00 de seu limite e que o banco em que ela tenha conta cobre juros de 7,8% ao mês para o cheque especial. Na data de vencimento do cheque especial, o banco irá cobrar os R$ 500,00 mais 7,8% sobre R$500,00, o que resulta em R$ 539,00, caso o correntista tenha utilizado o limite nos últimos 30 dias.

Caso tenha utilizado durante um período menor que 30 dias, a cobrança será proporcional.

Em face da facilidade de utilização e recebimento de cobertura para valores dentro do limite oferecido pelo banco, as taxas de juros cobradas no cheque especial costumam ser as maiores do mercado.

Professor: Para mostrar ao aluno um aspecto prático e interessante da aplicação do que ele está aprendendo, você pode prepará-lo para compreender um erro que muitos consumidores são vítimas, por absoluta falta de conhecimento e cuidado. Trata-se da incidência de juros sobre valores parcelados e, nesse caso, os consumidores passam a pagar mais juros do que pensam.

Juros Compostos

Regime de juros compostos é aquele em que o juro gerado pela aplicação ou empréstimo é aplicado sobre o montante de cada período. Isso significa que, ao fim de um período o capital passa a ser o capital inicial mais os juros do período e assim sucessivamente.

Em linguagem mais simples, dizemos que este regime é o de **juros sobre juros** e é o regime utilizado em operações de empréstimos bancários, cheques especiais, financiamentos e investimentos.

Suponha, por exemplo, que uma pessoa faça uma aplicação de R$ 2000,00 a juro composto pelo prazo de 3 meses, à taxa de 5% a.m. (ao mês). Observe na tabela a seguir que, a cada mês, são acrescidos 5% de juros ao montante produzido até o final do mês anterior.

n	Saldo no início do período	Juro por período	Montante
1	2 000,00	$2\,000,00 \cdot 0,05 = 100,00$	$2\,000,00 + 100,00 = 2\,100,00$
2	2 100,00	$2\,100,00 \cdot 0,05 = 105,00$	$2\,100,00 + 105,00 = 2\,205,00$
3	2 205,00	$2\,205,00 \cdot 0,05 = 110,25$	$2\,205,00 + 110,25 = 2\,315,25$

Decorrido o prazo, o valor total pago como juros será:

$J = 2\,315,25 - 2\,000,00 \rightarrow J = \text{R\$ } 315,65.$

Observe que, o mesmo Capital aplicado em regime de juros simples pagaria:

$J = C \cdot i \cdot n \rightarrow J = 2000,00 \cdot 0,05 \cdot 3 \rightarrow J = \text{R\$ } 300,00$

Com juros compostos, o valor pago no período é R$ 15,65 maior que o do regime de juros simples.

Cálculo do montante com juros compostos

Você já deve ter ouvido falar em **capitalização**. Esse termo é aplicado quando, no regime de juros compostos, a cada período acrescentamos os juros ao montante já produzido, formando um novo capital para o período seguinte. Por essa razão dizemos **capitalização**.

Vamos calcular o montante **M**, para um capital **C**, aplicado a uma taxa **i** por período, ocorrendo capitalização no final de cada período, em um prazo de **n** períodos.

- final do 1º período:
  $M_1 = C + C \cdot i \rightarrow M_1 = \mathbf{C\,(1 + i)}$
- final do 2º período:
  $M_2 = M_1 + M_1 \cdot i \rightarrow M_2 = M_1(1 + i) \rightarrow M_2 = C\,(1 + i)(1 + i) = \mathbf{C\,(1 + i)^2}$
- final do 3º período:
  $M_3 = M_2 + M_2 \cdot i \rightarrow M_3 = M_2(1 + i) \rightarrow M_3 = C\,(1 + i)(1 + i)(1 + i) = \mathbf{C\,(1 + i)^3}$
- final do 4º período:
  $M_4 = M_3 + M_3 \cdot i \rightarrow M_4 = M_3(1 + i) \rightarrow M_4 = C\,(1 + i)(1 + i)(1 + i)(1 + i) =$
  $= \mathbf{C\,(1 + i)^4}$

Fernanda Youssef

e assim sucessivamente.

Dizemos que a capitalização cresce exponencialmente com o número de períodos em que o capital fica aplicado, pois este número de períodos é o expoente da potência de base (1 + i), onde **i** é a taxa de juros da capitalização.

De uma maneira geral, o montante capitalizado ao final de **n** períodos, à taxa **i** de juros é dado por:

$$\mathbf{M = C\,(1 + i)^n}$$

Fixados o capital **C** e a taxa **i**, o montante **M** varia exponencialmente em função do período **n**. Observe um exemplo do cálculo do Montante em regime de juros compostos:

- Uma pessoa toma R$ 3 000,00 emprestados, a juros de 2% a.m., pelo prazo de 3 meses com capitalização composta. Qual é o montante a ser devolvido?

  $$M = C \cdot (1 + i)^n \rightarrow M = 3\,000\,(1 + 0{,}02)^3$$

  Utilizando uma calculadora, calculamos inicialmente:

  $$(1 + 0{,}02)^3 = (1{,}02)^3 = 1{,}02 \cdot 1{,}02 \cdot 1{,}02 = 1{,}061208$$

  Em seguida, fazemos:

  $$M = 3\,000 \cdot 1{,}061208 \rightarrow M = \text{R\$ } 3182{,}62$$

Professor: um erro comum é o aluno se esquecer que 2% = 0,02 e, na fórmula, fazer i = 2. Faça o exemplo com i = 2 para mostrar-lhe como o resultado é absurdo.

Atividades

Nos exercícios que seguem, considere sempre que os juros são simples, exceto se houver observação em contrário.

11. Calcule os juros produzidos por um capital de R$ 12 500,00, à taxa de 5% ao mês durante 6 meses. R$ 3 750,00

12. Qual taxa mensal que, aplicada a um capital de R$ 4 000,00 rende juros de R$ 1 000,00 no prazo de 5 meses? 5%

13. Uma aplicação de capital paga juros de 3,4% ao mês. Se aplicarmos de R$ 60 000,00 em regime de capitalização (**juros compostos**) , quanto teremos ao final de 3 meses? 66 330,00

14. Certo capital foi emprestado a juros de 84% ao ano (84% a.a.). Em 8 meses (ou seja, uma fração do ano), rendeu R$ 560,00. Qual foi o capital emprestado? R$ 1 120,00

15. Uma TV de plasma custa, à vista, R$ 4 200,00, mas pode ser paga em 4 parcelas mensais com juros de 1,5% ao mês, em regime de juros compostos. Optando pelo parcelamento, qual o total pago pela TV? Entre o preço à vista e o total à prazo, qual a porcentagem de aumento a operação produz?

R$ 4 457,72; 6%

16. Calcule o montante de uma aplicação de R$ 1 000,00, a 4% ao mês, capitalizado mensalmente, durante 5 meses. 1 216,65

17. Um capital de R$ 10 000,00 foi investido numa caderneta de poupança, em regime de capitalização, que paga um juro mensal de 0,85%. Qual o valor que o investidor encontrará no extrato da caderneta ao final de 4 meses? 10 344,35

18. Um cliente abriu uma caderneta de poupança onde depositou R$ 2 000,00. Nos quatro primeiros meses, esta poupança pagou 1,1%, 0,9%, 1,2% e 1,0% em regime de juros compostos, sucessivamente. Qual o montante produzido ao final do quarto mês? R$ 2 085,32

19. O acordo de reajuste salarial de uma categoria de trabalhadores escalonou o reajuste em três aumentos de salários consecutivos e acumulados. No primeiro mês, os salários seriam corrigidos em 5%, no segundo, depois de 3 meses, em 3% e, após seis meses outros 3%. Qual o percentual de aumento resultante no sétimo mês após o acordo? 11,39%

Na prática

Operações na Bolsa

Organize um grupo de 5 alunos para realizar esta oficina. Ela poderá ser realizada utilizando-se um microcomputador e uma planilha eletrônica (EXCEL, por exemplo) ou com uma calculadora e o desenho de algumas tabelas.

A tabela a seguir foi retirada do site da Bolsa de Valores de São Paulo e apresenta as ações que tiveram as cinco maiores altas e as cinco maiores baixas no pregão do dia 16 de abril 2015. O preço em (R$) representa o preço com o qual a ação "fechou" o pregão. Ou seja, ela foi oferecida no início do dia por um preço diferente do indicado na tabela.

Oscilações do Ibovespa

▲ Altas

Ação	Preço (R$)	Osc. (%)
# Gafisa ON	2,60	▲ 4,42
# Usiminas PNA	5,48	▲ 3,98
# CSN ON	6,57	▲ 3,63
# Light ON	15,47	▲ 3,48
# Even ON	4,85	▲ 3,41

▼ Baixas

Ação	Preço (R$)	Osc. (%)
# Metalúrgiaca Gerdau PN	10,26	▼ –5,09
# Gerdau PN	9,62	▼ –4,18
# Brasken PNA	11,92	▼ –3,87
# Duratex ON	8,39	▼ –3,01
# Petrobras PN	12,93	▼ –3,00

a) Utilizando uma calculadora ou o EXCEL, cada aluno deve determinar o valor com a qual uma ação em alta e uma ação em baixa entraram no pregão.

b) Cada aluno deve determinar a razão entre o preço de fechamento de uma ação em alta e o de uma ação em baixa.

O mesmo site, apresenta as seguintes informações:

- A BOVESPA fechou em baixa de 0,45%;
- O volume negociado no dia foi de R$ 7 111 649 512,00;
- Foram realizadas 924 624 transações no dia.

Gráfico do pregão da BOVESPA em 16 de abril de 2015, que abriu com 54918 pontos e fechou com 54674 pontos, apresentando, portanto, uma queda de 4,5%.

Fonte: pregão-online.bmfbovespa.com.br.

Ainda como informação do pregão do dia, o site apresenta as ações mais negociadas nas diversas modalidades de transações. Observe as ações mais negociadas no mercado à vista, ou seja, compra simples com transferência de valores.

Mercado a Vista

Ação	Preço (R$ 1000)	Osc. (%)
# PETROBRAS	802 141,00	13,0%
# ITAUUNIBANCO	349 175,00	5,6%
# VALE	266 456,00	4,3%
# BMFBOVESPA	264 252,00	4,3%
# CIELO	232 787,00	3,7%

A tabela apresenta o valor em milhares de R$ e a % de participação da transação no total do Mercado à Vista. Com base na tabela:

c) Cada aluno deve calcular o valor aproximado do total de transações à vista, a partir de uma das ações negociadas. Lembre-se que o preço está indicado em milhares de reais (R$ 1000). Assim, onde a tabela aponta o valor 802 141,00, por exemplo, devemos entender R$ 802 141 000,00. Não se preocupem com diferenças entre os totais calculados, observem apenas em torno de que valor eles oscilam.

d) Utilizando o total de operações à vista calculado pelo grupo, calculem quanto significa percentualmente o total de operações à vista em relação ao total negociado no dia.

Para estudar

20. Por quanto devo vender um estojo que comprei por R$ 18,00 para obter um lucro de 12%?

21. Um varejista importou 250 canetas pagando R$ 375,00 pelo lote. Ele pretendia vender cada caneta por R$ 3,20, mas descobriu que 50 delas não funcionavam. Para ter o mesmo lucro, ele decidiu vender as canetas restantes por um preço maior. Qual é esse preço?

22. Uma mercadoria foi comprada por R$ 80,00 e vendida por R$ 104,00. Qual foi o percentual de lucro?

23. Vendendo sua calculadora por R$ 44,00, Lígia teve um prejuízo de 12%.

Dinostock/PhotoXperss

Calculadora

Quanto Lígia havia pago pela calculadora?

24. O salário de seu João passou de R$ 320,00 para R$ 448,00. Qual foi o percentual de aumento?

25. Um comerciante, em cada artigo que vende, acrescenta 25% ao preço de compra. Por quanto ele comprou um artigo cujo preço de venda é de R$ 150,00?

26. Qual foi, aproximadamente, o percentual de prejuízo na venda por R$ 357,00 de um objeto que custou R$ 421,00?

27. Se eu tivesse 25% a mais do que tenho, poderia comprar a TV dos meus sonhos, que custa R$ 1 800,00! Quanto eu tenho?

28. Na venda da moto por R$ 1 875,00, Ricardo teve um prejuízo de 25%.

Shutterstock

Loja de motos.

Quanto Ricardo pagou pela moto?

29. Na produção de certo livro, uma editora gasta R$ 22 000,00 para preparar o original e R$ 8,00 por livro para imprimir 2 000 livros. Nessas condições, responda:

a) Qual é o custo de cada livro quando a editora produz 2 000 exemplares?

b) E quando produz 5 000 exemplares, se o custo cai para R$ 4,00 por livro?

c) Se a editora produzir 5 000 exemplares, separar 100 livros para doação e vender os restantes por R$ 53,00 cada um, terá lucro ou prejuízo? De quanto?

30. Ao comprar sua bicicleta nova, Anderson conseguiu um abatimento de 5% sobre o preço marcado. O abatimento foi de R$ 12,50. Qual era o preço marcado?

Bowie15/Dreamstime

Ciclista

31. Um corretor recebeu R$ 7 800,00 de comissão pela venda de um apartamento. O preço do apartamento é de R$ 130 000,00. Calcule a taxa de porcentagem da comissão.

32. Um negociante vendeu um computador por R$ 2 200,00, com um prejuízo de 12%. Calcule o preço de custo desse computador.

33. Qual foi o percentual de prejuízo numa venda de R$ 435,00 se o preço de custo era de R$ 580,00?

34. Em cada artigo que vende, um comerciante acrescenta 17% ao preço de compra. Por quanto ele comprou um artigo cujo preço de venda é de R$ 210,60?

35. Um produto cujo preço era R$ 222,00 teve dois aumentos sucessivos, de 12% e 15% respectivamente, sendo o último valor arredondado "para cima", de maneira a evitar os centavos. Qual foi o preço do produto após os dois aumentos e o arredondamento?

Nos exercícios que seguem, considere sempre que os juros são simples, exceto se houver observação em contrário.

36. Calcule os juros produzidos por um capital de R$ 5 milhões, à taxa de 5% ao mês (5% a.m.), durante 6 meses.

37. Qual a taxa mensal que faz um capital de R$ 2 000,00 render R$ 500,00 em 5 meses?

38. Um industrial pediu emprestado ao banco R$ 150 mil. O banco emprestou, e a taxa de juros foi de 10% ao mês. O industrial teve que pagar R$ 30 mil de juros. Por quantos meses o dinheiro esteve emprestado?

39. Reproduza a tabela em seu caderno, trocando o símbolo ▼ pelos números adequados, após fazer seus cálculos:

Capital	Taxa ao mês	Tempo (meses)	Juros
38 000	13%	9	▼
▼	8%	3,5	56 000
40 000	▼	5	16 000
45 000	8%	▼	18 000

40. Um capital de R$ 85 000,00 é aplicado a juros compostos de 2% a.m. Quanto rende de juros em 3 meses?

41. A diferença entre o preço à vista e o preço a prazo de uma mercadoria deve-se aos juros. Se o preço à vista é de R$ 52,00 e o preço a prazo, para 5 prestações mensais, é de R$ 78,00, a parte dos juros corresponde a quanto por cento do preço à vista?

42. Quanto rende de juros um capital de R$ 440,00 à taxa de 8,5% a.m. durante 7 meses?

43. Certo capital foi emprestado a juros de 84% ao ano (84% a.a.). Em 8 meses (ou seja, uma fração do ano), rendeu R$ 560,00. Qual foi o capital emprestado?

44. Meu irmão pediu emprestado R$ 20,00 por 10 dias. Concordei em emprestar, desde que ele me devolvesse R$ 25,00. Qual foi a taxa de juros ao dia que cobrei?

45. Um televisor custa, à vista, R$ 380,00. Mas, se vou pagá-lo em 5 prestações mensais, o preço total será de R$ 494,00. Nesse caso, quanto por cento foi cobrado de juros?

46. Quanto rende de juros, em 3 meses, um capital de R$ 200 mil aplicado a juros compostos de 3% ao mês?

Resolução das atividades

1. R$ 3 000,00 · 0,09 = R$ 270,00

2. R$ 2 800,00 ——— 0,05

x ——— 1,00

$x = \dfrac{2800}{0,05}$ = R$ 56 000,00

3. R$ 200,00 ——— 100%

R$ 74,00 ——— x

$x = \dfrac{74 \cdot 100}{200} = 37\%$

4. Preço produto R$ 500,00

Reajuste 6%

Vendas com 6% desconto sobre preço reajustado.

a) R$ 500,00 x 0,06 = R$ 30,00

b) R$ 530,00 x 0,06 = R$ 31,80

c) R$ 530,00 – R$ 31,80 = R$ 498,20

d) menos R$ 1,80

5. 100% + 11,5% = 111,5% ou 1,115

R$ 820,00 x 1,115 = R$ 914,30

6. x · 1,10 = 550

$x = \dfrac{550}{1,10}$ = R$ 500,00

7. x · 1,12 = 425,60

$x = \dfrac{425,60}{1,12}$ = R$ 380,00

Indice de 1,12

8. R$ 800,00 · 0,95 = R$ 760,00

1 – 0,05 = 0,95 (índice)

9. 1 200 x 0,10 – R$ 120,00

10. 100% – 15% = 85%

R$ 30,00 x 0,85 = R$ 25,50

11. j = cin

C = R$ 12 500,00

i = 5%

n = 6 meses

j = 12 500 · 0,05 . 6 = R$ 3 750,00

12. C = R$ 4 000,00

j = R$ 1 000,00

n = 5 meses

i = ?

1 000 = 4 000 · i · 5

$i = \dfrac{1000}{4000 \cdot 5}$ ou 5%

13. Juros compostos

$M = c\,(1 + i)^n$

C = R$ 60 000,00

i = 3,4% ao mês

n = 3 meses

$M = 60\,000\,(1 + 0,034)^3$

$M = 60000 \cdot 1,034^3$

M = 66 330,00

14. C = ?

i = 84% a.a.

n = 8 meses ou $\frac{2}{3}$ ano.

M = C + J

$C + 560 = C(1 + 0,84)^{\frac{2}{3}\text{ ou } 0,66}$

C + 560 = 1,5C

560 = 1,5C – C

$C = \dfrac{560}{0,5}$ = R$ 1 120,00

15. $M = C\ (1 + i)^t$

$M = 4\,200\ (1 + 0{,}015)^4$

$M = 4\,200 \cdot 1{,}015^4$

$M = 4\,457{,}72$

R\$ 4 457,72

R\$ 4 457,72 – R\$ 4 200,00 = R\$ 257,72

R\$ 257,72 : R\$ 4 200,00 = 0,06 = 6%

16. $M = 1\,000\ (1 + 0{,}04)^5$

$M = 1\,216{,}65$

17. $M = 10\,000\ (1 + 0{,}0085)^4$

$M = 10\,344{,}35$

18. 1º mês $M = 2000\ (1 + 0{,}011)^1$

$M = 2022$

2º mês $M = 2022\ (1 + 0{,}009)^1$

$M = 2040{,}19$

3º mês $M = 2040{,}19\ (1 + 0{,}012)^1$

$M = 2064{,}68$

4º mês $M = 2064{,}68\ (1 + 0{,}01)^1$

$M = 2085{,}32$

R\$ 2 085,32

19. 11,39%

Respostas da seção Para estudar

20. R\$ 20,16

21. R\$ 3,98

22. 30%

23. R\$ 50,00

24. 52,5%

25. R\$ 120

26. 15%

27. R\$ 1 440,00

28. Pagou R\$ 2 500,00

29. a) R\$ 19,00
    b) R\$ 8,40
    c) R\$ 217 700

30. R\$ 250,00

31. A comissão é 6%

32. R\$ 2 500,00

33. Prejuízo de 25%

34. R\$ 180,00

35. O preço do produto foi para R\$ 286

36. 1,5 milhões

37. 5% ao mês

38. 2 meses

39. R\$ 44 460, R\$ 200 000, 8%, 5

40. R\$ 5 202,68

41. Corresponde a 50%

42. R\$ 261,80

43. R\$ 1 000,00

44. Taxa = 2,5 % dia

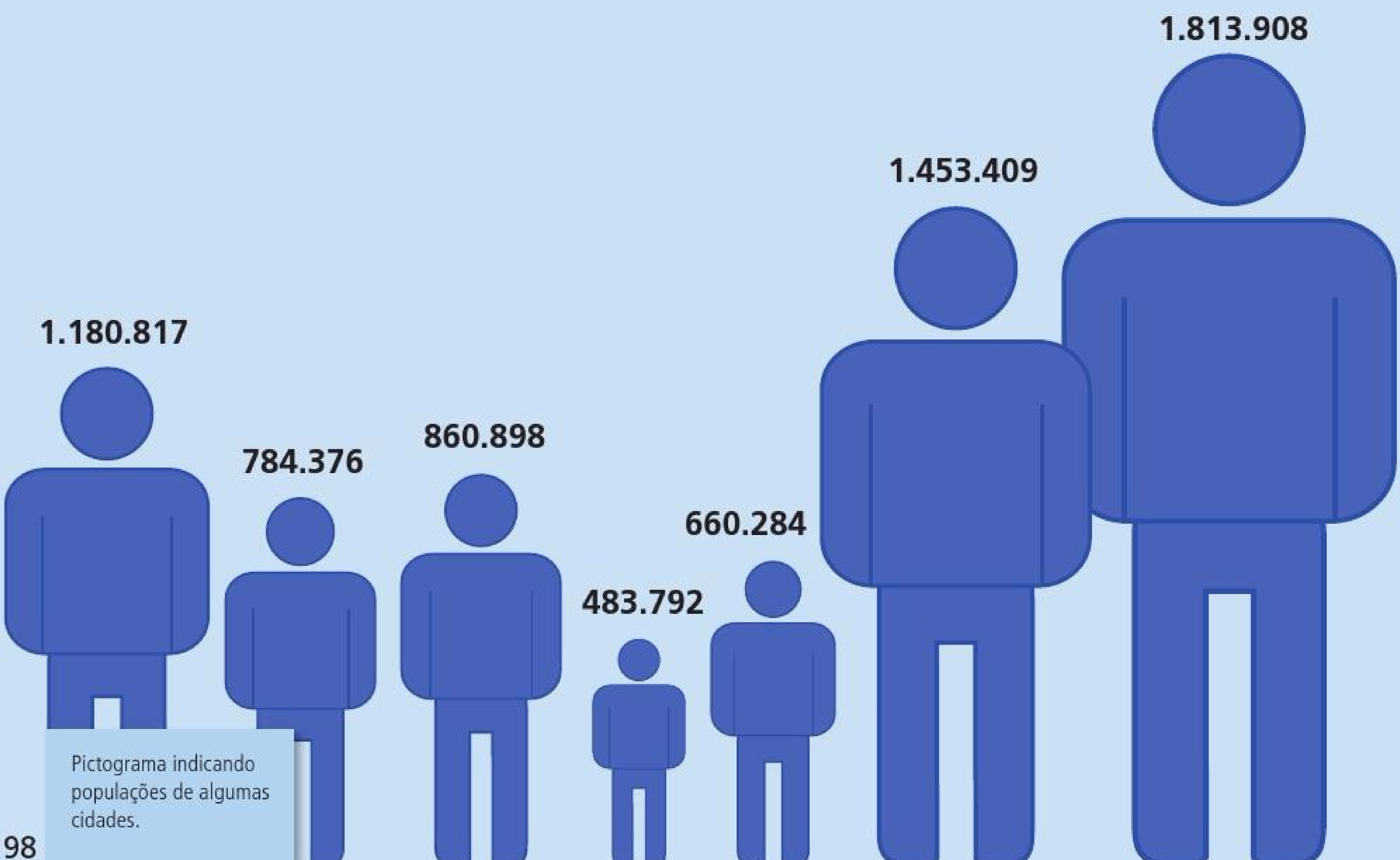
45. 30% de juros ou 6% ao mês.

46. R\$ 18 540,00

capítulo 9

Gráficos e pictogramas

- Um pouco mais sobre tabelas
- Gráficos de colunas
- Gráficos de barras
- Gráficos de colunas múltiplas
- Gráficos de setores
- Comparando gráficos de colunas e setores
- Pictogramas



Cinthia Yamasaki

Pictograma indicando populações de algumas cidades.

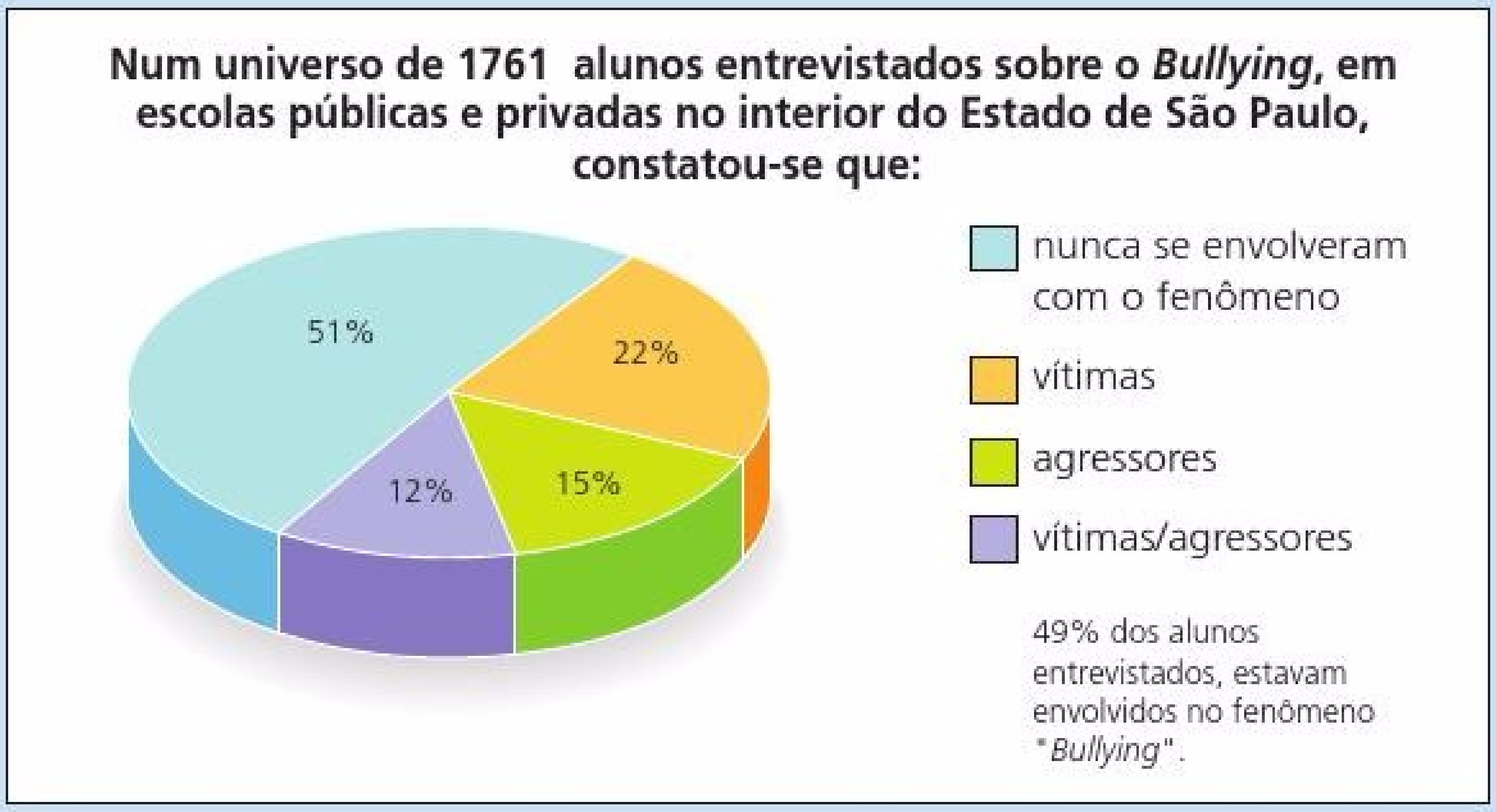
Conversa Inicial

Grande parte das informações que encontramos nos jornais, internet, revistas e televisão são apresentadas em gráficos, tabelas, percentuais e indicadores que nos ajudam a compreender melhor o que ocorre ao nosso redor.

De todas essas formas, as que evidenciam mais claramente as relações entre as variáveis estudadas nos fenômenos representados são os gráficos.

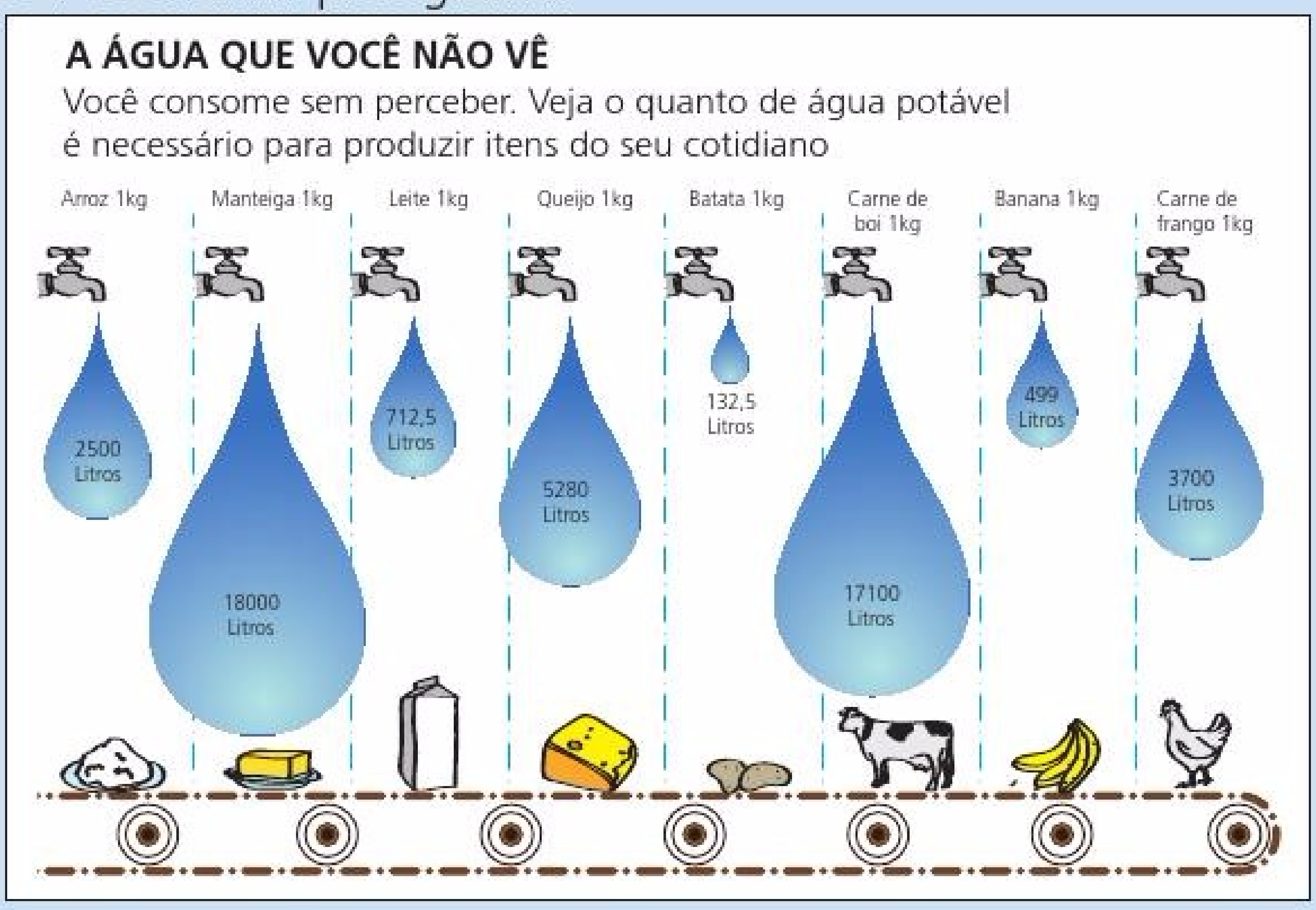
Já estudamos um pouco sobre gráficos de colunas e vimos que eles são bastante úteis. Existem porém outras formas interessantes de expressar fenômenos por meio de gráficos e elas são tão mais eficientes quanto mais se adequarem ao fenômeno representado.

Quando desejamos representar algo que se distribui em porcentagens, o ideal é um gráfico de setores ou de *pizza*, como é popularmente conhecido. Veja o exemplo a seguir.



Fonte: Disponível em: <estatisticacomprincipioseticos.blogspot.com.br>. Acesso em: 02 mai. 2012.

Em diversas situações, quando se deseja enfatizar o significado do conjunto das informações transmitidas por um gráfico, aplicam-se ilustrações relacionadas ao fenômeno representado. Ele passa então a se chamar pictograma.



Fonte: Disponível em: <www.circleofblue.org/waternews/waterviews>. Acesso em: 14 abr. 2013.

Professor, peça aos alunos para localizarem alguns dados da tabela, como por exemplo, a quantidade de mulheres de Sergipe, em qual região do país a população é maior. Assim os alunos perceberão como é importante organizar dados em tabelas para que todos possam fazer a leitura.

Um pouco mais sobre tabelas

Você já aprendeu que as tabelas são produzidas dispondo-se os dados em linhas e colunas, de tal maneira que se possa observar a relação entre eles. A organização de uma tabela deve sempre objetivar o maior conforto possível em sua leitura e traduzir as grandes categorias de variáveis envolvidas no fenômeno estudado.

Observe, por exemplo, a tabela que resume dados populacionais do Censo Demográfico de 2010 realizado pelo IBGE.

Grandes Regiões e Unidades da Federação	População residente		
	Total		
	Total	Homens	Mulheres
Brasil	**190 755 799**	**93 406 990**	**97 348 809**
Norte	**15 864 454**	**8 004 915**	**7 859 539**
Rondônia	1 562 409	795 157	767 252
Acre	733 559	368 324	365 235
Amazonas	3 483 985	1 753 179	1 730 806
Roraima	450 479	228 859	221 620
Pará	7 581 051	3 821 837	3 759 214
Amapá	669 526	335 135	334 391
Tocantins	1 383 445	702 424	681 021
Nordeste	**53 081 950**	**25 909 046**	**27 172 904**
Maranhão	6 574 789	3 261 515	3 313 274
Piauí	3 118 360	1 528 422	10 589 938
Ceará	8 452 381	4 120 088	4 332 293
Rio Grande do Norte	3 168 027	1 548 887	1 619 140
Paraíba	3 766 528	1 824 379	1 942 149
Pernambuco	8 796 448	4 230 681	4 565 767
Alagoas	3 120 494	1 511 767	1 608 727
Sergipe	2 068 017	1 005 041	1 062 976
Bahia	14 016 906	6 878 266	7 138 640

Grandes Regiões e Unidades da Federação	População residente		
	Total		
	Total	Homens	Mulheres
Sudeste	**80 364 410**	**3 9076 647**	**41 287 763**
Minas Gerais	19 364 410	9 641 877	9 955 453
Espírito Santo	3 514 952	1 731 218	1 783 734
Rio de Janeiro	15 989 929	7 625 679	8 364 250
São Paulo	41 262 199	20 077 873	21 184 326
Sul	**27 386 891**	**13 436 411**	**13 950 480**
Paraná	10 444 526	5 130 994	5 313 532
Santa Catarina	6 248 436	3 100 360	3 148 076
Rio Grande do Sul	10 693 929	5 205 057	5 488 872
Centro-Oeste	**14 058 094**	**6 979 971**	**7 078 123**
Mato Grosso do Sul	2 449 024	1 219 928	1 229 096
Mato Grosso	3 035 122	1 549 536	148 586
Goiás	6 003 788	2 981 627	3 022 161
Distrito Federal	2 570 160	10 228 880	1 341 280

Fonte: IBGE. *Censo Demográfico 2010*. Disponível em: <http://www.ibge.gov.br>. Acesso em: 14 abr. 2015.

Professor, Censo demográfico é o conjunto de dados estatísticos que informa diferentes características dos habitantes de uma cidade, estado ou nação. A realização do censo acontece de 10 em 10 anos. O primeiro censo demográfico foi realizado em 1872 e o próximo será em 2020.

Nesta tabela, as variáveis **Grandes Regiões e Unidades da Federação** estão dispostas na primeira coluna e o **Total da população residente** na segunda. Observe que a terceira e a quarta colunas mostram, respectivamente, a quantidade de homens e mulheres que residem em cada um dos estados das diferentes regiões.

Note também que o uso de cores ou de destaques possibilitam a separação visual das diferentes categorias de variáveis e da totalização dos habitantes do Brasil, que neste censo eram, aproximadamente, 190 milhões de habitantes.

Tabelas também são úteis para apresentação de variáveis de forma ordenada, como a apresentada a seguir. A tabela a seguir mostra as dez instituições universitárias com maior número de inscrições no Sisu no ano de 2014, para o ano de 2015.

O Sisu é o Sistema de Seleção Unificada gerenciado pelo Ministério da Educação (MEC), que utiliza os resultados obtidos pelos estudantes no Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) para atribuição de vagas nas Universidades Federais e outras instituições universitárias.

INSTITUIÇÃO	INSCRIÇÕES
Universidade Federal do Ceará	178 598
Universidade Federal de Minas Gerais	177 797
Universidade Federal de Pernambuco	171 203
Universidade Federal do Rio de Janeiro	168 035
Universidade Federal da Bahia	141 694
Universidade Federal de Goiás	141 340
Universidade Federal da Paraíba	134 526
Instituto Federal de São Paulo	132 534
Universidade Federal de Alagoas	132 440
Universidade Federal Fluminense	129 226

Fonte: Universia Brasil. Disponível em: <www.noticias.universia.com.br/destaque/noticia/2015>. Acesso em: 14 abr. 2015.

Gráficos de colunas

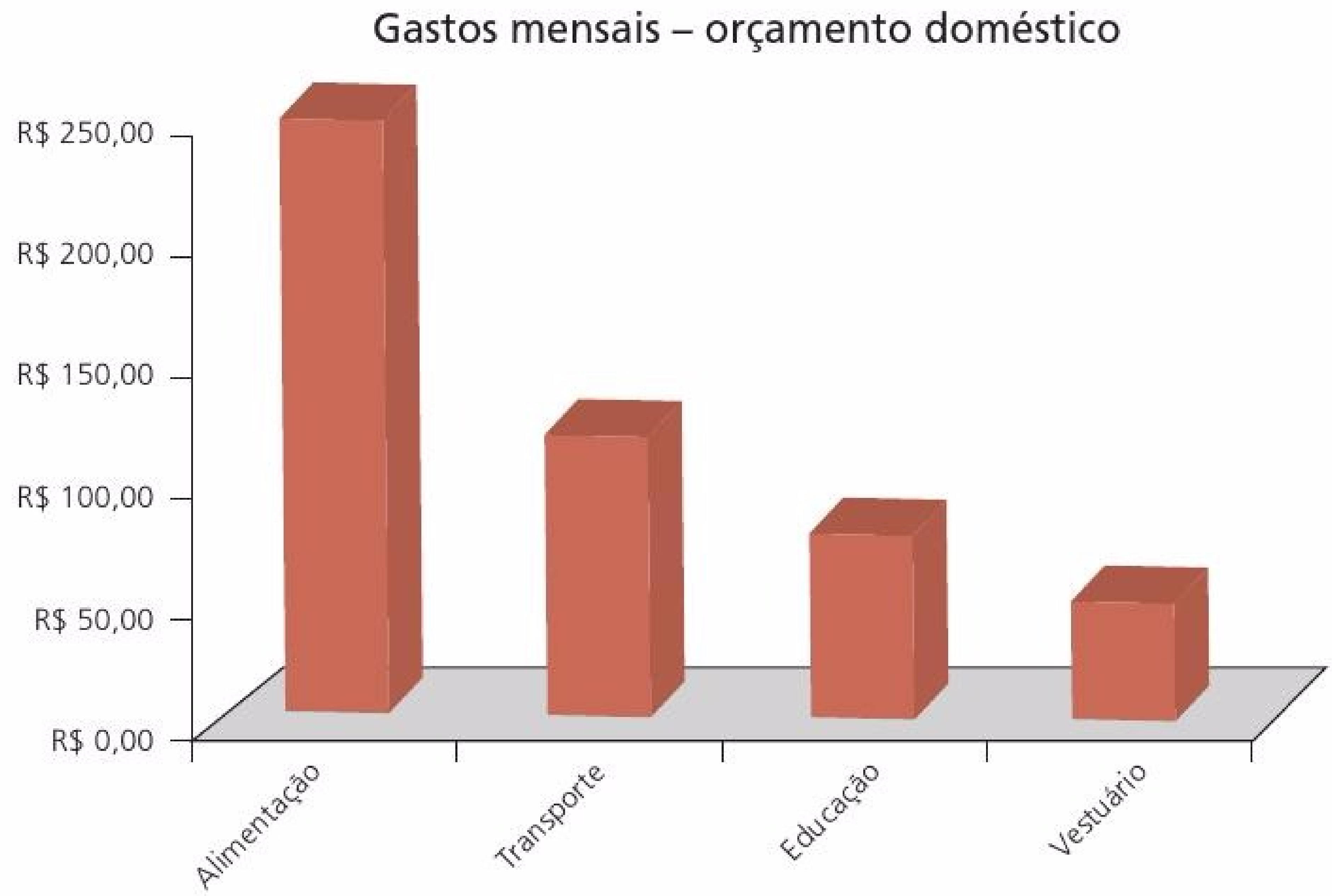
Nos gráficos de colunas, os dados são representados em retângulos proporcionais aos valores da variável representada, dispostos verticalmente. Os retângulos podem ser substituídos por formas como cilindros, prismas ou, ainda, por desenhos que se relacionam com a informação que se deseja transmitir por meio do gráfico.

Veja os exemplos a seguir:

a) **Gráfico de colunas**

O exemplo anterior, as colunas são cilíndricas e representam as unidades de máquinas agrícolas vendidas em alguns estados brasileiros por uma rede de revenda.

b) **Gráfico de colunas com prismas retângulares**



No segundo exemplo, em que o gráfico representa os gastos mensais de uma família por item de orçamento, são utilizados prismas retangulares no lugar dos paralelogramos. Veja também que, neste exemplo, o gráfico têm a aparência tridimensional.

Gráficos de barras

Gráficos de barras têm as mesmas características dos gráficos de colunas. A única diferença é que os retângulos estão dispostos horizontalmente.

Esses gráficos, são normalmente utilizados para apresentar evoluções de um fenômeno ou ainda para mostrar a distribuição de diferentes categorias existentes num conjunto de informações.

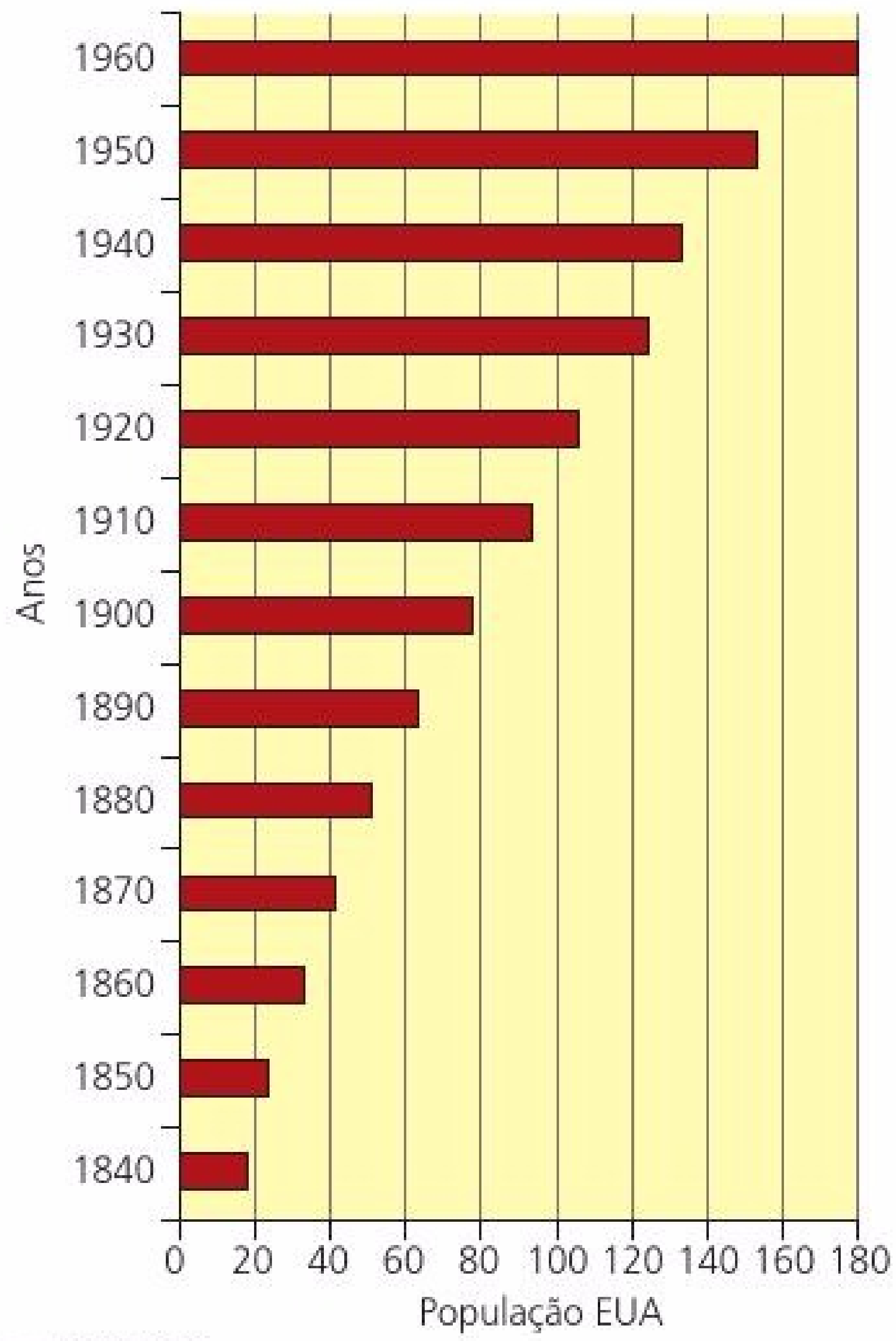
Os gráficos de barra são muito utilizados em dados demográficos para indicar os diversos valores que compõem uma grande informação como, por exemplo, evolução populacional ou a distribuição de uma população por regiões.

É interessante observar que os gráfico de barras servem para mostrar crescimento e decrescimento ou para estabelecer uma comparação entre valores.

Observe os dois exemplos:

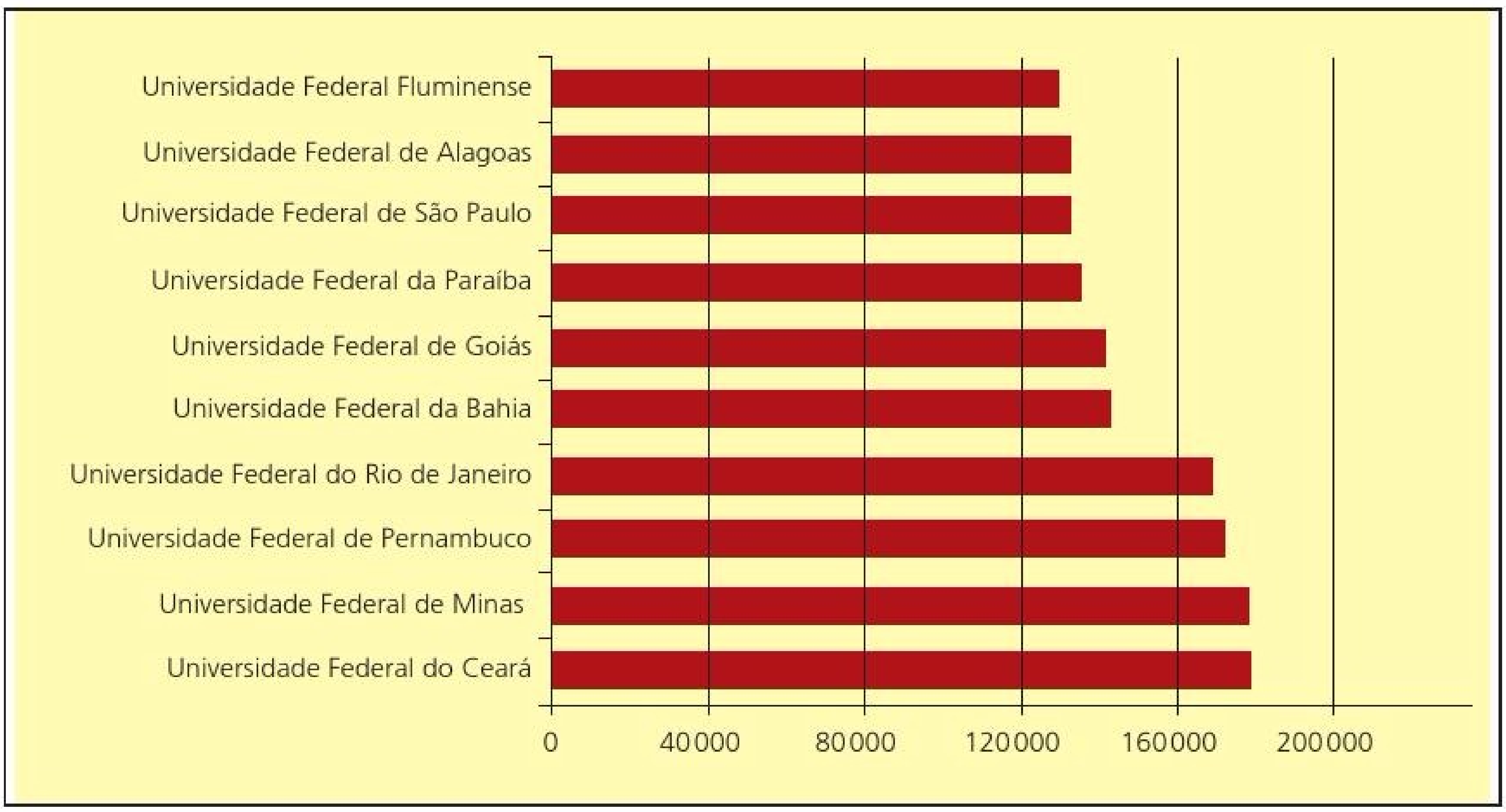
Professor, faça perguntas sobre dados apresentados nos gráficos para que os alunos desenvolvam a habilidade de ler gráficos.

a) Gráfico mostrando a evolução da população dos Estados Unidos entre 1840 e 1960, segundo dados do *US Census Bureau*, responsável pelo censo demográfico nos Estados Unidos. Este exemplo mostra a evolução de uma única variável num determinado conjunto de anos: a população dos Estados Unidos.



Fonte: CENSUS.
Disponível em: <www.census.gov/population>.
Acesso em: 14 abr. 2013.

b) Observe agora, o gráfico de barras horizontais associado à tabela de inscritos no Sisu, que apresentamos anteriormente.



Fonte: Universia Brasil. Disponível em: <www.noticias.universia.com.br/destaque/noticia/2015>.
Acesso em: 21 mai. 2014.

Gráficos de colunas múltiplas

As colunas e as barras também podem ser utilizadas para a comparação de duas ou mais variáveis numa mesma informação gráfica. Neste caso, utiliza-se o **gráfico de colunas múltiplas**, ou o de **barras múltiplas**.

Observe o exemplo do uso de colunas múltiplas:

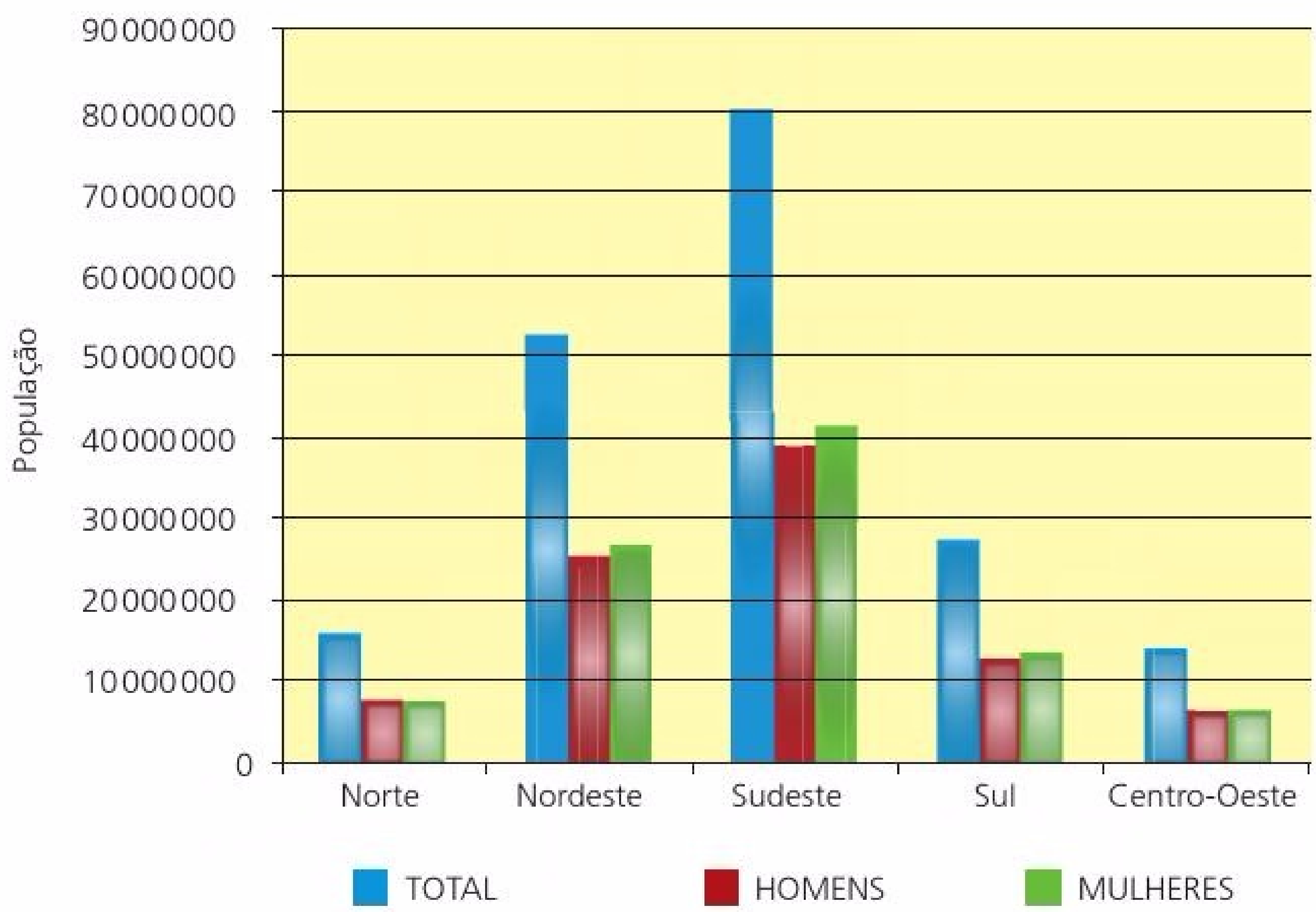
A partir dos dados do Censo 2010 do IBGE, podemos montar uma nova tabela na qual constam apenas os dados das populações das regiões brasileiras, distribuídas por sexo.

Regiões brasileiras	População residente		
	Total		
	Total	Homens	Mulheres
Norte	15 864 454	8 004 915	7 859 539
Nordeste	53 081 950	25 909 046	27 172 904
Sudeste	80 364 410	39 076 647	41 287 763
Sul	27 386 891	13 436 411	13 950 480
Centro-Oeste	14 058 094	6 979 971	7 078 123

Fonte: IBGE. *Censo Demográfico 2010*. Disponível em: <http://www.ibge.gov.br/brasil_em_sintese/>. Acesso em: 14 abr. 2013.

A compreensão das relações entre os dados da tabela fica muito mais fácil com o uso de um gráfico de colunas múltiplas.

Veja o gráfico e observe a legenda que mostra o significado de cada coluna.



Professor, compare as informações da tabela acima e do gráfico.

Gráficos de setores

Bastante utilizados em jornais, revistas, internet e no meio empresarial, os gráficos de setores têm o formato de *pizzas*. O círculo usado nesse tipo de gráfico representa o total dos dados do fenômeno estudado. Ele é dividido em setores proporcionais às parcelas das variáveis que compõem o total. Em geral, gráficos de setores são expressos em porcentagens.

Para exemplificar como um gráfico de setores é construído, vamos considerar a tabela a seguir, que indica a quantidade de adultos e de crianças residentes em uma determinada cidade:

Habitantes	População
Crianças	16 440
Adultos	38 360

Vamos escrever as populações de adultos e crianças em percentuais do total da população da cidade, que é de 54 800 habitantes.

O cálculo dos percentuais é feito da seguinte maneira:

População total da região: 54 800 habitantes

$$\text{Porcentagem de crianças} = \frac{16\,440}{54\,800} = 0{,}30 = 30\%$$

$$\text{Porcentagem de adultos} = \frac{38\,360}{54\,800} = 0{,}70 = 70\%$$

Habitantes	População
Crianças	30%
Adultos	70%

Para construir o gráfico de setores, precisamos de um transferidor. Primeiro devemos calcular os ângulos correspondentes a cada uma das porcentagens da tabela. Para fazer isso calculamos a porcentagem de cada dado da tabela em relação a 360º.

Crianças → **30%** de $360^\circ = 0{,}30 \cdot 360^\circ = 108^\circ$

Adultos → **70%** de $360^\circ = 0{,}70 \cdot 360^\circ = 252^\circ$

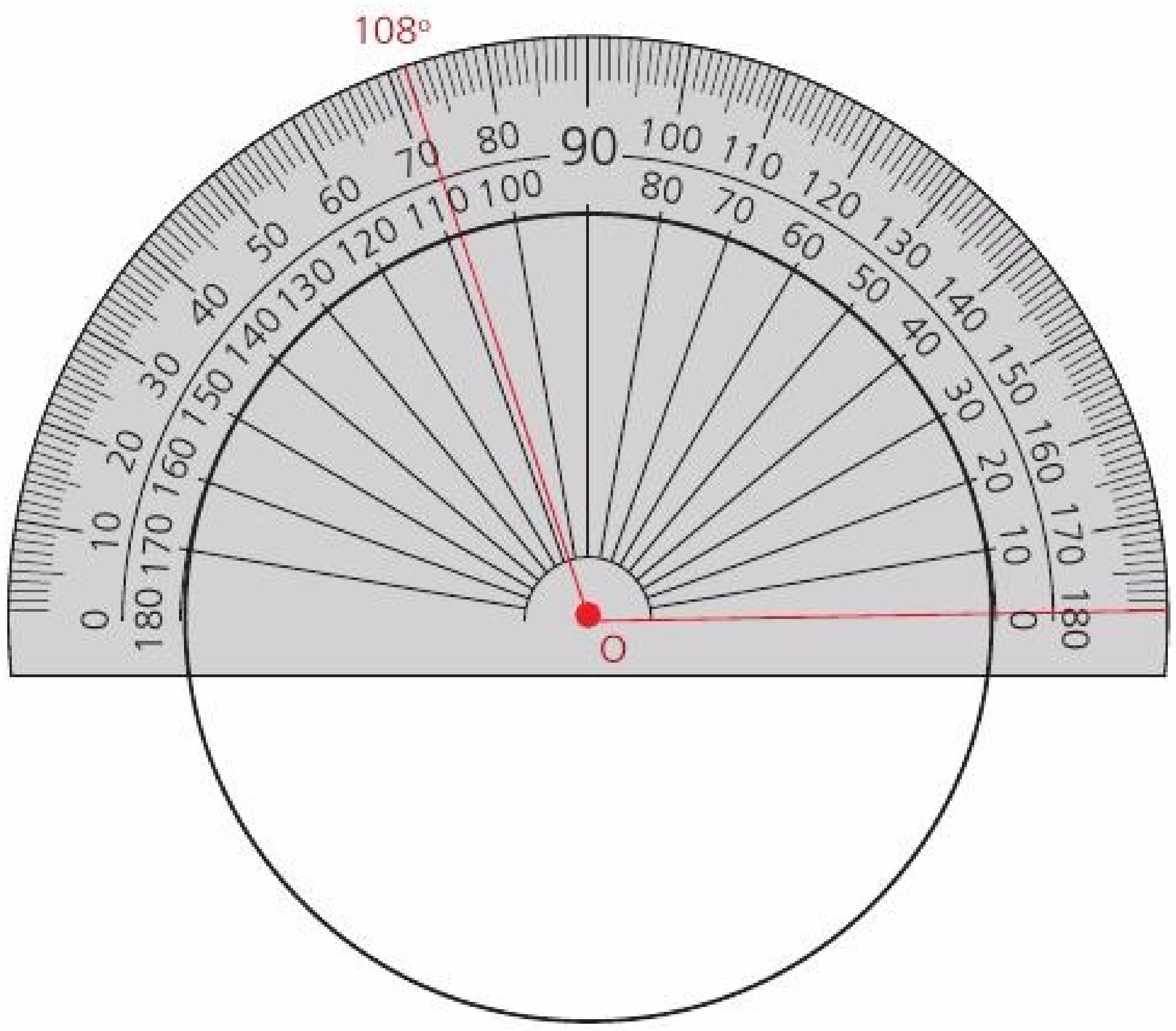
Agora, com a ajuda de uma régua, um compasso e um transferidor vamos marcar os ângulos e montar a *pizza.*

Como o gráfico é um círculo dividido em setores e a circunferência do círculo tem 360º, devemos marcar no círculo os ângulos correspondentes às porcentagens de cada uma das categorias da tabela.

Professor, compare mostrando as diferenças no quadro.

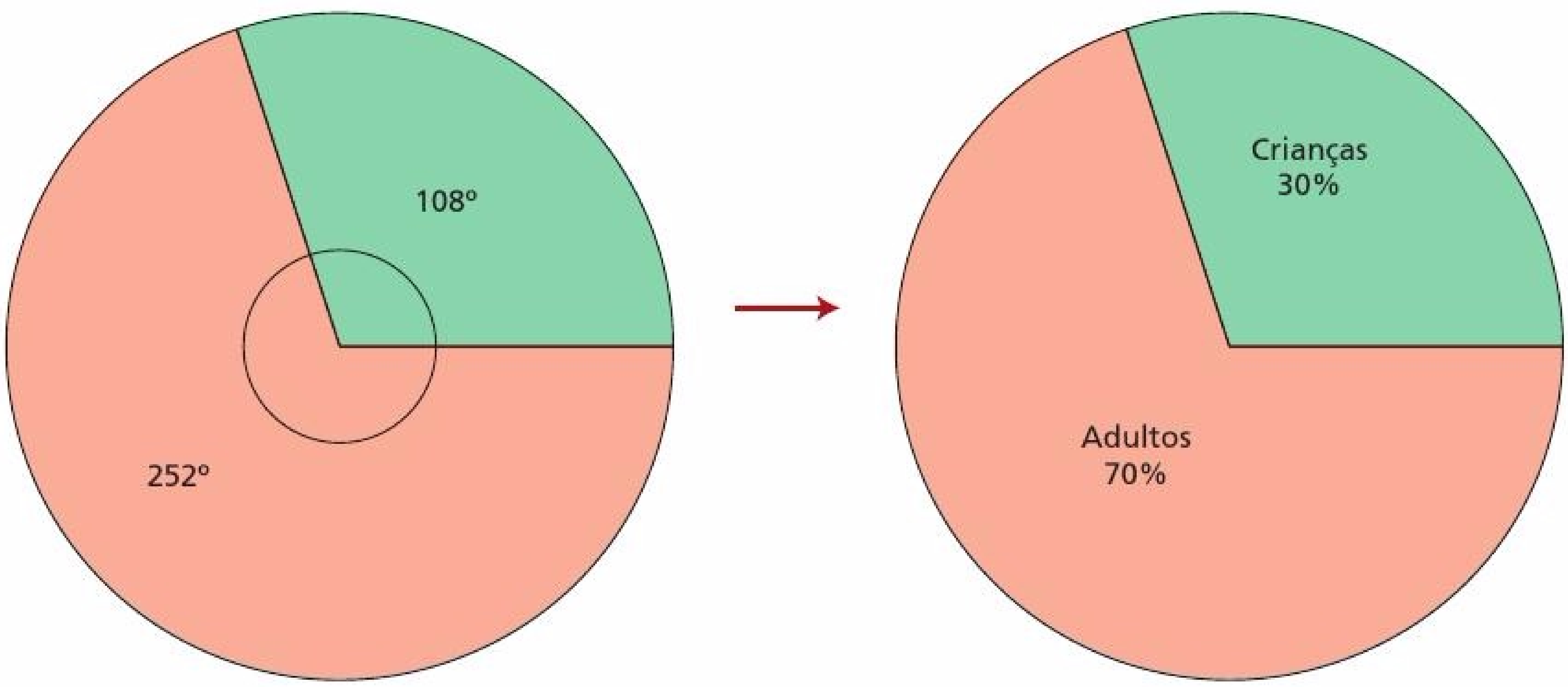
Acompanhe:

- Com o transferidor, marcamos o ângulo de 108º, que corresponde aos 30% de crianças do municícipio.



- Para os 70% de adultos sobram 360º – 108º = 252º.

Tendo os ângulos que determinam os dois setores, desenhamos o gráfico de setores que representa a distribuição de habitantes adultos e crianças no município.



Professor, a construção de gráficos é uma habilidade que exige treino. O material adequado e as medidas devem obedecer todo o rigor matemático para que não haja distorção nas informações.

Gráficos de setores são extremamente úteis para indicar a proporção de cada uma das categorias representadas em relação ao todo.

Esses gráficos, quase sempre trazem as categorias e suas porcentagens indicadas sobre cada setor.

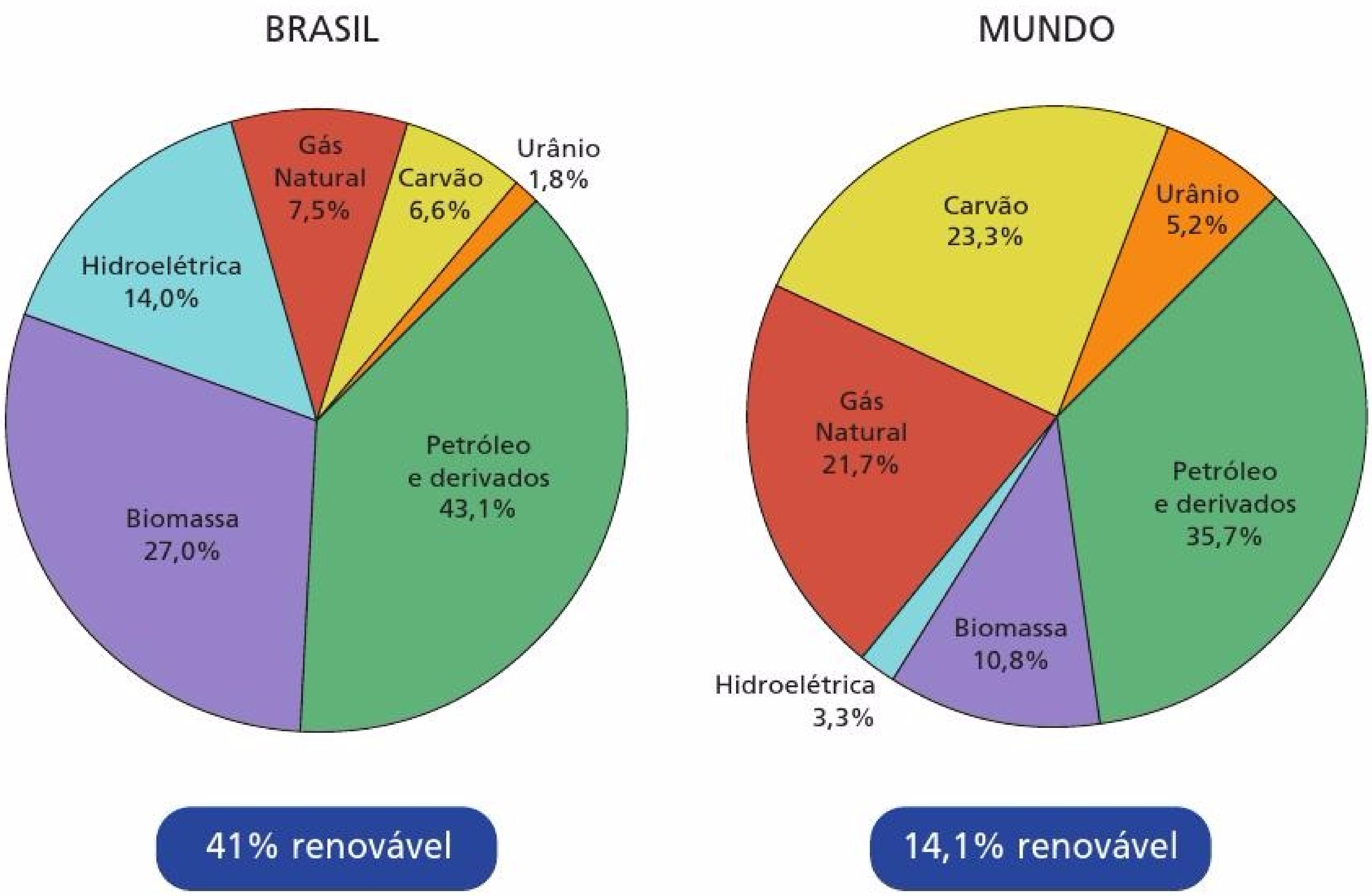
Também é comum que eles sejam apresentados em perspectiva ou mesmo com os setores destacados para melhorar a visualização das informações neles contidas.

A compreensão desses gráficos é muito importante para diversas situações que você irá encontrar em seus estudos e em sua futura vida profissional.

Veja outros exemplos de gráficos de setores:

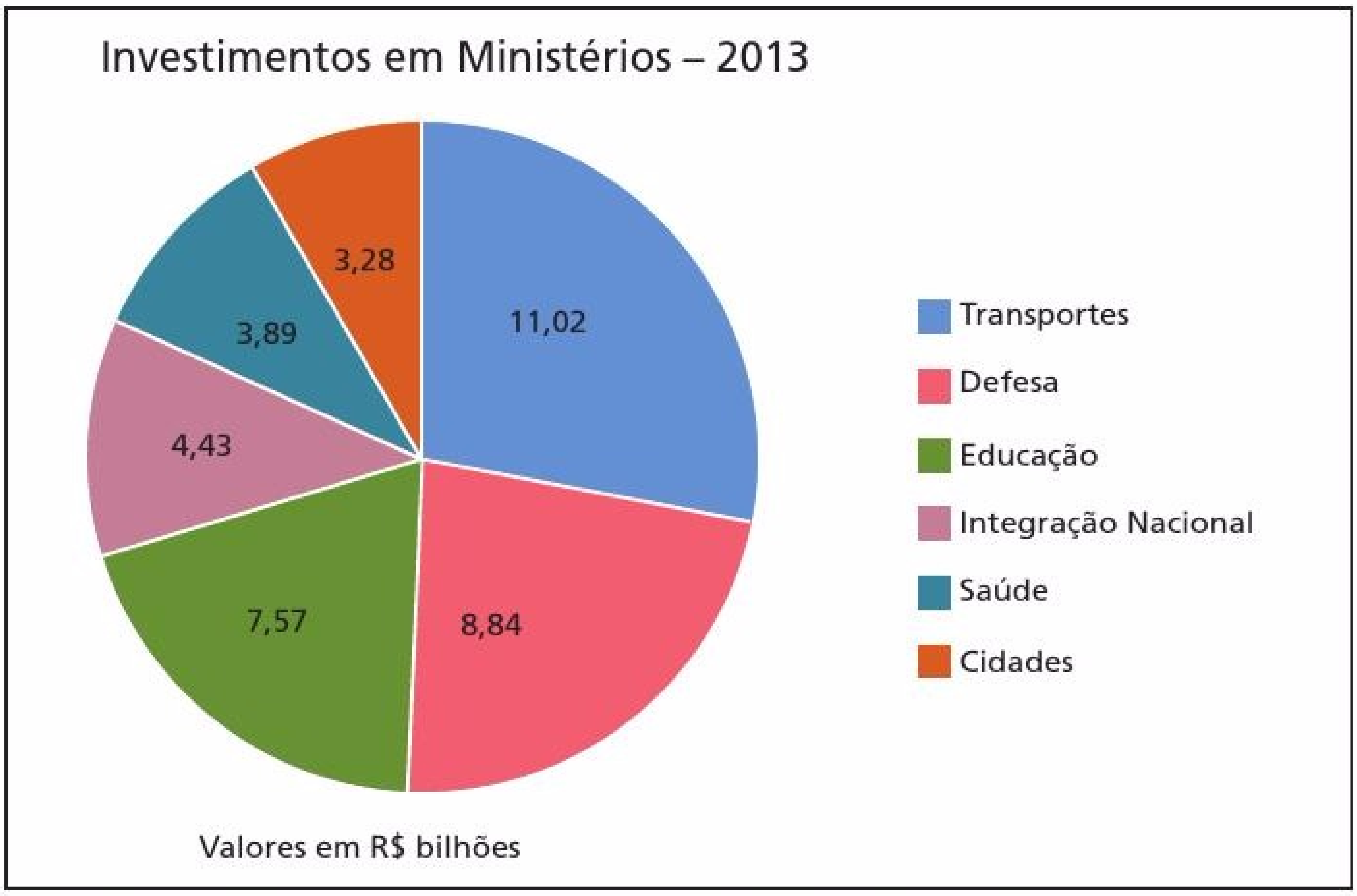
a) A matriz energética de um país é a distribuição das fontes de energia elétrica que ele utiliza. O gráfico a seguir representa a matriz energética brasileira e a mundial em 2013, segundo dados do Ministério de Minas e Energia do Brasil, com destaque para as fontes renováveis de energia, que em nosso País correspondem a aproximadamente 45%.

Matriz energética



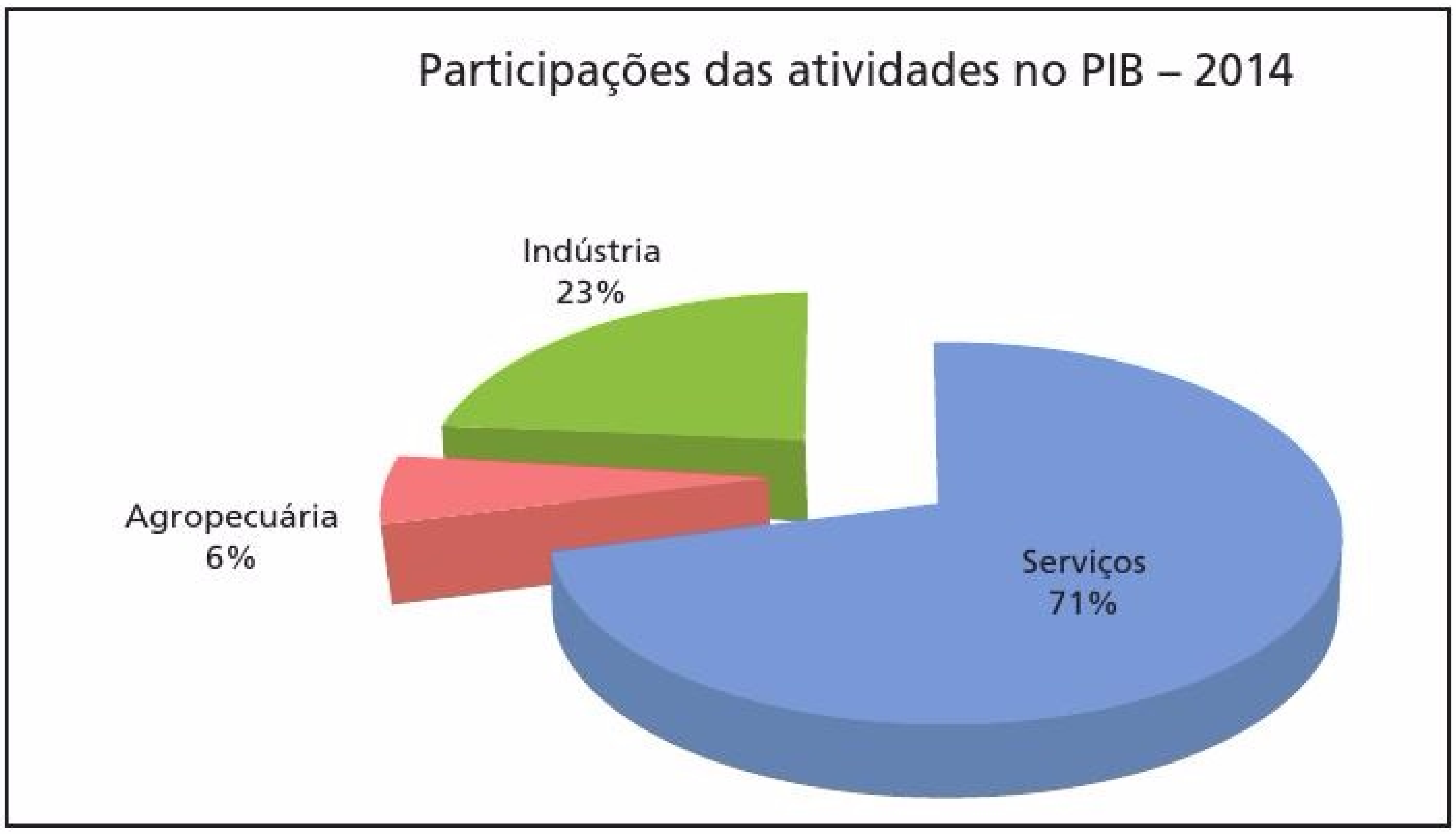
Fonte: MME. Disponível em: <http://www.mme.gov.br/see/>. Acesso em: 15 jun. 2014.

b) O gráfico a seguir apresenta dados sobre os valores investidos nos Ministérios no ano de 2013, em bilhões de reais. Note que o gráfico está organizado com legenda, onde cores representam os diferentes Ministérios.



Fonte: Adaptado de <www.contasabertas.com.br/website/arquivos/7439>. Acesso em 20 abr. 2014.

c) O Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), realizou em 2014 uma pesquisa para verificar a participação dos principais setores da economia no PIB (produto interno bruto). Observe o gráfico com os dados fornecidos pelo IBGE.



Fonte: IBGE-Infográfico/Estadão, 21 jan. 2015.

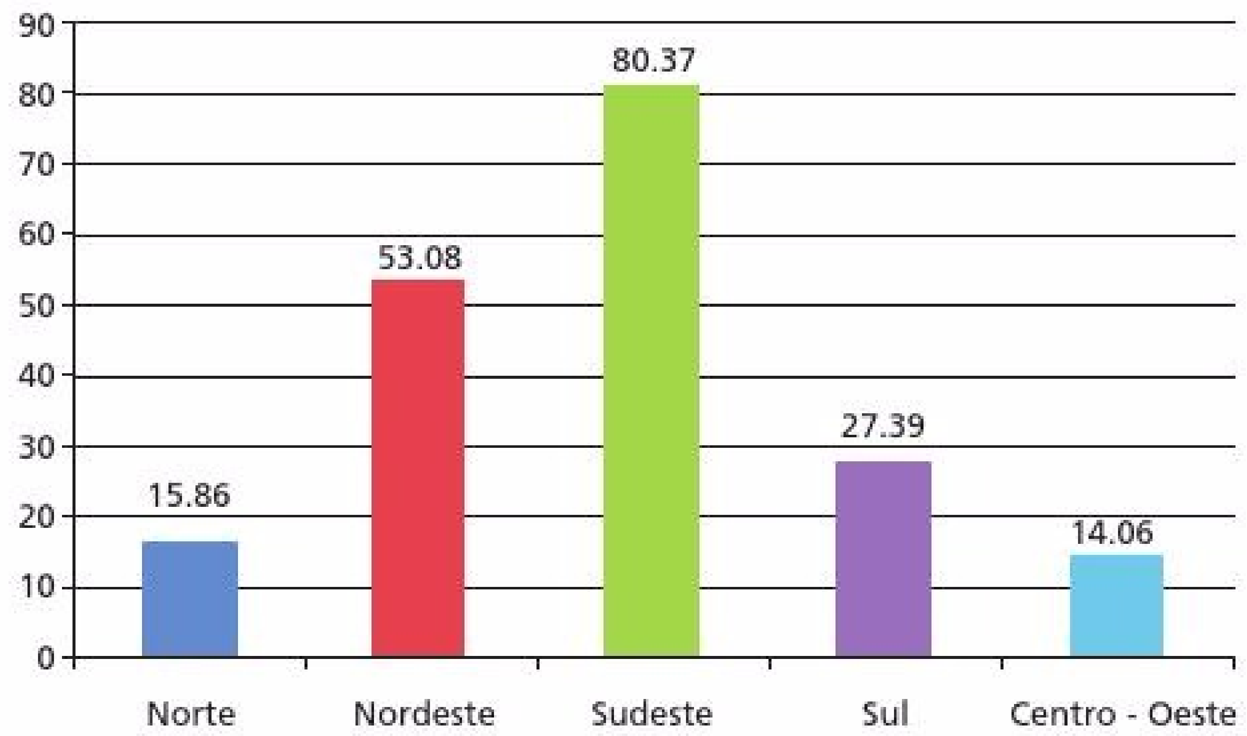
Comparando gráficos de colunas e de setores

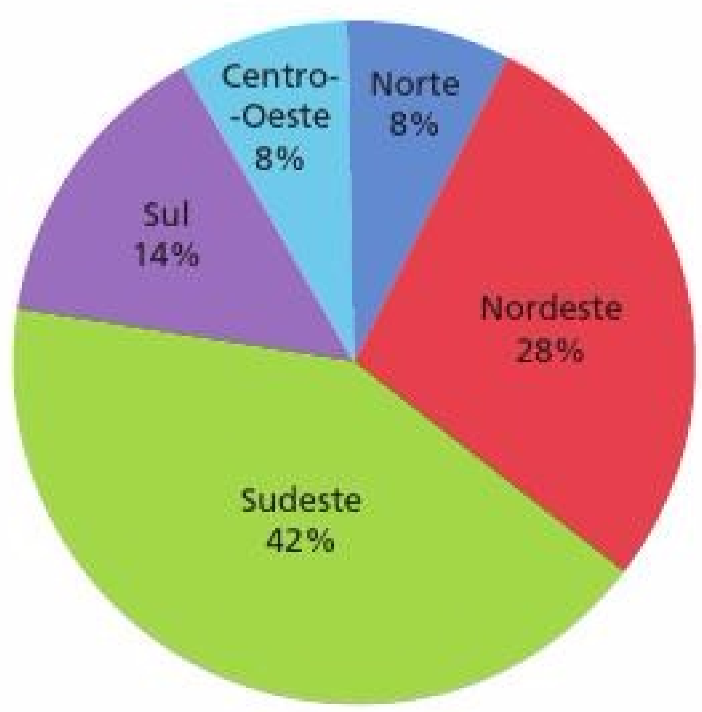
Veja, agora, uma comparação de gráficos de colunas e de setores, construídos a partir da tabela de população do Censo 2010, que mostra o total de população em cada região brasileira, em milhões de habitantes.

Grandes Regiões e Unidades da Federação	População residente (milhões de habitantes)
Norte	15,86
Nordeste	53,08
Sudeste	80,37
Sul	27,39
Centro-Oeste	14,06

Fonte: IBGE. *Censo Demográfico 2010*. Disponível em: <www.ibge.gov.br/brasil_em_sintese/>. Acesso em: 14 abr. 2015.

Professor, compare mostrando as diferenças no quadro.





O gráfico de colunas é útil para visualizarmos a população de cada região, e o de setores nos ajuda a comparar as proporções das populações em relação à população do Brasil.

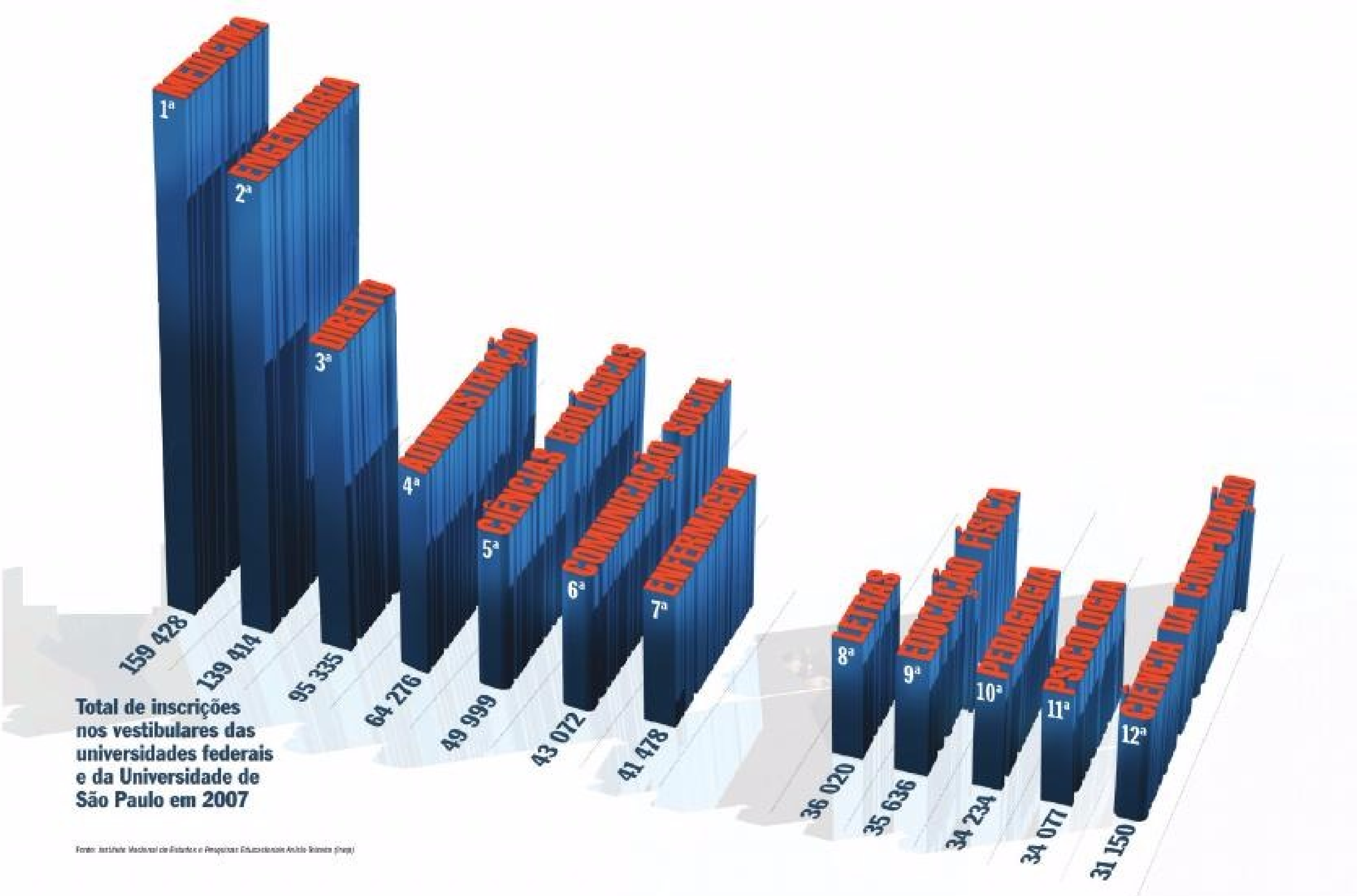
Pictogramas

Gráficos também podem conter ilustrações que representam características das variáveis que descrevem. Neste caso, são também denominados de **gráficos pictóricos** ou **pictogramas**.

Os pictogramas são gráficos que têm as mesmas propriedades dos gráficos que estudamos até aqui e sua utilização é indicada em situações nas quais a imagem tem papel relevante e ajuda a suavizar a informação para aqueles que não têm muito contato com gráficos. Os pictogramas são muito utilizados em jornais, revistas e noticiários de TV.

Veja alguns exemplos de pictogramas.

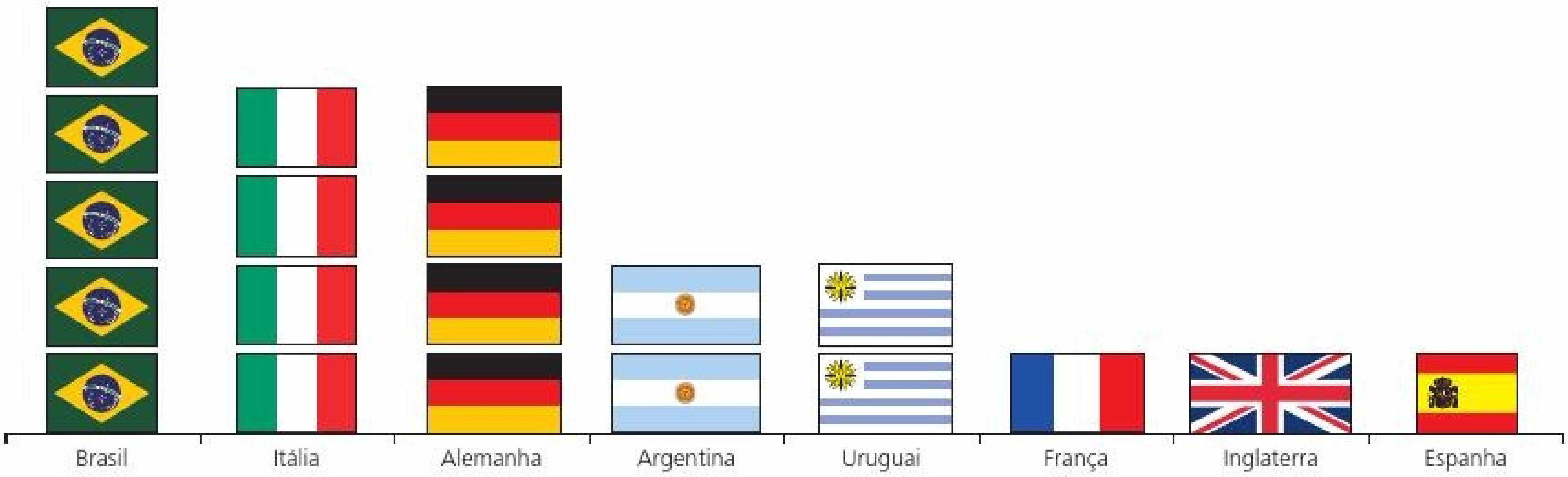
a) Inscrições em vestibulares de Universidade Federais e da Universidade de São Paulo, por carreiras escolhidas em 2007.



Fonte: FUVEST, 2007. Disponível em: <www.fuvest.br/estat/insreg.html?anofuv-2007>. Acesso em: 14 abr. 2015.

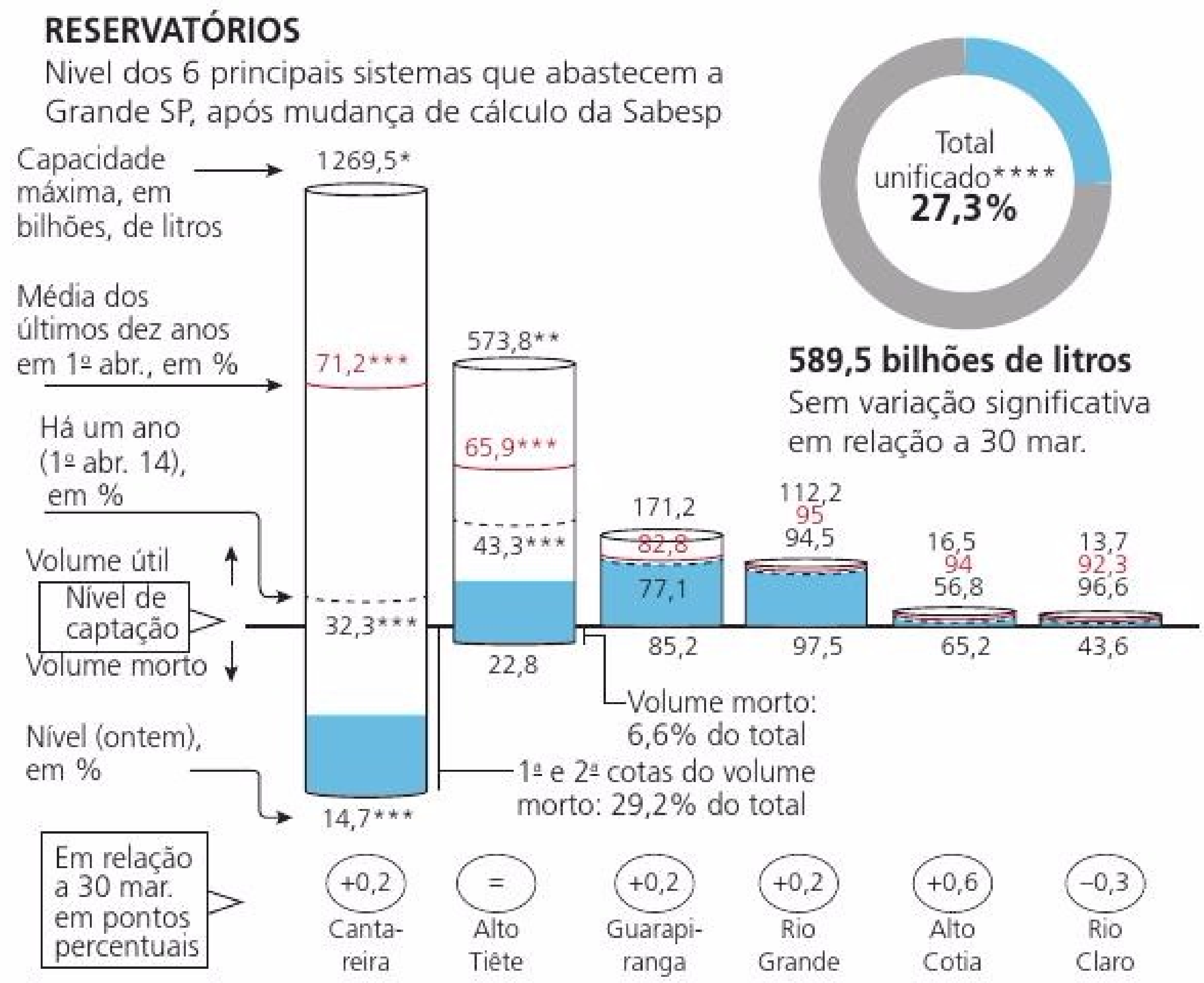
Este gráfico é, em sua origem, um gráfico de colunas. Porém, foi transformado em um pictograma com a indicação das carreiras no topo de cada coluna, em cujas bases estão anotadas as quantidades de alunos inscritos em cada uma. Essas duas transformações dão ao gráfico uma condição de leitura direta das carreiras mais concorridas.

b) A seguir, um pictograma que mostra quantas Copas do Mundo de Futebol cada país representado ganhou. Cada bandeira representa uma Copa do Mundo ganha.



Nunca é demais lembrar que o Brasil ganhou suas cinco copas nos anos de 1958, na Suécia; 1962, no Chile; 1970, no México; 1994, nos Estados Unidos; e em 2002, na copa organizada conjuntamente por Japão e Coreia do Sul e que a última copa foi realizada em 2014 no Brasil, tendo como campeã a equipe da Alemanha.

c) Abaixo, um pictograma representando os níveis dos 6 principais sistemas que abastecem a Região Metropolitana de São Paulo durante a grande estiagem de 2015.



Folha de S.Paulo, 1º de abril de 2015, caderno Cotidiano, p. C1.

O pictograma indica no topo de cada reservatório o volume máximo de cada reservatório em bilhões de litros de água. Note que o total de todos os reservatórios quando o gráfico foi publicado era de 589,5 bilhões de litros, correspondendo a apenas 27,3% do total.

Atividades

Professor, a dengue no Brasil é um ótimo material de pesquisa. Peça uma pesquisa com dados comparativos entre 2014 e 2015, dos casos de dengue no Brasil. Essa pesquisa deverá ter uma tabela com dados e dois tipos distintos de gráficos para representa-la. Os alunos devem propor intervenções para combater a dengue.

1. Examine atentamente a tabela que indica o número de automóveis que cruzaram uma praça de pedágio num dia de tráfego normal

Horários	Automóveis
Após 0h até 6h	178
Após 6h até 12h	1244
Após 12h até 18h	**X**
Após 18h até 24h	466
Total	**2814**

a) Quantos automóveis passaram no pedágio entre 12 h e 18 h? x = 926

b) Qual o horário de maior tráfego no pedágio? das 6 h as 12 h

Ler tabelas

2. A tabela a seguir refere-se à movimentação de produtos em uma loja de materiais esportivos.

PRODUTO	Unidades compradas	Unidades vendidas	Unidades em estoque
Tênis	82	37	A
Camisetas	115	B	32
Agasalhos	C	94	78
Mochilas	56	32	24
Meias	284	E	48

Examine cada linha e cada coluna, e responda:

a) Quais são os valores de A, B, C e D? A = 45 B = 83 C = 172 D = 136

b) Qual dos produtos teve maior venda unitária? meias

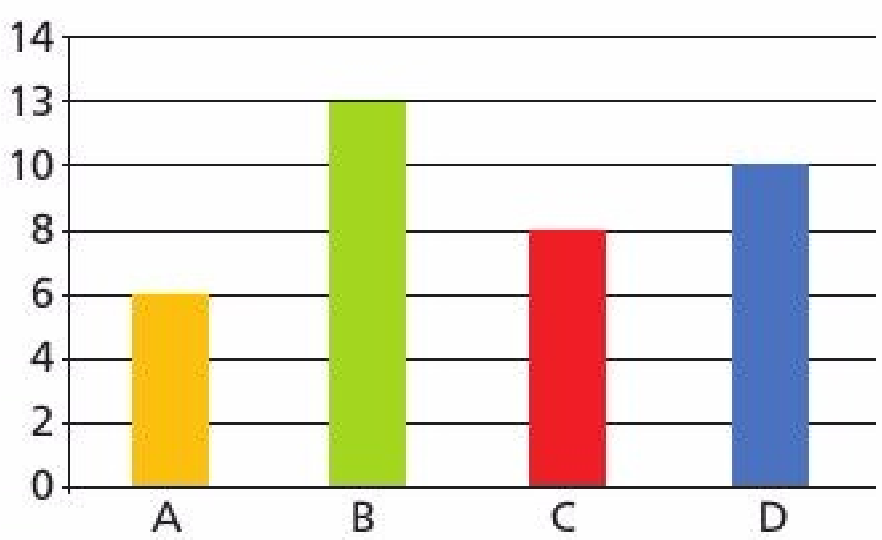
c) Qual o item com menor estoque? agasalhos

3. Numa turma de 6º ano, foi feita uma pesquisa onde cada aluno respondeu à seguinte pergunta: Qual é a disciplina de que mais gosta? Matemática recebeu 10 votos, Português 8, Ciências 6 e as demais, juntas, receberam 13 votos.

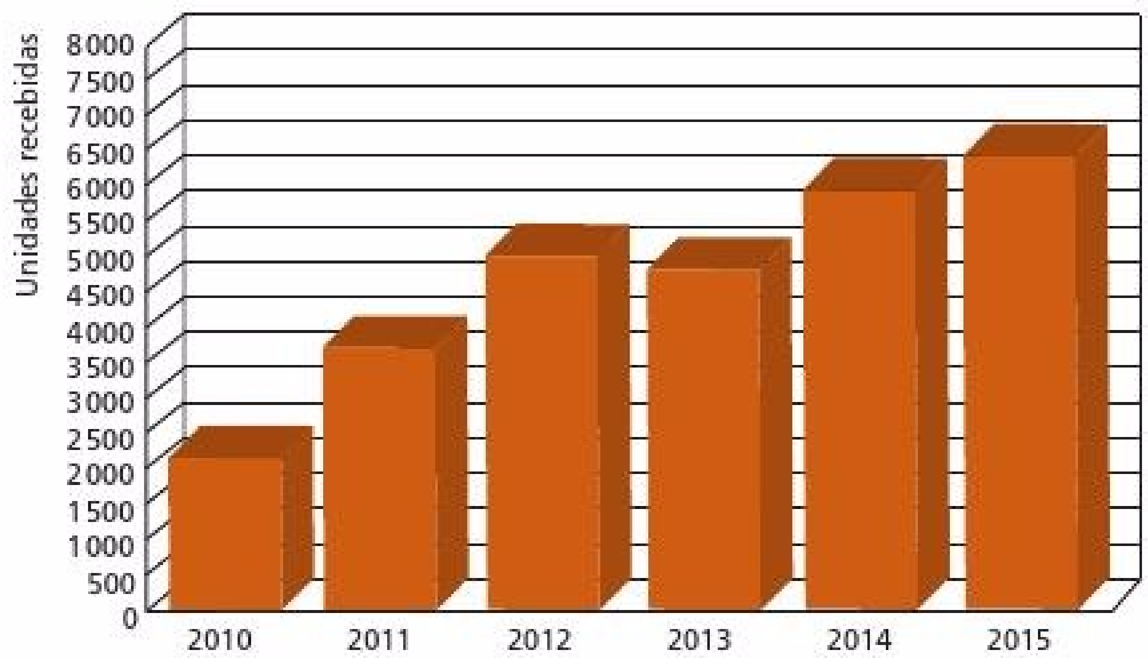
Analise o gráfico referente à pesquisa, e responda:

a) Quais são as disciplinas A,B,C e D?
A = Ciências B = Demais C = Português D = Matemática

b) Quantos alunos tem a turma?
37 alunos



4. Um modelo de motocicleta foi lançado em 2010, tendo como meta ser o produto mais vendido de seu segmento em 5 anos. No ano de 2014, foram vendidas um total de 11 200 motocicletas de todos os modelos concorrentes. Analise o gráfico e responda as perguntas a seguir.

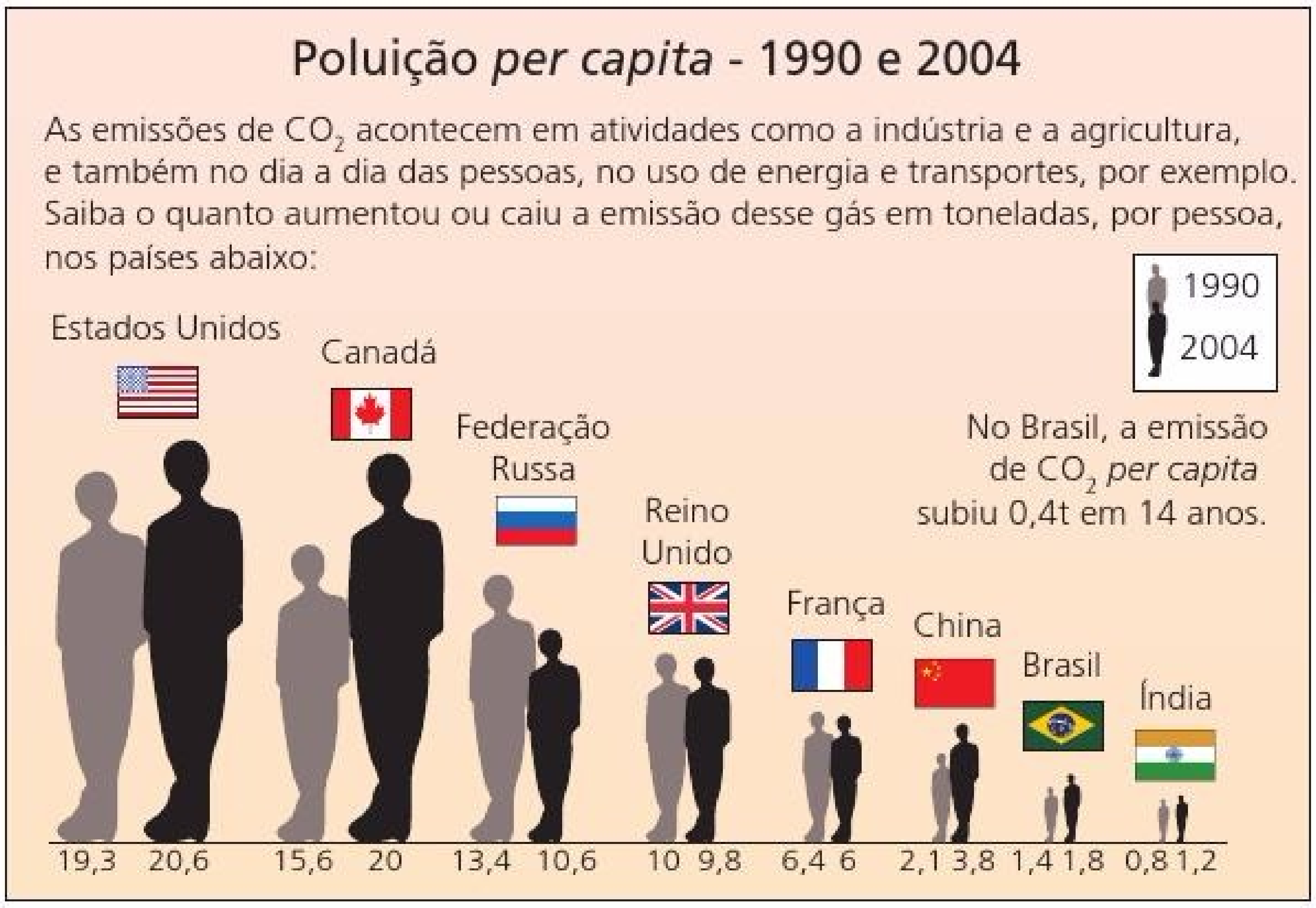


a) Quantas unidades da motocicleta foram vendidas em 2014? 6 000 unidades

b) A meta proposta no lançamento foi atingida? sim

c) Em qual ano as vendas ultrapassaram o dobro da venda no lançamento? em 2008

5. O pictograma a seguir apresenta os índices médios de emissão de CO_2 por habitante de alguns países em 1990 e 2004.



! Ler Pitograma

Interprete o gráfico e responda:

a) Quais os países que apresentaram redução da emissão de CO_2 *per capita* (por pessoa) entre os anos representados? Federação Russa, Reino Unido, França

b) Qual a variação percentual dessa emissão no caso do Brasil? 28,6 % de acréscimo

c) Qual a variação absoluta de emissão *per capita* no caso dos EUA? 1,3 t/pessoa

6. A tabela e o gráfico a seguir são relativos à produção de Petróleo e contêm dados da Agência Nacional do Petróleo.

Tabela 1 – Aumento na produção de petróleo entre 1998 e 2008, em mil barris/dia – principais países

Países	Produção em 1998	Produção em 2008	Variação	Taxa de cresc. anual
Angola	731	1875	1144	9,9%
Arábia Saudita	9502	10846	1344	1,3%
Argélia	1461	1993	532	3,2%
Azerbaijão	231	914	683	14,8%
Brasil	1003	1899	896	6,6%
Canadá	2672	3238	566	1,9%
Cazaquistão	537	1554	1017	11,2%
China	3212	3795	582	1,7%
Irã	3855	4325	470	1,2%
Kuwait	2232	2784	552	2,2%
Quatar	701	1378	677	7,0%
Rússia	6169	9886	3718	4,8%
Outros	41232	37333	-3899	-1,0%
Mundo	73538	81820	8282	1,1%

Ler tabelas

Gráfico – Projeção de aumento na produção de petróleo entre 2008 e 2030 – principais países

Ler gráficos

Fonte: ANP. Disponível em: <www.anp.gov.br>. Acesso em: 15 out. 2011.

Analise os dados constantes da tabela e do gráfico e responda:

a) Quantos barris por dia o Brasil produzia em 1998?
1003 mil barris/dia

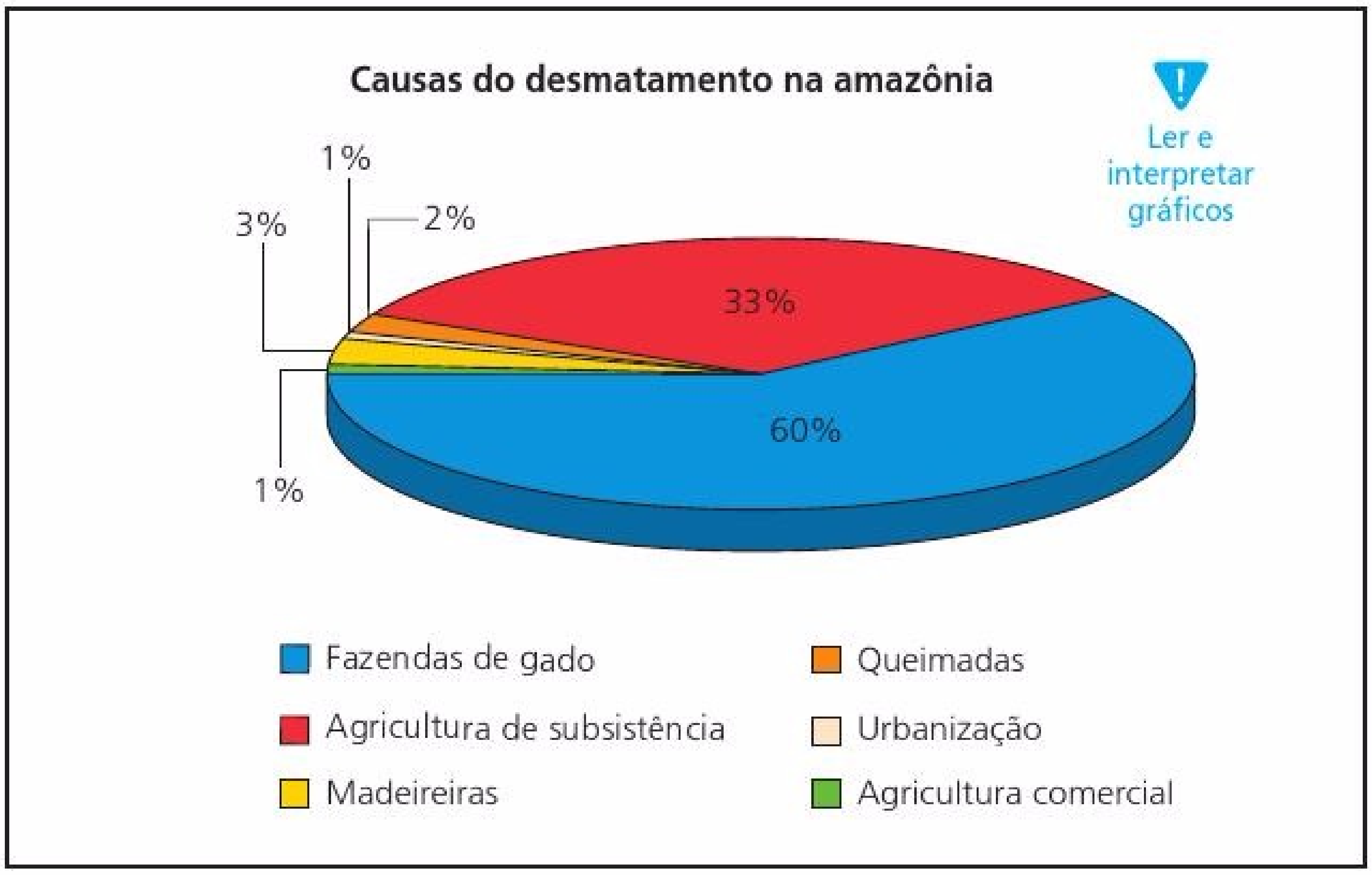
b) Quantos barris o Brasil produzia em 2008?
1899 mil barris/dia

c) Quantos barris a mais o Brasil vai produzir em 2030, segundo as projeções?
0,901 milhões barris/dia

d) Quantos barris por dia se prevê que o Brasil irá produzir em 2030?
2,8 milhões barris/dia

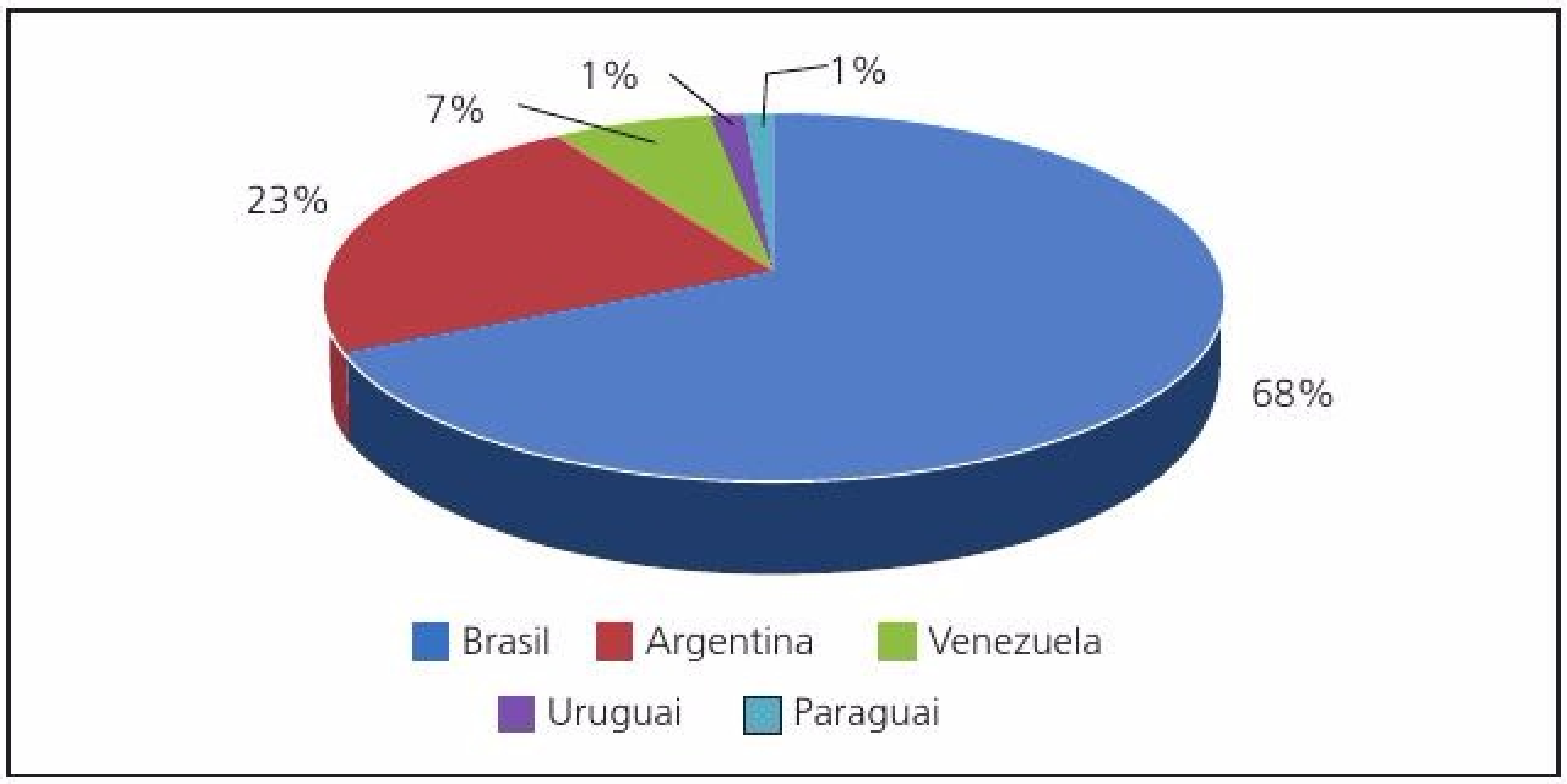
Para estudar

7. Compare o desmatamento causado por fazendas de gado na Amazônia com o total das outras causas. (Atenção: para comparar duas grandezas, divida a maior pela menor e diga quanto a primeira é percentualmente maior que a segunda.)



Disponível em: <www.tudoemfoco.com.br/desmatamento-da-amazonia-causas-solucoes-para-desmatamento.html>. Acesso em: 14 abr. 2015.

8. Dados do Instituto de Pesquisas Econômicas Aplicadas (IPEA) do governo federal, mostram que em 2006 o Mercosul contava apenas com quatro países. Observe o gráfico a seguir, que mostra a participação desses países no PIB (Produto Interno Bruto) do Mercosul, e responda as questões.

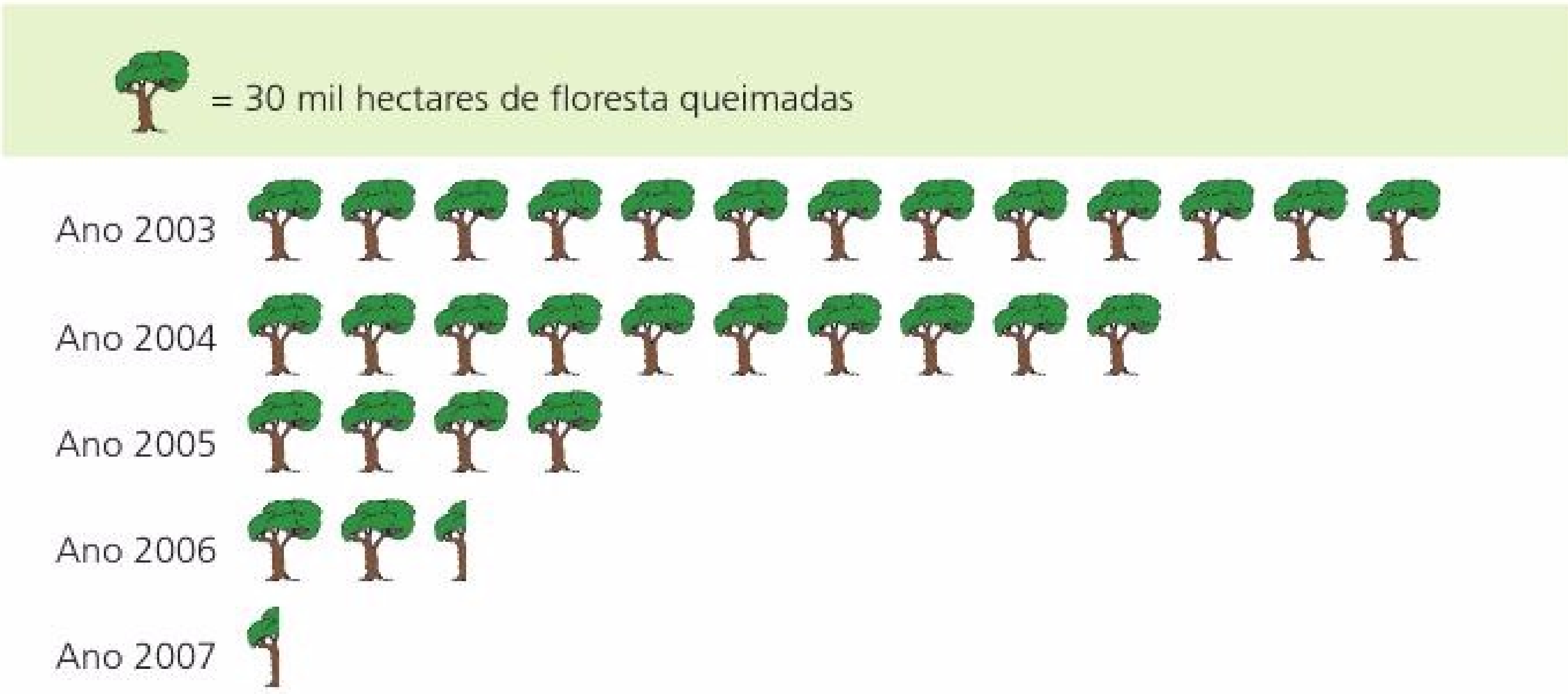


Disponível em: <www.ipea.gov.br/sites/000/2/boletim_internacional01_apresentacao02.pdf>. Acesso em: 25 jan. 2012.

a) Qual a participação dos três parceiros do Brasil no PIB do Mercosul?

b) Quais os países de menor participação no PIB do Mercosul em 2006?

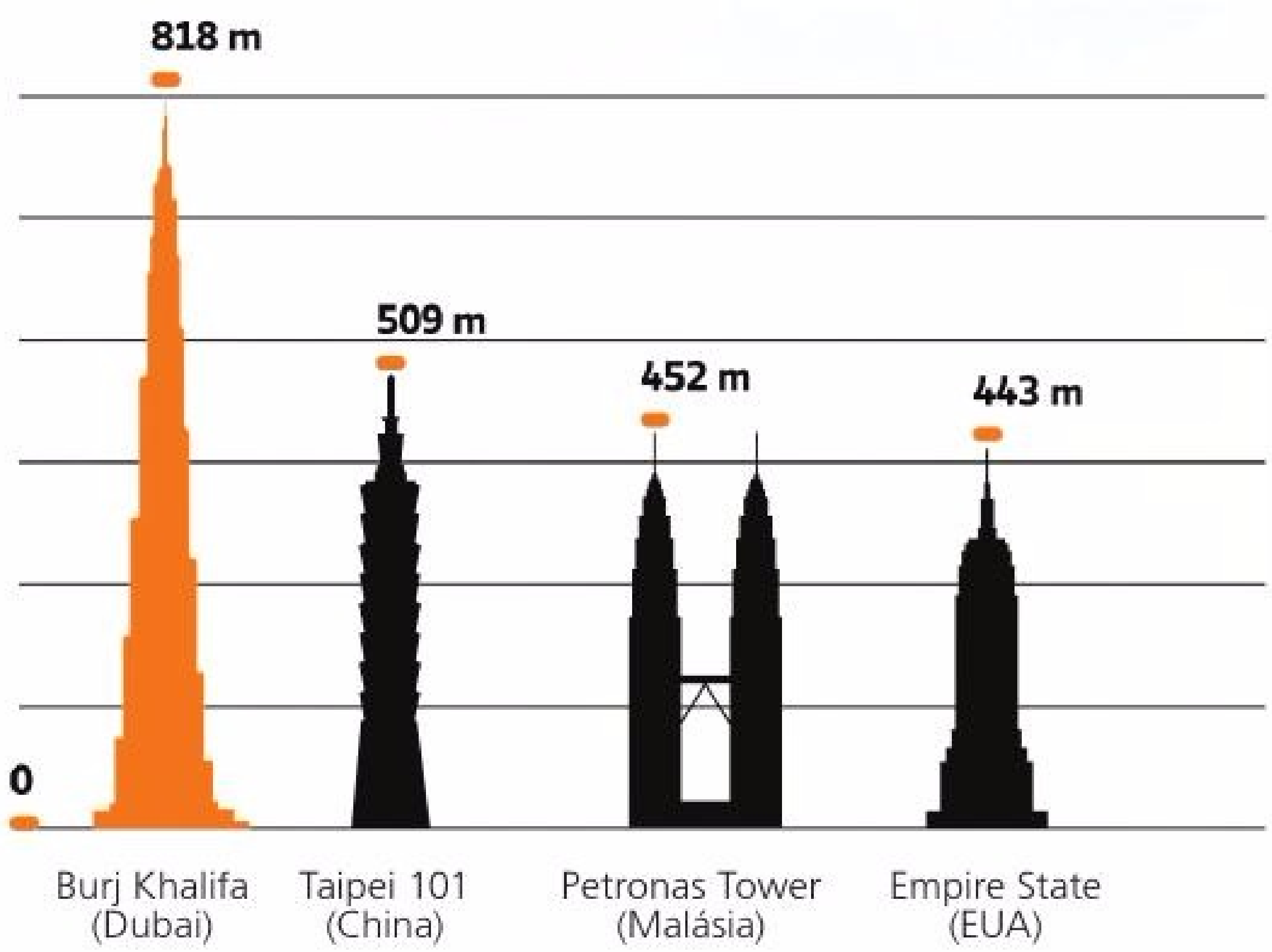
9. Para representar a evolução de áreas florestais queimadas numa determinada região, um órgão de gestão estadual utilizou um pictograma representando uma árvore, equivalendo a 30 mil hectares queimados. Analise-os e responda as questões a seguir.



a) Qual é a diferença entre as áreas queimadas em 2004 e 2005?

b) Considerando que o símbolo que indica "meia árvore"representa 15 mil hectares, indique as áreas queimadas em 2006 e 2007.

10. O pictograma indica os prédios mais altos do mundo e suas localizações.



Fonte: *Superinteressante*. São Paulo. Abril, ano 23. n.8, ago. 2009. p. 48-9

a) Qual é a diferença em metros entre o mais alto e o segundo mais alto?

b) Qual é a diferença percentual entre as alturas do Burj Khalifa e o Empire State?

11. Analise o gráfico a seguir, publicado na revista *Veja*, e responda:

Ler e interpretar gráficos

Fonte: *Veja*. São Paulo: Abril, 10 mar. 2003.

a) Qual é o país de maior consumo de sorvetes por habitante?

b) Qual é a posição ocupada pelo Brasil no *ranking* de consumo de sorvete apresentado no gráfico?

c) Se uma bola de sorvete tem em média 150 g, quanto um habitante brasileiro consome de sorvete em kg por ano?

Resolução das atividades propostas

1. $x = 2814 - 178 - 1244 - 466$

a) $x = 926$

b) das 6 h as 12 h

2. a) $A = 45$

$B = 83$

$C = 172$

$D = 136$

b) meias

c) agasalhos

3. Matemática 10
   Português 8
   Ciências 6
   Demais 13
   a) A = Ciências
      B = Demais
      C = Português
      D = Matemática
   b) 37 alunos

4. Lançamento 2006, meta 5 anos em 2010 venda 11 200 (total)
   a) 6 000 unidades
   b) sim
   c) em 2008

5. a) Federação Russa, Reino Unido, França
   b) 28,6 % de acréscimo
   c) 1,3 t/pessoa

6. a) 1003 mil barris/dia
   b) 1899 mil barris/dia
   c) 0,901 milhões barris/dia
   d) 2,8 milhões barris/dia

Respostas Para estudar

7. 1,5 vezes, 50% maior

8. a) 24%
   b) Paraguai e Uruguai

9. a) 180 000 hectares
   b) 75 000 ha e 15 000 ha

10. a) 209 m
    b) altura do Empire State = 84,6% da altura do Burj Khalkifa

11. a) Nova Zelândia
    b) 9ª posição
    c) 4,6 kg

Indicações de leituras complementares

A seguir, apresentamos uma relação de títulos indicados para sua leitura. Neles, você irá encontrar interessantes relações entre a Matemática e seu cotidiano, além da revelação da beleza presente nas formas geométricas e das divertidas atividades e jogos que podem ser desenvolvidos utilizando os conceitos matemáticos. Tudo isso ajudará bastante no desenvolvimento de seu raciocínio lógico.

BARI, Atílio. *O tesouro do pirata pão-duro*. São Paulo: Scipione, 2002.

Coleção *O Prazer da Matemática*, de vários autores (Lisboa: Gradiva)

GUELLI, O. *O mágico da Matemática*. São Paulo: Atual, 1997.

GUELLI, Oscar. *A invenção dos números*. São Paulo: Ática, 1998.

IMENES, Luis Márcio Pereira et al. Coleção *Pra que Serve a Matemática?* São Paulo: Atual, 1990.

- *Álgebra*
- *Ângulos*
- *Equação do 2° grau*
- *Frações e números decimais*
- *Estatística*
- *Geometria*
- *Números negativos*
- *Proporções*
- *Semelhanças*

IMENES, Luis Márcio Pereira et al. Coleção *Vivendo a Matemática*. São Paulo: Scipione, 1990.

- *Brincando com números*
- *Geometria dos mosaicos*
- *Descobrindo o teorema de Pitágoras*
- *Medindo comprimentos*
- *Problemas curiosos*
- *Polígonos, centopeias e outros bichos*
- *Geometria das dobraduras*
- *Lógica? É lógico*
- *Os poliedros de Platão e os dedos da mão*
- *Semelhança não é mera coincidência*
- *Os números na história da civilização*
- *A numeração indo-arábica*
- *Par ou ímpar?*

MACHADO, Nilson José. *A Geometria na sua vida*. São Paulo: Ática, 2003.

MALBA Tahan. *As maravilhas da Matemática*. Rio de Janeiro: Bloch, 1987.

MALBA Tahan. *Matemática divertida e curiosa*. Rio de Janeiro: Record, 2008.

MALBA Tahan. *O homem que calculava*. Rio de Janeiro: Record, 2008.

OBERMAIR, Gilberto. *Quebra-cabeças, truques e jogos com palitos de fósforo*. Rio de Janeiro: Ediouro. 2000.

RAMOS, Luzia Faraco. *Frações sem mistério*. São Paulo: Ática, 2001.

ROSA NETO, Ernesto. *As mil e uma equações*. São Paulo. Ática, 2001.

TEIXEIRA, Martins Rodrigues. *Quem inventou o dinheiro?* São Paulo: FTD, 1998.

TEIXEIRA, Martins Rodrigues. *Uma aventura na mata - frações*. São Paulo: FTD, 1997.

TOWNSEND, Charles. *O livro dos desafios*, v. 1. Rio de Janeiro: Ediouro, 2004.

TRAMBAIOLLI NETO, Egídio. *A profecia*. São Paulo: FTD, 1997.

TRAMBAIOLLI NETO, Egídio. *A revelação*. São Paulo: FTD, 1997.

Referências Bibliográficas

BAIFANG, Liu. *Puzzles com fósforos*. Trad. Jorge Casimiro. Lisboa: Gradiva, 1995 . (O prazer da Matemática).

BASSANEZI, R. C. *Ensino-Aprendizagem com modelagem matemática. São Paulo: Contexto, 2002.*

BERLOQUIN, Pierre. *100 jogos geométricos*. Lisboa: Gradiva, 2001.

BERLOQUIN, Pierre. *100 jogos numéricos*. Lisboa: Gradiva, 2000.

BICUDO, M. Aparecida Viggiani (Org.). *Educação matemática*. São Paulo: Moraes, 1987.

BIEMBENGUT, M. S. et al. *Ornamentos e Criatividade : uma alternativa para ensinar geometria* plana. Blumenau: Ed. da FURB, 1996.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. *Modelagem matemática no ensino*. São Paulo: Contexto, 2000.

BLOOM, Benjamin S. et al. *Manual de avaliação formativa e somativa do aprendizado escolar.* São Paulo: Pioneira, 1983.

BORIN, Júlia. *Jogos e resolução de problemas: uma estratégia para as aulas de Matemática*. São Paulo: CAEM-USP, 1995. v. 6.

BOYER, Carl Benjamin. *História da Matemática*. 2. ed. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

BROUSSEAU,G. *Introdução ao estudo das situações didáticas – Conteúdos e métodos de ensino. São Paulo*: Ática, 2008

BRUNER, Jerome S. *O processo da educação*. 4. ed. Trad. Lobo L. de Oliveira. São Paulo: Nacional, 1974.

CAGGIANO, Ângela. et al. *Problema não é mais problema*. São Paulo: FTD, 1996. v. 4.

CAPRA, Frejot. *O ponto de mutação: a ciência, a sociedade e a cultura emergente*. São Paulo: Cultrix, 1982.

CARAÇA, Bento de Jesus. *Conceitos fundamentais da matemática*. Lisboa: Gradiva, 1998.

CARDOSO, Virgínia Cardia. *Materiais didáticos para as quatro operações*. São Paulo: CAEM-USP, 1992. v. 2.

CARVALHO, F. et al. *Por que Baskara? História & Educação Matemática*, v. 2, n. 2. Rio Claro, 2002.

CARVALHO, M.C.C.S. *Padrões Numéricos e funções*. São Paulo: Moderna, 1998.

CENTURIÓN, Marília. *Conteúdo e metodologia da Matemática: números e operações*. São Paulo: Scipione, 1994.

COLE, K. C. *O universo e a xícara de chá – A matemática da verdade e da beleza*. Rio de Janeiro: Record, 2006.

COLEÇÃO Matemática: aprendendo e ensinando. São Paulo: Atual/Mir, 1997.

COXFORD, Arthur R; SHULTE, Albert P. (Orgs.). *As ideias da Álgebra*. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.

D'AMBROSIO, U. *Educação Matemática: da teoria à prática*. Campinas: Papirus, 1997.

D'AMBROSIO, Ubiratan. *Etnomatemática: elo entre tradição e modernidade*. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

D'AMBROSIO, Ubiratan. *Da realidade à ação: reflexões sobre educação e Matemática*. São Paulo/ Campinas: Summus/Editora da Unicamp, 1986.

DANTE, L. R. *Didática da resolução de problemas de Matemática*. São Paulo: Ática, 1996.

DANTE, Luiz Roberto. *Didática da resolução de problemas de Matemática*. São Paulo: Ática, 1989.

DANTZIG, Tobias. *Número: a linguagem da ciência*. Trad. Sérgio Góes de Paula. Rio de Janeiro: Zahar, 1970.

DEMO, Pedro. *Avaliação qualitativa*. São Paulo: Cortez, 1987.

DEVLIN, Keith. *O gene da matemática*. Rio de Janeiro: Record, 2004.

DINIZ, M. Ignez de S. V.; SMOLE, K. C. S.. *O conceito de ângulo e o ensino de Geometria*. São Paulo: CAEM-USP, 1993. v. 3.

DINIZ, M. Ignez; SMOLE, K. C. S.; MILANI, Estela. *Jogos de Matemática de 6o a 9o ano.* São Paulo: Artmed, 2006. (Coleção Cadernos do Mathema)

ESTEVES, 0. P. *Testes, medidas e avaliação.* Rio de Janeiro: Arte & Indústria, 1972.

FRIEDMAN, Thomas L. *O mundo é plano.* Rio de Janeiro: Objetiva, 2007.

FRIEDMAN, Thomas L. *Quente, Plano e Lotado.* Os desafios e oportunidades de um novo mundo. Rio de Janeiro: Objetiva, 2007.

GARBI, Gilberto G. *A rainha das ciências – Um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática.* São Paulo: Livraria da Física, 2007.

GARDNER. H. *Inteligências múltiplas: a teoria na prática*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

GLADWELL, Malcolm. *Fora de série – Outliers.* São Paulo: Sextante, 2008

GLEISER, Marcelo. *A dança do Universo: dos Mitos de criação ao big-bang.* São Paulo: Companhia das Letras, 1997.

HAYDT, R. Cazaux. *Avaliação do processo ensino-aprendizagem.* São Paulo: Ática, 1988.

HOGBEN, Lancelot. *Maravilhas da Matemática.* 4. ed. Porto Alegre: Globo, 1956.

IFRAH, Georges. *Os números: a história de uma grande invenção.* 4. ed. Trad. Stella M. de Freitas Senra. São Paulo: Globo, 1992.

JACOBINI, O. R. *A modelação matemática aplicada no ensino de estatística em cursos de graduação.* Dissertação de mestrado. Rio Claro: IGCE/UNESP, 1999. 155p.

LIBÂNEO, José Carlos. *Didática.* São Paulo: Cortez, 1993.

LINDQUIST, Mary M.; SHULTE, Albert P. (Orgs.). *Aprendendo e ensinando Geometria.* São Paulo: Atual, 1994.

LUCKESI, C. *Avaliação na aprendizagem escolar.* São Paulo: Cortez, 1992.

LUCKESI, Cipriano Carlos. *O que é mesmo o ato de avaliar a aprendizagem?* Revista Pedagógica. Porto Alegre: Artmed, n. 12, fev.-abr. 2000.

MACHADO, Nilson José. *Matemática e língua materna.* São Paulo: Cortez, 1990.

MARTINS, J. S. *O trabalho com projetos de pesquisa: do ensino fundamental ao ensino médio.* Papirus, 2001.

MIORIM, M. Ângela. *Introdução à história da Educação Matemática*. São Paulo: Atual, 1998.

MLODINOW, Leonard. *A Janela de Euclides. - A história da geometria das linhas paralelas ao hiperespaço*, 2. ed. Geraçao Editorial, 2004.

MLODINOW, Leonard. *O andar do bêbado – Como o acaso determina nossas vidas. Rio de Janeiro:* Jorge Zahar, 2009.

MOREY, Bernadete. *Geometria e trigonometria na Índia e nos países árabes*. (Org. Sergio Nobre). Rio Claro: Unesp, 2003. (História da Matemática para professores)

OCHI, Fusako Hori. et al. *O uso de quadriculados no ensino de Geometria*. São Paulo: CAEM--USP, 1992. v. 1.

PERRENOUD, P. *Avaliação: da excelência à regulação das aprendizagens*. Porto Alegre: Artmed, 1999.

PIAGET, Jean. *Fazer e compreender Matemática*. São Paulo: Melhoramentos, 1978.

PIRES, C.M.C. *Currículos de Matemática: da organização linear à idéia de rede*. São Paulo: FTD, 2000.

POLYA, George. *A arte de resolver problemas*. Trad. Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

PONTE, João P. da; BROCADO, J; OLIVEIRA, H. *Investigações Matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

RIBEIRO, José Pedro Machado; DOMITE, M. do C. Santos; FERREIRA, Rogerio. *Etnomatemática: papel, valor e significado*. Porto Alegre: Zouk, 2004.

ROCHA FILHO, Romeu C. *Grandezas e unidades de medida: o sistema internacional de unidades*. São Paulo: Ática, 1988.

ROSA; OREY, Daniel C. *Etnomatemática como ação pedagógica*. Natal: UFRN, 2004.

SANT'ANNA, Flávia M. et al. *Planejamento de ensino e avaliação*. 11. ed. Porto Alegre, 1995.

SINGH, Simon. *O último teorema de Fermat*. Rio de Janeiro: Record, 1998.

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA. *Coleção do Professor de Matemática*. Rio de Janeiro: SBM, 1999. Vários números.

SOUSA, C. Prado de (Org.). *Avaliação do rendimento escolar*. Campinas: Papirus, 1991.

SOUZA, E. Reame. et al. *A Matemática das sete peças do Tangram*. São Paulo: CAEM-USP, 1995. v. 7.

STEWART, IAN. *Incríveis passatempos matemáticos*. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2010.

STRATHERN, Jorge. *Pitágoras e seu teorema em 90 minutos*. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1998.

TAHAN, Malba. *Diabruras da Matemática: problemas curiosos e fantasias aritméticas*. 2. ed. São Paulo: Saraiva, 1996.

TOLEDO, Marília; TOLEDO, Mauro. *Didática de Matemática: como dois e dois. A construção da Matemática*. São Paulo: FTD, 1997.

Matemática

ASSESSORIA PEDAGÓGICA

7º ano

Ensino Fundamental

UMA PALAVRA INICIAL

Caro(a) professor(a),

Esta coleção pretende contribuir com o seu trabalho e o de seus alunos. Este manual tem como objetivo apresentar um panorama da abordagem dos conteúdos da coleção e fundamentar as opções que assumimos na condução do curso de Matemática para as séries finais do Ensino Fundamental. Além disso, propõe sugestões e canais de aquisição de conhecimentos que o ajudem a oferecer a seus alunos uma aprendizagem mais eficaz.

O **Assessoria Pedagógica** objetiva também auxiliá-lo no planejamento e gestão de suas aulas e, dessa forma, procura descrever os processos de abordagem dos conteúdos, exercícios e atividades individuais e em grupo, funcionando como um valioso recurso, que deve ser um agente importante do processo de ensino-aprendizagem.

Nesse contexto, buscamos aqui ampliar as informações propostas no livro do aluno, oferecendo sugestões complementares de atividades, leituras, e de projetos a serem desenvolvidos com os alunos, entre outras.

A proposta desta obra surgiu na prática de sala de aula, objetivando despertar o interesse do aluno pela Matemática presente em seu cotidiano. A partir das atividades aqui propostas, procuramos fazer o aluno "enxergar" onde, como e quando a Matemática se manifesta; seja na natureza, nas construções humanas, nas leis da Ciência, na Astronomia ou atividades corriqueiras como, por exemplo, fazer compras, ouvir uma música ou praticar esportes.

Essa abordagem levou à produção desta coleção como uma ferramenta de diálogo nas diferentes linguagens da Matemática. Isso pode ser visto no formalismo e no encadeamento da apresentação dos conceitos, nas diferentes seções que apresentam textos complementares para leitura, aplicações e conexões interdisciplinares, informações históricas contextualizadas, oficinas, desafios, curiosidades e exercícios com dosagem progressiva de dificuldade.

Acreditamos que, com sua insubstituível colaboração, conseguiremos atingir os objetivos gerais e específicos da Educação Matemática respeitando as especificidades sociais e culturais de cada escola que utilizar essa obra. Nossos alunos precisam desta educação de qualidade. Nosso país, também.

Os Autores

Pressupostos da coleção

A Matemática constitui uma das mais significativas e universais heranças culturais da humanidade e é, também, um aprimorado modo de pensar e de se ter acesso ao conhecimento. A ênfase da Educação Matemática no Ensino Fundamental está na utilização da Matemática para resolver problemas, raciocinar, apropriar-se e difundir conhecimentos, o que implica em abordá-la de forma a desenvolver alunos seguros e motivados.

A Matemática sempre foi usada na sociedade relacionando-se com as mais diversas áreas da atividade humana. Porém, num mundo cada vez mais tecnológico, ela passa a ter, também, uma maior importância implícita, que deve ser discutida pelos educadores, objetivando o aprimoramento da aprendizagem pelos alunos e da apropriação das tecnologias disponíveis.

O trabalho dos educadores deve ter como objetivo ajudar a revelar a matemática presente nas mais variadas situações e promover a formação de cidadãos participativos, críticos e confiantes nos modos como lidam com a Matemática.

Trata-se de promover o desenvolvimento integrado de conhecimentos, capacidades e atitudes em vez de simplesmente adicionarmos capacidades de resolução de problemas, raciocínio e comunicação e atitudes favoráveis à atividade matemática a um currículo baseado em conhecimentos isolados e técnicas de cálculo. Ao mesmo tempo, destaca-se a compreensão de aspetos fundamentais da natureza e do papel da Matemática e dá-se uma atenção explícita ao desenvolvimento das concepções dos alunos sobre a própria Matemática.

Com esse olhar, é possível encontrar muitos estudos e experiências sobre a construção e aquisição dos conceitos e procedimentos matemáticos, que defendem, acima de tudo, que o ensino da Matemática não se limita à transmissão de informações, mas trata-se de um processo complexo de construção de um conjunto de competências cognitivas, que deve ter a participação ativa dos alunos.

Nessa obra, procuramos abordar algumas competências gerais de forma articulada com as competências específicas de cada conteúdo trabalhado dentro do campo dos **números e operações, da álgebra, da geometria, das grandezas e medidas e do tratamento das informações**.

Assim, as sugestões de abordagem dos conteúdos apresentadas nessa coleção tendem a relacionar essas competências e permite que o professor possa adaptá-las para cada contexto educacional dentro das diversidades de cada cenário de nosso País.

Vários significados

A necessidade de compreender os vários significados e propriedades das operações fundamentais e dominar os algoritmos são imprescindíveis no mundo atual, pois permitem desenvolver a capacidade de contar, comparar e quantificar grandezas, além de fazer e compreender codificações. Por isso, propomos o uso do cálculo mental, estimativas e o uso da tecnologia para apresentar conteúdos de aritmética, álgebra, contagens, sistemas de medidas, geometria e no tratamento da informação.

Por meio da percepção de regularidades, a obra propõe a construção de modelos simbólicos em várias situações e, da mesma forma, busca a compreensão e interpretação de problemas do cotidiano, correlacionando, eventualmente, outras áreas do conhecimento. Dessa forma, destaca-se o estudo da álgebra, que assume também, a função de linguagem capaz de expressar propriedades matemáticas e suas relações com a realidade.

O estímulo ao uso da percepção espacial e sua interação com o mundo físico em que vive o aluno, é destacado no ensino da Geometria, onde desenvolvemos as competências de localização, visualização, construção e representação de figuras geométricas, de forma a estimular a capacidade de organização e síntese desse conhecimento.

Buscamos, também, propiciar ferramentas de conexão da realidade das aulas de matemática com as demais disciplinas e com o mundo exterior. Assim, o estudo dos conceitos de número natural, inteiro, racional e irracional associa-se ao conceito de grandezas e, assim, relaciona-se à Geometria e à Álgebra, de forma a permitir uma linguagem que favoreça aplicações em outras disciplinas.

O tratamento da informação baseia-se na leitura e interpretação de problemas do cotidiano. A coleção trata de maneira simples e natural de estatística, probabilidade e contagens. A coleta, seleção, organização, apresentação e interpretação crítica dos dados são abordadas com exemplos e atividades que estimulam o uso de inferências baseadas em informações qualitativas ou quantitativas. São introduzidos os conceitos de chance e incerteza ainda nessa fase da educação básica, além de uma ampla apresentação dos diversos tipos de gráficos, aqui entendidos também como "idioma" cada vez mais presente na comunicação matemática.

Nesse cenário, a contextualização e a proposta de interdisciplinaridade e multidisciplinaridade são consequências naturais de um processo de trabalho no dia a dia em sala de aula, na escola e na comunidade, nas quais alunos e professores estão inseridos. Essa conduta participativa, crítica e responsável viabiliza discussões sobre o papel da Educação Matemática na vida desses indivíduos e na sociedade, formando assim, agentes transformadores, críticos e responsáveis, capazes de exercer sua cidadania.

Considerando os pressupostos que assumimos para o desenvolvimento desta coleção, apresentamos a seguir a competências a serem desenvolvidas e os objetivos específicos de cada um dos eixos de condução do curso.

I. Competências gerais a serem desenvolvidas

- Reconhecer a Matemática como instrumento para a compreensão e resolução de problemas do homem na sociedade contemporânea;
- Interpretar matematicamente situações do cotidiano e de outras áreas do conhecimento;
- Resolver problemas de forma criativa, criando suas próprias estratégias de forma a desenvolver a iniciativa e a imaginação;
- Usar o raciocínio matemático de forma independente para compreender o mundo que o cerca;
- Avaliar de forma crítica os resultados obtidos;
- Contribuir para a formação de um cidadão crítico, criativo, observador e leitor do mundo que o cerca;
- Raciocinar e fazer abstrações com base em situações concretas;
- Representar, organizar e generalizar;
- Compreender e transmitir ideias matemáticas por escrito e oralmente;
- Desenvolver a capacidade de argumentação de forma consistente e, assim, desenvolver também sua autoconfiança exprimindo e fundamentando as suas opiniões e formando juízos sobre as situações com as quais é confrontado;
- Desenvolver a curiosidade e o prazer pela aprendizagem de novos assuntos, de forma a aumentar o interesse pelos problemas da sociedade em que vive;
- Estabelecer conexões entre os diferentes campos da matemática;
- Estabelecer conexões entre a matemática e as demais áreas do saber;
- Manipular diferentes tipos de dispositivos tecnológicos como suporte ao raciocínio matemático.

II. Objetivos e competências específicas

Números e Operações/Álgebra

- Compreender o sentido global dos textos trabalhados;
- Relacionar a história da humanidade com o desenvolvimento da matemática;
- Transferir o uso da linguagem oral para a escrita;
- Relacionar a língua materna e a linguagem matemática;
- Usar com clareza os símbolos matemáticos;
- Comparar, refletir e deduzir por meio dos textos trabalhados;

- Ler e interpretar textos diversos;
- Operar através dos algoritmos da adição, subtração, multiplicação e divisão;
- Operar através dos algoritmos da potenciação e radiciação;
- Desenvolver jogos ou atividades lúdicas para complementar o processo do ensino -aprendizagem no desenvolvimento da criatividade, aplicando também o cálculo mental;
- Utilizar os variados recursos tecnológicos para o desenvolvimento de habilidades cognitivas.
- Ler e interpretar textos para compreender e transmitir ideias matemáticas, por escrito ou oralmente, desenvolvendo a capacidade de argumentação.
- Interpretar matematicamente situações do dia-a-dia e, também, do mundo tecnológico e científico para o exercício da cidadania. Usar com clareza os símbolos matemáticos.

Geometria

- Compreender o sentido global dos textos trabalhados;
- Conhecer os conceitos primitivos de ponto, reta e plano;
- Reconhecer e classificar polígonos, triângulos e quadriláteros;
- Interpretar figuras que foram reduzidas e ou ampliadas por meio de uma escala;
- Desenvolver jogos ou atividades lúdicas para complementar o processo do ensino-aprendizagem no desenvolvimento da criatividade, aplicando também o cálculo mental;
- Utilizar os variados recursos tecnológicos para o desenvolvimento de habilidades cognitivas.
- Usar com autonomia o raciocínio matemático para compreensão do mundo que o cerca, desenvolvendo a visão geométrica, a visão espacial e o raciocínio lógico dedutivo.
- Classificar ângulos quanto à sua medida, calcular a soma das medidas dos ângulos de um polígono.
- Fazer uso de régua e de outros instrumentos de medição.
- Compreender e transmitir ideias matemáticas por escrito ou oralmente, desenvolvendo a capacidade de argumentação.
- Classificar ângulos definidos por retas paralelas e transversais.
- Calcular a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero.
- Reconhecer retângulos, trapézios, paralelogramos, losangos e aplicar suas propriedades.
- Reconhecer a diferença entre figuras planas e figuras tridimensionais.
- Identificar e diferenciar sólidos geométricos.
- Reconhecer os elementos de um prisma e de uma pirâmide.
- Definir expressões para cálculo de área e de volume dos sólidos geométricos.
- Reconhecer a maior rigidez de um triângulo em relação aos outros polígonos.
- Verificar a condição de existência de um triângulo.
- Reconhecer as isometrias de figuras planas.
- Representar as simetrias de figuras planas.

- Verificar as condições necessárias para a congruência de triângulos.
- Reconhecer a circunferência e seus elementos.
- Explorar a relação entre as medidas do comprimento da circunferência e seu diâmetro.
- Explorar os ângulos na circunferência.
- Reconhecer a semicircunferência como um lugar geométrico. Identificar polígonos inscritos e circunscritos na circunferência.
- Calcular as áreas do círculo, da coroa e do setor circular.
- Explorar e aplicar as relações entre as medidas de cordas e outros segmentos em uma circunferência.
- Identificar retas externas, secantes e tangentes a uma circunferência.
- Caracterizar os elementos de um triângulo retângulo.
- Aplicar as relações de semelhança em triângulos assim como o Teorema de Pitágoras.
- Identificar e aplicar outras relações métricas no triângulo retângulo.
- Definir as razões trigonométricas no triângulo retângulo utilizando a semelhança de triângulos.

Grandezas e Medidas

- Compreender o sentido global dos textos trabalhados;
- Fazer uso de uma régua e conhecer outros instrumentos para medição;
- Usar adequadamente as diversas unidades de medida de comprimento;
- Desenvolver jogos ou atividades lúdicas para complementar a aprendizagem, desenvolver a criatividade e aplicar também o cálculo mental;
- Utilizar os variados recursos tecnológicos para o desenvolvimento de habilidades cognitivas.
- Compreender e utilizar o conceito de medidas padronizadas e não padronizadas, reconhecer a importância social da adoção de medidas padronizadas.
- Compreender e utilizar medidas usuais de comprimento, de área, de massa e capacidade.
- Utilizar com pertinência ferramentas matemáticas em situações do cotidiano, de práticas sociais, de maneira a exercer a sua cidadania.
- Raciocinar e fazer abstrações com base em situações concretas, generalizar, organizar e representar adequadamente suas ideias matemáticas.
- Reconhecer e operar com as unidades grau e radiano.

Tratamento da Informação

- Ler e interpretar textos em forma de tabelas e gráficos;
- Compreender o sentido global dos textos trabalhados;
- Construir gráficos de colunas, de barras, de setores, de linhas e pitogramas;
- Registrar, organizar, e coletar elementos elencados numa pesquisa;
- Desenvolver pesquisas para exercitar o tratamento da informação e para conhecer o ambiente no qual está inserido;
- Utilizar os variados recursos tecnológicos para o desenvolvimentos de habilidades cognitivas.

- Promover uma reflexão sobre o termo frequência.
- Construir tabelas de frequências.
- Ler, interpretar e construir histogramas.
- Calcular a média de um conjunto de dados.

III. EXPERIÊNCIAS DE APRENDIZAGEM

O desenvolvimento do conjunto de competências citado, deve se dar dentro de um universo rico de experiências de aprendizagem, formando um mosaico de interações com os mais diversos campos do conhecimento, da história, do desenvolvimento e da utilização da Matemática.

Assim, uma boa utilização dos livros desta coleção deve levar os alunos a ter oportunidades de se envolver nos seguintes tipos de experiências de aprendizagem:

Resolução de problemas

É o mais comum e universal contexto de aprendizagem matemática. Deve, por isso, estar sempre presente, associada ao raciocínio e à comunicação e integrada naturalmente nas diversas atividades apresentadas ao longo do curso. Os problemas são situações que constituem desafios para os alunos, em que, frequentemente, podem ser utilizadas várias estratégias e métodos de resolução. São diferentes de exercícios, geralmente de resolução mecânica e repetitiva, em que apenas se aplica um algoritmo que conduz diretamente à solução. A formulação de problemas deve igualmente integrar a experiência matemática e vivencial dos alunos.

Atividades de pesquisa

Numa atividade de pesquisa, os alunos exploram uma situação problema, procuram regularidades, fazem e testam hipóteses, argumentam e comunicam oralmente ou por escrito as suas conclusões. Qualquer tema da matemática pode proporcionar ocasiões para a realização de atividades de natureza investigativa. Este tipo de atividades também é favorável à ligação da matemática com outras áreas do conhecimento.

Projetos

Um projeto é uma atividade prolongada que normalmente inclui trabalho dentro e fora da sala de aula e é realizada em grupo. Pressupõe a existência de um objetivo claro, compreendido pelos alunos, desenvolvimento e a apresentação de resultados. Qualquer tema da Matemática pode proporcionar ocasiões para a realização de projetos. Pela sua própria natureza, os projetos constituem contextos naturais para o desenvolvimento de trabalho interdisciplinar.

Textos e Comunicação oral

A leitura, a interpretação e a escrita de pequenos textos de conteúdos matemáticos ou a eles associados, devem permear todo o curso, sobretudo no Ensino Fundamental. Na comunicação oral, são importantes as experiências de argumentação e de discussão em grande e pequeno grupo, assim como a compreensão das exposições do professor.

Prática de procedimentos e algoritmos

A prática de procedimentos não deve constituir uma atividade repetitiva, isolada e sem significado. Deve ser entendida como algo que pode promover a aquisição de habilidades utilizáveis com segurança e autonomia. O cálculo mental, o domínio de um algoritmo, a utilização de uma fórmula, a resolução de uma equação, uma construção geométrica, a manipulação de um instrumento, entre muitos outros procedimentos, habilidades úteis que se adquirem com prática, desde que sejam claras sua compreensão e a sua integração nas experiências matemáticas significativas.

Exploração de conexões

Um componente essencial da formação matemática é a compreensão das relações existentes entre as diversas ideias matemáticas, bem como daquelas existentes entre essas ideias e outras áreas de aprendizagem como a música, as artes plásticas, a natureza, a arquitetura e a tecnologia. Atividades que permitam evidenciar e explorar tais conexões devem ser proporcionadas a todos os alunos.

Utilização das tecnologias na aprendizagem da Matemática

O mundo tem passado por mudanças cada vez mais aceleradas. Estamos diante de um novo paradigma, a revolução tecnológica, em que as informações são processadas de maneira rápida. A educação está cada vez mais inserida nesse processo de busca da construção contínua do conhecimento.

Objetos digitais de aprendizagem

No ambiente educacional, muito se tem discutido acerca do conceito de objetos de aprendizagem. A principal ideia sobre eles, genericamente falando, é que se configuram em qualquer artefato, organização material ou comportamental, digital ou não digital, que possa ser usada, reutilizada ou referenciada durante o uso de técnicas pedagógicas que deem suporte ao ensino. Dessa maneira, todo objeto de aprendizagem pode ser utilizado como um meio de ensino/aprendizagem. Um cartaz, uma maquete, um kit de laboratório, uma canção, um ato teatral, uma apostila, o próprio livro, um filme, um jornal, uma página web, diferentes livros podem ser objetos de aprendizagem. Mesmo não sendo um conceito, ainda, universalmente aceito, é razoável supor que o caráter de suporte à situação de ensino prevalece quando tentamos entender o conceito mais central de objeto de aprendizagem.

No contexto dos impactos de tecnologias da informação e da comunicação nos processos educacionais, devemos considerar que o computador e os dispositivos móveis, como tablets e celulares, representam poderosas ferramentas para auxiliar professores a desenvolver situações de aprendizagem que permitam ao aluno a construção do saber de forma mais prazerosa e eficiente. Nessas circunstâncias, passamos a considerar o conceito de objetos digitais de aprendizagem.

Nessa sociedade tecnológica e informacional, as tecnologias interativas aplicadas à educação permitem a pluralidade de abordagens, o atendimento a diferentes estilos de aprendizagem e, por essa razão, favorece a aquisição de conhecimentos, competências e habilidades. Caminhamos para um novo cenário, em que cursos e materiais digitais, destinados a uma nova dinâmica de aulas, criam um novo contexto em que o professor assume funções novas e diferenciadas. Os educadores devem fazer sua parte pela procura de informações e de recursos disponíveis, refletindo sobre a utilização de novas ferramentas.

Entre essas possibilidades, destaca-se o uso desses objetos digitais de aprendizagem ao longo do conteúdo trabalhado no livro. Tais objetos encontram-se disponíveis e diversos portais e sites, dentre os quais destaca-se o Portal do Professor, espaço em que o professor pode acessar sugestões de planos de aula e baixar mídias de apoio, que servem como objetos digitais de aprendizagem. Além disso, o professor toma conhecimento de notícias sobre educação e iniciativas do MEC e pode compartilhar planos de aula, participar de discussões ou mesmo fazer um curso. O acesso ao Portal do MEC é:

portaldoprofessor.gov.br.

O planejamento e o desenvolvimento dos objetos de aprendizagem buscam soluções que favorecem as capacidades de ordem cognitiva superior, com atividades interativas e situações que estimulam a aprendizagem dos estudantes. A pretensão é que os objetos de aprendizagem sejam disponibilizados ao longo do desenvolvimento dos conteúdos, sempre que puderem prover à situação de ensino níveis de interação que os processos convencionais não alcancem. Esses objetos, como dissemos, se configuram por recursos digitais que trazem informações em diversos formatos como imagens, sons, infográficos, simuladores, jogos e listas complementares de conteúdos, testes e novos textos, entre outros, sempre com objetivos educacionais.

Existem diversas abordagens para a definição e a caracterização de objetos digitais de aprendizagem. Nos últimos anos, muito se tem discutido e escrito acerca de tão valorosa colaboração para a situação de ensino e aprendizagem.

De modo geral, há uma interessante convergência dos diversos autores a respeito das principais características destes objetos de aprendizagem. Entre elas, destacam-se:

- a flexibilidade – os objetos digitais são flexíveis, isto é, podem ser utilizados e reutilizados em diversas situações, sem nenhum tipo de manutenção;
- são fáceis de serem atualizados, mesmo por que, seu uso em diferentes situações, constantemente sugere melhorias;
- os objetos são customizáveis, pois, em muitos casos, suas estruturas centrais podem ser adaptadas para o uso em diversas áreas do conhecimento;
- a partir do momento em que um objeto é reutilizado diversas vezes em diversas especializações, ao longo do tempo ele melhora e sua consolidação cresce de maneira espontânea.

O uso dos objetos digitais de aprendizagem pode se dar diretamente em sala de aula, por meio de projeções em dispositivos do tipo data show, combinando tais projeções com o acompanhamento de materiais impressos.

Como foi dito, não podemos negar o impacto e a potencialidade das novas tecnologias como um conjunto de recursos que pode subsidiar o processo de aprendizagem da Matemática. Inicialmente, ressaltamos a necessidade de se pensar em um ensino de Matemática que capacita os alunos para o uso confortável de calculadoras e planilhas eletrônicas, dois instrumentos de trabalho extensivamente utilizados nos mais diversos ambientes do mundo moderno.

No trabalho com calculadoras é preciso saber informar, via teclado, as instruções de execução das operações que devem ser realizadas..

De outro lado, as planilhas eletrônicas manipulam tabelas cujas células podem ser relacionadas por expressões matemáticas. Para operar com uma planilha, em um nível básico, é preciso algum conhecimento matemático, uma vez que as operações e as funções são definidas sobre as células de uma tabela em que se faz uso de notação para matrizes. Assim, é importante conhecer bem a notação matemática usada para expressar diferentes conceitos, em particular o conceito de função, apresentado no livro de 9º ano desta coleção. Além disso, a elaboração de planilhas mais complexas requer raciocínio típico dos problemas que exigem um processo de solução em diferentes etapas.

No uso de tecnologia para o aprendizado da Matemática, a definição de alguns objetos digitais de aprendizagem, além de softwares e planilhas, pode ser um fator determinante para a melhoria da qualidade do aprendizado por meio da exploração de conceitos e ideias oportunamente propostos nas situações de ensino.

Nessas situações, o professor deve saber explorar a variedade de soluções que podem ser dadas para um mesmo problema e capitalizar para o grupo a capacidade criativa de cada um de seus alunos, produzindo discussões e trocas de ideias que revelam uma intensa atividade intelectual.

Entre os diversos tipos de objetos digitais de aprendizagem, destacamos:

Galerias

Coleções de imagens relativas ao tema suscitado no ponto onde estão incluídas. São excelentes ferramentas para introdução de conceitos, levantamento de conhecimentos prévios e ilustração de uma gama de exemplos visuais, com legendas específicas, que objetivam o enriquecimento do conteúdo estudado. Em geral, as galerias oferecem a ferramenta de zoom, que permite a análise de detalhes interessantes nas diversas fotografias ou ilustrações apresentadas.

Algumas galerias de imagens podem, também, simular um desenvolvimento progressivo de algum processo, transformação de um fenômeno qualquer representado por uma figura, foto ou esquema. Além dessas utilizações, as galerias são extremamente úteis para criar questões em situações de avaliação, em razão da variedade de aspectos que apresentam sobre um único conceito.

Animações e Infográficos animados

Como o próprio nome desse tipo de objeto sugere, a inserção do movimento como elemento que introduz um novo nível de percepção de um conceito, esquema, figura ou situação dinâmica, que o papel apresenta de forma estática, pode fazer a diferença na compreensão do que se estuda. O professor deve usar as animações em suas aulas, paralisando-as para mostrar um detalhe num infográfico ou fixando-se em um detalhe que pode ser observado por mecanismos de zoom. Existem situações nas quais os infográficos animados contêm vídeos ou mesmo galerias.

Vídeos

A utilização de vídeos como objetos de aprendizagem é antiga e muito desenvolvida. A principal diferença em relação ao uso clássico de vídeos e seu uso no formato de objetos digitais encontram-se na duração. No caso dos objetos digitais, situa-se entre 1 e 3 minutos. Apenas em alguns casos especiais essa duração se aproxima dos 5 minutos;

Simuladores

Esse tipo de objeto digital reúne os principais atributos do formato digital: permite aplicações em diversos contextos, bem como o controle de seu uso em sala de aula ou em laboratórios de informática. Sobretudo no desenvolvimento de conteúdos que exigem interações com fenômenos impossíveis de serem reproduzidos em condições normais de ensino, ou ainda quando são necessários múltiplos exemplos com variações de parâmetros, como no caso de traçados de gráficos.

Jogos

O jogo eletrônico é uma categoria de software de entretenimento cujo objetivo da interação envolve completar uma tarefa, vencer um desafio, obter a maior pontuação, derrotar um adversário. Essa estrutura pode ser utilizada para a fixação de conteúdos educacionais, fazendo com que o aluno desenvolva a percepção dos conceitos através da intensa interação exigida pelos jogos.

Programas e aplicativos

Agora, se imaginarmos como a tecnologia pode nos ajudar no ensino de Matemática, devemos considerar, a princípio, o grande conjunto de programas destinados especificamente a esse fim, como os geradores de gráficos do tipo do **Geogebra** ou os softwares de desenho e geometria, como o **CABRI**, nos quais os alunos podem explorar e construir diferentes conceitos matemáticos, fazer experimentos, testar hipóteses, esboçar conjecturas, criar estratégias para resolver problemas. São características desses programas:

- conter certo domínio de saber matemático – a sua base de conhecimento;
- oferecer diferentes representações para um mesmo objeto matemático;
- possibilitar a expansão de sua base de conhecimento por meio de ensaios;
- permitir a manipulação dos objetos que estão na tela.

Se, por um lado, é muito interessante o uso de grandes programas como o **Geogebra** e o **CABRI**, há que se considerar, também que, para a utilização mais eficiente, esse tipo de software praticamente exige um treinamento específico do aluno, o que, em si, pode ser um obstáculo suplementar à conquista de objetivos instrucionais menos sofisticados, mas estratégicos. A seguir, estão alguns links interessantes para a download gratuito de vários desses softwares:

http://www.ibilce.unesp.br/#!/departamentos/matematica/extensao/lab-mat/softwares-matematicos/
http://www.m3.ime.unicamp.br
https://www.ufpe.br/dmat
http://www.math.psu.edu/MathLists/Software.html
http://www.ufv.br/dma/intermat/Softwares/softwares_matematicos.htm
http://www.apm.pt/apm/software/soft.htm
http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/
http://www.mat.ufrgs.br/edumatec
http://www.ufv.br/cee/pec/Neicim/ead/linksmat.htm
ttp://www.projetozk.ufjf.br/base_p/ensaios/ensaio3/ant_primos.htm
http://math.exeter.edu/rparris/
http://am.esalq.usp.br/desr/dum/node2.html

IV. ORGANIZAÇÃO GERAL DA COLEÇÃO

Conversa Inicial

Esta seção, apresentada no início de cada capítulo, tem como objetivo recuperar a importância e a variedade das experiências que o aluno já possui sobre o assunto e, ao mesmo tempo, introduzir de forma problematizada a necessidade de estudo dos conceitos matemáticos envolvidos no capítulo.

Uma prática interessante para o início do desenvolvimento de cada capítulo é, antes da exploração da seção **Conversa Inicial**, fazer um inventário oral dos conteúdos que já foram trabalhados até o momento. Isso pode fortalecer a discussão dos temas propostos na seção e melhorar a percepção dos alunos em relação às razões pelas quais estudam o conteúdo do capítulo.

Além disso, a seção **Conversa Inicial** pode ser explorada com outros exemplos, dados ou informações, diferentes daqueles propostos no livro e, muitas vezes, tais dados e informações podem ser fornecidos ou enriquecidos pelos próprios alunos, desde que estimulados pelo professor a apresenta-los ou falar sobre eles.

Sugerimos também que o professor dê preferência para explorar temas regionais ou locais, que possam se adaptar à exemplificação contida na seção, de forma a permitir que o aluno identifique a Matemática que está presente na cultura, perceba que ela faz parte da história da civilização e se aproprie do conhecimento matemático pela evidência de seus usos sociais.

Atividades

Esta seção apresenta problemas e exercícios de aplicação dos conteúdos abordados nos capítulos. Os exercícios utilizam diversos enfoques para os temas e diferentes graus de dificuldades. As atividades foram selecionadas segundo o critério de contribuir para o desenvolvimento das competências citadas na parte inicial desta Assessoria Pedagógica, sem, no entanto, deixar de lado a importância de desenvolver as habilidades específicas que envolvem a manipulação de algoritmos, conceitos e nomenclaturas da linguagem matemática. A identificação das principais competências e habilidades às quais se referem as atividades é feita com um ícone e com uma descrição junto às listas.

Com o objetivo de tornar os livros didaticamente mais eficientes e também de proporcionar aos alunos uma visão detalhada das etapas de resolução das atividades propostas, de tal forma que eles aprimorem os processos discutidos em sala de aula e se referenciem para a resolução de outras atividades propostas, introduzimos ao final de cada capítulo a resolução de todas as atividades nele contidas, exceção feita àquelas da seção **Para estudar**.

Desafio

Aqui o aluno é exposto a situações que o provocam a usar a criatividade para resolver problemas e propor soluções interpretando o mundo de forma crítica, fazendo uso da Matemática.

As atividades que os alunos desenvolvem a partir da seção **Desafio** devem sempre ser entendidas como estímulo ao raciocínio lógico e à exploração da capacidade criativa de cada um. Procure, neste caso, mostrar que um mesmo Desafio pode ter caminhos diversos para sua solução e estimule a discussão em sala de aula.

A resolução de Desafios é uma prática que permite ao aluno se colocar diante de questionamentos e pensar por si próprio, possibilitando o exercício do raciocínio lógico e não apenas o uso padronizado de regras.

Sugerimos que o professor explore essa seção de forma ampla e criativa, propondo inclusive, situações para jogos e competições se o ambiente de sua sala de aula for propício.

Para estudar

Essa seção propõe uma relação de atividades, com diferentes graus de dificuldade, que abordam os conteúdos trabalhados no capítulo e as relações estabelecidas com outros temas. Espera-se que o aluno interprete as informações dos exercícios, relacione os conteúdos e aplique os conhecimentos adquiridos para estruturar as resoluções, garantindo assim um bom momento de estudo. Especificamente para esta seção, não foram incluídas as resoluções no livro do aluno. A ideia é que os alunos relacionem as atividades aqui propostas e retornem às atividades resolvidas em classe para montar, autonomamente, suas soluções. As resoluções das atividades da seção Para estudar encontram-se nesta Assessoria Pedagógica. Os exercícios podem ser utilizados como avaliações contínuas do processo de aprendizagem e também em diferentes estratégias de aprendizado, como por exemplo, alunos em duplas confrontando as resoluções de suas atividades ou resolvendo-as no quadro.

Conexão

Os textos apresentados nessa seção resgatam exemplos de aplicações da Matemática nas mais diversas áreas do conhecimento. Sua abordagem visa instigar o aluno a relacionar os conteúdos estudados ao mundo que o cerca e, dessa forma, ampliar sua percepção da Matemática e compreendendo-a, também, como linguagem.

Além disso, é possível propor novas questões de interpretação desses textos e relacioná-los com os conteúdos de outras disciplinas e, em alguns casos, conteúdos relacionados com outros temas da própria Matemática. Essa prática poderá viabilizar a criação de novas questões para atividades, ou ainda, para futuras avaliações em grupo ou individuais.

O processo de leitura e interpretação de textos é essencial para toda prática educativa e é um dos principais desafios que nós, professores, enfrentamos no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, pois muitas vezes há uma superposição da dificuldade de leitura na língua materna com as dificuldades de interpretar a linguagem matemática. Segundo muitos pesquisadores, a habilidade de ler e interpretar textos não se desenvolve espontaneamente e deve ser objeto de um trabalho específico do professor, que deve oferecer aos alunos um modelo de como isso deve ser feito.

Sugerimos ainda, destaque especial para a observação e leitura criteriosa do rico repertório de imagens oferecidas nessa seção e, salientamos que, esse processo de comunicação em sala de aula pode ser utilizado como um importante instrumento para que professores e alunos partilhem os significados matemáticos e linguísticos dos textos.

Quando, quem e onde

Os textos desta seção foram escritos de forma simples e clara para tornar a leitura agradável e possuem todo o rigor científico nas informações neles contidos. O aluno perceberá os caminhos percorridos na construção do pensamento matemático e assim entenderá que são processos longos, não havendo o imediatismo das conclusões ou validações. Os textos abordam a Matemática como um conjunto de conhecimentos e uma linguagem em construção, negando o pressuposto de uma Matemática pronta e acabada, abrindo, assim, possibilidades para discussões e reflexões. Essa seção vincula os conhecimentos matemáticos com as necessidades do momento histórico de cada época, possibilitando ao professor estimular os alunos a fazerem relações com a História da Humanidade. Gera também, permanentes oportunidades para a realização de atividades com outros componentes curriculares como, por exemplo, História, Artes, Ciências, Geografia e Língua Portuguesa. Podem ser sugeridas pesquisas para que o aluno conheça mais sobre os diversos vultos citados na coleção e suas contribuições para a humanidade.

Na prática

Essa seção oferece atividades nas quais os alunos desenvolvem na prática o que aprenderam. São apresentadas propostas de oficinas, pesquisas ou ações que possibilitem observar e interpretar situações problema, aplicando os temas estudados. Nesse contexto, enfatizamos que esta seção oferece melhores condições de ser desenvolvida em grupos ou, pelo menos, em duplas. O trabalho cooperativo aplicado na sala de aula de Matemática enfatiza a interação entre professor e alunos, assim como entre os próprios alunos. Ao trabalharem cooperativamente as atividades dessa seção, os alunos se envolvem em duas situações de aprendizagem; a solução de situações problema e o trabalho produtivo das atividades instrucionais propostas.

Essa prática permitirá ainda expandir as propostas de cada seção para outros trabalhos ou mesmo conectar algum trabalho que os grupos estejam fazendo em outras disciplinas, sempre adequando essas propostas à realidade dos seus alunos.

Além disso, essa seção oferece ainda uma boa oportunidade para propor a organização de exposições dos trabalhos realizados pelos seus alunos para os demais grupos da classe e para as demais classes da escola.

Para ler

Sugerimos textos e informações complementares que visam ilustrar e enriquecer a aprendizagem do aluno, ampliando seu processo de construção de conhecimentos matemáticos.

Além da importância intrínseca para o desenvolvimento dos conhecimentos matemáticos, a seção Para ler é mais uma ferramenta para o aprimoramento da capacidade de leitura e interpretação dos alunos. A relação entre linguagem natural (Português) e a linguagem matemática está presente de forma implícita em diversas situações dentro dessa coleção e, em especial, é possível explorá-la nessa seção de forma adicional.

A prática da leitura coletiva em sala de aula pode ser uma técnica útil para explorar essa seção e, dessa forma, o professor pode interferir durante a leitura e propor questões para a discussão entre os alunos.

Curiosidade

A seção apresenta informações interessantes sobre os diversos conceitos estudados por meio de textos que mostram o uso da imaginação, investigação e criatividade para interpretar o mundo.

Aqui é possível observar aspectos interessantes da Matemática, de nossa História, da Cultura, da Arquitetura, de Ciência e Tecnologia e da Natureza, que auxiliam bastante na compreensão da presença da Matemática em nosso cotidiano.

Sugerimos também a leitura dos textos da seção em sala de aula e o estímulo do debate sobre os principais pontos apresentados.

V. UMA PALAVRA SOBRE AVALIAÇÃO

Atribuir um juízo de valor sobre a propriedade intelectual não é tarefa fácil e os métodos para a aferição da qualidade do processo de ensino/aprendizagem enfrenta históricos desafios. A avaliação é um tema abrangente que apresenta muitos aspectos divergentes e está relacionada a concepções distintas do processo de ensino e aprendizagem. Discutir a avaliação hoje é um desafio que requer uma visão mais ampla da educação, pois, revê os papéis do professor e de toda a prática pedagógica.

Há certo consenso que, na atualidade, o professor deve buscar características menos centralizadoras e mais voltadas para o acompanhamento, a motivação e a orientação de seu aluno, de modo a proporcionar condições para que esses adquiram uma aprendizagem autônoma e integrada. Atuando mais como provocador cognitivo, o professor deve levar seu aluno a desenvolver competências que o tornem crítico e reflexivo.

Nesse contexto, a avaliação também ganha novo propósito e deve fazer uma reflexão crítica sobre a prática, no sentido de captar os avanços de seus alunos, as suas resistências e dificuldades, além de possibilitar uma tomada de decisão sobre o que fazer para superar os obstáculos enfrentados por eles.

COMPARAÇÃO ENTRE DUAS CONCEPÇÕES DE AVALIAÇÃO

MODELO TRADICIONAL	MODELO ADEQUADO
Foco na promoção – o alvo dos alunos é a promoção. Nas primeiras aulas, se discutem as regras e os modos pelos quais as notas serão obtidas para a promoção de uma série para outra. **Implicação** – as notas vão sendo observadas e registradas. Não importa como elas foram obtidas, nem por qual processo o aluno passou.	**Foco na aprendizagem** – o alvo do aluno deve ser a aprendizagem e o que de proveitoso e prazeroso dela obtém. **Implicação** – neste contexto, a avaliação deve ser um auxílio para se verificar quais objetivos foram atingidos, quais ainda faltam e quais as interferências do professor que podem ajudar o aluno.
Foco nas provas – são utilizadas como objeto de pressão psicológica, sob pretexto de serem um "elemento motivador da aprendizagem", seguindo ainda a sugestão de Comenius em sua Didática Magna criada no século XVII. É comum ver professores utilizando expressões como "*Estudem! Caso contrário, vocês poderão se dar mal no dia da prova!*" ou ainda "*Fiquem quietos! Prestem atenção! O dia da prova vem aí e vocês verão o que vai acontecer...*". **Implicação** – as provas são utilizadas como um fator negativo de motivação. Os alunos estudam pela ameaça da prova, não pelo que a aprendizagem pode lhes trazer de proveitoso e prazeroso. Estimula o desenvolvimento da submissão e de hábitos de comportamento físico tenso (estresse).	**Foco nas competências** – o desenvolvimento das competências previstas no projeto educacional deve ser a meta em comum dos professores. **Implicação** – a avaliação deixa de ser somente um objeto de certificação da consecução de objetivos, mas também se torna necessária como instrumento de diagnóstico e acompanhamento do processo de aprendizagem. Neste ponto, modelos que indicam passos para a progressão na aprendizagem, como a Taxonomia dos Objetivos Educacionais de Benjamin Bloom, auxiliam muito a prática da avaliação e a orientação dos alunos.
Os estabelecimentos de ensino estão centrados nos resultados das provas e exames – eles se preocupam com as notas que demonstram o quadro global dos alunos, para a promoção ou reprovação. **Implicação** – o processo educativo permanece oculto. A leitura das médias tende a ser ingênua (não se buscam os reais motivos para discrepâncias em determinadas disciplinas).	Estabelecimentos de ensino centrados na qualidade – os estabelecimentos de ensino devem preocupar-se com o presente e o futuro do aluno, especialmente com relação à sua inclusão social (percepção do mundo, criatividade, empregabilidade, interação, posicionamento e criticidade). **Implicação** – o foco da escola passa a ser o resultado de seu ensino para o aluno e não mais a média do aluno na escola.

Fonte: KRAEMER, E. P. A avaliação da aprendizagem como processo construtivo de um novo fazer. Disponível em: <http://www.gestiopolis.com/Canales4/rrhh/aprendizagem.htm>. Acesso 03. Junho, 2015.

Diante disso, sugerimos ao professor que utiliza essa obra, um processo de ensino/aprendizagem que promova sempre uma avalição de forma contínua, cumulativa e sistemática e que vise acima de tudo:

- Diagnosticar e registrar os progressos e dificuladades do aluno para uma possível mudança de estratégia se necessário for.
- Possibilitar situações de auto avaliação para que o aluno tenha consciência e se responsabilize pelo empenho em avançar nesse processo de aprendizagem . O professor poderá usar um quadro como o sugerido a seguir:

	Satisfatório	Parcialmente satisfatório	Insatisfatório
Participei das aulas e esclareci minhas dúvidas			
Fiz minhas tarefas no prazo			
Estudo regularmente			

- A seção **Para estudar** oferece ao longo dos capítulos uma série de atividades para serem desenvolvidas pelos alunos. Utilize as atividades desta seção para propor aos alunos que as resolval em casa, comparando-as com aquelas desenvolvidas em sala de aula e trazendo-as para discussão em aulas subsequentes. Servem também para que os alunos façam revisões dos conteúdos dos capítulos, como forma de se prepararem para situações de avaliação.
- Forme duplas entre os alunos e faça com que um tenha que explicar para o outro a estrutura de resolução de alguns exercícios. Essa troca de informações é bem rica e construtiva;
- Se a sua escola possui um laboratório de informática, podem ser criadas atividades como processos avaliativos. O manual do professor sugere algumas atividades informatizadas.
- Faça um *checklist* no final de cada capítulo para que o aluno possa dizer se está dominando os temas estudados, e assim poderá se dedicar aos itens em que possui mais dificuldade ou não compreendeu. Observe o exemplo a seguir:

	DOMÍNIO COMPLETO	DOMÍNIO PARCIAL	NÃO DOMINADO
Resoluções de equações com uma incógnita.			
Ler e interpretar problemas.			
Resolução de sistemas lineares.			
Resolver equações fracionárias.			

- Fundamentar as decisões quanto à necessidade de procedimentos de reforço e recuperação de aprendizagem.
- Orientar as atividades de planejamento e replanejamento dos conteúdos curriculares.

Acreditamos que essas sugestões podem promover uma avaliação que englobe a observação e análise do conhecimento e de habilidades específicas adquiridas pelo aluno, além dos aspetos formativos.

Nessa proposta de avaliação, a obra permite que o professor avalie também aspectos das atitudes do aluno referentes à participação nas atividades pedagógicas, na responsabilidade e compromisso com o cotidiano escolar e, enfim, no cumprimento de seu papel de cidadão em formação.

Dessa forma, as avaliações propostas podem ser feitas por meio de provas escritas, trabalhos, pesquisas e observação direta, sendo que os aspetos qualitativos devem sempre prevalecer sobre os aspetos quantitativos. Os instrumentos de avaliação devem sempre abranger dois ou mais tipos, sendo que pelo menos um deles deve ser uma prova escrita, para que o aluno demonstre seus avanços na relação entre a escrita e leitura utilizada pela língua materna e a linguagem matemárica.

Os critérios dessas avaliações devem ser os previstos nos objetivos de cada componente curricular e nos objetivos gerais de formação educacional preconizada pela escola e, os resultados finais, devem ser registrados para cada componente curricular, por meio de sínteses dentro do período determinado por cada escola.

Os professores podem encorajar a aprendizagem significativa usando tarefas que irão engajar o estudante na busca de conexões entre o seu conhecimento prévio e o novo conhecimento, usando estratégias de avaliação que premiam a aprendizagem significativa.

Não é possível ao estudante alcançar altos níveis de aprendizagem significativa até que uma estrutura de concecimentos relevantes seja construída. Neste estágio, a aprendizagem passa a ser um processo interativo ao longo do tempo até se atingir a proficiência na área deste conhecimento.

Na medida em que interage com a informação, o estudante está construindo seu conhecimento, ele faz conexões importantes entre significados e desse modo possibilita a sua aprendizagem significativa.

Referências sobre avaliação

ALARCÃO, I. *Professores reflexivos em uma escola reflexiva.* 7ª Ed., São Paulo: Cortez, 2010.

ARROYO, M. G. *Imagens quebradas: trajetórias e tempos de alunos e mestres.* Petrópolis: Vozes, 2004.

CZESZAK, W. A. A. C. *A construção dos saberes dos professores e as contribuições do mapeamento conceitual.* 2011. 319 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo. 2001. Disponível em: <http://www.teses.usp.br/teses/ *disponiveis*/48/48134/ tde-28062011-091506/pt-br.php>. Acesso em 12 abr 2013.

HAYDT, R. C. C. *Avaliação do processo ensino-aprendizagem.* São Paulo: Ática, 1999.

KRAEMER, E. P. *A avaliação da aprendizagem como processo construtivo de um novo fazer.* Disponível em: <http://www.gestiopolis.com/Canales4/ rrhh/ aprendizagem.htm>. Acesso 03. Junho, 2015.

LUCKESI, C.C. Avaliação da Aprendizagem Escolar. São Paulo: Cortez, 2005.

Referências de documentos oficiais

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática - 5ª série.* Brasília, 1998.

______ *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática - 6ª série.* Brasília, 1998.

______ *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática - 7ª série.* Brasília, 1998.

______ *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática - 8ª série.* Brasília, 1998.

FUNDAÇÃO ROBERTO MARINHO/Fiesp/Ciesp/Sesi/Senai/IRS. *Mecânica: metodologia.* São Paulo: Globo, 1996. (Telecurso 2000/Curso Profissionalizante).

SÃO PAULO (Cidade). Prefeitura Municipal. *Movimento de reorientação curricular- Matemática - Relatos de prática 4/8, Documento 6/92'.* São Paulo, 1992.

______ *Movimento de reorientação curricular - Matemática - Visão de área, Documento 5.* São Paulo, 1992.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. Fundação para o Desenvolvimento da Educação. *A didática e a escola de 1º grau.* São Paulo, 1992. (Idéias, 11).

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. *Proposta curricular para o ensino da Matemática – 1º grau.* 4. ed. São Paulo, 1991.

______ *Experiências matemáticas: 5ª série.* São Paulo, 1994.

______ *Experiências matemáticas: 6ª série.* São Paulo, 1994.

______ *Experiências matemáticas: 7ª série.* São Paulo, 1994.

______ *Experiências matemáticas: 8ª série.* São Paulo, 1994.

______ *Prática pedagógica: Matemática: 1º grau.* São Paulo, 1993.

______ *Proposta curricular de Matemática para o CEFAM e habilitação específica para o magistério.* São Paulo, 1990.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CULTURA. *Parâmetros Curriculares Nacionais – Matemática (3º e 4º Ciclos).* Brasília: MEC – Secretaria do Ensino Fundamental, 1998.

PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS – MATEMÁTICA (3º E 4º CICLOS). Brasília: MEC – Secretaria do Ensino Fundamental, 1998.

PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS PARA O ENSINO MÉDIO, *Ciências da natureza, Matemática e suas tecnologias*. Brasília: MEC – Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 2000.

Outros documentos interessantes

CRISCUOLO, C; LOMBARDO, M. Técnicas de sensoriamento remoto aplicadas ao ensino fundamental. *Boletim de Geografia*, 2011. PDF

Disponível em: <http://eduemojs.uem.br/ojs/index.php/BolGeogr/article/viewFile/14133/7492>. Acesso em: 12 out. 2011.

SIQUEIRA, A. Práticas interdisciplinares na educação básica: uma revisão bibliográfica-1970-2000. *ETD-Educação Temática Digital*, 2008.

Disponível em: <http://www.fae.unicamp.br/revista/index.php/etd/article/viewArticle/1754>. Acesso em: 16 mar. 2012.

MOTA, I.A.R. TANGRAM. PDF

Disponível em: <http://www.feg.unesp.br/extensao/teia/trab_finais/TrabalhoIvany.pdf>. Acesso em: abr. 2012.

NCTM - National Council of Teachers of Mathematics. *Teaching Mathematics to English Language Learners*. PDF

Disponível em: <http://<www.nctm.org/uploadedFiles/About_NCTM/Position_Statements/English%20Language%20Learners%20final%282%29.pdf>. Acesso em: abr. 2012.

ALVES, E.L.; Bandão C.L.F.; Araquam, W.W.C. *A resolução de problemas de distâncias inacessíves com o uso do Geogebra por crianças do Ensino fundamental.* VI EPBEM – Monteiro, PB – 09, 10 e 11 de novembro de 2010.

Disponível em: <www.sbempb.com.br/epbem>. Acesso em: 12 fev. 2012.

FONTALVA, Gerson Martins. *Um estudo sobre inequações.* PDF

Disponível em: <www.sbempaulista.org.br/epem/anais/Posteres%5Cp040.doc>

Sugestão de sites

A seguir, relacionamos um conjunto de *sites* úteis para o desenvolvimento das atividades do professor de matemática. Atualmente, são inúmeras as possibilidades de indicações de endereços interessantes para pesquisa. No entanto, para que isso seja feito com segurança, selecionamos alguns sites seguros, dentro dos quais encontram-se diversos outros *links* que o direcionarão para um rico universo de pesquisa. Todos os *sites* a seguir foram acessados pela última vez em 28 de março de 2012.

Associação dos professores de matemática.

Disponível em: < http://www.apm.pt/portal/index.php>.

Sociedade Brasileira de Educação Matemática.

Disponível em: <www.sbem.com.br>.

Sociedade Brasileira Matemática.

Disponível em: <www.sbm.com.br>.

Revista Scientific American Brasil.

Disponível em: <www.sciam.br>.

Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística.

Disponível em:<www.ibge.gov.br>.

WebAlgebra:A Series of 49 lessons.

Disponível em: <www.albert.math.uiuc.edu/algebra.html>.

Site com material de apoio aos alunos do curso de licenciatura em matemática do IME-USP.

Disponível em: <http://ecalculo.if.usp.br>.

Site mantido pela USP-Universidade de São Paulo com vários softwares gratuitos destinados ao ensino da Matemática

Disponível em: <http://www.ludoteca.if.usp.br/index.php>.

Sociedade Brasileira de Educação Matemática.

Disponível em: <http://www.sbem.com.br>.

Instituto de Matemática da PUCRS

Disponível em: <http://www.mat.pucrs.br>.

Instituto de Matemática da USP – Laboratório de Matemática

Disponível em: <http://www.ime.usp.br/lem>.

Instituto de Matemática, Estatística e Computação da UNICAMP

Disponível em: <http://www.ime.unicamp.br/>.

Orientações Específicas

Capítulo 1: Números Inteiros

Objetivos específicos do capítulo

Relacionar a história da humanidade com o desenvolvimento da matemática; transferir o uso da linguagem oral para a escrita. Fazer estimativas mentais de resultados ou cálculos aproximados. Ler e interpretar textos para compreender e transmitir ideias matemáticas, por escrito ou oralmente, desenvolvendo a capacidade de argumentação. Interpretar matematicamente situações do dia-a-diae, também, do mundo tecnológico e científico para o exercício da cidadania. Usar com clareza os símbolos matemáticos e identificar diferentes formas ou abordagens para resolver problemas.

Página 9

A situação apresentada na introdução desse capítulo mostra um problema que não foi trivial para a história dos números. Os números negativos foram considerados sem solução por muito tempo, porque afinal, só se aceitava a idéia de subtrair dois números naturais a eb, desde que a > b.

Se, por exemplo, um pastor deveria entregar 10 ovelhas a um comerciante e possuísse apenas 7, é simples imaginar que ele ficaria devendo 3. Essa situação na qual de um conjunto são tirados todos os elementos e ainda faltaram outros para representar a situação era inconcebível.

Os Números Naturais não são suficientes para essas situações.

Hoje, para representarmos situações como a de extratos bancários, onde saldos podem ser negativos, precisamos dos números negativos.

Esses números formam o conjunto dos Números Inteiros, representados por Z. Assim, como veremos na página seguinte,representamos o conjunto dos números inteiros por:

Z = {…….,–4, – 3,– 2, –1, 0, 1, 2, 3, 4………}

Observe que, quanto mais o zero representa um marcador de direção para os números, ou seja, quanto mais distante do zero está um número negativo, ele é menor.

De forma análoga, quanto mais afastado do zero está um número positivo, ele é maior.

Perguntas como as relacionadas abaixo podem já prepará-los para compreender a posição dos números inteiros na reta numérica, os mecanismos de soma e subtração, propriedade comutativa etc:

- Qual lugar é mais quente: um que está a -5ºC ou um que está a -2ºC?
- Quem está mais feliz: uma pessoa com um saldo de –R$200,00 ou uma com um saldo de –R$100,00?
- Quanto uma pessoa precisa depositar em sua conta, inicialmente com um saldo de –R$200,00, para quitar sua dívida e ficar com um saldo positivo de R$300,00?
- Quanto a temperatura de um lugar, inicialmente a -2ºC, deve subir para que esse lugar fique a 25ºC?
- Uma pessoa que faz a seguinte movimentação na conta bancária, inicialmente com R$100,00, fica com saldo positivo ou negativo?
  – Um depósito de R$200,00;
  – Um saque de R$180,00;
  – Um depósito de R$50,00;
  – Um saque de R$200,00;

Verifique se os alunos conseguem perceber que podem, primeiramente, somar todos os depósitos e todos os saques e depois subtrair o total dos saques do total dos depósitos. Verifique também se eles percebem que podem cancelar o depósito de R$200,00 com o saque de igual valor.

SUGESTÃO DE ATIVIDADE

1. Um elevador se encontra no andar térreo de um edifício. Usando números inteiros positivos ou negativos e considerando o térreo como origem, indique o andar onde o elevador se encontra quando:

a) sobe 5 andares

b) desce 2 andares

c) sobe 9 andares e desce 6 andares

d) desce 4 andares e sobe 2 andares

2. A figura ao lado indica a temperatura de algumas cidades brasileiras em um determinado dia. Observando-a e usando números inteiros positivos ou negativos, escreva a temperatura registrada nas cidades:

a) de Curitiba

b) de Salvador

c) de Porto Alegre

d) de São Paulo

e) do Rio de Janeiro

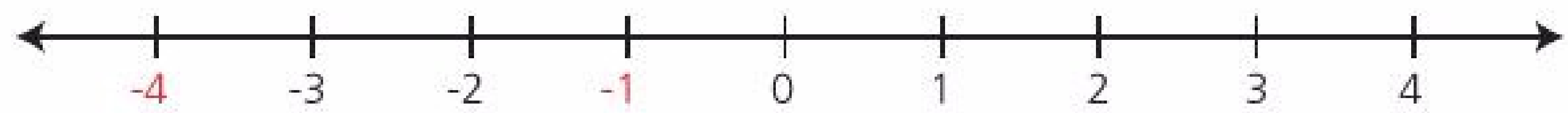
f) de São Joaquim

Página 11

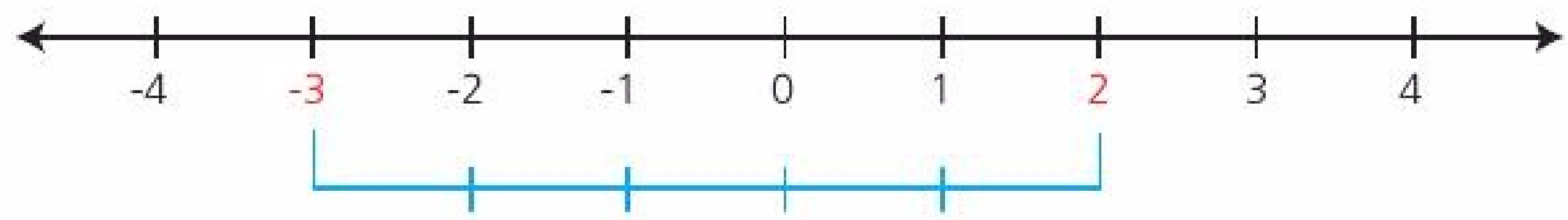
Procure trabalhar bastante com a reta numérica, pois a informação visual é sempre enriquecedora. Para mostrar que ela não é algo tão fora da realidade, você pode citar, como exemplo, o termômetro, que é uma reta numérica vertical.

Utilizando a reta numérica, você pode mostrar, por exemplo, que:

- $-4°C < -1°C$, já que -4 está à esquerda de -1:



- A temperatura deve subir 5°C para que um ambiente, que estava inicialmente a $-3°C$, fique a 2°C:



Página 12

Se achar conveniente, explore mais atividades em sala de aula. Veja a seguir algumas sugestões:

SUGESTÃO DE ATIVIDADE

3. Complete corretamente:

a) O oposto ou simétrico de –102 é ____________________

b) O oposto ou simétrico de +93 é ____________________

c) O simétrico de 1 + 211 é ____________________

4. Um número y é o oposto ou simétrico do número +65. Qual é o número y?

5. Não existe o simétrico do número zero. Esta afirmação é correta?

6. Copie os números da listagem abaixo, ordenando-os do menor para o maior na linha abaixo:

–14	3	5	–9	–7	0	–2	–15	–1	–8	10	7	–4	–5

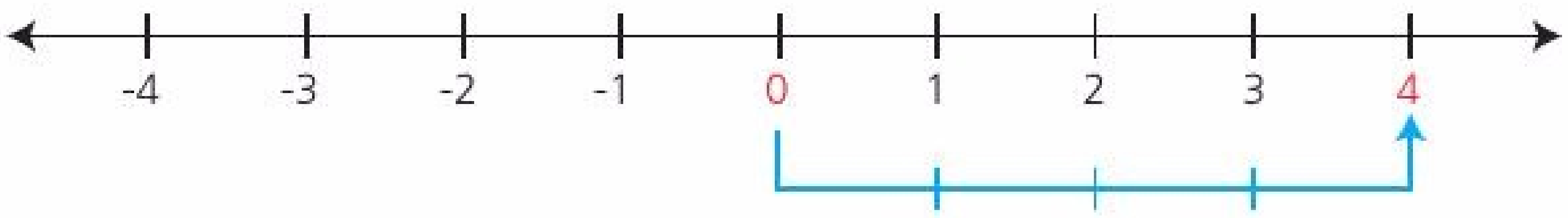
Página 15

Professor, sugira aos alunos que construam uma reta numérica em cartolina e, utilizando-a, treinem os processos de somar e subtrair. Isso evitará dúvidas futuras , tais como: Por que -3 -7 = -10 se menos com menos dá mais?

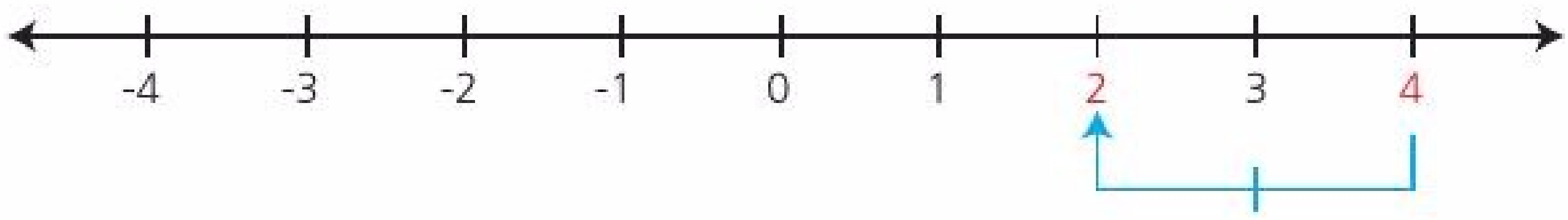
Você pode exemplificar o processo de adição com uma soma com várias parcelas, como:

$$(+4) + (-2) + (-3) + (+1)$$

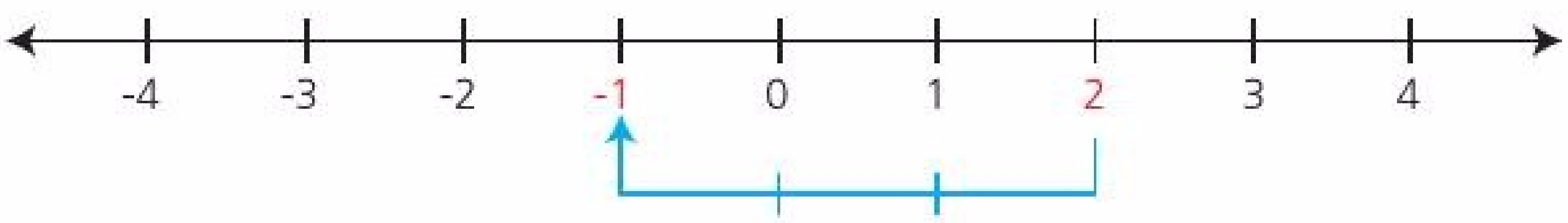
Parta do zero e, quando for somar um número positivo, vá para a direita, e quando for somar um número negativo, vá para a esquerda. A primeira parcela é (+4), parta do zero e vá 4 casas para a direita, parando em +4:



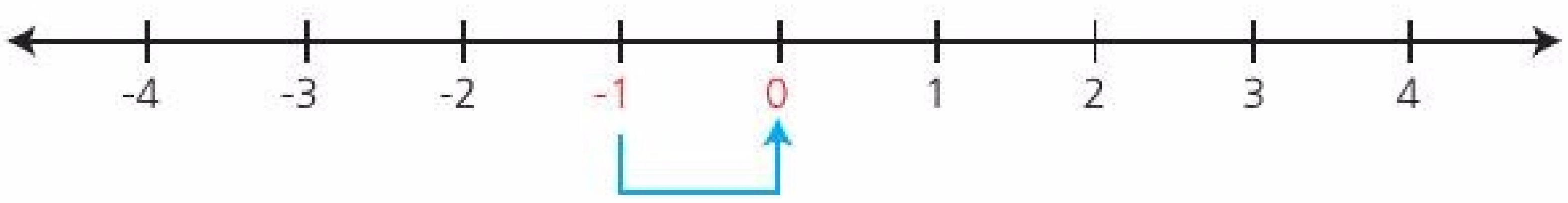
A segunda parcela é (-2). Como o número é negativo, vá duas casas para a esquerda, parando em +2:



O próximo número a ser adicionado é (–3). Como o número é negativo, vá três casas para a esquerda, parando em –1:



O próximo número a ser adicionado é (+1), que é positivo. Vá uma casa para a direita, parando no zero, que é o resultado da conta:



Você pode explorar outras propriedades. Mostre aos alunos que a soma pode ser feita em qualquer ordem e que a soma de um número com seu oposto é nula.

Página 16

Desafio

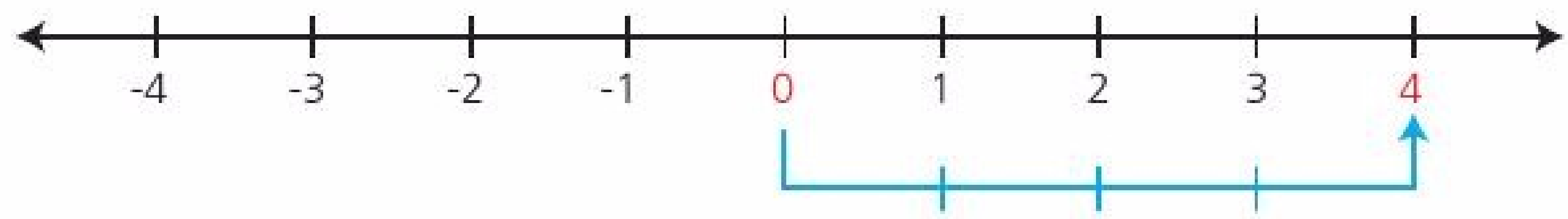
a)	–4	–2	0	2	**4**	**6**	**8**	**10**	**12**	**14**
b)	–1	1	–2	2	**–3**	**3**	**–4**	**4**	**–5**	**5**
c)	–1	–3	–5	**–7**	**–9**	**–11**	**–13**	**–15**	**–17**	**–19**

Página 18

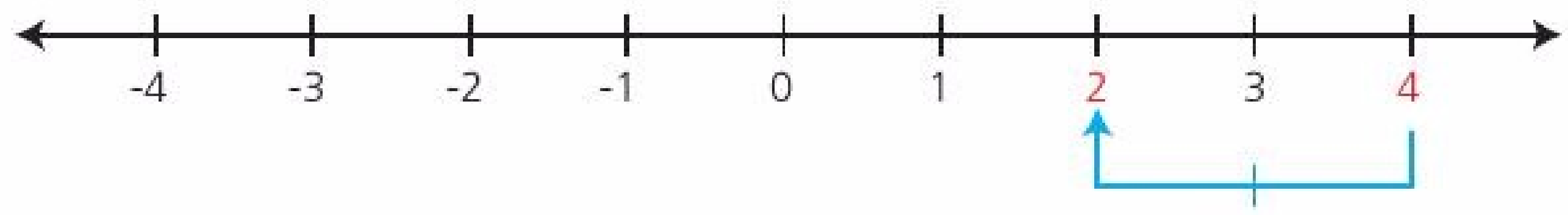
Trabalhe com subtrações na reta numérica. Elas são úteis para que, futuramente, o aluno entenda o sinal negativo nas multiplicações como "o oposto de" ou "o contrário de". Você pode usar contas mistas, com adições e subtrações, para que o aluno treine.

Por exemplo: (+4) – (+2) – (–1) + (–6)

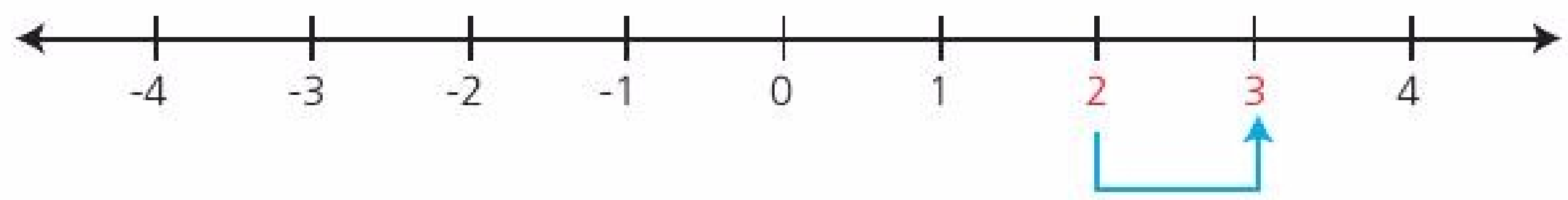
Parta do 0 e, como (+4) é positivo, vá 4 casas para a direita, chegando em +4:



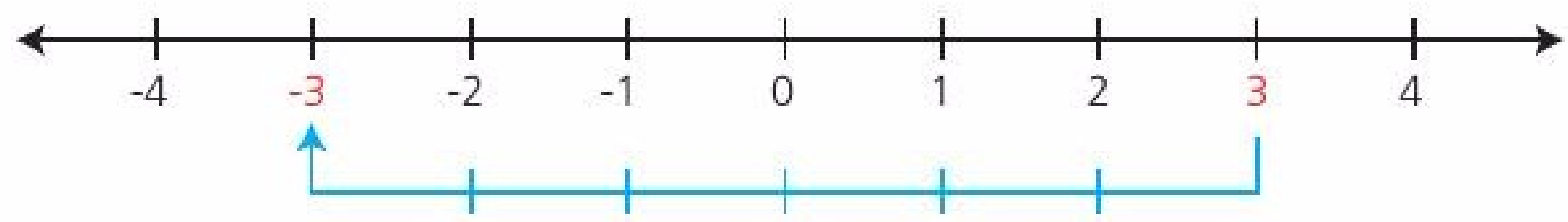
Faça O OPOSTO DE ir para a direita 2 casas, ou seja, vá para a ESQUERDA 2 casas, parando em +2:



Faça O OPOSTO DE ir para a esquerda 1 casa, ou seja, vá 1 casa para a DIREITA, chegando em +3:



Vá para a esquerda 6 casas, chegando em -3, que é o resultado da conta.



Depois do aluno ter praticado um pouco, finalmente você pode usar a convenção:

+ + = +

+ − = −

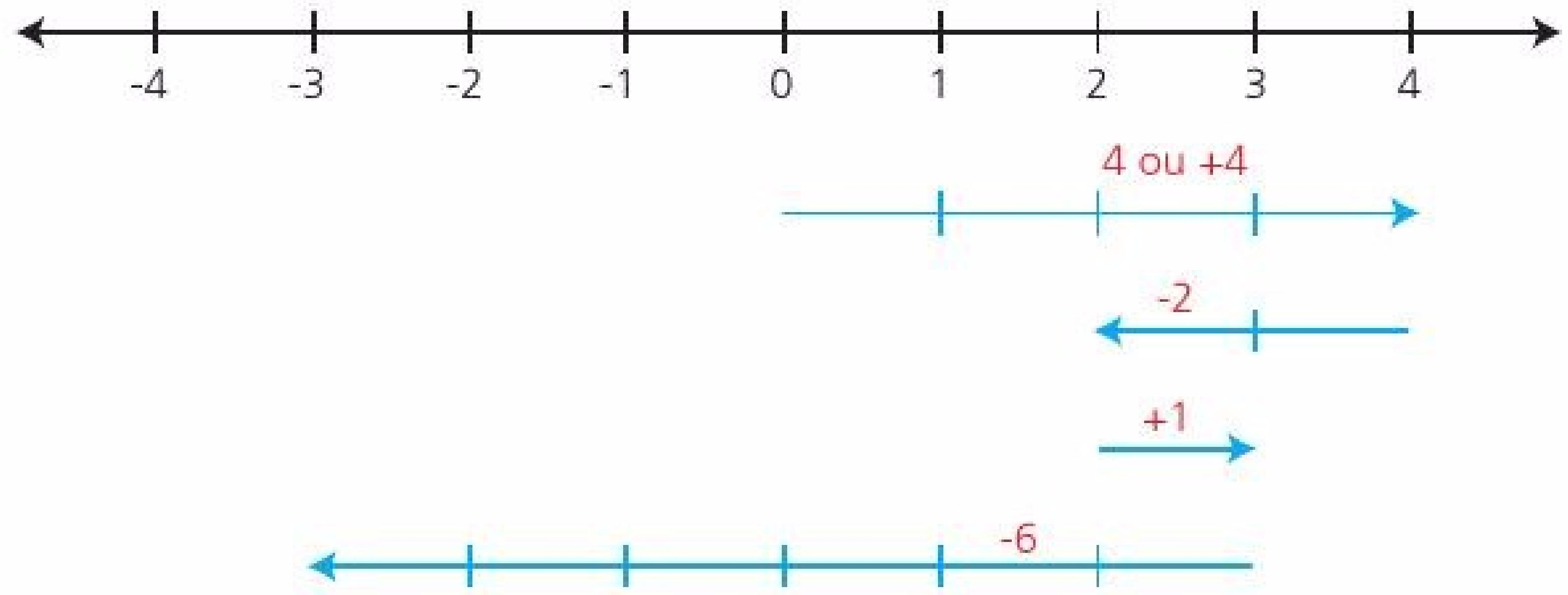
− + = −

− − = −

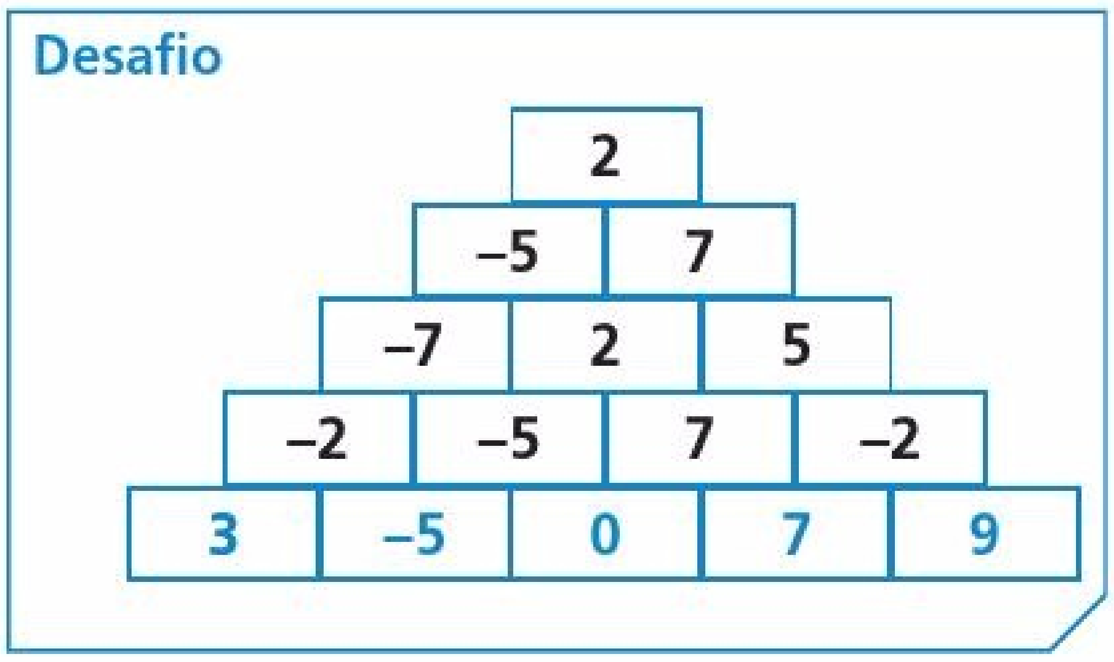
ou, se preferir:

o **sinal de menos** na frente de um número troca o seu sinal, enquanto que o **sinal de mais** o mantém.

Transforme (+4) – (+2) – (–1) + (–6) em 4 – 2 + 1 – 6, que é uma conta muito mais fácil de se fazer geometricamente utilizando-se a reta numérica: é só considerar as somas como movimentos para a direita e as subtrações como movimentos para a esquerda:



Página 19



Página 22

Não deixe de enfatizar a transformação do exemplo do livro:

$$5 + 3 - 8 - 4 - 11 + 9 = 5 + 3 + (-8) + (-4) + (-11) + 9$$

Normalmente fazemos a transformação contrária, mas quando você ensinar álgebra e equações, será útil que o aluno veja o primeiro lado da igualdade acima como uma soma na qual os sinais de + e – pertençam aos números que vêm a seguir.

Se achar conveniente, explore mais atividades em sala de aula. Veja a seguir algumas sugestões:

SUGESTÃO DE ATIVIDADE

7. Efetue as operações algébricas a seguir e complete o quadro em seu caderno:

Aplicação indicada	Notação simplificada
(+7) + (–4)	
(–5) + (–10)	
(+3) + (+7) + (–9)	
(–2) + (+13) + (+8) + (–5)	
(+5) + (+1) + (–4) + (–8) + (+2)	

Desafio

a)

	Lucro ou Prejuízo	Total em Caixa
Fevereiro	—	2 000,00
Março	5 000,00	7 000,00
Abril	–3 000,00	4 000,00
Maio	2 500,00	6 500,00
Junho	—	6 500,00
Julho	–10 000,00	–3 500,00
Agosto	6 000,00	2 500,00

b) A última coluna mostra a movimentação e, a partir de março temos:

$2\,000{,}00 + 5\,000{,}00 + (3\,000{,}00) + 2\,500{,}00 + 0 + (-10\,000{,}00) + 6\,000{,}00 = 2\,500{,}00$

Página 27

Não se esqueça de enfatizar que o aluno DEVE escrever entre parênteses o número negativo que vem após o sinal de multiplicação.

CERTO: $3 \cdot (-5)$
ERRADO: $3 \cdot -5$

Tal procedimento evita que multiplicações sejam equivocadamente transformadas em subtrações, por exemplo, que $3 \cdot -5$ vire $3 - 5$.

Página 28

ENFATIZE que esta clássica regra de sinais vale para multiplicações, NÃO PARA SOMAS!

– 50 – 100 não dá +100! Duas dívidas em sequência, uma de 50 reais e outra de 100 reais, não viram um saldo de 150 reais!

Diferentemente do que acontece na multiplicação, onde temos, por exemplo:

- $3 \cdot (-5) = -15$, ou seja, o triplo de uma dívida de 5 reais é uma dívida de 15 reais;
- $(-2) \cdot (-5) = 10$, ou seja, o OPOSTO do dobro de uma dívida de 5 reais é um saldo de 10 reais.

O "menos com menos" na multiplicação é o "oposto do oposto" de alguma coisa, que é a própria coisa .

Para fixar o conceito, você pode perguntar aos alunos o que representaria o "avesso do avesso do avesso do avesso", na música Sampa, de Caetano Veloso:

"E foste um difícil começo
Afasto o que não conheço
E quem vem de outro sonho feliz de cidade
Aprende depressa a chamar-te de realidade
Porque és <u>o avesso do avesso do avesso do avesso</u>"

Página 29

Se achar conveniente, explore mais atividades em sala de aula. Veja a seguir algumas sugestões:

SUGESTÃO DE ATIVIDADE

8. Cada sequência de números possui um segredo. Em cada uma, descubra os números que estão faltando nos quadradinhos

	$-18 + 6$	$-12 + 6$	$-6 + 6$	$0 + 6$		
-18	-12	-6				

	$2 \cdot (-6)$	$1 \cdot (-6)$	$0 \cdot (-6)$	$(-1) \cdot (-6)$		
-18	-12	-6				

9. Observe e responda:

-5	-9
4	-12

- Qual o produto dos números escritos na diagonal em negrito?
- Qual o produto dos números escritos na diagonal pontilhada?
- Qual a soma dos resultados obtidos?

10. Observe o quadro e responda:

+500	:	–10	=	A
–350	:	–5	=	B
+240	:	+6	=	C

a) Qual o valor de A?
b) Qual o valor de B?
c) Qual o valor de C?
d) Calcule o valor de A+ B + C.

Página 33

Enfatize que, quando não escrevemos o expoente, está implícito que ele é UM e não ZERO, pois os alunos tendem a associar ausência, vazio, nada... com zero.

Sugestão de quadros para fixar na sala de aula:

Será que $(-4)^2$ é igual a -4^2?

Vamos analisar cada expressão:

- $(-4)^2$ significa que a base (-4) está elevada ao expoente 2, ou seja:

$$\mathbf{(-4)^2 = (-4) \cdot (-4) = 16}$$

- -4^2 corresponde a $-(4^2)$, ou seja, é o oposto de uma potência de base 4 e expoente 2.
  Então:

$$\mathbf{-4^2 = [4 \cdot 4] = 16}$$

Logo, $\mathbf{(-4)^2 \neq -4^2}$

Será que $(3^2)^3$ é igual a 3^{2^3}?

Vamos analisar cada expressão:

- $(3^2)^3$ significa que a base (3^2) está elevada ao expoente 3, ou seja:

$$\mathbf{(3^2)^3 = (3^2) \cdot (3^2) \cdot (3^2) = 9 \cdot 9 \cdot 9 = 729}$$

- 3^{2^3} significa a base 3 elevada ao expoente 2^3.
  Assim:

$$\mathbf{3^{2^3} = 3^3 = 6\,561}$$

Logo, $\mathbf{(3^2)^3 \neq 3^{2^3}}$

SUGESTÃO DE ATIVIDADE

11. Indique e alcule:

a) o quadrado de +7.

b) a quarta potência de –3.

c) a sexta potência de +1.

d) o cubo de –4.

e) a quinta potência de +10.

f) a sétima potência de –1.

Página 33

O aluno comumente comete este erro: $-5^2 = 25$ porque número negativo ao quadrado dá um número positivo. Enfatize que a potência é feita antes da multiplicação e, no caso, o "menos" troca o sinal do resultado da potência. Você pode pedir para o aluno fazer na calculadora (só funciona se for científica) -5^2 e $(-5)^2$ para ver que os resultados são diferentes.

Página 34

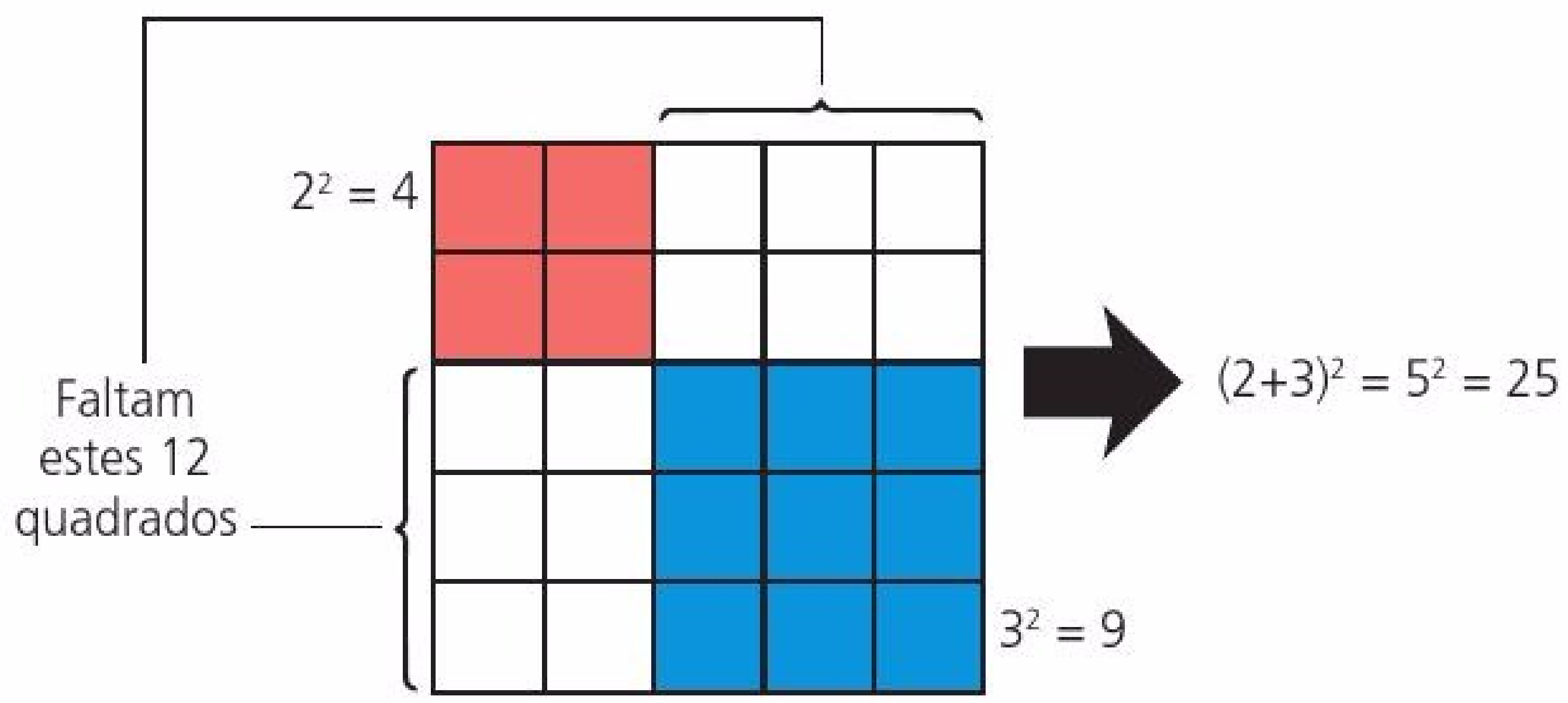
Enfatize que a regra: $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ NÃO VALE PARA SOMAS!!!

Um erro comum é distribuir o expoente entre parcelas de uma soma, por exemplo:

$$(2 + 3)^2 = 2^2 + 3^2 \text{ , que é ERRADO!!!}$$

Uma maneira de verificar isso é calculando o lado esquerdo da igualdade, que dá $5^2 = 25$, que é diferente do resultado do lado direito, que é $4 + 9 = 13$.

Se você quiser representar o exemplo acima visualmente, pode ajudar a compreensão do aluno:



Página 35

Peça ao aluno para calcular uma raiz de um número negativo na calculadora. A mensagem de erro o ajudará a se lembrar que essa operação é impossível, pois um erro comum é fazer $\sqrt{-4} = -2$.

Página 36

É conveniente que o aluno desenvolva uma distinção visual entre multiplicações (e divisões) e somas (e subtrações). Isso pode ser útil quando o aluno for simplificar expressões algébricas, pois um erro comum é fazer a simplificação abaixo:

$$\frac{2 + 3 \cdot \cancel{5}}{\cancel{5}}$$

O que ocorre é que o aluno pode achar que está simplificando um produto, e o que é proibido é simplificar somas.

Uma maneira de desenvolver essa habilidade é escrever as expressões numéricas com mais espaços entre as parcelas do que entre os fatores, por exemplo:

$$-5 \;+\; 3 \cdot (-2)^2 \;+\; 5 \cdot \sqrt{16}$$

Dê espaços um pouco menores entre parcelas (e ainda menores para produtos e divisões) dentro de parênteses, colchetes e chaves, por exemplo:

$$[13 + 16 : (1^5 - \sqrt{25})] : 9 + 7 \cdot (-3)$$

Respostas da Atividades Sugeridas

1. a) +5
b) –2
c) +9 – 6 = 3
d) –4 + 2 = –2

2. a) +6°C
b) +27°C
c) +1°C
d) +14°C
e) +21°C
f) –6°C

3. a) +102
b) –93
c) –21

4. y = –65

5. Não, o simétrico de zero é o próprio zero.

6.

–14	3	5	–9	–7	0	–2	–15	–1	–8	10	7	–4	–5
–15	–14	–9	–8	–7	–5	–4	–2	–1	0	3	5	7	10

7.

Aplicação indicada	Notação simplificada
(+7) + (–4)	+7 – 4
(–5) + (–10)	–5 – 10
(+3) + (+7) + (–9)	+3 + 7 – 9
(–2) + (+13) + (+8) + (–5)	–2 + 13 + 8 – 5
(+5) + (+1) + (–4) + (–8) + (+2)	+5 + 1 – 4 – 8 + 2

9.
- (–5) · (–12) = 60
- (5) + (–9) = –36
- 60 · (–36) = –2 160

10. a) –50
b) 70
c) 41
d) –50 + 70- + 41 = 61

11. a) +49
b) +81
c) +1
d) –65
e) +100 000
f) –1

Resoluções da seção Para estudar

59. a) 7 graus
b) zero graus
c) –6 graus
d) –8 graus

60. a) –650 + 400 = –R$ 250,00
b) –650 – 150 = –R$ 800,00
c) –650 – 150 – 225 = –R$ 1025,00

61. a) V
b) V
c) V
d) F

62. a) 15
b) –1

63. São –3, –2, –1, 0, 1, 2 e 3

64. a) –14
b) 13
c) –13
d) 0

65. a) $-2 - (-5) = 3$
b) $1 - [1 - 0] = 0$
c) $0 - [5 - (-17)] = -22$

66. a) =
b) =
c) =
d) ≠

67. a) $x = -11$
b) $x = -7$
c) $x = -1$
d) $x = 2$

68. a) Foi uma retirada de R$ 9200,00.
b) O salário é R$ 5000,00.

69. a) 10
b) 0
c) 33
d) 52
e) –456
f) –761

70. a) 27
b) –27
c) –27
d) 27
e) 1
f) –1
g) 0
h) –465
i) 0
j) 1100

71. a) 40
b) 4
c) 29
d) –27
e) 2

72. a) –8
b) 9
c) 0
d) 9
e) 7
f) –6

73. a) –3
b) –1
c) 0
d) –1
e) –11
f) –29

74. a) F
d) V

75. a) positivo
b) negativo
c) negativo, pois $|(-2)^{201}| > |(-2)^{200}|$

76. $(-3)^5 < (-3)^3 < (-3)^1 < (-3)^2 < (-3)^4 < (-3)^6$

77. a) 0, 4, 9 e 16
b) 121 e 144

78. a) $2 \cdot [10 - (-11) - 3] : 18 = 2 \cdot 18 : 18 = 2$
b) $42 \cdot [4 \cdot 4 - 7] - 1] : 63 = 10$
c) $\{44 - 42 \cdot [2 \cdot (-4) - 1] : 3\} =$
$= \{14 - 14 [-9]\} = 140$

79. a) 15625
b) 390625
c) –25
d) 5
e) 390625
f) 625

Capítulo 2 – Ângulos

Objetivos específicos do capítulo

Classificar ângulos quanto à sua medida, calcular a soma das medidas dos ângulos de um polígono, fazer uso de régua e de outros instrumentos de medição. Compreender e transmitir ideias matemáticas por escrito ou oralmente, desenvolvendo a capacidade de argumentação.

Página 45

Após a leitura do texto, enumere mais algumas obras de Oscar Niemeyer (Igreja da Pampulha, Edifício Copan, Marquise do Ibirapuera, Sambódromo da Marquês de Sapucaí entre outras). Proponha uma pesquisa sobre outras construções/obras de Niemeyer. O aluno poderá pesquisar 5 obras em décadas diferentes e registrar o local da obra, o ano de fundação e a gravura da mesma. Socialize as obras na sala para ampliar o repertório cultural dos alunos.

Páginas 46 a 47

Leia o livro texto em sala de aula e, no quadro, reproduza as representações geométricas observadas. Se possível, solicite para que alunos venham até o quadro para fazer as representações de diferentes medidas e tipos de ângulos.

Essa prática irá estimular a recordação do tema abordado no livro do 6º ano e auxiliará o nivelamento do aprendizado em sala de aula. É possível que alguns alunos ainda tenham dificuldade para entender sobre os ângulos e essa fase é propícia para resolver esse problema.

Atividade extra 1: para sala de aula

Se achar propício pode utilizar de dinâmicas na sala de aula, como a disposição dos alunos em círculo, colocando um aluno ao centro, onde este formaria com cada um de seus colegas ângulos diferentes, como o de 90°, o de 180° e assim por diante.

Outra atividade similar seria colocar uma venda nos olhos de um aluno com o objetivo de encontrar um determinado objeto, aos colegas de classe seria passada a tarefa de ajudá-lo por meio de dicas, porém ao invés de informar a direção esquerda e direita, informariam apenas a quantidade de passos e a direção em graus, como, dez passos na direção 90° em sentido horário, dois passos na direção 270° em sentido horário.

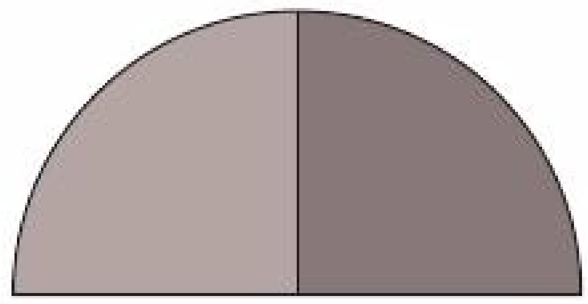
Esse tipo de abordagem pode auxiliar não só no ensino de ângulo, mas também na descaracterização de um assunto de difícil compreensão, além de contribuir com a interação dos alunos aos seus colegas e professores, como ainda o desenvolvimento da noção de espaço, tempo e lugar.

Atividade extra 2: construindo um transferidor de dobraduras

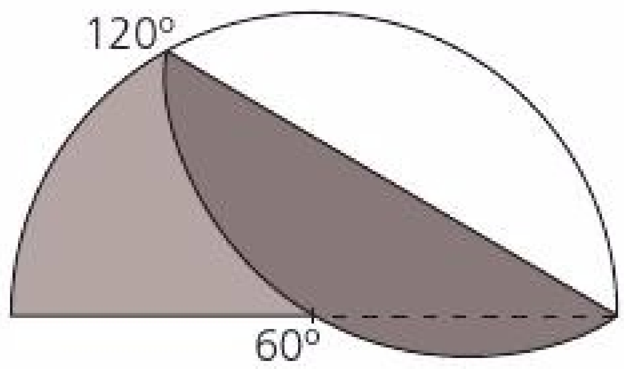
Atividade 3: Construindo um transferidor com dobraduras

Discussão sobre o experimento

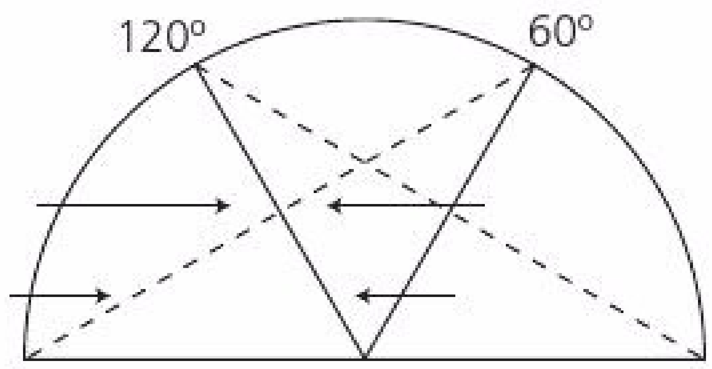
O material utilizado nesta atividade é um semicirculo de papel e o procedimento é o seguinte:



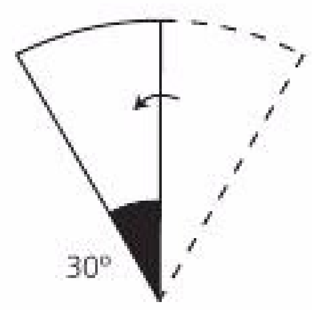
Divida o semicirculo ao meio e marque a posição



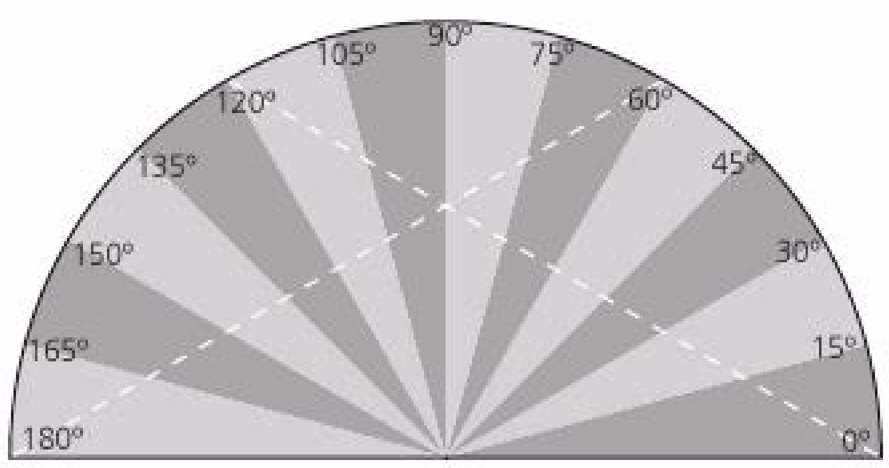
Dobre o semicirculo até que a circunferência atinja o centro. Marque as duas posições indicadas correspondentes a 60º e 120º



Agora divida cada um dos ângulos de 60º ao meio para obter de 30º



Dobre novamente ao meio par obter ângulos de 15º



Fonte: CDCC – USP: Experimentoteca. Aula 8: Geometria 1. Medindo ângulos. Disponível em: <http://www.cdcc.usp.br/exper/medio/matematica/matematica–fundamental/8f_medindo_angulos_p.pdf>. Acesso em 24 de abril de 2012.

SUGESTÃO DE ATIVIDADE

Páginas 49 a 51

Leia o texto em sala de aula e represente no quadro, separadamente, cada assunto.

Destaque especialmente a introdução sobre os submúltiplos do grau e sua relação com os ângulos.

Atividade extra:

a) Expresse 2° 7′30″ em segundos.

$2°3'30'' = 7\,200'' + 420'' + 30''$

$2°7'30'' = 7\,650''$

b) Escreva 5680″ em graus, minutos e segundos.

Dividindo sucessivamente por 60, temos que 5680″ tem 1°34′40″ .

c) Quantos minutos tem 32°?

$32° = (32 \cdot 60)'$

$32° = 1\,920'$

Leia o livro texto e represente no quadro os exemplos apresentados.

Destaque os detalhes de cada operação e enfatize que as operações com medidas angulares se processam com múltiplos de 60.

Página 52

Leia o texto em sala de aula e estimule a leitura com seus alunos.

Atividades interessantes podem ser propostas sobre o tema da Geometria da Natureza e construídas a partir da utilização de jornais e revistas em sala de aula. Se o ambiente for propício, o professor pode sugerir que os alunos tragam esse material anteriormente, ou no dia previsto para sua execução.

Em geral, esse tipo de atividade pode ser desenvolvida em conjunto com o(s) professor(es) de Artes.

Se a ideia for bem aceita, é possível desenvolver trabalhos interdisciplinares e até mesmo realizar

"Exposições sobre a Geometria da Natureza" criados pelos alunos, utilizando material de sucata etc.

Use sua criatividade e espírito de colaboração com os demais professores!

Páginas 53 a 55

Leia o livro texto em sala de aula e escreva no quadro as relações angulares.

Tenha especial atenção ao abordar esse tema e enfatize esse conceito. Utilize giz colorido e outras representações possíveis.

Páginas 57 a 59

As atividades são baseadas na interpretação dos enunciados e buscam avaliar o entendimento dos alunos sobre os principais tópicos do conteúdo.

O trabalho em equipe pode ser sugerido se o professor achar conveniente ao ambiente da sala de aula. Estimule a discussão e o processo de reprodução das representações geométricas, de forma análoga ao desenvolvido durante a leitura do livro texto.

A intenção é oferecer atividades com níveis crescentes de dificuldade e que podem ser corrigidas pelos alunos no quadro.

Resoluções da seção Para estudar

28. $x = 45°$

$y = 20°$

$z = 45°$

$w = 10°$

29. a) V

b) V

c) F

30. a) V

b) V

c) V

31. a) 35°30′

b) 13°15′

c) 2°45′

d) 23°06′

32. a) 80° e 120°

b) ambas são 180°

33. a) 120 minutos

b) 2 graus

34. Composição no caderno

35. a) 22,5°, pois 30′ = 0,5°

b) 45,2°, pois 12′ = 0,2°

36. a) 90°

b) 120°

c) 90°

d) 180°

37. a) 45°

b) 315°

c) NO-SE

38. 60°, 60°, 120°, 120°

39. Não, pois não seria possível "fechar" o triângulo.

40. O ângulo interno do pentágono é 72°.

41. a) 67°30′

b) 1′01′′

c) 7°30′

d) 16°14′

e) 1°47′30′′

f) 5°01′

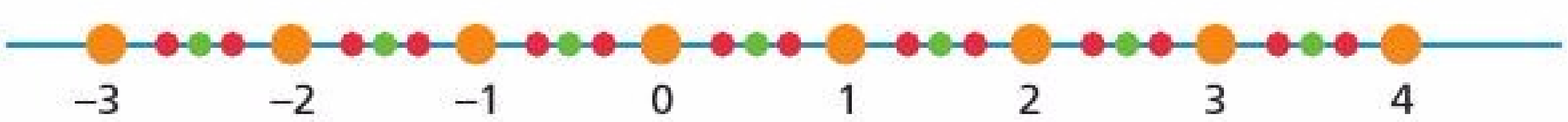
Capítulo 3: Números Racionais

Objetivos específicos do capítulo

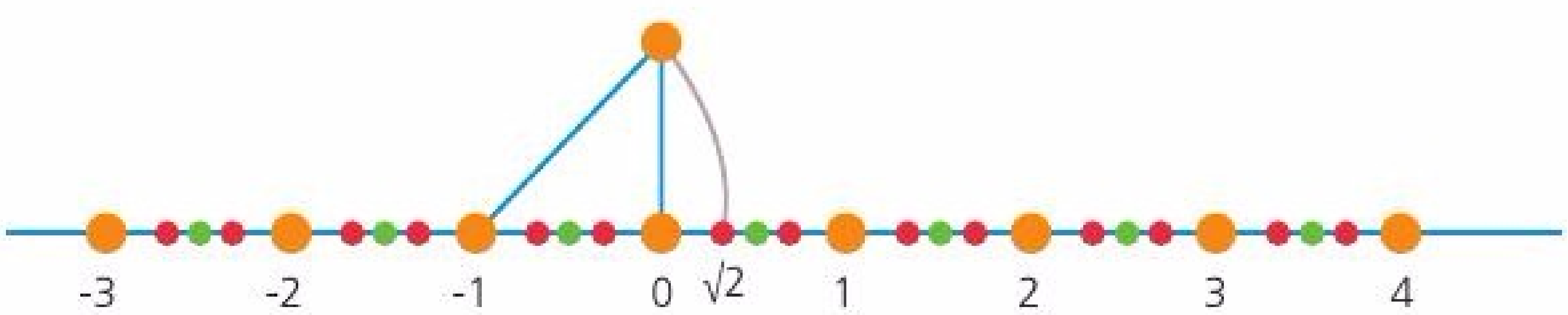
Relacionar a história da humanidade com o desenvolvimento da matemática; transferir o uso da linguagem oral para a escrita. Fazer estimativas mentais de resultados ou cálculos aproximados. Ler e interpretar textos para compreender e transmitir ideias matemáticas, por escrito ou oralmente, desenvolvendo a capacidade de argumentação. Interpretar matematicamente situações do dia-a-dia e, também, do mundo tecnológico e científico para o exercício da cidadania. Usar com clareza os símbolos matemáticos e identificar diferentes formas ou abordagens para resolver problemas.

Página 65

Um tópico da matemática que já foi encarado com essa visão religiosa foi o conjunto dos números racionais. Os pitagóricos acreditavam que, dividindo-se porções inteiras em uma, duas, três, n partes, poderíamos preencher toda a reta numérica. Abaixo, mostramos divisões da unidade em duas e três partes:



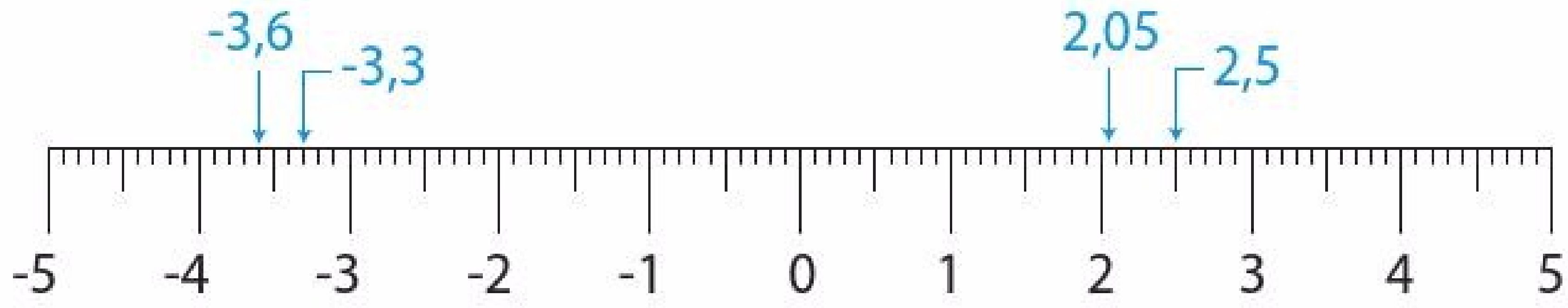
Perceberam também que havia medidas incomensuráveis. Por exemplo, considerando-se o lado de um quadrado como uma unidade de medida, sua diagonal não poderia ser escrita como nenhuma fração de quantidades inteiras dessa unidade. A reta numérica com os números racionais estava cheia de "buracos".



Acreditando que toda a realidade tivesse uma representação matemática (que, no fundo, é o que fazemos com a física: buscar as leis matemáticas que governariam o universo), os pitagóricos ficaram chocados com aquelas medidas que, ao seu entender, não poderiam ser representadas por números, já que, para eles, números eram racionais. Passaram a perseguir e matar os membros de sua sociedade que divulgassem tais "aberrações".

Página 70

Com o auxilio de uma régua milimetrada, peça aos alunos para desenharem uma reta numérica e localizarem nela pontos como –3,3; –3,6; 2,5; 2,05. Isso auxiliará os alunos nas atividades em que precisam identificar qual o maior ou o menor número de uma lista.



Página 71

Destaque que podemos operar com números racionais para resolver situações-problema. A ADIÇÃO e a SUBTRAÇÃO estão entre as operações que permitem realizar cálculos e encontrar a solução para os problemas estudados.

Para registrar a adição entre dois números racionais na forma decimal e o seu resultado escrevemos, por exemplo: 0,3 + 0,5 = 0,8 e lemos: três décimos mais cinco décimos é igual a oito décimos.

Para registrar a subtração escrevemos, por exemplo: 0,6 – 0,4 = 0,2 e lemos: seis décimos menos quatro décimos é igual a dois décimos.

Dependendo da situação podemos achar o resultado de uma adição ou de uma subtração mentalmente, fazendo cálculo no papel ou usando uma calculadora, a depender do caso.

A adição e a subtração relacionam-se uma com a outra. Observe:

se 0,3 + 0,9 = 1,2 então 1,2 – 0,3 = 0,9 e 1,2 – 0,9 = 0,3

Página 72

Comente que para operar com os números racionais utilizamos também a MULTIPLICAÇÃO e a DIVISÃO e para registrar a multiplicação entre dois números e o seu resultado escrevemos, por exemplo: 0,5 x 0,3 = 0,15 e lemos: cinco décimos vezes três décimos é igual a quinze centésimos.

Para registrar a divisão escrevemos, por exemplo: 0,8 : 0,4 = 2 e lemos: oito décimos divididos por quatro décimos é igual a dois.

Podemos encontrar o resultado de uma multiplicação ou de uma divisão de números racionais, mentalmente, podemos fazer cálculos no papel ou usando uma calculadora.

A multiplicação e a divisão são operações que relacionam-se entre si. Observe:

se $0{,}8 \times 0{,}3 = 0{,}24$ então $0{,}24 : 0{,}3 = 0{,}8$ e $0{,}24 : 0{,}8 = 0{,}3$.

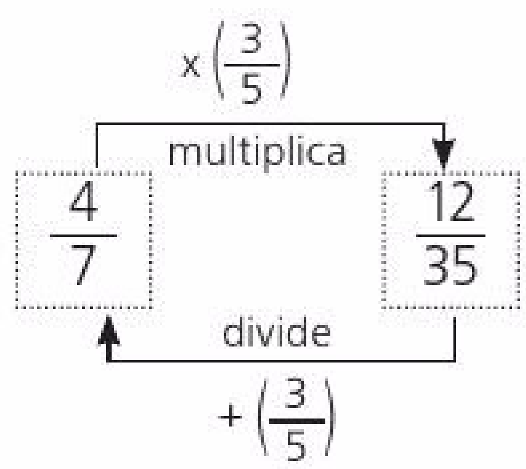
Disponível em: <http://portalsme.prefeitura.sp.gov.br/Projetos/fundemedio/Documentos/Recupera%C3%A7%C3%A3o%20Paralela%20Matem%C3%A1tica/REC_MAT_Aluno_II.pdf> Acesso em 04.abr. 2015

1. Para a multiplicação de números racionais positivos e negativo, valem as mesmas regras de sinais que já foram aprendidas para os números inteiros. Então complete em seu caderno o quadro abaixo:

SUGESTÃO DE ATIVIDADE

x	–5	–2,6	0	$\frac{3}{10}$
–0,8				
$-\frac{1}{6}$				
$\frac{7}{8}$				
10				

2. Observe os esquemas e complete as sentenças abaixo:



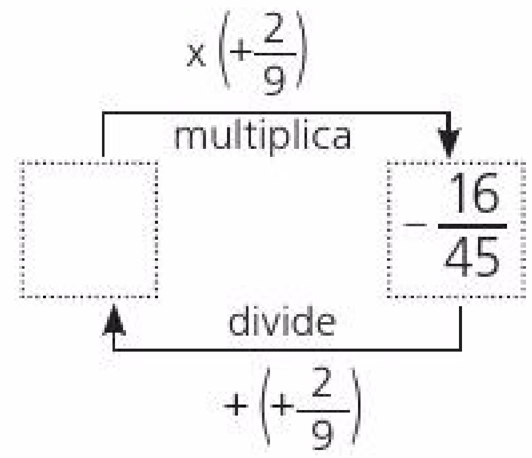
a) Se $\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{35}$, então $\frac{12}{35} + \frac{3}{5} = \boxed{}$

b) Multiplique $\frac{12}{35}$ pelo inverso de $\frac{3}{5}$. Compare o resultado obtido com o do item **a**.

3. Responda as questões a seguir.

a) Para calcular $\left(-\frac{16}{45}\right) + \left(+\frac{2}{9}\right)$, multiplique $\left(-\frac{16}{45}\right)$ pelo inverso de $\left(+\frac{2}{9}\right)$.

b) Verifique se o resultado obtido no item **a** pode substituir o número oculto pela cartela do esquema seguinte:



Página 74

Enfatize que 2^{-3} não é –9 e muito menos –6.

São erros comuns que os alunos cometem quando lidam com expoentes negativos.

Respostas da Atividades Sugeridas

1.

x	–5	–2,6	0	$\frac{3}{10}$
–0,8	**4**	**2,08**	**0**	$\mathbf{\frac{6}{25}}$
$-\frac{1}{6}$	$\mathbf{\frac{5}{6}}$	$\mathbf{\frac{13}{30}}$	**0**	$\mathbf{-\frac{1}{20}}$
$\frac{7}{8}$	$\mathbf{-\frac{35}{8}}$	$\mathbf{-\frac{91}{40}}$	**0**	$\mathbf{-\frac{21}{80}}$
10	**–50**	**–26**	**0**	**3**

2. a) $\frac{4}{7}$

b) São iguais

3. a) $\left(-\frac{16}{45}\right) \cdot \left(+\frac{2}{9}\right) = -\frac{144}{90} = -\frac{8}{5}$

b) Sim. $-\frac{8}{5} \cdot \left(+\frac{2}{9}\right) = -\left(-\frac{16}{45}\right)$

Resoluções da seção Para estudar

32. a) $\frac{11}{50} < 0,3 < \frac{39}{40} < 2,03$

b) $\frac{1}{3} < 2,999 < 3,0003 < \frac{162}{51}$

33. a) $-\frac{5}{100} = -\frac{1}{20}$

b) $\frac{7}{10}$

c) $-\frac{18}{10} = \frac{9}{5}$

d) $-\frac{6}{1}$

34. a) $-0,4$

b) $-2,5$

c) $0,0625$

d) $-0,75$

35. a) $-0,8$

b) $1,5$

c) $6,5$

d) $-1,25$

36. a) $-\frac{2,3}{10}$

b) $\frac{52}{10}$

c) $-\frac{74}{10}$

d) $\frac{123}{10}$

37. a) $8{,}7 > -9{,}2$

b) $\frac{5}{9} > -\frac{1}{9}$

c) $8{,}2 > -8{,}7$

d) $-\frac{2}{9} > -\frac{3}{7}$

38. a) $1{,}8$

b) $-2 - \frac{8}{15} = \frac{-30-8}{15} = -\frac{38}{15}$

c) $-1{,}25$

d) $-\frac{1}{4} - \frac{3}{5} = \frac{-5-12}{20} = -\frac{17}{12}$

39. a) $\left(\frac{10-39}{24}\right) - \left(\frac{-21-1}{18}\right) = \frac{-29}{24} + \frac{22}{18} =$
$= \frac{-87+88}{72} = \frac{1}{72}$

b) $-\frac{2}{5} - \left[-\frac{13}{5} - \frac{11}{6}\right] - \frac{5}{6} =$
$= -\frac{2}{5} + \frac{123}{30} - \frac{5}{6} =$
$= \frac{-12+123-25}{30} = \frac{43}{15}$

c) $\frac{1}{225} - \left[\frac{1}{5} - \left(\frac{-10+54}{225}\right)\right] =$
$= \frac{1}{225} - \left[\frac{1}{5} - \frac{44}{225}\right] = \frac{1-45+44}{225} = 0$

d) $\frac{16}{5} - \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{2-5}{15}\right) + \frac{3}{5}\right] =$
$= \frac{16}{5} - \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{3}{5}\right] =$
$= \frac{64-5-4-12}{20} = \frac{-43}{20}$

40. a) $-19{,}08$

b) $-0{,}07$

c) $-8{,}964$

d) $-\frac{10}{12} = -\frac{5}{6}$

41. a) $\frac{1}{25} - \frac{2}{7}\left(\frac{60+2}{15}\right) \cdot \frac{1}{31} =$

$= \frac{1}{25} - \frac{2 \cdot 62 \cdot 1}{7 \cdot 15 \cdot 31} = \frac{1}{25} - \frac{4}{105} =$

$= \frac{21-5}{525} = \frac{16}{525}$

b) $\frac{1}{30} - \frac{2}{5} \cdot \left[2 - \frac{10}{12}\right] = \frac{1}{30} - \frac{2}{5} \cdot \frac{14}{12} =$

$= \frac{1}{30} - \frac{7}{15} = -\frac{13}{30}$

c) $1 - \left(-\frac{5}{7}\right) : [-1] = 1 - \frac{5}{7} = \frac{2}{7}$

42. a) $-\frac{4}{25}$

b) $\frac{1}{8}$

c) $\frac{343}{8}$

d) $-\frac{8}{11}$

43. a) $\left(-\frac{4}{6} + \frac{1}{9}\right) : \left(\frac{5}{4} - \frac{2}{7}\right) = \frac{-5}{9} : \frac{27}{28} =$

$= -\frac{5 \cdot 28}{9 \cdot 27} = \frac{140}{243}$

b) $-\frac{4}{5} + \frac{1 \cdot 5}{8 \cdot 6} - \frac{2}{3} = -\frac{4}{5} + \frac{5}{8} - \frac{2}{3} =$

$= \frac{-24+15-80}{120} = -\frac{89}{120}$

c) $64 \cdot \left(2 - \frac{1}{4} \cdot 2\right)^2 = 64 \cdot \frac{3}{2} = 96$

d) $2 \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{3}{4}\right)} = 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{4}} = 1$

Capítulo 4: Razões e Proporções

Objetivos específicos do capítulo

Ler e interpretar textos para compreender e transmitir ideias matemáticas, por escrito ou oralmente, desenvolvendo a capacidade de argumentação. Transferir o uso da linguagem oral para a escrita. Fazer estimativas mentais de resultados ou cálculos aproximados. Interpretar matematicamente situações do dia-a-dia e, também, do mundo tecnológico e científico para o exercício da cidadania. Usar com clareza os símbolos matemáticos e identificar diferentes formas ou abordagens para resolver problemas.

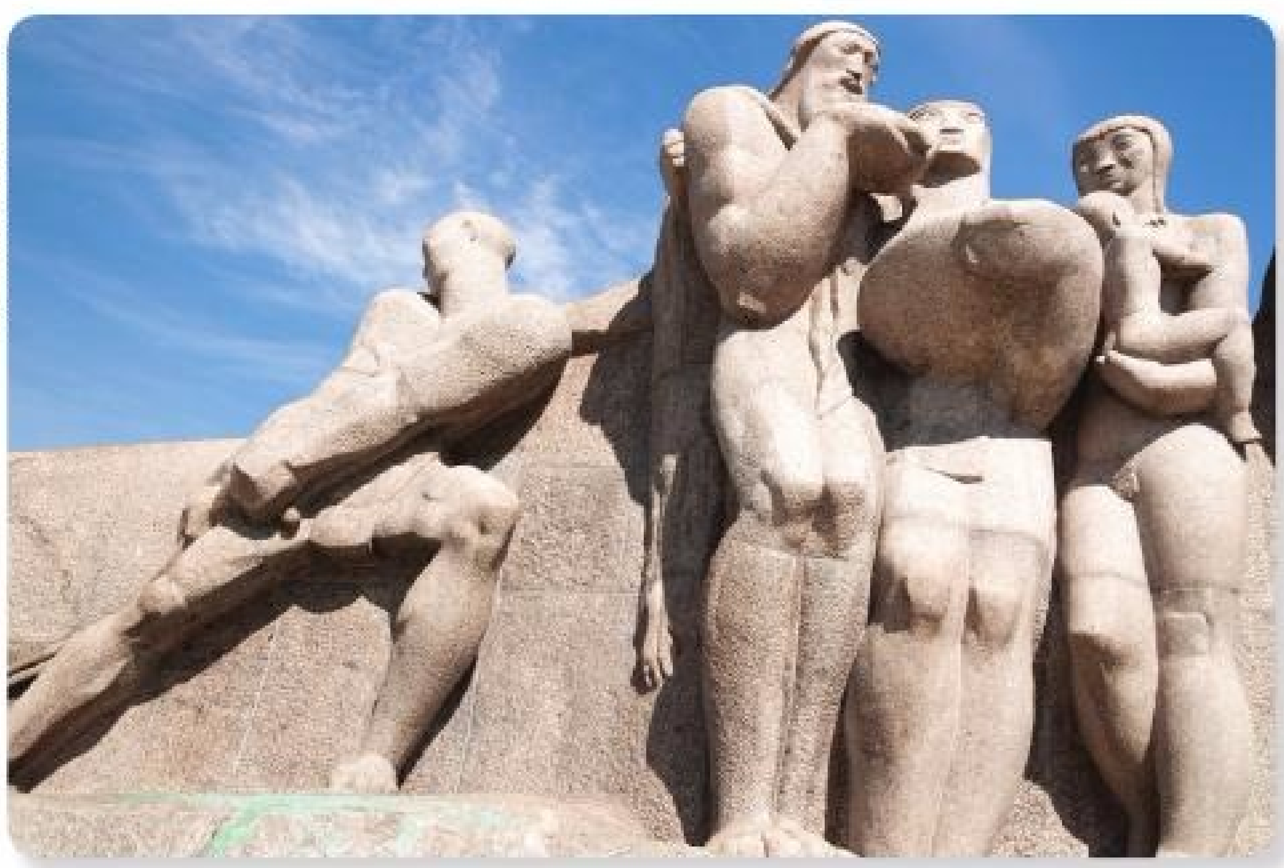
Página 83

Você pode propor com desafio a seus alunos, que desenhem a distância real entre algumas das capitais brasileiras, utilizando um Atlas Geográfico. Por exemplo, os alunos podem calcular a distância real entre São Paulo e Belo Horizonte, entre Brasília e Rio Branco, entre Fortaleza e Salvador, entre Cuiabá e Porto Alegre.

Lembre seus alunos que a distância entre duas cidades é calculada no mapa e linha reta, e não corresponde à distância percorrida em estrada ou em uma rota de linha aérea.

Página 84

Quando observamos uma imagem e dizemos que uma de suas partes é muito pequena em relação às outras, estamos dizendo que suas medidas não são proporcionais. Observe a desproporcionalidade entre as partes do corpo de um dos bandeirantes do Monumento das Bandeiras, obra do escultor modernista ítalo-brasileiro Victor Brecheret (1894-1955), inaugurado em São Paulo no ano de 1954.



cifotart/Shutterstock

Monumento das Bandeiras, São Paulo, SP, 2013

Essa desproporcionalidade (intencional ou não) é percebida quando, instintivamente, comparamos as medidas dessa imagem com as de outra que tomamos como padrão ou, ainda, quando comparamos as medidas de uma das partes com as de outras partes dessa mesma imagem.Na maioria dos desenhos de corpo humano, quando proporcionais, pode ser observado que a altura de um corpo adulto é, aproximadamente, sete vezes a altura da cabeça. Já em desenhos de corpos de crianças, a relação entre essas medidas pode variar.Nesse caso, para um corpo humano adulto, temos que a razão entre a altura da cabeça e a altura total do corpo é de 1 para 7, que será escrita como $\frac{1}{7}$ ou 1 : 7.

Comente isso com seus alunos e, se achar conveniente, proponha atividades de observação da proporcionalidade/desproporcionalidade em outras obras de arte e até entre personagens de desenhos animados. Ainda é possível propor atividades conjuntas com o(s) professor(es) de artes.

Disponível em: <http://redeetec.mec.gov.br/images/stories/pdf/eixo_amb_saude_seguranca/tec_seguranca/matematica/061112_mat_a01.pdf> Acesso em 03.abr.2015.

Páginas 93 e 94

Essa leitura é muito interessante e desperta curiosidade nos alunos. Para enriquecê-la ainda mais, você pode pedir aos seus alunos que levem para a sala de aula um instrumento de corda, como por exemplo um violão. Com ele será possível testar as variações de comprimento e frequência numa das cordas do instrumento.

Página 101

Um exemplo útil do uso de porcentagem é constatação de que todo desconto à vista é uma multa disfarçada. Exemplo: Imagine que um produto custe 100 reais se você der um cheque para daqui a um mês, mas que, se você pagar à vista, terá um desconto de 20 reais (pagará 80 reais, portanto). Em porcentagem, o desconto representa:

$$\frac{20 \cdot 100}{100} = 20\%$$

O problema pode ser apresentado de outra forma, bem menos atraente, apesar de mais realista: o preço do produto é 80 reais, mas se optar por pagar daqui a um mês, terá um acréscimo de 20 reais. Em porcentagem, esse acréscimo significa:

porcentagem	valor
x	20
100	80

$$\frac{x}{100} = \frac{20}{80} \rightarrow x \cdot 80 = 20 \cdot 100 \rightarrow x = \frac{20 \cdot 100}{80} \rightarrow x = 25\%$$

Ou seja, um desconto de 20% é uma multa disfarçada de 25%.

Resoluções da seção Para estudar

60. a) $\frac{28}{35}$

b) $\frac{2,5}{7,5}$

c) $\frac{3}{4}$

d) $\frac{0,3}{0,4}$

61. $\frac{240}{x} = \frac{3}{4} \rightarrow x = \text{R\$ } 320,00$

62. $\frac{4\,000\,000}{x} = \frac{400}{1000} \rightarrow x = \text{R\$ } 10\,000\,000,00$

63. a) $\frac{7}{6}$

b) $\frac{9}{11}$

64. a) $\frac{150}{x} = \frac{2}{3} \rightarrow x = \text{R\$ } 225,00$

b) $\frac{x}{150} = \frac{2}{3} \rightarrow x = \text{R\$ } 100,00$

65. $\frac{2}{0,5} = \frac{x}{4,5} \rightarrow x = 18$ litros

66. $\frac{1}{4} = \frac{x}{29,83} \rightarrow x \cong 7,46$ milhões

67. a) $\frac{15,6}{1000} = \frac{x}{12250} \rightarrow x = 1911$

b) $\frac{15,6}{6,06} \cong 2,6$ (mais que o dobro da brasileira)

68. $\frac{1}{75} = \frac{x}{600} \rightarrow x = 8$ cm

69. $\frac{1}{200} = \frac{4,5}{x} \rightarrow x = 900$ cm = 9 metros

70. $\frac{5}{3} = \frac{x}{8} \rightarrow x = 13,3$ horas

71. a) (V) pois $\frac{6}{8} = \frac{9}{12} \rightarrow 6 \cdot 1 = 8 \cdot 9$

b) (F) pois $\frac{5}{6} \neq \frac{8}{10} \rightarrow 5 \cdot 10 \neq 6 \cdot 8$

c) (V) pois $\frac{4}{10} = \frac{14}{35} \rightarrow 4 \cdot 35 = 10 \cdot 14$

d) (V) pois $\frac{3,5}{7} = \frac{4}{8} \rightarrow 3,5 \cdot 8 = 4 \cdot 7$

72. $\frac{10}{4} = \frac{L}{3} \rightarrow L = 7,5$ m

73. a) $\frac{2}{10} = \frac{8}{x} \rightarrow x = 40$

b) $\frac{3}{k} = \frac{26}{78} \rightarrow k = 9$

c) $\frac{m}{6} = \frac{7}{2} \rightarrow m = 21$

d) $\frac{40}{y} = \frac{10}{8} \rightarrow y = 32$

74.

velocidade	distância
80 km/h	600 km
110 km/h	d

$d = \frac{110 \cdot 600}{80} \rightarrow d = 825$ km

75. a)

trabalhadores	h/dia	dias
N	h	40
2N	h	d

$$\frac{N \cdot h}{2N \cdot h} = \frac{d}{40} \rightarrow d = 20 \text{ dias}$$

b)

trabalhadores	h/dia	dias
N	h	40
N	4h	d

$$\frac{N}{N} \cdot \frac{h}{4h} = \frac{d}{40} \rightarrow d = 10 \text{ dias}$$

76. a) 3,6% = 0,036

b) 19,4% = 0,194

c) 1% = 0,01

d) 16,72% = 0,1672

77. a) 0,015 = 1,5%

b) 0,236 = 23,6%

c) 0,91 = 91%

d) 0,55 = 55%

78. a) $0{,}094 \cdot 10\,000 = 940$

b) $0{,}758 \cdot 12\,000 = 9\,096$

c) $4{,}12 \cdot 20\,000 = 82\,400$

79. a) $0{,}30 \cdot N = 1\,800 \rightarrow N = 6\,000$

b) $0{,}02 \cdot N = 104 \rightarrow N = 5\,200$

c) $0{,}18 \cdot N = 1\,800 \rightarrow N = 10\,000$

80. $0{,}156 \cdot 190\,000\,000 = 37\,240\,000$ habitantes

Capítulo 5 – Ângulos e retas

Objetivos específicos do capítulo

Classificar ângulos definidos por retas paralelas e transversais, fazer uso de régua e de outros instrumentos de medição como o compasso e o transferidor. Compreender e transmitir ideias matemáticas por escrito ou oralmente, desenvolvendo a capacidade de argumentação.

Páginas 118 e 119

Leia o livro texto em sala de aula e, no quadro, reproduza as representações geométricas observadas nessas páginas.

Se a sua escola for informatizada utilize programas como o Geogebra para o aluno verificar a construção e constatar a propriedade da bissetriz de um ângulo. Os programas trabalham com a geometria dinâmica simplificando a compreensão dos temas.

Página 120

As atividades estão desenvolvidas com diferentes níveis de complexidade, procurando obedecer a uma ordem crescente de dificuldade. Contudo, é interessante que o professor leia com os alunos os enunciados e represente no quadro a representação de cada enunciado.

Seria interessante que os alunos pudessem participar desse processo de construção no quadro.

Páginas 121 e 122

Utilize recursos variados para trabalhar as posições relativas entre retas no plano. Algumas sugestões são: use canetas para representar retas e suas posições, inclusive quando as retas forem reversas, não podem estar no mesmo plano. Esse recurso facilita a visualização e compreensão do tema; o sulfite e o tampo das mesas servem como planos nas representações. Lembre aos alunos que são apenas representações pois tanto o plano quanto a reta são infinitos.

As paredes da sala de aulas podem ser usadas como exemplos para falar de planos e retas paralelas, concorrentes ou reversas.

Página 124

Esse texto fala brevemente da Geometria Clássica ou Euclidiana.

O aluno deve pesquisar sobre a vida e as obras do matemático Euclides. A exposição dessa pesquisa pode ser através de seminários, para que os alunos exerçam esse procedimento em suas exposições.

Páginas 130

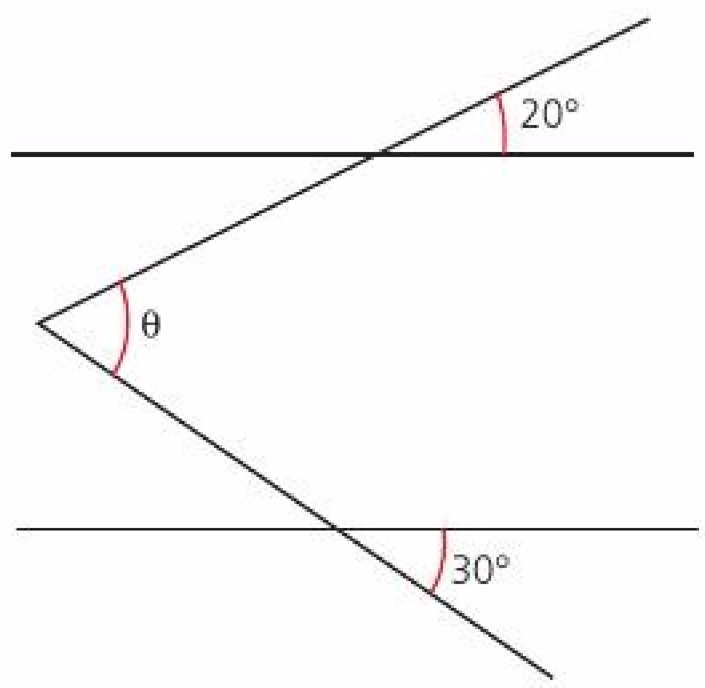
Os três exercícios a seguir podem ser feitos como atividade para checar a compreensão dos temas pelos alunos e para desenvolver a habilidade de resolver questões de múltipla escolha.

SUGESTÃO DE ATIVIDADE

1. Se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, então a afirmativa **falsa** é:

a) Os ângulos colaterais internos são congruentes.
b) Os ângulos correspondentes são congruentes.
c) Os ângulos alternos internos são congruentes.
d) Os ângulos alternos externos são congruentes.
e) Os ângulos opostos pelo vértice são congruentes.

2. Na figura abaixo há duas retas paralelas.



Nestas condições, a medida de θ é:

a) 30°°
b) 40°
c) 45°
d) 50
e) 60°

3. Duas paralelas cortadas por uma transversal formam ângulos colaterais internos em que a medida de um deles é a quarta parte da medida do outro. Quanto mede cada ângulo obtuso formado pelas paralelas com a transversal?

a) 95°

b) 108°

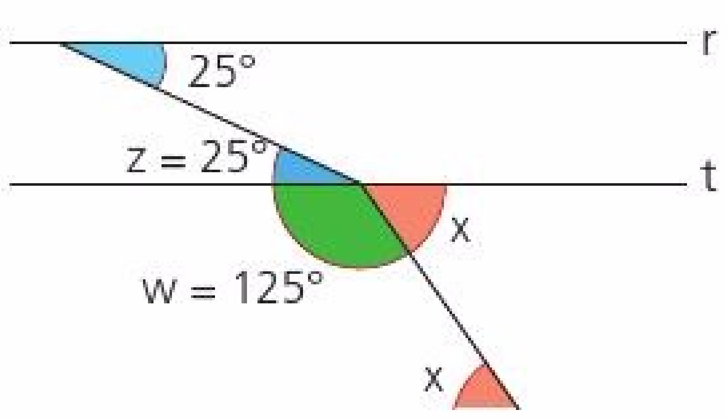
c) 120°

d) 135°

e) 144°

Página 133

Desafio



O ângulo z é alterno interno a 25°.

Logo, z = 25°.

O ângulo w = 150° − 25° = 125°. Sendo assim, x será igual ao suplemento de 125°, por ser alterno interno a ele.

Logo: x = 180° − 125° = 55°

Respostas da Atividades Sugeridas

1. a

2. d

3. e

Resoluções da seção Para estudar

21. Construção no caderno.

22. $y = 3x - 40$ e $x = y$

$y = 3y - 40 \rightarrow y = x = 20°$

23. $30° : 2 = 15°$

24. a) F
b) F
c) F
d) F
e) F
f) V

25. a) reversas
b) reversas
c) reversas
d) concorrentes

26. a) Falsa, pois podem ser simplesmente concorrentes.
b) Verdadeira, pois podem ter dois pontos comuns que determinam uma reta.

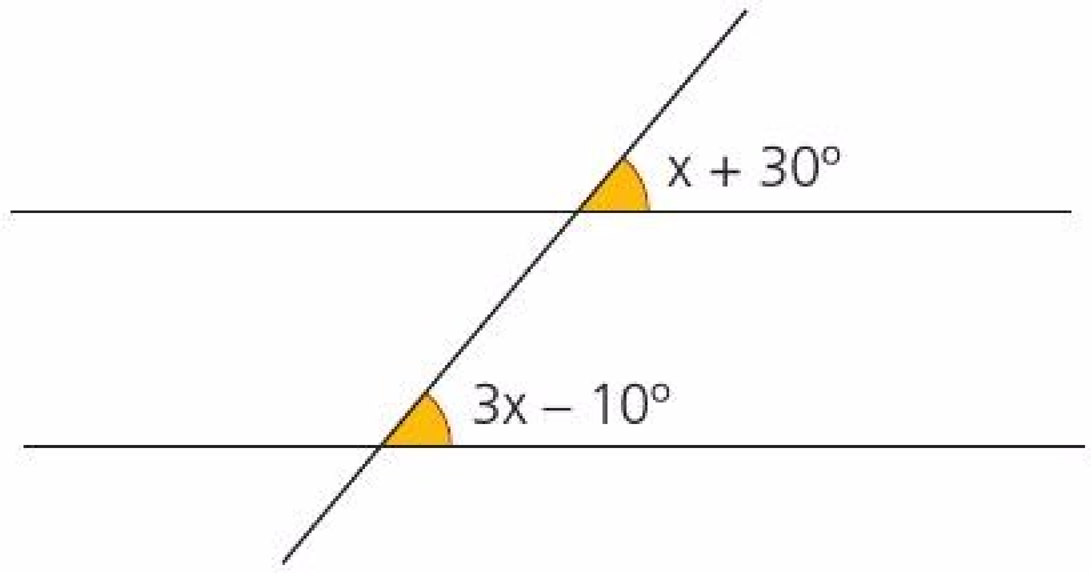
27. a) F ($\overleftrightarrow{VD}$ é um exemplo de concorrente)
b) V
c) V
d) F ($\overleftrightarrow{VD}$ não é prependicular)

28. a) V
b) V
c) F (são orogonais)
d) F (podem formar ângulo diferente de 90°)

29. $3x - 5 = 55 \rightarrow x = 60°$

30. a) $x = 135°20'$ (alternos externos)
b) $x - 12 = 5x - 92 \rightarrow 4x = 80 \rightarrow x = 20°$
c) $x = 180° - 120° \rightarrow x = 60°$

31.



$x + 30° = 3x - 10°$

$2x = 40 \rightarrow x = 20°$

Logo, os ângulos agudos medem 50° e os obtusos 110°.

32. 120º : 4 = 30º cada ângulo agudo

Logo: cada obtuso mede 150º

33. $3x + 20° = x + 40°$

$2x = 20° \rightarrow x = 10°$

Os ângulo medem 50º

34. $y = 180° - 110° \rightarrow y = 70°$

$x = 180° - 98° \rightarrow x = 82°$

A soma dos ângulos internos é 360º

35. $w = 150°$ (opostos pelo vértice)

$y = 180° - 150° \rightarrow y = 30°$

$z = k = 180° - 110° = 70°$

36. $z = 155°$ (opostos pelo vértice)

$x = y = k = 50°$

37. $5k = 180° - 120° \rightarrow k = 12°$

$m = 180° - 144° \rightarrow m = 36°$

Os ângulos internos são 24º, 36º, 120º.

Capítulo 6: Monômios e polinômios

Objetivos específicos do capítulo

Usar com clareza os símbolos matemáticos. Relacionar a história da humanidade com o desenvolvimento da matemática. Transferir o uso da linguagem oral para a escrita. Ler e interpretar textos para compreender e transmitir ideias matemáticas, por escrito ou oralmente, desenvolvendo a capacidade de argumentação. Interpretar matematicamente situações do dia-a-dia.

Página 138

Sem estabelecer qualquer rigidez, mostre aos alunos que existe uma formalidade ao se escrever uma expressão algébrica, objetivando uma melhor leitura:

- em um produto, primeiro se escreve os números, depois as letras com maior potência:

$$2a^3b^2c,\ 37x^4y$$

- É mais confortável iniciar uma expressão algébrica com um valor positivo, a não ser que a expressão toda seja negativa:

$$x^2 - 1, \text{ em vez de } - 1 + x^2;$$

$$5y^7 - x^3;$$

$$-2z^7 - 3.$$

- Em uma adição de termos, é de praxe colocar os de potência mais alta no início, à esquerda, e encerrá-la com um número:

$$x^3y^2 - 2a^2c + 5;$$

$$9z^{14} + 10x^{12}.$$

- Há algumas situações em que vale estabelecer uma clareza na expressão.

$$-52x^3 + 1$$

Por exemplo, a expressão pode ser reescrita como

$$1 - 52x^3;$$

apesar da potência mais alta estar no final, contradizendo a sugestão anterior, mas leva em conta a outra sugestão: o sinal negativo não fica perdido no início e poderia levar o aluno a esquecê-lo.

Página 139

As propriedades dos números naturais, conjunto denotado pela letra em negrito **N** ou pelo símbolo $\mathbb{N}$, é uma oportunidade de mostrar ao aluno como se expressar matematicamente, preocupando-se com a generalidade das expressões e não com os exemplos: em vez de mostrar que

$$3 + 2 = 2 + 3,$$

apresentar a expressão abaixo

$$a + b = b + a, (a, b \in \mathbb{N}).$$

ou a expressão que está no livro do aluno.

Observe que a propriedade acima, rigorosamente, se refere à uma operação associada ao conjunto $\mathbb{N}$, ou seja, à soma.

Outra situação que pode ser explorada para estabelecer uma linguagem mais matemática para o aluno é apresentar o conjunto dos números inteiros, denotado pela letra em negrito **Z** ou pelo símbolo $\mathbb{Z}$, e as propriedades associadas as suas duas operações binárias, a adição e a multiplicação, denotadas respectivamente pelos símbolos + e ·:

1. $a + (b + c) = (a + b) + c$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$ (propriedade associativa da adição);
2. $a + b = b + a$, $a, b \in \mathbb{Z}$ (propriedade comutativa da adição);
3. $\exists\ 0 \in \mathbb{Z}$: $a + 0 = 0 + a = a$, $\forall a \in \mathbb{Z}$ (propriedade do elemento neutro da adição - veja abaixo o significado de alguns símbolos; esta sentença pode ser lida como: ``Existe um elemento neutro pertencente aos inteiros tal que a sua soma com qualquer outro número inteiro resulta no próprio número'');
4. $\forall a \in \mathbb{Z}$, $\exists\ (-a) \in \mathbb{Z}$: $a + (-a) = (-a) + a = 0$ (propriedade do elemento oposto - ``Para todo inteiro, existe um elemento oposto que o anula'');
5. $(ab)c = a(bc)$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$ (propriedade associativa da multiplicação);
6. $ab = ba$, $a, b \in \mathbb{Z}$ (propriedade comutativa da multiplicação);
7. $a(b + c) = ab + ac$, $(a + b)c = ac + bc$ $a, b, c \in \mathbb{Z}$ (propriedade distributiva).

Abaixo estão os significados dos símbolos:

- $\exists$ (existe)
- $\forall$ ("para todo" ou "qualquer que seja)
- $\therefore$ (tal que)

Página 141

Teste as fórmulas com as figuras existentes na página 140, ou seja, o pentágono, o hexágono, etc. Pode-se desenhar primeiro quais seriam as diagonais em figura, contá-las e, em seguida, verificar se a fórmula apresenta o resultado correto. Por outro lado, com outra figura, calcula-se a quantidade de diagonais e, em seguida, desenhá-las para verificar o resultado.

Interessante é calcular para o triângulo, cujo resultado é zero diagonais. É o último exercício da página 142.

Página 143

Monômio ou termo algébrico é toda expressão algébrica determinada por apenas um número real, uma variável ou pelo produto de números e variáveis. Nos monômios não se encontra o uso da adição ou da subtração, pelos menos explicitamente. São muitas as aplicações dos conceitos sobre monômios, vão desde a confecção de objetos, como uma bola de futebol, até o auxílio em representações de cálculos bem mais complexos. Além de aplicações práticas, vale ressaltar que o conhecimento de ferramentas matemáticas não precisam necessariamente ter utilidade imediata ou utilidade cotidiana, a função primordial da matemática é preparar a mente para pensar, raciocinar, decidir no solo do imaginário e fornecer subsídios quando estes forem necessários.

Página 144

Há algumas observações que podem ser feitas a respeito dos monômios:

- um monômio somado ao valor (zero) é o próprio monômio,

$$x^2y + 0 = x^2y;$$

- para se obter o oposto de um monômio, basta trocar o sinal da parte númerica, ou seja, o oposto de $3x$ é $-3x$;
- quando aparentemente não há parte numérica, como em a^3b, supõe-se que haja o número 1 multiplicando o monômio, isto é, $a^3b = 1a^3b$ e o seu oposto é obtido trocando 1 por -1, $-1a^3b = -a^3b$;
- da mesma forma, um monômio pode ser escrito como uma fração de denominador como, por exemplo, $x^7y^2z = \frac{x^7y^2z}{1}$; isto pode facilitar a explicação de futuros cálculos;
- expressões como $\frac{a^2x}{5}$ é o mesmo que $\frac{1}{5}$ a2x $= \frac{1}{5}\,\frac{a^2x}{1} = \frac{a^2x}{5}$.

Página 148

A definição de polinômio abrange diversas áreas, pois podemos ter polinômios com apenas um termo na expressão algébrica, como por exemplo: 6x, y, 2z, 7, 12 etc. Mas podemos ter polinômios com uma infinidade de termos. Por exemplo:

$$P(x) = a_n x^n + a_{(n-1)} x^{(n-1)} + ... + a^2x^2 + a_1 x + a_0$$

Os polinômios possuem relevância na geometria, principalmente, quando se deseja calcular expressões que envolvem valores desconhecidos e pertencem a um conjunto conceitual importante na álgebra.

Página 149

Polinômios apresentam as mesmas propriedades em relação à adição dos número inteiros: existe o oposto, o elemento neutro (no caso, o próprio número zero) e valem as propriedades associativa e comutativa. Isto sempre é importante enfatizar para os alunos: expressões algébricas guardam as mesmas propriedades que os números.

Produtos de polinômios também possuem as mesmas propriedades que a multiplicação de números inteiros apresentam:

- Propriedade comutativa: $(a^2b + c)(z + y) = (z + y)(a^2b + c)$;
- Propriedade associativa: $[(a^2b + c)(z + y)](x + a) = (a^2b + c)[(z + y)(x + a)]$.

Resoluções da seção Para estudar

38. a) $2x = x + 12$
b) $x + 2x = 3x$
c) $x \cdot y = y \cdot x$
d) $x + (-x) = 0$

39. a) $p = 4 \cdot 3{,}50 \rightarrow p =$ R\$ 14,00
b) $3{,}5 \cdot x$
c) R\$ 10,50

40. $2n$

41. $\frac{x^4}{x^2} \rightarrow \frac{4^4}{4^2} = 4^2 = 16$

42. $d = \dfrac{n(n-3)}{2}$

a) $d = \dfrac{6 \cdot 3}{2} = 9$

b) $d = \dfrac{10 \cdot 7}{2} = 35$

43. a) x^5y^5 c) x^4y^2

b) x^7 d) y^3z^4

44. a) $5x^2 + 2x^2 = 7x^2$

b) $7xy - 10xy + 8xy = 5xy$

c) $-5x^3y + 4x^3y = -x^3y$

d) $-5ax - 10ax = -15ax$

e) $xy^2 + 4xy^2 = 5xy^2$

45. a) $-92 + 72 - 684 + 864 = 160$

b) $-8 - 12 - 20 = -40$

c) $1 + 2 + 1 = 4$

46. a) $-2x - y \rightarrow -1 + 3 = 2$

b) $\dfrac{2xy}{3} \rightarrow \dfrac{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-3)}{3} = -1$

c) $2x^2 - \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{x}{6} \rightarrow \dfrac{2}{4} - \dfrac{9}{9} - \dfrac{1}{12} =$

$= \dfrac{18 - 36 - 3}{36} = -\dfrac{21}{36} = -\dfrac{7}{12}$

47. a) $15a^5y^5$

b) $-36a^3z^4y$

c) $-40a^5y^6$

48. $\left(\dfrac{2}{5}x^2y^2\right)\left(\dfrac{3}{7}x^3y^3\right) = \dfrac{6}{35}x^5y^5$

49. a) ay c) $-\dfrac{3}{5}a^2y^3$

b) $-7a^4$ d) $\dfrac{1}{5} \cdot a^4y^5$

50. a) $9a^6$ d) $-a^6y^{10}$

b) $\dfrac{8}{125}x^6$ e) $16a^{12}y^4$

c) $a^8y^{12}z^{16}$ f) $\dfrac{1}{5}x^4$

51. a) $3a^2 + 3a + 1$

b) $13a^3 - 11a^2 + 2a - 2$

52. a) $-4ay^2 + a^3 - 7y^3 - 8$

b) $5y^3 - 10y^2 + 2y + 6$

53. a) $5a^3y - 11y^2$

b) $9a^3 - 13a + 17$

c) $2a^2b - 4ab^2 + 4ab$

d) $2a - 4y - 11$

54. a) $2x^3 - 4x^2 - x^2 + 5x = 2x^3 - 5x^2 + 5x$

b) $2x^2 - 10x + 2x^2 - 4x = 4x^2 - 14x$

c) $x^2 + 3x - 2x - 6 - 3x - 15 = x^2 - 2x - 21$

55. a) $a - 5 - (3a - 2)(2a - 4) = 6a^2 + 17a - 13$

b) $(2a - 4)(2a - 4) + (3a - 2)(a - 5) =$

$= 4a^2 - 8a - 8a + 16 + 3a^2 - 15a + 10 =$

$= 7a^2 - 31a + 2b$

Capítulo 7: Equações

Objetivos específicos do capítulo

Usar com clareza os símbolos matemáticos. Relacionar a história da humanidade com o desenvolvimento da matemática. Transferir o uso da linguagem oral para a escrita. Ler e interpretar textos para compreender e transmitir ideias matemáticas, por escrito ou oralmente, desenvolvendo a capacidade de argumentação. Interpretar matematicamente situações do dia-a-dia.

Página 159

Na Índia antiga eram comuns disputas para solução de quebra-cabeças em competições públicas, em que um competidor propunha problemas para outro resolver.

Naquela época era muito difícil solucionar esses problemas. Sem nenhum sinal, sem nenhuma variável, somente alguns poucos sábios eram capazes de resolver os problemas, usando muitos artifícios e trabalhosas construções geométricas.

Hoje, temos a linguagem exata para representar qualquer quebra-cabeça ou problema.

Basta traduzi-los para o idioma da Álgebra: a equação.

Equação é uma maneira de resolver situações nas quais surgem valores desconhecidos quando se tem uma igualdade. A palavra "equação" vem do latim equatione, equacionar, que quer dizer igualar, pesar, igualar em peso. E a origem primeira da palavra "equação" vem do árabe adala, que significa "ser igual a", de novo a idéia de igualdade. Por serem desconhecidos, esses valores são representados por letras. Por isso na língua portuguesa existe uma expressão muito usada: "o x da questão". Ela é utilizada quando temos um problema dentro de uma determinada situação. Matematicamente, dizemos que esse x é o valor que não se conhece.

A primeira referencia a equações de que se têm notícias consta do papiro de Rhind, um dos documentos egípcios mais antigos que tratam de matemática, escrito há mais ou menos 4000 anos.

Como os egípcios não utilizavam a notação algébrica, os métodos de solução de uma equação eram complexos e cansativos.

Os gregos resolviam equações através de Geometria.

Mas foram os árabes que, cultivando a Matemática dos gregos, promoveram um acentuado progresso na resolução de equações. Para representar o valor desconhecido em uma situação matemática, ou seja, em uma equação, os árabes chamavam o valor desconhecido em uma situação matemática de "coisa". Em árabe, a palavra "coisa" era pronunciada como xay. Daí surge o x como tradução simplificada de palavra "coisa" em árabe.

No trabalho dos árabes, destaca-se o de Al-Khowarizmi (século IX), que resolveu e discutiu equações de vários tipos.

Al-Khowarizmi é considerado o matemático árabe de maior expressão do século IX. Ele escreveu dois livros que desempenharam importante papel na história da Matemática. Num deles, Sobre a arte hindu de calcular, Al-Khowarizmi faz uma exposição completa dos numerais hindus. O outro, considerado o seu livro mais importante, Al-Jabr wa-al-Muqabilah, contém uma exposição clara e sistemática sobre resolução de equações.

As equações ganharam importância a partir do momento em que passaram a ser escritas com símbolos matemáticos e letras. O primeiro a fazer isso foi o francês François Viète, no final do século XVI. Por esse motivo é chamado "pai da Álgebra".

François Viète era advogado e dedicava seu tempo livre a uma grande paixão, a matemática. Ele foi o grande responsável pelo uso moderno das letras em relações matemáticas. Esse fato possibilitou a criação do cálculo algébrico, contribuindo para o desenvolvimento da matemática e, consequentemente, o científico, pois problemas de alto grau de complexidade passaram a ser reduzidos a simples expressões matemáticas. Devido à evolução dos estudos das equações, podemos utilizar outras variáveis, letras, para representar o valor desconhecido, ou seja, o que se quer descobrir em uma equação. Hoje, chamamos o termo desconhecido de incógnita, que é uma palavra originária do latim incognitu, que também quer dizer "coisa desconhecida". A incógnita é um símbolo que está ocupando o lugar de um elemento desconhecido em uma equação.

Página 167

O aluno fará aqui o uso de uma técnica para se descobrir uma forma de encontrar resposta para certas charadas numéricas existentes em algumas revistas ou em *sites*: João e Maria são irmãos e o rapaz é 2 anos mais novo que a irmã. A soma da idade deles é 38 anos. Qual é a idade de cada um?

É provável que algum aluno consiga descobrir as respectivas idades dos irmãos, mas provavelmente será por tentativa e erro. Experimente fazer isto na classe.

Chame a idade desconhecida da irmã de , o famoso ``xis da questão», como costuma-se expressar na linguagem cotidiana quando há algo a descobrir. Assim,

$x - 2$ é a idade do irmão e, portanto,

$x + x - 2 = 38$

$(x + x - 2 = 38)$

$2x - 2 = 38$

Agora, uma razão para que o valor -2 "passe para o outro lado" com o sinal trocado: na verdade, soma-se em ambos os lados da equação por $+2$ (precisa ser o mesmo valor!):

$2x - 2 + 2 = 38 + 2$

$2x + 0 = 40$

$2x = 40$

O fator 2 em 2x passa "para o outro lado dividindo". Formalmente, divide-se ambos os lados pelo número 2:

$$\frac{2x}{2} = \frac{40}{2}$$

$x = 20$

Cuidado: nunca se deve dividir por zero!

Assim, obtém-se a resposta para o problema: Maria está com 20 anos e João, 18 anos. O método acima está explicitado nas páginas 154 e 155 do livro do aluno, com o conceito de balança.

Uma história curiosa: há uma brincadeira que alguns alunos (e alguns professores) fazem para demonstrar que 1 = 2 (?). Veja como: suponha que x = 0;

Portanto,

$$2x = x$$

$$2x = 1x$$

$$\frac{2x}{x} = 1$$

$$2 = 1(!)$$

O que ocorreu é que houve uma divisão por zero ao passar o para o outro lado. A grande maioria das tais "demonstrações" de 1 = 2 ou 3 = 4 são variações do mesmo tema e envolvem a violação da não-divisão por zero.

O conceito de balança é importante para o aluno entender o que ocorre com as equações mas, na prática, é o "passar para o outro lado com a operação oposta ou inversa que é a técnica a ser trabalhada, principalmente quando se trata de coeficientes fracionários.

Página 173

O primeiro algoritmo que se tem conhecimento é o algoritmo de Euclides, usado para se calcular o máximo divisor comum de dois números. Euclides de Alexandria, por volta de 300 A.C., escreveu uma obra denominada "Os Elementos", constituído de treze volumes. Discorria basicamente sobre geometria.

No seu livro VII há um conjunto de procedimentos de como saber se os valores das medidas de dois segmentos de reta distintos são primos entre si ou se existe um terceiro segmento de reta onde ambos os primeiros sejam múltiplos deste último.

Está claro que, na época de Euclides, não havia os algarismos indo-arábicos e, portanto, a sua obra é descritiva e buscava exemplos geométricos. Assim, quando se lê sobre o algoritmo de Euclides nos livros, é uma adaptação para a linguagem matemática atual.

Para quem estiver interessado, existem traduções em português de Portugal. No Brasil, há uma edição da editora da Unesp, com tradução de Irineu Bicudo.

Um outro matemático famoso, que também viveu na Alexandria por volta do século III da nossa era, é Diofanto, cuja obra máxima é o Arithmetica, onde apenas a metade dela chegou aos nossos dias.

Diofanto é chamado o Pai da Álgebra, assim como Euclides é denominado o Pai da Geometria.

Diz a lenda que no epitáfio de Diofanto há uma charada onde se deve adivinhar quantos anos ele viveu:

> "Aqui jaz Diofanto, cuja infância durou um sexto de sua vida; mais um doze-avos ele viveu a sua juventude enquanto seu bigode crescia; passou-se mais um sétimo de sua vida e ele casou; cinco anos depois, seu filho nasceu; após passar o equivalente à metade da vida do mestre, seu amado filho faleceu; para aliviar a tragédia, quatro anos mais ele se dedicou à ciência dos números e ao fim da sua vida chegou."[1]

[1] Esta interpretação do "epitáfio de Diofanto" é livre, sem qualquer intenção de ser fiel ao original em latim de uma antologia grega do século V, onde está transcrito o texto: "*Hunc Diophantus habet tumulum qui tempora vitae illius, mira denotat arte tibi. Egit sex tantem juvenie; lanugine malas vestire hinc coepit parte duodecima. Septante uxori post haec sociatur, et anno formosus quinto nascitur inde puer. Semissem aetatis postquam attigit ille paternae, infelix subita morte peremptus obit. Quator aestater genitor lugere superstes cogitur, hinc annos illius assequere.*"

Isto é uma equação do tipo que o Diofanto gostava de discorrer em sua obra.

Não sabe se de fato ele viveu os 84 anos, pois não há outra fonte fidedigna para endossar o resultado da equação transcrita acima e reescrita abaixo na forma atual (x é a idade de Diofanto, a incógnita):

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x$$

ASSESSORIA PEDAGÓGICA

Resoluções da seção Para estudar

31. a) $7x = -7 \rightarrow x = -1$

b) $7x = -1 \rightarrow x = -\frac{1}{17}$

c) $5x = 100 \rightarrow x = 20$

d) $3x = -36 \rightarrow x = -12$

32. a) $\frac{2x}{5} = 6 \rightarrow 2x = 30 \rightarrow x = 15$

b) $\frac{3x - 5}{4} = 1 \rightarrow 3x - 5 = 4$

$x = 3$

c) $\frac{2x + 5}{3} = -5 \rightarrow 2x + 5 = -15$

$x = -10$

d) $2x - 5 = 615$

$x = 20$

$x = 10$

33. a) $y = 7$

b) $y = 114$

c) $y = 4$

d) $y = 2$

e) $x = 6$

f) $x = 10$

34. a) $\frac{3x + 2}{2} = 7 \rightarrow 3x + 2 = 14$

$x = 4$

b) $\frac{x - 5}{2} = 27 \rightarrow x - 5 = 54$

$x = 59$

c) $5x + 1 = 6 \rightarrow x = 1$

d) $12x = 6 \rightarrow x = \frac{1}{2}$

35. a) $8x = 24$

$x = 3$

b) $6x = 24$

$x = 4$

c) $x = 45$

d) $15x = 180$

$x = 12$

36. a) $3x - 21 = 24$
$x = 15$

b) $10x - 40 = 30x$
$x = -2$

c) $\frac{2x}{12} + \frac{1}{12} = \frac{3}{12}$

$2x + 1 = 3$
$x = 1$

d) $\frac{x}{6} - \frac{2}{6} = \frac{3}{6}$

$x - 2 = 3$
$x = 5$

37. a) $4x + 7x + 11 = -11$
$x = -2$

b) $5x + x + 26 = -4$
$x = -5$

c) $11x - 3x + 10 = 4x + 2$
$4x = -8$
$x = -2$

c) $11x + 4x - 10 = 4x + 1$
$x = -1$

38. a) $\frac{3(x + 3)}{15} + \frac{5(x - 1)}{15} = \frac{15}{15}$

$3x + 9 + 5x - 5 = 15$

$x = \frac{11}{8}$

b) $\frac{3(x + 3)}{12} + \frac{2(x - 10)}{12} = \frac{24}{12}$

$3x + 9 + 2x - 20 = 24 \rightarrow x = 7$

39. $4x - 8 - 3x = -3 \quad x = 5$

40. $x + 3x = 20 \quad x = 5$

41. $4t + 12 = 120$
$4t = 108$
$t = 27$ minutos

42. $900 + 6x = 1800$
$6x = 900$
$x = 150g$

43. a) $4\ell - 2 + 2\ell = 7$
$6\ell = 9$
$\ell = 1{,}5$ cm

b) Os lados são 2 cm; 2 cm;
1,5 cm; 1,5 cm

44. a) $x + \frac{x}{3} = 1\,700$
$\frac{4x}{3} = 1\,700$
$x = 1\,275$ m²

b) 425 m²

45. $88 = p + \frac{p}{10} \rightarrow p = \text{R\$ } 80{,}00$
multa = R$ 8,00

46. $c = \frac{P}{3}$
$\frac{P}{3} + p = 1\,200 \rightarrow 4p = 3\,600$
$p = 900$
Camisa: R$ 300,00 e paletó R$ 900

47. a) $x + 60 = 3x - 80 \rightarrow x = \text{R\$ } 70{,}00$
b) *skate*: R$ 130,00

Capítulo 8 – Matemática Financeira

Objetivos específicos do capítulo

Ler e interpretar textos para compreender e transmitir ideias matemáticas, por escrito ou oralmente, desenvolvendo a capacidade de argumentação. Transferir o uso da linguagem oral para a escrita. Fazer estimativas mentais de resultados ou cálculos aproximados. Interpretar matematicamente situações do dia-a-dia e, também, do mundo tecnológico e científico para o exercício da cidadania. Usar com clareza os símbolos matemáticos e identificar diferentes formas ou abordagens para resolver problemas.

Página 181

Se achar conveniente é possível discutir um pouco mais sobre educação financeira com pesquisas em sites como:

Disponível em: <http://www.bmfbovespa.com.br/pt-br/educacional/iniciativas/turma-da-bolsa.aspx?idioma=pt-br>. Acesso em 15 mar. 2015.

Disponível em: <http://www.bancodobrasil.batebolafinanceiro.com.br/>. Acesso em 15 mar. 2015.

Página 182

Discuta a atividade 7 com seus alunos com muita atenção, pois um erro normalmente cometido pelos alunos é considerar que um acréscimo de 12% equivale a um desconto de 12%. Assim, o aluno calcula 12% de R$ 425,60, que dá R$ 51,07, subtrai este valor da mensalidade atual, o que dá R$ 374,53 e acredita que este é o valor da mensalidade antiga.

Mas se calcularmos 12% de R$ 374,53, obteremos R$ 44,94 e não R$ 51,07.

O valor correto é obtido por:

$$x \cdot 1{,}12 = 425{,}60$$

$$x = \frac{425{,}60}{1{,}12}$$

$$x = \text{R\$ } 380{,}00$$

Página 185

Para mostrar ao aluno um aspecto prático e interessante da aplicação do que ele está aprendendo, você pode prepará-lo para compreender um erro do qual muitos consumidores são vítimas, por absoluta falta de conhecimento e cuidado.

É comum alguns vendedores calcularem juros sobre um valor a ser parcelado e receberem um primeiro pagamento à vista. Suponha, por exemplo, uma compra em dois pagamentos, sobre o qual são aplicados 10% de juros.

Se uma mercadoria custa, à vista, R$ 500,00, com 10% de juros, o valor sobe para:

$$\text{R\$ } 500{,}00 \cdot 1{,}10 = \text{R\$ } 550{,}00.$$

Portanto, o comprador deve pagar à vista a metade do valor total, ou seja R$ 275,00, e dar um cheque para daqui a um mês no valor de R$275,00.

Certamente o consumidor está pagando bem mais que 10% de juros. Se ele pagou R$ 275,00 no ato da compra, os juros de 10% deveriam incidir apenas sobre o total que ele financiou, ou seja:

R$ 500,00 – R$ 275,00 = R$ 225,00.

Mas 10% de R$ 225,00 são:

R$ 225,00 · 0,10 = R$ 22,50.

Então o cheque para daqui a um mês deveria ser de:

R$ 225,00 + R$ 22,50 = R$ 247,50.

Página 186

Um erro comum é o aluno se esquecer que 2% = 0,02 e, na fórmula, fazer i = 2. Faça o exemplo com i = 2 para mostrar-lhe como o resultado é absurdo.

Resoluções da seção Para estudar

20. $p = 18 \cdot 1{,}12$

$p = \text{R\$ } 20{,}16$

21. $\dfrac{375}{250} = \text{R\$ } 1{,}50$

$\dfrac{\$\ 3{,}20}{\$\ 1{,}50} = 2{,}13 \rightarrow 113\%$

$\dfrac{375}{200} = \$\ 1{,}87 \rightarrow \$\ 1{,}87 \cdot 2{,}13 = \text{R\$ } 3{,}98$

22. $\dfrac{\text{R\$ } 104}{\text{R\$ } 80} = 1{,}3 \rightarrow \text{lucro} = 30\%$

23. R\$ 44 → 12% de prejuízo →

→ 100% – 12% = 88%

$\dfrac{\text{R\$ } 488}{0{,}88} = \text{R\$ } 50{,}00$

24. $\frac{R\$\ 488}{R\$\ 320} = 1{,}525 \rightarrow$ aumento de 52,5%

25. R$ 150 = p · 1,25

$P_c = \frac{R\$\ 150}{1{,}25} \rightarrow P_c = R\$\ 120$

26. $\frac{R\$\ 357}{R\$\ 421} = 0{,}85$

prejuízo = 1 – 0,85 = 0,15 = 15%

27. 1 800 = D · 1,25

$D = \frac{1\,800}{1{,}25} \rightarrow D = R\$\ 1\,440{,}00$

Tenho R$ 1 440,00

28. 1 875 = p · 0,75

$p = \frac{1\,875}{0{,}75} \rightarrow p = R\$\ 2\,500$

Pagou R$ 2 500,00

29. a) Custo total = 22 000 + 16 000 = 38 000

$C_\ell = \frac{38\,000}{2\,000} \rightarrow C_\ell = R\$\ 19{,}00$

b) Custo total = 22 000 + 20 000 = 42 000

$C_\ell = \frac{42\,000}{5000} \rightarrow C_\ell = R\$\ 8{,}40$

c) 5 000 – 100 = 4 900

4 900 · 53 = R$ 259 700

Terá lucro de R$ 217 700

30. 5% = 0,05

$\text{Preço} = \frac{12{,}50}{0{,}05} = R\$\ 250{,}00$

31. $\frac{R\$\ 7\,800}{R\$\ 130\,000} = 0{,}06 \rightarrow$ A comissão é 6%

32. $\dfrac{R\$\ 2\,200}{0,88} = R\$\ 2\,500,00$

33. $\dfrac{435}{580} = 0,75 \rightarrow 1 - 0,75 = 0,25$

Prejuízo de 25%

34. $\dfrac{210,60}{1,17} = R\$\ 180,00$

35. R\$ 222 · 1,12 = R\$ 248,64

R\$ 248,64 · 1,15 = R\$ 285,93

O preço do produto foi para R\$ 286

36. $j = 5 \cdot 6 \cdot 0,05$ milhões

$j = 1,5$ milhões

37. $500 = 2\,000 \cdot 5 \cdot i$

$i = \dfrac{5}{100} \rightarrow i = 5\%$ ao mês

38. $30\,000 = 150\,000 \cdot 0,1 \cdot n$

$n = \dfrac{30\,000}{15\,000} \rightarrow n = 2$ meses

39. R\$ 44 460, R\$ 200 000, 8%, 5

40. $M = C(1 + i)^t$

$M = 85\,000\,(1 + 0,02)^3$

$M = R\$\ 9\,202,68$

$J = 90\,202,68 - 85\,000$

$J = R\$\ 5\,202,68$

41. $78 - 52 = 26$

$\dfrac{26}{52} = 0,5 \rightarrow 50\%$

Corresponde a 50%

42. $J = 440 \cdot 0,085 \cdot 7$

$J = R\$\ 261,80$

43. $560 = C \cdot 0{,}84 \cdot \frac{8}{12}$

$C = R\$\ 1\,000{,}00$

44. $\frac{25}{20} = 1{,}25 \rightarrow$ 25% em 10 dias

Taxa = 2,5 % dia

45. $\frac{494}{380} = 1{,}3 \rightarrow$ 30% de juros ou 6% ao mês.

46. $M = 200(1 + 0{,}03)^3 \rightarrow M = 218{,}54$ mil

Juros = R$ 18 540,00

Capítulo 9 – Gráficos e pictogramas

Objetivos específicos do capítulo

Ler e interpretar textos em forma de tabelas e gráficos, construir gráficos de colunas, de barras, de setores, de linhas e pictogramas. Registrar, organizar e coletar elementos elencados em uma pesquisa. Desenvolver pesquisas para exercitar o tratamento da informação e para conhecer o ambiente no qual está inserido. Utilizar recursos tecnológicos para desenvolver habilidades cognitivas.

Página 199

Leia com seus alunos o texto e discuta o uso da estatística no cotidiano.

Se achar propício, solicite pesquisas sobre o tema "Uso da Estatística no cotidiano". Pode ser estimulante ao aluno perceber a aplicação dessa ciência e os benefícios trazidos por ela.

Questões sobre o aspecto histórico podem surgir nas pesquisas, além do uso no desenvolvimento e avanço de inúmeras áreas do conhecimento.

Nessa fase é interessante a ideia de utilizar planilhas eletrônicas em salas de aula e em casa, como recurso de resolução de exercícios.

É interessante sugerir aos alunos pesquisa de tabelas e gráficos em jornais, revistas, internet, entre outros. Desta forma, é possível ampliar a discussão sobre as informações que esse tipo de linguagem oferece, construindo questões sobre esses gráficos e tabelas.

Páginas 200 a 203

Construa no quadro ou, se preferir, esboce apenas os gráficos dessas páginas.

Destaque especialmente a leitura de tabelas que possuem colunas múltiplas. Mostre as diferenças entre os casos anteriores e sugira que os alunos construam esse tipo de tabela e gráfico, utilizando os recursos mencionados anteriormente.

Páginas 206 a 209

Leia com seus alunos o texto do livro e no quadro construa as tabelas e o gráfico de setores.

Destaque a construção desse tipo de gráficos e as relações entre as frequências observadas, frequências relativas, os valores percentuais de cada elemento da tabela, além da relação angular que existe na construção gráfica.

Nesse momento é importante que os alunos entendam o processo de construção desse tipo de gráfico antes de utilizarem os recursos de planilhas eletrônicas, entre outros.

Leia atentamente em sala de aula o texto dessas páginas e discuta as representações apresentadas.

Página 210

SUGESTÃO DE ATIVIDADE

As sugestões de atividades a seguir são importantes para o aluno aprender a fazer leitura gráfica, avaliar dados apresentados e decidir melhor tipo de gráfico para cada situação.

1) Pesquisa sobre gráficos em jornais e revistas.

O aluno deverá recortar dois tipos distintos de gráficos e responder:

- Qual é o tipo de informação apresentada em cada gráfico?
- Qual deles você julga ser mais fácil para ler? Por quê?

Faça uma exposição na sala de aula para que todos os alunos possam ver todos os gráficos de seus colegas e saber os temas abordados em cada situação.

2) Escolha, junto aos alunos, um tema para pesquisa (livro ou filme preferidos, número de irmãos, etc.) que pode ser feita na série ou na escola. Separe os alunos em grupos e após a tabulação dos dados, estipule diferentes gráficos para representarem o resultado da pesquisa. Anexe os resultados (tabelas e gráficos) na parede da sala de aula para que todos os alunos tenham acesso às informações.

3) Se a sua escola tiver sala de informática, utilize uma planilha eletrônica para fazer a construção de diferentes gráficos. Selecione, junto com a turma, o tema da pesquisa. Algumas sugestões são: animal de estimação, mês do aniversário ou número do calçado. É importante que após a pesquisa os alunos façam tabelas que organizem os dados para depois utilizarem a planilha na construção do gráfico.

Página 212

Explore o gráfico do exemplo c, qye trata dos níveis dos reservatórios de água que abastecem a região metropolitana da maior cidade do Brasil durante a crise hídrica de 2015. Indique o nível zero (nível de captação) do reservatório da Cantareira para explicar o que significa "volume morto".

Esse gráfico traduz-se numa excelente oportunidade para uma discussão envolvendo a disciplina de Geografia.

Resoluções da seção Para estudar

7. 1,5 vezes, 50% maior

8. a) 24%

b) Paraguai e Uruguai

9. a) $6 \cdot 30\,000 = 180\,000$ hectares

b) 2006 → 75 000 ha

2007 → 15 000 ha

10. a) $818 \text{ m} - 509 \text{ m} = 209 \text{ m}$

b) $\frac{818 \text{ m}}{443 \text{ m}} = 1{,}846$

Assim, o Empire State tem uma altura que equivale a 84,6% da altura do Burj Khalifa.

11. a) Nova Zelândia

b) 9º posição

c) $0{,}15 \cdot 31 = 4{,}65$ kg

Anotações: